Journées annuelles
2012, p. 49 – 67

QUESTIONS DE TRANSCENDANCE : GRANDES CONJECTURES, PETITS PROGRÈS

par

Michel Waldschmidt

Sans les mathématiques on ne pénètre point au fond de la philosophie.
Sans la philosophie on ne pénètre point au fond des mathématiques.
Sans les deux on ne pénètre au fond de rien.
Leibniz
Cité par Gregory Chaitin[(1)]

Résumé. — Même si la théorie a fait des progrès remarquables ces dernières années et même si elle continue d'en faire, les nombres transcendants recèlent plus de grands problèmes qu'ils ne disposent de résultats. Nous choisissons trois des principaux défis sur lesquels on ne sait pas grand chose.

Le premier a été proposé par É. Borel en 1950. Il s'agit de savoir si les décimales du nombre $\sqrt{2}$ se comportent de façon aléatoire. Plus généralement, on aimerait savoir si la suite des chiffres dans une base donnée d'un nombre réel algébrique irrationnel suit des règles qui la distinguent d'une suite de chiffres au hasard.

Nous poursuivons avec la conjecture de Schanuel sur les relations algébriques entre les nombres complexes produits par la fonction exponentielle, la conjecture de Grothendieck sur les périodes de variétés abéliennes et celles de Y. André généralisant les deux précédentes aux motifs.

Pour terminer, nous décrivons la conjecture de Kontsevich et Zagier sur les nombres qu'ils ont baptisés « périodes ». Nous parlerons à cette occasion des progrès récents concernant les nombres multizêtas, notamment avec les résultats de F. Brown.

Table des matières

(1) `http://www.umcs.maine.edu/~chaitin/midas.html`

1. Irrationalité, transcendance

Il est surprenant qu'il soit si difficile de démontrer qu'un nombre réel est irrationnel. On dispose pourtant de plusieurs arguments. Ainsi, un nombre réel est rationnel si et seulement si, dans une base donnée, son développement est ultimement périodique (cette propriété ne dépend donc pas de la base). Un autre critère porte sur le développement en fraction continue : un nombre réel est rationnel si et seulement si son développement en fraction continue est fini.

Le problème est que, pour les nombres réels « intéressants », ceux qui apparaissent comme des constantes de l'analyse faisant intervenir des limites (suites, séries, intégrales, produits infinis), nous ne connaissons, la plupart du temps, rien sur ces développements. Il y a cependant un petit nombre d'exceptions : ainsi, L. Euler a donné quelques développements en fractions continues, le plus célèbre étant celui du nombre $e = 2,718\,281\ldots$:

$$e = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_n + \cfrac{1}{\ddots}}}}$$

avec la suite

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \ldots) = (2,\ 1,\ 2,\ 1,\ 1,\ 4,\ 1,\ 1,\ 6,\ 1, \ldots,\ 1,\ 2m,\ 1,\ \ldots),$$

ce qui donne l'irrationalité du nombre e (même si ce n'est pas la démonstration la plus simple). Mais ces exemples restent très limités, et, de façon générale, il semble préférable de trouver une autre voie pour démontrer des énoncés d'irrationalité.

On dispose d'un puissant critère d'irrationalité en terme d'approximation rationnelle (ici, critère signifie « condition nécessaire et suffisante ») : *un nombre réel est irrationnel si et seulement s'il possède une suite de bonnes approximations rationnelles.* Un nombre rationnel est très mal approché par les nombres rationnels autres que lui-même : si a/b et p/q sont deux nombres rationnels distincts, on a

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{1}{bq}\cdot$$

à l'opposé, si un nombre est irrationnel, il possède de très bonnes approximations rationnelles. De façon plus précise :

Critère d'irrationalité. *Soit ϑ un nombre réel. Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *ϑ est irrationnel.*
(ii) *Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ avec $q > 0$ tel que*

$$0 < |q\vartheta - p| < \epsilon.$$

(iii) *Il existe une infinité de* $p/q \in \mathbf{Q}$ *tels que*

$$\left|\vartheta - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}\cdot$$

Le plus remarquable dans cet énoncé est le fossé de la qualité d'approximation des suites en question entre (ii) et (iii). Pour démontrer l'irrationalité d'un nombre réel, il suffit de montrer qu'il possède une suite pas trop mauvaise d'approximations rationnelles (c'est la condition (ii)). Et s'il est irrationnel, alors il possède d'excellentes approximations (c'est la condition (iii)).

Pour fixer les idées, si on veut démontrer l'irrationalité de la constante d'Euler $\gamma = 0,577\,215\ldots$, il suffit d'établir l'existence d'une suite infinie croissante q_n d'entiers positifs telle que $\|q_n\gamma\|$ tende vers 0, où $\|\cdot\|$ désigne la distance à l'entier le plus proche. D'un autre côté, si cette constante γ est irrationnelle, ce qui est conjecturé par presque tout le monde, alors il existe une suite q_n telle que $q_n^2\|q_n\gamma\|$ ait une limite supérieure $\leq 1/\sqrt{5}$, ce qui est une assertion bien plus forte. Cependant on dispose de peu de moyens pour produire de telles suites d'approximations. C'est pourquoi l'irrationalité de nombreuses constantes de l'analyse reste un problème ouvert. La liste est longue des nombres dont on conjecture qu'ils sont irrationnels sans savoir le démontrer ; outre la constante d'Euler γ, elle contient les nombres

$$e+\pi = 5,859\,874\ldots,\quad e\pi = 8,539\,734\ldots,\quad \pi^e = 22,459\,157\ldots,$$
$$\log\pi = 1,144\,729\ldots,\quad e^{\pi^2} = 19\,333,689\,074\ldots,\quad e^e = 15,154\,262\ldots,$$
$$(\log 2)(\log 3) = 0,761\,500\ldots,\qquad 2^{\log 2} = 1,616\,806\ldots,$$
$$2^{\log 3/\log 5} = 1,605\,036\ldots,\quad \zeta(5) = 1,036\,927\ldots,\quad \Gamma(1/5) = 4,590\,843\ldots$$

Le développement en fraction continue régulière devrait fournir de telles approximations rationnelles. Mais, comme nous l'avons dit, ce développement n'est la plupart du temps pas connu. C'est en s'inspirant de la théorie des fractions continues que J.H. Lambert [**4**] parvint à démontrer l'irrationalité du nombre π – mais le développement en fraction continue régulière de ce nombre reste mystérieux – et il n'y a pas de méthode vraiment simple pour démontrer l'irrationalité de π. Pour le nombre e, tronquer le développement de Taylor de la fonction exponentielle au point 1 fournit une suite d'approximations rationnelles suffisamment bonnes pour que l'irrationalité de e en résulte. Cet argument se trouve exposé par J. Fourier [**2**] dans son cours à l'École Polytechnique en 1815. Ce type d'argument est limité : il permet de démontrer que e ne satisfait à aucune équation quadratique, comme l'a remarqué J. Liouville [**5**] en 1840 (quatre ans avant de produire les premiers exemples de nombres transcendants [**6**]). Mais il faut d'autres idées pour aller plus loin.

C'est Ch. Hermite [**3**] qui, en 1873, propose une méthode de démonstration qui sera élaborée par ses successeurs et qui reste de nos jours la base des méthodes de transcendance les plus puissantes [**8**]. Dire que le nombre e, pour prendre l'exemple considéré par Ch. Hermite, est transcendant, revient à dire que pour tout n, les nombres $1, e, e^2, \dots, e^{n-1}$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, autrement dit que pour tout n-uplet $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ d'entiers rationnels non tous nuls, le nombre

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \cdots + a_{n-1} e^{n-1}$$

n'est pas nul.

L'idée introduite par Ch. Hermite, qu'il exprime de façon lumineuse au début de son texte fondateur [**3**], est de s'inspirer des résultats (récents à cette époque – le théorème de Dirichlet, qui repose sur une habile utilisation du principe des tiroirs, date de 1840) sur l'approximation simultanée de *nombres* réels, et de produire des énoncés d'approximation simultanée pour la *fonction* exponentielle, en approximant les fonctions e^{jz} $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ par des fractions rationnelles $P_j(z)/P_0(z)$. En substituant $z = 1$, il en déduit des approximations rationnelles $p_j/q = P_j(1)/P_0(1)$ qui lui permettent de conclure.

Son mémoire commence ainsi :

> *Étant donné un nombre quelconque de quantités numériques $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, on sait qu'on peut en approcher simultanément par des fractions de même dénominateur, de telle sorte qu'on ait*
>
> $$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{A_1}{A} + \frac{\delta_1}{A\sqrt[n]{A}}, \\ \alpha_2 &= \frac{A_2}{A} + \frac{\delta_2}{A\sqrt[n]{A}}, \\ &\dots \\ \alpha_n &= \frac{A_n}{A} + \frac{\delta_n}{A\sqrt[n]{A}}, \end{aligned}$$
>
> *$\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$ ne pouvant dépasser une limite qui dépend seulement de n. C'est, comme on voit, une extension du mode d'approximation résultant de la théorie des fractions continues, qui correspondrait au cas le plus simple de $n = 1$. Or on peut se proposer une généralisation semblable de la théorie des fractions continues algébriques, en cherchant les expressions approchées de n fonctions, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ par des fractions rationnelles $\frac{\Phi_1(x)}{\Phi(x)}, \frac{\Phi_2(x)}{\Phi(x)}, \dots, \frac{\Phi_n(x)}{\Phi(x)}$, de manière que les développements en*

série suivant les puissances croissantes de la variable coïncident jusqu'à une puissance déterminée x^M.

Dans son résumé du texte de Ch. Hermite publié dans le *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* (ancêtre du *Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete* devenu *Zentralblatt MATH*) JFM 05.0248.01, F. Müller se contente de parler de cet aspect du travail de Ch. Hermite, il omet de mentionner que la transcendance de e a été établie. Il est vrai que Ch. Hermite n'énonce pas son théorème sous cette forme : il n'utilise pas le mot *transcendant*. Ce mot a été utilisé par G.W. Leibniz dans les années 1670 pour différents objets, courbes, expressions, puis nombres, mais en 1844 J. Liouville [**6**] parle encore de *quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques.* Il faut attendre Hilbert et l'énoncé de son septième problème pour que la signification du mot *transcendant* pour un nombre soit celle que nous connaissons.

2. Émile Borel

Les travaux de É. Borel [**11, 12**] pendant la première moitié du XX^e siècle sont toujours d'actualité. Les problèmes qu'il a posés sur le développement dans une base donnée d'un nombre réel algébrique sont essentiellement ouverts. Pour illustrer l'étendue de notre ignorance, commençons par dire qu'on ne connaît pas, actuellement, d'exemple explicite d'un nombre algébrique irrationnel x, d'une base b (entier ≥ 3) et d'un chiffre $a \in \{0, 1, 2, \dots, b-1\}$, pour lequel on puisse affirmer que le chiffre a apparaît une infinité de fois dans le développement de x en base b. En base 2 (développement binaire) le résultat est banal : comme le développement d'un nombre réel irrationnel n'est pas ultimement périodique, dans le développement binaire, chacun des chiffres 0 et 1 apparaît une infinité de fois. Chacune des deux suites 01 et 10 apparaît aussi une infinité de fois dans le développement en question, mais on ne connaît pas d'exemple explicite de nombre réel algébrique irrationnel x dont on puisse affirmer que le développement binaire fait apparaître une infinité de fois la suite 00 (ni la suite 11).

En comparaison, ce que suggère É. Borel est ambitieux : pour tout nombre réel algébrique irrationnel x, toute base $b \geq 2$ et toute suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de chiffres, le développement de x en base b devrait faire apparaître cette suite, non seulement une infinité de fois, mais même avec la fréquence $1/b^n$, indépendamment de la suite $(a_1, a_2, \dots, a_n)$. É. Borel [**12**] a pris comme exemple le cas particulier de $\sqrt{2}$ – de nos jours, les calculs sur ordinateurs rendent plausibles ses suggestions, mais ne permettent pas de démontrer quoi que ce soit. Ce gouffre entre ce qui est connu et ce qui est conjecturé est une des caractéristiques du sujet.

D'autres développements méritent d'être considérés, en particulier le développement en fraction continue. On ne sait pas s'il existe un nombre réel algébrique irrationnel x pour lequel la suite des réduites de x dans son développement en fraction continue régulière ne soit pas bornée. On conjecture pourtant que tout nombre réel algébrique non quadratique vérifie cette propriété.

Ces questions sur les développements de nombres algébriques suggèrent que des nombres réels dont les développements satisfont à certaines conditions de régularité devraient être soit rationnels, soit transcendants : ils ne devraient pas pouvoir être algébriques irrationnels. Sous cet angle, quelques résultats partiels sont connus. On peut faire remonter les premiers à J. Liouville [**6**] : les exemples de nombres transcendants qu'il exhibe en 1844 font intervenir des nombres dont les développements en fractions continues ont des quotients partiels anormalement grands, ou bien des développements lacunaires en une base donnée, par exemple en base 2 (développement binaire) ou 10 (développement décimal). Les travaux de J. Liouville ont été poursuivis par É. Maillet [**7**], qui donne d'autres façons de construire des nombres transcendants, en prenant, par exemple, des nombres dont les développements en fractions continues sont tellement réguliers (sans être périodiques) qu'ils s'apparentent aux développements périodiques des nombres quadratiques ; É. Maillet en déduit que ces nombres réels sont très bien approchés par des nombres quadratiques, et une variante de l'argument de J. Liouville lui permet d'en déduire la transcendance.

Ces arguments reposent donc sur des propriétés d'approximation diophantienne. Le théorème de Liouville, dont la démonstration est élémentaire, a été généralisé de façon non triviale (mais non effective) par A. Thue, puis par C.L. Siegel, F. Dyson, Th. Schneider, jusqu'à K.F. Roth qui obtient, en 1950, un énoncé optimal. Cet énoncé de Roth n'est cependant pas le dernier mot sur la question : il a fait l'objet d'une vaste généralisation par W.M. Schmidt avec son théorème du sous-espace (1970), dont on n'a pas fini de découvrir les conséquences [**1**].

C'est ce théorème du sous-espace qui permet à B. Adamczewski et Y. Bugeaud d'apporter une réponse positive à un problème de A. Cobham (voir [**14**]) : *la suite des chiffres en base b d'un nombre réel algébrique irrationnel ne peut pas être produite par un automate fini*. Une approche de cette question par une méthode de transcendance, inventée par Mahler dans les années 1930, avait été proposée par J.H. Loxton et A.J. van der Poorten, mais, pour l'instant, on ne sait pas obtenir la réponse à la question de A. Cobham autrement que par le théorème du sous-espace de Schmidt.

É. Borel soulève beaucoup d'autres questions. En voici une. Il définit ce qu'il appelle un *nombre normal en base b* comme un nombre réel x dont la suite des chiffres en base b satisfait à la propriété (considérée ci-dessus) : *pour tout suite* $a_1, a_2, \dots, a_n$ *de* *chiffres, le développement de x en base b fait apparaître cette suite avec la fréquence* $1/b^n$. Le développement décimal du nombre rationnel

$$0,123\,456\,789\,012\,345\,678\,901\,234\,567\,890\cdots = \frac{1\,234\,567\,890}{9\,999\,999\,999} = \frac{137\,174\,210}{1\,111\,111\,111}$$

fait apparaître chacun des 10 chiffres de 0 à 9 avec la fréquence 1/10, mais la suite de chiffres 21 n'apparaît pas : il n'est donc pas normal en base 10. De façon générale, un nombre rationnel n'est normal dans aucune base.

On connaît de nombreux exemples de nombres normaux en une base b donnée. Voici deux exemples en base 10. Le premier est le *nombre de D.G. Champernowne*

$$0,1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15\,16\,17\ldots$$

obtenu en concaténant la suite croissante des entiers positifs écrits en base 10. Le second est la constante de Copeland-Erdős

$$0,2\,3\,5\,7\,11\,13\,17\,19\,23\,29\,31\,37\,41\,43\ldots$$

obtenue en concaténant la suite des nombres premiers écrits en base 10. D'autres exemples de nombres normaux dans une base donnée ont été proposés par I. Nakai et I. Shiokawa, par H. Davenport et P. Erdős, par J.M. de Koninck et I. Katai, et aussi par M. Madritsch, J. Thuswaldner et R. Tichy.

Il est plus difficile d'exhiber un nombre qui soit normal en toute base $b \geq 2$. C'est ce que É. Borel appelle *un nombre normal*. Comme nous venons de le voir, É. Borel conjecture que tout nombre algébrique irrationnel est normal. Ainsi un exemple explicite de nombre normal est probablement $\sqrt{2}$. L'existence de nombre normaux ne pose pas de problème à É. Borel : les nombres qui ne sont pas normaux forment un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Les nombres réels sont donc presque tous normaux. Il est de nouveau surprenant qu'il soit si difficile d'en exhiber. On voudrait produire un exemple « explicite », mais définir ce terme n'est pas évident. Des exemples ont été donnés, par W. Sierpinski et par H. Lebesgue en 1917, par V. Becher et S. Figueira en 2002, mais les algorithmes pour donner leurs valeurs sont d'une complexité élevée (ils sont qualifiés de *ridiculously exponential* par S. Figueira). Il est surprenant que les seuls nombres normaux connus soient si compliqués – ce serait tellement plus simple si on savait que $\sqrt{2}$ est normal !

J'ai assisté à un exposé, au séminaire de philosophie de l'École normale supérieure dirigé par M. Loi, donné par R. Apéry, quelque temps avant qu'il n'annonce avoir résolu le problème de l'irrationalité du nombre $\zeta(3)$. De façon provocatrice, comme à son habitude, R. Apéry a affirmé qu'il était en train de chercher à démontrer que le nombre π appartient à un ensemble de mesure nulle. Même si la suite des chiffres de son développement binaire ou décimal ressemble à une suite de nombres au hasard, le nombre π n'est certainement pas un nombre *aléatoire* dans un des sens qui peut être précisé en utilisant la complexité de Kolmogorov [**10**]. On ne sait rien sur les décimales du nombre π, ni sur ses chiffres binaires : on s'attend à ce que le nombre π soit normal. Un énoncé a récemment été obtenu par B. Adamczewski [**9**] sur les décimales du nombre e : même si on est très loin de pouvoir montrer que le nombre e est normal, obtenir une information sur la complexité de son développement décimal est déjà un progrès remarquable. Mais on ne sait pas encore montrer que la suite des chiffres du développement binaire ou décimal de e ou de π n'est pas donnée par un automate fini.

B. Adamczewski a remarqué que la notion de complexité de Kolmogorov demande l'*aléatoire algorithmique*, et que les nombres ayant une forte complexité algorithmique jouissent de nombreuses propriétés intéressantes mais sont difficiles à expliciter. D'un autre côté les nombres de Liouville n'ont pas une complexité de Kolmogorov élevée, alors qu'il existe des nombres de Liouville normaux.

Un nombre qui recèle de nombreux mystères est la constante de G. Chaitin [**13**] : sa transcendance se déduit du fait qu'il est *incompressible*, c'est donc un exemple de nombre dont la transcendance ne s'obtient pas par des arguments d'approximation diophantienne. C'est aussi un exemple (explicite ?) de nombre normal. Parlant de la théorie AIT, *Algorithmic Information Theory*, découverte indépendamment par G. Chaitin et A. N. Kolomogorov, I. Kotsireas m'a écrit :

> *One truly fascinating aspect of this theory is that the true definition of randomness should be given in terms of compressibility, and not in terms of probability. In other words, the more compressible a sequence is, the less random it is. Or, equivalently, the less compressible a sequence is, the more random it is.*

3. Schanuel, Grothendieck, André

La conjecture de Schanuel est réputée contenir *tous* les énoncés d'irrationalité et de transcendance que l'on peut raisonnablement espérer concernant les valeurs de la fonction exponentielle (et du logarithme complexe).

Conjecture de Schanuel *Si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des nombres complexes linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}$, alors parmi les nombres*

$$x_1, x_2, \dots, x_n,\ e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n},$$

il y en a au moins n qui sont algébriquement indépendants.

En termes de degré de transcendance, la conclusion signifie que le degré de transcendance sur $\mathbf{Q}$ du corps $\mathbf{Q}(x_1, x_2, \dots, x_n,\ e^{x_1}, e^{x_2}, \dots, e^{x_n})$ est au moins n.

Cet énoncé a été proposé par S. Schanuel alors qu'il assistait à un cours de S. Lang [**18**] sur les nombres transcendants à Yale dans les années 1960. D'autres suggestions ont vu le jour lors de ce cours, notamment une suggestion de M. Nagata confirmée par E. Bombieri.

La conjecture de Schanuel a de multiples conséquences concernant des nombres liés à la fonction exponentielle (voir par exemple [**23**] et [**21**]). Dans la note historique du chapitre III de [**18**], S. Lang propose la conjecture suivante :

> *I would also conjecture that π cannot lie in the field obtained by starting with the algebraic numbers, adjoining values of the exponential function, taking algebraic closure, and iterating these two operations. It is an exercise to show that this follows from Schanuel's conjecture.*

Cet exercice a été élégamment résolu dans [**17**]. Désignons par $\mathbf{E}$ (comme *exponentielle*) le corps introduit par S. Lang, à savoir la réunion des corps $\mathbf{E}_n$ définis par récurrence par

$$\mathbf{E}_0 = \overline{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{E}_n = \overline{\mathbf{E}_{n-1}(\exp(\mathbf{E}_{n-1}))},$$

où la barre supérieure désigne la clôture algébrique. Désignons ensuite par $\mathbf{L}$ (comme *logarithme*) la réunion des corps $\mathbf{L}_n$ définis par récurrence par

$$\mathbf{L}_0 = \overline{\mathbf{Q}}, \quad \mathbf{L}_n = \overline{\mathbf{L}_{n-1}(\log(\mathbf{L}_{n-1}^\times))},$$

où on prend toutes les déterminations du logarithme. Alors la conjecture de Schanuel implique que *les corps* $\mathbf{E}$ *et* $\mathbf{L}$ *sont linéairement disjoints sur* $\overline{\mathbf{Q}}$. Il en résulte par exemple (sous la conjecture de Schanuel) que les nombres

$$\pi,\ \log\pi,\ \log\log\pi,\ \log\log\log\pi,\ \dots$$

sont algébriquement indépendants sur le corps $\mathbf{E}$, tandis que les nombres

$$e,\ e^e,\ e^{e^e},\ e^{e^{e^e}},\ \dots$$

sont algébriquement indépendants sur le corps $\mathbf{L}$.

Certaines conséquences de la conjecture de Schanuel peuvent paraître plus inattendues, en particulier celles obtenues par S. Gun, R. Murty et P. Rath. Dans [**19**], ils montrent que la conjecture de Schanuel implique la transcendance de $\log\Gamma(x) + \log\Gamma(1-x)$ pour tout nombre rationnel x dans l'intervalle $0 < x < 1$. Dans [**20**], ils déduisent des conséquences de la conjecture de Schanuel concernant l'annulation de valeurs spéciales de fonctions L et de leurs dérivées, ainsi que la transcendance de la norme de Petersson de certaines formes modulaires de poids 1.

La seule voie actuellement connue qui pourrait permettre de démontrer la conjecture de Schanuel est celle qui a été proposée par D. Roy [**22**]. Il a commencé à développer cette stratégie en démontrant des énoncés partiels ; pour l'instant, les critères qu'il obtient n'ont pas encore d'application diophantienne, mais ce sont les premières étapes d'un programme ambitieux. Ces travaux de D. Roy constituent la version la plus élaborée de la méthode introduite par Ch. Hermite, développée ensuite successivement par de nombreux auteurs, parmi lesquels F. Lindemann, C.L. Siegel, A.O. Gel'fond, Th. Schneider, A. Baker, S. Lang, W.D. Brownawell, D.W. Masser, D. Bertrand, G.V. Chudnovskii, P. Philippon, G. Wüstholz, Yu.V. Nesterenko.

Suite à la suggestion faite par P. Cartier à S. Lang, lors d'une réunion du groupe Bourbaki(2), consistant à démontrer un analogue pour les variétés abéliennes (et plus généralement pour les groupes algébriques commutatifs) des énoncés de transcendance classiques, comme le théorème de Hermite-Lindemann sur la transcendance de e^α pour α algébrique non nul, ou comme le théorème de Gel'fond-Schneider sur la transcendance de α^β pour α et β algébriques (solution du septième problème de Hilbert), il est naturel de chercher un analogue de la conjecture de Schanuel pour les variétés abéliennes. Une conjecture proposée par A. Grothendieck, est présentée par S. Lang dans [**18**] (Chap. IV, Historical Note) de la façon suivante :

> *For the period matrix itself, Grothendieck has made a very interesting conjecture concerning its relations, and his conjecture applies to a general situation as follows. Let V be a projective, non-singular variety defined over the rational numbers. One can define the cohomology of V with rational coefficients in two ways. First, by means of differential forms (de Rham), purely algebraically, thereby obtaining a vector space $H_{\mathrm{diff}}(V,\mathbf{Q})$ over $\mathbf{Q}$. Secondly, one can take the singular cohomology $H_{\mathrm{sing}}(V,\mathbf{Q})$ with rational coefficients, i.e., the singular cohomology of the complex manifold $V_{\mathbf{C}}$. Let us select a basis for each of these vector spaces over $\mathbf{Q}$, and let us tensor these spaces over $\mathbf{C}$. Then there is a unique (period) matrix Ω with complex coefficients which transforms one basis into the other. Any algebraic cycle on V or the product of V with itself give rise to a polynomial relation with rational coefficients among the coefficients of this matrix. Grothendieck's conjecture is that the ideal generated by these relations is an ideal of definition for the period matrix.*

Y. André [**15**] a réussi à unifier la conjecture de Schanuel et celle de Grothendieck.

Nous nous contenterons d'énoncer un cas particulier de la conjecture de Y. André, concernant les 1-motifs, qui a été mis en lumière par C. Bertolin [**16**]. Cette conjecture *elliptico-torique* contient la conjecture de Schanuel, ainsi qu'une extension aux courbes elliptiques plus générale que celle proposée dans [**19**].

(2)Une autre suggestion avait été faite par P. Cartier à S. Lang, elle concernait une généralisation des travaux de C.L. Siegel sur les fonctions de Bessel, mais cette suggestion est tombée dans l'oubli, aucun des deux protagonistes n'ayant pu m'en dire plus.

Soient $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n$ *des courses elliptiques deux à deux non isogènes, ayant des invariants* $j(\mathcal{E}_h)$*. Pour* $h = 1, \dots, n$*, soit* $(\omega_{1h}, \omega_{2h})$ *un couple fondamental de périodes de* $\wp_h$*, soient* η_{1h}, η_{2h} *les quasi-périodes correspondantes de la fonction zêta de Weierstraß associée à* $\mathcal{E}_h$*, soit* r_h *un entier positif, soient* P_{ih} $(i = 1, 2, \dots, r_h)$ *des points sur* $\mathcal{E}_h(\mathbf{C})$*, soient* p_{ih} *(resp.* δ_{ih}*) les intégrales elliptiques de première (resp. de seconde) espèce attachées à* P_{ih} *; on pose* $\kappa_h = [k_h : \mathbf{Q}]$ *et on désigne par* d_h *la dimension du* k_h*-sous-espace de* $\mathbf{C}/(k_h\omega_{1h} + k_h\omega_{2h})$ *engendré par* $p_{1h}, \dots, p_{r_h h}$*. Alors le degré de transcendance du corps engendré par les* $3(r_1 + \cdots + r_n) + 5n$ *nombres dans l'ensemble*

$$\bigcup_{\substack{1 \le i \le r_h \\ 1 \le h \le n}} \left\{ j(\mathcal{E}_h), \omega_{1h}, \omega_{2h}, \eta_{1h}, \eta_{2h}, P_{ih}, p_{ih}, \delta_{ih} \right\}$$

est au moins

$$2 \sum_{h=1}^{n} \left(d_h + \frac{2}{\kappa_h} \right) - n + 1.$$

Un des rares théorèmes d'indépendance algébrique actuellement connus concernant les périodes de courbes elliptique est celui de Yu.V. Nesterenko selon lequel les trois nombres π, e^π, $\Gamma(1/4)$ sont algébriquement indépendants. Quand j'ai raconté ce résultat en 1996 à un collègue mathématicien à qui je disais qu'il s'agissait d'une percée significative, il a manifesté un étonnement ironique : *pourquoi étudier spécifiquement ces valeurs particulières, qu'ont-elles de spécial qui justifie un tel intérêt ?* La réponse est que cet énoncé isolé n'est qu'un tout premier pas vers une théorie générale qui attend d'être développée.

4. Kontsevich, Zagier

La notion de période pour un analyste semble à première vue différente de celle qui est proposée par M. Kontsevich et D. Zagier dans [**28**]. La fonction exponentielle est périodique, de période $2i\pi$, ce qui s'exprime par l'égalité entre deux fonctions entières $e^{z+2i\pi} = e^z$. Il en résulte que le nombre $2i\pi$ s'écrit comme une intégrale :

$$2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}\cdot$$

Cette relation est le prototype qui sert de modèle à M. Kontsevich et D. Zagier. Voici leur première définition de ce qu'est une *période* [**28**] § 1.1 p. 772 :

> *A period is a complex number whose real and imaginary parts are values of absolutely convergent integrals of rational functions with rational coefficients, over domains in* $\mathbf{R}^n$ *given by polynomial inequalities with rational coefficients.*

Ils ajoutent aussitôt après ([**28**] § 1.1 p. 773) :

> *... In practice, however, we often prefer to allow ourselves more freedom rather than less, as follows : Let* X *be a smooth quasiprojective variety,*

$Y \subset X$ a subvariety, and ω a closed algebraic n-form on X vanishing on Y, all defined over $\overline{\mathbf{Q}}$, and let C be a singular n-chain on $X(\mathbf{C})$ with boundary contained in $Y(\mathbf{C})$; then the integral $\int_C \omega$ is a period.

Des exemples de périodes sont les nombres algébriques, comme

$$\sqrt{2} = \int_{2x^2 \le 1} dx = 1,414\ 213\ldots,$$

les logarithmes de nombres algébriques

$$\log \alpha = \int_{1<x<\alpha,\ xy<1,\ y\ge 0} dxdy$$

comme

$$\log 2 = \int_{1<x<2} \frac{dx}{x} = 0,693\ 147\ldots,$$

les périodes de courbes elliptiques

$$\int_{e_i}^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{4t^3 - g_2 t - g_3}}, \qquad \text{pour} \quad 4t^3 - g_2 t - g_3 = 4(t-e_1)(t-e_2)(t-e_3),$$

comme

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - t}} = \frac{1}{2} B(1/4, 1/2) = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2^{3/2}\pi^{1/2}} = 2,622\,057\ldots$$

et

$$\int_1^{\infty} \frac{dt}{\sqrt{t^3 - 1}} = \frac{1}{3} B(1/6, 1/2) = \frac{\Gamma(1/3)^3}{2^{4/3}\pi} = 2,428\,650\ldots$$

ou de variétés abéliennes, comme

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

pour a et b rationnels, les valeurs de la fonction zêta aux entiers positifs

$$\zeta(s) = \int_{1>t_1>t_2\cdots>t_s>0} \frac{dt_1}{t_1} \cdots \frac{dt_{s-1}}{t_{s-1}} \cdot \frac{dt_s}{1-t_s}$$

comme

$$\frac{\pi^2}{6} = \zeta(2) = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^2} = \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \frac{dt_2}{1-t_2} \right) \frac{dt_1}{t_1} = 1,644\ 934\ldots$$

et

$$\zeta(3) = \sum_{n\ge 1} \frac{1}{n^3} = \int_0^1 \left(\int_0^{t_1} \left(\int_0^{t_2} \frac{dt_3}{1-t_3} \right) \frac{dt_2}{t_2} \right) \frac{dt_1}{t_1} = 1,202\,056\ldots,$$

la constante de Catalan

$$G = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2y^2} dxdy = 0,915\,965\ldots,$$

et, nous y reviendrons, les nombres multizêtas. L'ensemble des périodes est dénombrable : il existe donc des nombres qui ne sont pas des périodes. Un des problèmes proposé par M. Kontsevich et D. Zagier dans [**28**] (Problem 3 p. 777) était d'exhiber un nombre qui ne soit pas une période. Cette question a été considérée par M. Yoshinaga [**31**] qui compare les périodes avec la hiérarchie des nombres réels provenant de questions de complexité de calculs (on rejoint ainsi les considérations de la fin de la section 2). Il prouve en particulier que les périodes sont approchables de façon effective par des suites rationnelles de Cauchy élémentaires. Ensuite, il exhibe un nombre qui n'est pas approchable de cette façon : ce n'est donc pas une période.

Cette construction d'un nombre qui ne soit pas une période peut être comparée à celle de J. Liouville [**6**], à qui on doit les premiers exemples de nombres transcendants : J. Liouville établit une propriété à laquelle tous les nombres algébriques satisfont (le fait d'être mal approchés par des nombres rationnels), puis donne des exemples de nombres qui ne satisfont pas à cette condition, et en déduit qu'ils sont transcendants. Après ces arguments *à la Cantor* (les périodes forment un ensemble dénombrable) et *à la Liouville* (les périodes sont effectivement approchables par des suites de Cauchy élémentaires), l'étape suivante devrait être, *à la Hermite*, de montrer que certaines constantes de l'analyse ne sont pas des périodes. Ce problème est largement ouvert. Il faut aller chercher parmi les nombres transcendants (ou parmi les nombres dont on soupçonne qu'ils sont transcendants), puisque les nombres algébriques sont des périodes. Les candidats ne manquent pas ; les nombres suivants en font partie :

$$\gamma = 0,577\,215\ldots, \quad \frac{1}{\pi} = 0,318\,309\ldots, \quad \sqrt{\pi} = 1,772\,453\ldots \quad e = 2,718\,281\ldots,$$
$$e^{\pi} = 23,140\,692\ldots, \quad e^{\pi^2} = 19\,333,689\,074\ldots, \quad e^{\sqrt{2}} = 4,113\,250\ldots,$$
$$\Gamma(1/4) = 3,625\,609\ldots, \quad e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,743,999\,999\,999\,999\,250\,0\ldots,$$

mais démontrer qu'un nombre de cette liste n'est pas une période semble bien difficile.

Les périodes de Kontsevich et Zagier ne sont que le premier étage d'un gigantesque édifice. Le deuxième étage est celui des *périodes exponentielles*, dont le prototype est le nombre e. Comme le suggèrent les auteurs de [**28**], toute constante classique produite par l'analyse infinitésimale est une période en un sens convenable ; la dernière phrase de [**28**] p. 806 est

> *Then all classical constants are periods in an appropriate sense.*

Un des principes proposés dans [**28**] (p. 775) est paradoxal :

> *Whenever you meet a new number, and have decided (or convinced yourself) that it is transcendental, try to figure out whether it is a period.*

Or nous avons vu que tout nombre algébrique est une période. C'est plutôt si on démontre qu'un nombre n'est pas une période qu'on en déduit sa transcendance. Cependant, comme nous venons de le voir, démontrer qu'un nombre n'est pas une période est la plupart du temps mission impossible. En revanche, si on démontre que le nombre en question est une période, l'information donnée par l'écriture de ce nombre sous forme de période peut permettre d'envisager une voie pour en obtenir la transcendance.

G. Shimura s'étonnait que tant de mathématiciens cherchent à démontrer des résultats de transcendance, alors qu'un énoncé (comme il a su en produire avec brio) affirmant que certains nombres sont algébriques a bien plus de conséquences. Son article [**29**] commence par cette phrase :

> *The algebraicity of an analytically defined object is a fascinating subject both in number theory and in algebraic geometry, but has attracted unaccountably few researchers. For instance, it seems that there are more mathematicians who deal with the transcendency of the special values of analytic functions than those who prove the algebraicity.*

Il arrive parfois que la recherche de résultats de transcendance conduise à l'effet inverse. Quand J. Wolfart a étudié les valeurs de certaines fonctions hypergéométriques et a cherché à déterminer toutes les relations entre leurs valeurs, il a donné l'occasion à F. Beukers de produire de nouvelles relations qui n'étaient ni connues ni attendues. L'exemple, dû à F. Beukers et J. Wolfart, cité p. 781 de [**28**], est

$$F\left(\frac{1}{12}, \frac{5}{12}, \frac{1}{2}; \frac{1323}{1331}\right) = \frac{3}{4}\sqrt[4]{11} = 1,365\,870\ldots,$$

où $F(a,b,c;x)$ désigne la fonction hypergéométrique de Euler-Gauss

$$F(a,b,c;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} x^n \quad \bigl(|x| < 1,\ (\alpha)_n = \alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\bigr).$$

Une période étant donnée, il y a de multiples façons de l'exprimer comme une intégrale. On peut en effet transformer une intégrale en utilisant des relations d'additivité, les plus simples étant

$$\int_a^b \bigl(f(x) + g(x)\bigr)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

et

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

On peut aussi effectuer des changements de variables du genre

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = \int_a^b f\bigl(\varphi(u)\bigr)\varphi'(u)du.$$

Il y a enfin les relations à la Newton-Leibniz-Stokes, qui généralisent

$$\int_a^b f'(t)dt = f(b) - f(a).$$

La conjecture principale de Kontsevich et Zagier dans [**28**] est que toute formule exprimant une même période de deux façons différentes peut se déduire de ces trois règles de base. Plus précisément [**27**], si on forme l'algèbre libre engendrée par des symboles attachés aux intégrales convergentes (l'ensemble des générateurs est dénombrable) et que l'on considère le morphisme de spécialisation qui à un symbole associe le nombre complexe correspondant (à savoir la valeur de l'intégrale), la conjecture dit que le noyau est l'idéal engendré par les relations mentionnées ci-dessus. Les conséquences de cette conjecture sont immenses ! Les auteurs de [**28**] le disent en ces termes :

> *In other words, we do not expect any miraculous coincidence of two integrals of algebraic functions which will not be possible to prove using three simple rules.*
>
> *This conjecture, which is similar in spirit to the Hodge conjecture, is one of the central conjectures about algebraic independence and transcendental numbers, and is related to many of the results and ideas of modern arithmetic algebraic geometry and the theory of motives.*

Parmi les périodes, on trouve non seulement les valeurs de la fonction zêta de Riemann aux entiers positifs, nombres considérés par L. Euler :

$$\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^s}, \quad (s \geq 2),$$

mais plus généralement les *valeurs zêta multiples* ou *nombres multizêtas*, également considérés par L. Euler

$$\zeta(s_1, s_2, \ldots, s_k) = \sum_{n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1} n_2^{s_2} \cdots n_k^{s_k}}, \quad (k \geq 1,\ s_1 \geq 2,\ s_j \geq 1).$$

Ces nombres ont fait l'objet de beaucoup de travaux ces dernières années, en particulier parce qu'ils interviennent dans de multiples domaines des mathématiques jusqu'à la physique théorique [**24, 27**].

Revenons aux questions diophantiennes concernant les valeurs de la fonction zêta de Riemann. De ce point de vue, l'intérêt principal de l'introduction de ces nombres est qu'ils permettent de linéariser les questions de transcendance et d'indépendance algébrique. Le but est de déterminer toutes les relations algébriques entre les nombres $\zeta(s)$, $s = 2, 3, 4, \ldots$ On conjecture qu'il n'y en a pas d'autres que celles qui résultent des relations d'Euler : $\pi^{-2s}\zeta(2s) \in \mathbf{Q}$ pour $s \geq 2$. S'il n'y a aucune autre relation, on ne voit pas surgir de structure algébrique intéressante. Pour parvenir à ce but, il suffit de déterminer toutes les relations linéaires entre les nombres $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$. Il y en a beaucoup ! Et elles donnent lieu à de très riches structures algébriques. Voir notamment [**24, 27**]. Une question cruciale consiste à déterminer, pour chaque entier positif p, la dimension d_p de l'espace vectoriel engendré sur le corps des nombres rationnels par les 2^{p-2} nombres $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$, quand $(s_1, \ldots, s_k)$ décrit les *compositions*[(3)], avec $s_1 \geq 2$, de *poids* $s_1 + \cdots + s_k$ égal à p. Par convention, $d_0 = 1$. Il n'y a pas de valeur admissible de $(s_1, \ldots, s_k)$ en poids 1, donc $d_1 = 0$. Il n'y a que $(s_1) = (2)$ en poids 2, donc $d_2 = 1$. En poids 3, les deux compositions (3) et $(2, 1)$ donnent la même valeur

(3) Une composition est une suite finie $(s_1, \ldots, s_k)$ d'entiers positifs avec $k \geq 0$ – cf. [**27**].

$\zeta(3) = \zeta(2,1)$; ainsi $d_3 = 1$. On a encore $d_p = 1$ pour $p = 4$, car

$$\zeta(3,1) = \frac{1}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,2) = \frac{3}{4}\zeta(4), \quad \zeta(2,1,1) = \zeta(4) = \frac{2}{5}\zeta(2)^2.$$

Ce sont les seules valeurs de d_p qui soient connues :

$$d_0 = 1,\ d_1 = 0,\ d_2 = 1,\ d_3 = 1,\ d_4 = 1.$$

On sait que $d_p \geq 1$ pour tout $p \geq 2$, mais on ne sait pas démontrer qu'il y a au moins une valeur de p avec $d_p > 1$. Pour les valeurs de $p \geq 5$, on ne connaît qu'une borne supérieure. Par exemple on a $d_5 \leq 2$, car, parmi les 8 nombres $\zeta(s_1, \ldots, s_k)$ avec $s_1 + \cdots + s_k = 5$, qui sont

$$\zeta(5),\ \zeta(4,1),\ \zeta(3,2),\ \zeta(3,1,1),\ \zeta(2,3),\ \zeta(2,2,1),\ \zeta(2,1,2),\ \zeta(2,1,1,1),$$

il y a 6 relations linéaires indépendantes :

$$\begin{aligned}
\zeta(5) &= 4\zeta(3,2) + 6\zeta(2,3) = \zeta(2,1,1,1),\\
\zeta(4,1) &= -\frac{1}{5}\zeta(3,2) + \frac{1}{5}\zeta(2,3) = \zeta(3,1,1),\\
\zeta(2,2,1) &= \zeta(3,2),\\
\zeta(2,1,2) &= \zeta(2,3).
\end{aligned}$$

Donc un système générateur du $\mathbf{Q}$-espace vectoriel engendré par ces nombres est formé de $\zeta(2,3)$ et $\zeta(3,2)$. Dire que la dimension est 2 est équivalent à dire que le nombre $\zeta(2,3)/\zeta(3,2)$ est irrationnel, ce qui n'est pas connu.

Conjecture (Zagier) *Pour $p \geq 3$, on a*

$$d_p = d_{p-2} + d_{p-3}.$$

Ce devrait être un problème combinatoire de montrer que les nombres donnés par cette suite récurrente linéaire sont des bornes supérieures pour la dimension de l'espace considéré. Que ce soit une borne supérieure est vrai, mais les démonstrations connues ne sont pas combinatoires : elles font appel à des résultats profonds de nature motivique. Ces bornes ont été établies par A.B. Goncharov en 2001 et T. Terasoma peu après, indépendamment.

M. Hoffman a remarqué que la suite de nombres [4]

$$1,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7,\ 9,\ \ldots$$

donnée par cette conjecture coïncidait avec la suite donnée par le nombre de compositions $(s_1, \ldots, s_k)$ formées uniquement de 2 et de 3. Il a conjecturé qu'une base de

[4] C'est la suite `https ://oeis.org/A000931` de l'encyclopédie de N.J.A Sloane `On-Line Encyclopedia of Integer Sequences`.

l'espace des multizêtas était donnée par les multizêtas ne faisant intervenir que des 2 et des 3. Par exemple

$$\begin{aligned}
p = 2 : &\quad \zeta(2),\\
p = 3 : &\quad \zeta(3),\\
p = 4 : &\quad \zeta(2,2),\\
p = 5 : &\quad \zeta(3,2),\ \zeta(2,3),\\
p = 6 : &\quad \zeta(2,2,2),\ \zeta(3,3),\\
p = 7 : &\quad \zeta(2,2,3),\ \zeta(2,3,2),\ \zeta(3,2,2).
\end{aligned}$$

F. Brown [**25, 26**] a démontré que ces nombres $\zeta(s_1,\dots,s_k)$ avec $s_i \in \{2,3\}$ $(1 \le i \le k,\ k \ge 1)$ forment un système générateur de l'espace des multizêtas. La conjecture de Zagier se réduit donc à démontrer que ces $\zeta(s_1,\dots,s_k)$ avec $s_j \in \{2,3\}$ sont linéairement indépendants.

Cet énoncé de F. Brown n'est que le point de départ d'un développement spectaculaire du sujet : F. Brown montre l'existence de *multizêtas motiviques*, répondant ainsi à des conjectures de P. Deligne et Y. Ihara. Très récemment, P. Deligne a montré l'existence de *périodes motiviques* (exposé au colloque Cartier en juin 2012 à l'IHÉS). Il s'agit donc d'un sujet en pleine effervescence.

Références

[1] Y. F. Bilu – « The many faces of the subspace theorem [after Adamczewski, Bugeaud, Corvaja, Zannier...] », *Astérisque*, (2008), Exp. No. **967** 1–38. Séminaire Bourbaki. Vol. 2006/2007.

[2] J. Stainville – « Mélanges d'analyse algébrique et de géométrie », 1815.
`http://www.bibnum.education.fr/mathematiques/melange-danalyse-algebrique-et-de-geometrie`

[3] Ch. Hermite – « Sur la fonction exponentielle », *C. R. Acad. Sci. Paris*, **77** (1873), pp. 18–24, **74–79** 226–233, 285–293. *Œuvres de Charles Hermite*, Paris : Gauthier-Villars, 1905-1917. University of Michigan Historical Math Collection.
`http ://name.umdl.umich.edu/AAS7821.0001.001`
`http ://www.bibnum.education.fr/mathématiques/théorie-des-nombres/la-démonstration-de-la-transcendance`

[4] H. Lambert – « Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques », *Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin*, **17** (1768), pp. 265–322. Math. Werke, t. II.
`http ://www.bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/lambert-et-l-irrationalite-de-n-1761`

[5] J. Liouville – « Sur l'irrationalité du nombre $e = 2,718...$ », *J. Math. Pures Appl.*, 1 (1840), p. 192.
`http ://gallica.bnf.fr/Catalogue/noticesInd/FRBNF34348784.htm`
« Addition à la note sur l'irrationalité du nombre e », *J. Math. Pures Appl.*, 1 (1840), pp. 193–194.
`http ://portail.mathdoc.fr/JMPA/`

[6] J. LIOUVILLE – « Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 883–885.
« Nouvelle démonstration d'un théorème sur les irrationnelles algébriques inséré dans le compte-rendu de la dernière séance ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, **18** (1844), 910–911.
« Sur des classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébrique, ni même réductible à des irrationnelles algébriques ». *J. Math. Pures et Appl.*, **1** (1851), 133–142.
`http ://www.bibnum.education.fr/mathématiques/théorie-des-nombres/ propos-de-lexistence-des-nombres-tr`

[7] É. MAILLET – « Introduction à la théorie des nombres transcendants et des propriétés arithmétiques des fonctions », Paris, 1906.

[8] M. WALDSCHMIDT – « La méthode de Charles Hermite en théorie des nombres transcendants », Sur quatre articles de Charles Hermite [**3**], « Sur la fonction exponentielle », Comptes-rendus de l'Académie des sciences, Paris, tome 77 (1873), pages 18-24, 74-79, 226-233, 285-293 (30 pages). *Bibliothèque numérique de textes scientifiques BibNum.*
`http ://www.bibnum.education.fr/mathématiques/théorie-des-nombres/la-démonstration-de-la-transcendance`

[9] B. ADAMCZEWSKI – « On the expansion of some exponential periods in an integer base », *Math. Ann.* **346** (2010), 107–116.
`http ://arxiv.org/abs/1205.0961v1`

[10] L. BIENVENU & M. HOYRUP – « Une brève introduction à la théorie effective de l'aléatoire », *Gazette des mathématiciens* **123**, Société Mathématique de France, Janvier 2010, 35–47.
`http ://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2010/123/smf_gazette_123_35-47.pdf`

[11] É. BOREL – « Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques », *Palermo Rend.* **27** (1909), p. 247–271.

[12] ———, « Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaînes », *C. R. Acad. Sci., Paris* **230** (1950), p. 591–593.

[13] G. CHAITIN – « How real are real numbers, in mathematics complexity and philosophy », Cambridge University Press book Algorithmic Information Theory (1987).

[14] M. WALDSCHMIDT – « Words and transcendence », in *Analytic number theory*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2009, p. 449–470.

[15] Y. ANDRÉ – « Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes) », *Panoramas et Synthèses*, vol. **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[16] C. BERTOLIN – « Périodes de 1-motifs et transcendance », *J. Number Theory* **97** (2002), no. 2, p. 204–221.

[17] C. CHENG, B. DIETEL, M. HERBLOT, J. HUANG, H. KRIEGER, D. MARQUES, J. MASON, M. MEREB & S. WILSON – « Some consequences of Schanuel's conjecture », *J. Number Theory* **129** (2009), no. 6, p. 1464–1467.

[18] S. LANG – « Introduction to transcendental numbers », Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1966, = Collected papers. Vol. I, (1952–1970), Springer-Verlag, New York (2000), p. 396–506.

[19] S. GUN, M. R. MURTY & P. RATH – « Transcendence of the log gamma function and some discrete periods », *J. Number Theory* **129** (2009), no 9 , p. 2154–2165. « Corrigendum » **130** (2010), no. 5, p. 1251.

[20] ———, « Transcendental nature of special values of L -functions. », *Canad. J. Math.* **63** (2011), no. 1, p. 136–152.

[21] P. RIBENBOIM – « My numbers, my friends », Popular lectures in number theory. Springer, 2000.

[22] D. Roy – « Une formule d'interpolation en deux variables », *J. Théor. Nombres Bordeaux* **13** (2001), no. 1, p. 315–323, 21èmes Journées Arithmétiques (Rome, 2001).

[23] M. Waldschmidt – « La conjecture de Schanuel », *Séminaire sur les nombres transcendants 1972/73* Publ. Math. Orsay, n° 57 (1973).

[24] J. Borwein & W. Zudilin – « Multiple Zeta Values », Math Honours, 2011. `http ://carma.newcastle.edu.au/MZVs/`

[25] F. Brown – « On the decomposition of motivic multiple zeta values ». `arXiv :1102.1310`

[26] ———, « Mixed Tate motives over **Z** », *Annals of Mathematics* **175** (2012), 949–976.

[27] P. Cartier – « Fonctions polylogarithmes, nombres polyzêtas et groupes pro-unipotents », *Astérisque* (2002), no. **282**, Exp. No. 885, 137–173, Séminaire Bourbaki, Vol. 2000/2001.

[28] M. Kontsevich & D. Zagier – « Periods », in *Mathematics unlimited—2001 and beyond*, Springer, Berlin, 2001, p. 771–808.

[29] G. Shimura – « On the derivatives of theta functions and modular forms ». *Duke Math. J.*, **44** (1977), no. 2, p. 365–387. *Collected papers.* New York, NY : Springer, 2002-2003.

[30] M. Waldschmidt – « Transcendence of periods: the state of the art », *Pure Appl. Math. Q.* **2** (2006), no. 2, p. 435–463.

[31] M. Yoshinaga – « Periods and elementary real numbers », 2008. `arXiv :0805.0349`.

Michel Waldschmidt, Université Pierre et Marie Curie-Paris 6, Institut de Mathématiques de Jussieu IMJ UMR 7586, Théorie des Nombres Case Courrier 247, 4 place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05 France, `http://www.math.jussieu.fr/~miw/`
E-mail : `miw@math.jussieu.fr`