DEA *méthodes algébriques* 2001/2002, UFR 921, Université P. et M. Curie (Paris VI)

Valeurs spéciales de polylogarithmes multiples – *M. WALDSCHMIDT*

Esquisse de solution de l'examen du vendredi 14 juin 2002

Problème I

1)

a) L'automate associé à la lettre a est

$$\Longrightarrow \boxed{1} \xrightarrow{\ a\ } \boxed{2} \Longrightarrow,$$

celui associé à $(bc)^*$ est

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{A} \arrow[l, Rightarrow, shift left=2] \arrow[r, shift left, "b"] & \boxed{B} \arrow[l, shift left, "c"] \end{tikzcd}$$

et le produit cartésien de ces deux automates, qui est associé au produit de mélange $a ш (bc)^*$, est

$$\begin{tikzcd} \arrow[r, Rightarrow] & \boxed{1A} \arrow[r, "a"] \arrow[d, shift right, "b"'] & \boxed{2A} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, shift right, "b"'] & {} \\ & \boxed{1B} \arrow[r, "a"] \arrow[u, shift right, "c"'] & \boxed{2B} \arrow[u, shift right, "c"'] & \end{tikzcd}$$

b) Plusieurs méthodes permettent de déterminer la série génératrice des mots reconnus par cet automate. Si, pour chaque état p, on désigne par S_p la série génératrice des mots commençant à l'état initial et terminant à l'état p, alors la série cherchée est celle S_{2A} de l'état final, et il suffit de résoudre le système

$$\begin{array}{lcl} S_{1A} & = & e + S_{1B}c, \\ S_{1B} & = & S_{1A}b, \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} S_{2A} & = & S_{1A}a + S_{2B}c, \\ S_{2B} & = & S_{1B}a + S_{2A}b, \end{array}$$

qui donne

$$S_{1A} = (bc)^*, \quad S_{1B} = (bc)^*b, \qquad S_{2B} = (bc)^*ba + S_{2A}b,$$
$$S_{2A} = (bc)^*a + (bc)^*bac + S_{2A}bc$$

et finalement

$$S_{2A} = (bc)^*(a + bac)(bc)^*.$$

Une deuxième solution consiste à noter T_p la série génératrice des mots commençant à l'état p et terminant à l'état final, de sorte que la série cherchée est celle T_{1A} de l'état initial; il suffit alors de résoudre le système

$$\begin{array}{rclcrcl} T_{1A} & = & aT_{2A}+bT_{1B}, & \qquad & T_{2A} & = & e+bT_{2B}, \\ T_{1B} & = & cT_{1A}+aT_{2B}, & & T_{2B} & = & cT_{2A}, \end{array}$$

qui donne

$$T_{2A}=(bc)^*, \quad T_{2B}=c(bc)^*, \qquad T_{1B}=cT_{1A}+ac(bc)^*,$$
$$T_{1A}=a(bc)^*+bac(bc)^*+bcT_{1A}$$

et finalement

$$T_{1A}=(bc)^*(a+bac)(bc)^*.$$

On peut encore remarquer que la série des mots réussis empruntant l'arête $\boxed{1A}\xrightarrow{a}\boxed{2A}$ est $S_{1A}aT_{2A}$, celle des mots réussis empruntant l'arête $\boxed{1B}\xrightarrow{a}\boxed{2B}$ est $S_{1A}bacT_{2A}$, et la série reconnue par l'automate est leur somme $S_{1A}(a+bac)T_{2A}$.

c) On retrouve la relation $a ш (bc)^*=(bc)^*(a+bac)(bc)^*$ par un calcul direct en écrivant

$$a ш (bc)^*=\sum_{i\geq 0} a ш (bc)^i$$

et

$$a ш (bc)^i=\sum_{j=0}^{i}(bc)^j a(bc)^{i-j}+\sum_{j=0}^{i-1}(bc)^j bac(bc)^{i-j-1},$$

qui donne

$$\begin{aligned} a ш (bc)^* &= \sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{i}(bc)^j a(bc)^{i-j}+\sum_{i\geq 0}\sum_{j=0}^{j-1}(bc)^j bac(bc)^{i-j-1} \\ &= \sum_{j\geq 0}(bc)^j a\sum_{i\geq j}(bc)^{i-j}+\sum_{j\geq 1}(bc)^i bac\sum_{i>j}(bc)^{i-j-1} \\ &= (bc)^*a(bc)^*+(bc)^*bac(bc)^*. \end{aligned}$$

Le même calcul donne plus généralement

$$a ш w^*=w^*(a ш w)w^*+a$$

pour tout $w\in X^*$.

d) Dans le cas particulier $c=a$ on trouve

$$a ш (ba)^*=(ba)^*(e+ba)a(ba)^*$$

Mais pour $w\in X^*$, $w\neq e$, on a $w^*(e-w)=e$, donc $w^*w=w^*-e$ et on peut encore écrire $(ba)^*(e+ba))=2(ba)^*-e$.

2) Prenons $a = x_1$, $b = x_0$, de sorte que $a = y_1$ et $ba = y_2$. On obtient $y_1 ш y_2^* = (2y_2^* - e)y_1 y_2^*$. On développe:

$$\sum_{n \geq 0} y_1 ш y_2^n = \left(2 \sum_{h \geq 0} y_2^h - e \right) y_1 \sum_{k \geq 0} y_2^k$$

On identifie, pour $n \geq 1$, les parties homogènes de poids $2n+1$ (on rappelle que pour $s \geq 1$ le poids de y_s est s):

$$y_1 ш y_2^n = 2 \sum_{h+k=n} y_2^h y_1 y_2^k - y_1 y_2^n = 2 \sum_{i=1}^{n} y_2^i y_1 y_2^{n-i} + y_1 y_2^n.$$

Par récurrence sur n, à partir de

$$y_1 \star y_2^n = y_1 y_2^n + y_2(y_1 \star y_2^{n-1}) + y_3 y_2^{n-1},$$

on vérifie la relation, pour $n \geq 1$,

$$y_1 \star y_2^n = \sum_{i=0}^{n} y_2^i y_1 y_2^{n-i} + \sum_{h=0}^{n-1} y_2^h y_3 y_2^{n-h-1}.$$

Par différence on obtient

$$y_1 ш y_2^n - y_1 \star y_2^n = \sum_{i=1}^{n} y_2^i y_1 y_2^{n-i} - \sum_{h=0}^{n-1} y_2^h y_3 y_2^{n-h-1}.$$

Comme $y_2^n \in \mathfrak{H}^0$, d'après la relation d'Hoffman cet élément est dans le noyau de $\widehat{\zeta}$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta\big(\{2\}_i, 1, \{2\}_{n-i}\big) = \sum_{h=0}^{n-1} \zeta\big(\{2\}_h, 3, \{2\}_{n-1-h}\big).$$

Par exemple

$$\zeta(2,1) = \zeta(3), \qquad \zeta(2,1,2) + \zeta(2,2,1) = \zeta(3,2) + \zeta(2,3),$$

$$\zeta(2,1,2,2) + \zeta(2,2,1,2) + \zeta(2,2,2,1) = \zeta(3,2,2) + \zeta(2,3,2) + \zeta(2,2,3).$$

Problème II

Si P et $\tilde{P}$ dans $\mathbb{R}[T]$ vérifient

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha}|na_n - P(\log n)| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} n^{\alpha'}|na_n - \tilde{P}(\log n)| = 0$$

avec $\alpha > 0$ et $\alpha' > 0$, alors pour $\alpha'' = \min\{\alpha, \alpha'\}$ on a encore

$$\lim_{n\to\infty} n^{\alpha''}|P(\log n) - \tilde{P}(\log n)| = 0$$

et on en déduit facilement $P = \tilde{P}$. De même on vérifie facilement que $\mathcal{E}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que l'application $f \mapsto P_f$ est $\mathbb{R}$-linéaire.

1) L'idée est la suivante: quand P_f est un monôme x^k, le coefficient a_n se comporte comme $(\log n)^k/n$ quand n est grand, donc il est naturel de comparer A_n et $\sum_{1\le i\le n}(\log i)^k/i$. Pour voir que cette dernière somme est équivalente à

$$\frac{1}{k+1}(\log n)^{k+1} + \gamma_k$$

avec une constante γ_k indépendante de n, on peut soit la comparer à une intégrale, et dans ce cas le mieux est d'utiliser la formule d'Euler MacLaurin, soit effectuer une transformation d'Abel. Nous commençons par cette dernière approche.

Fixons $k \ge 1$ et montrons que pour chaque entier $k \ge 1$ il existe un nombre réel $\gamma_k > 0$ tel que

$$(^*) \qquad \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}(\log i)^k = \frac{1}{k+1}(\log n)^{k+1} + \gamma_k + O\bigl((\log n)^k/n\bigr) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

Que la somme porte sur $1 \le i \le n-1$ ou sur $1 \le i \le n$ ne change évidemment rien.

Pour $i \ge 1$ on définit $\beta_k(i) \in \mathbb{R}$ par $\beta_k(1) = 0$ et

$$\frac{1}{i}(\log i)^k = \frac{(\log i)^{k+1} - \bigl(\log(i-1)\bigr)^{k+1}}{k+1} + \beta_k(i) \quad \text{pour} \quad i \ge 2.$$

Alors, pour $n \ge 2$,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}(\log i)^k = \frac{1}{k+1}(\log(n-1))^{k+1} + \sum_{i=1}^{n-1} \beta_k(i).$$

Pour estimer $\beta_k(i)$ on écrit

$$\begin{aligned}(\log n)^{k+1} - \bigl(\log(n-1)\bigr)^{k+1} &= \bigl(\log n - \log(n-1)\bigr) \sum_{i=0}^{k} (\log n)^i \bigl(\log(n-1)\bigr)^{k-i} \\ &= \frac{k+1}{n}(\log n)^k + O\bigl((\log n)^k/n^2\bigr) \qquad \text{quand} \quad n \to \infty.\end{aligned}$$

Donc
$$|\beta_k(i)| = O\big((\log i)^k/i^2\big) \qquad \text{quand} \quad i\to\infty$$
et
$$\sum_{i\ge n}|\beta_k(i)| = O\big((\log n)^k/n\big) \qquad \text{quand} \quad n\to\infty.$$
En effet pour n suffisamment grand
$$\sum_{i\ge n}\frac{1}{i^2}(\log i)^k \le \int_n^\infty \frac{1}{t^2}(\log t)^k dt = O\big((\log n)^k/n^2\big).$$
On en déduit la relation $(^*)$ avec $\gamma_k=\sum_{i\ge 1}\beta_k(i)$.

Une autre démonstration de l'existence de γ_k vérifiant $(^*)$ repose sur la formule d'Euler-MacLaurin (Dieudonné, Calcul infinitésimal, Chap. IX, § 7)
$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(t)dt + \frac{1}{2}\big(f(m)-f(n)\big) + \int_m^n \big(t-[t]-1/2\big)f'(t)dt$$
que l'on utilise avec $m=1$, $f(t)=(\log t)^k/t$. Comme
$$\int_1^n (\log t)^k\frac{dt}{t} = \frac{1}{k+1}(\log n)^k$$
et que
$$f'(t) = (k-\log t)(\log t)^{k-1}\frac{1}{t^2},$$
on trouve le résultat avec
$$\gamma_k = \int_1^\infty \big(t-[t]-1/2\big)(k-\log t)(\log t)^{k-1}\frac{dt}{t^2}.$$

Soit maintenant $f(x)=\sum_{n\ge 0}a_nx^n$ un élément de $\mathcal{E}$. Posons $P_f(T)=\sum_{k=0}^d p_kT^k$. On écrit, pour $n\ge 1$,
$$a_n = \frac{1}{n}P_f(\log n) + \frac{\epsilon_n}{n^{\alpha+1}} = \sum_{k=0}^d p_k\frac{1}{n}(\log n)^k + \frac{\epsilon_n}{n^{\alpha+1}}$$
avec $\epsilon_n\to 0$ quand $n\to\infty$. Alors
$$A_n = a_0 + \sum_{k=0}^d p_k\gamma_k + \sum_{k=0}^d p_k\frac{(\log n)^{k+1}}{k+1} + \sum_{i=1}^n\frac{\epsilon_i}{i^{\alpha+1}} + O\big((\log n)^k/n\big).$$
On en déduit que le polynôme
$$Q_f(t) = \sum_{k=0}^d\frac{1}{k+1}p_kT^{k+1}+q_0$$

avec

$$q_0 = a_0 + \sum_{k=0}^{d} p_k\gamma_k + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon_i}{i^{\alpha+1}}$$

vérifie

$$n^\beta |A_n - Q_f(\log n)| \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

ceci pour tout β dans l'intervalle $0 < \beta < \min\{1, \alpha\}$. En particulier on a bien

$$\frac{d}{dT} Q_f = P_f.$$

L'unicité de ce polynôme Q_f et le fait que l'application $f \mapsto Q_f$ soit $\mathbb{R}$-linéaire sont faciles.

2) Soit $f \in \mathcal{E}$.

a) Commençons par montrer que, pour $k \geq 1$, la fonction $f_k = \mathrm{Li}_{\{1\}_k}$, à savoir

$$f_k(x) = \frac{(-1)^k}{k!} \big(\log(1-x)\big)^k,$$

appartient à $\mathcal{E}$ et que son polynôme P_{f_k} associé a pour degré $k-1$ (en fait on anticipe sur la question 4c). On a, pour $k \geq 1$,

$$f_k(x) = \sum_{n_1 > n_2 > \cdots > n_k \geq 1} \frac{x^{n_1}}{n_1 \cdots n_k} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(k)} x^n$$

avec $a_0^{(k)} = 0$ et, pour $n \geq 1$,

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{\substack{n_2 > n_3 > \cdots > n_k \geq 1 \\ n_2 < n}} \frac{1}{n_2 \cdots n_k}.$$

Quand $k = 1$ on a $a_n^{(1)} = 1/n$ pour tout $n \geq 1$, la fonction f_1 appartient à $\mathcal{E}$ et le polynôme $P_{f_1} = 1$ est de degré 0. En notant

$$A_n^{(k)} = \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(k)},$$

on a pour $k \geq 2$

$$a_n^{(k)} = \frac{1}{n} A_n^{(k-1)},$$

ce qui permet de vérifier, par récurrence, que la fonction f_k appartient à $\mathcal{E}$ et que les polynômes P_{f_k} et Q_{f_k} qui lui sont associés sont reliés par $P_{f_k} = Q_{f_{k-1}}$ $(k \geq 2)$. Par récurrence on trouve aussi que le terme de plus haut degré de P_{f_k} est $T^{k-1}/(k-1)!$ et celui de Q_{f_k} est $T^k/k!$. En particulier le polynôme P_{f_k} a pour degré $k-1$ et les P_{f_k}, $k \geq 1$, forment une base de $K[T]$.

Pour la fonctioon f_k la question 2a est évidente avec

$$R_{f_k}(T) = \frac{(-1)^k}{k!} T^k.$$

Passons au cas général: pour $f \in \mathcal{E}$ montrons qu'il existe $\kappa \in \mathbb{R}$, $\kappa > 0$ et $R_f \in \mathbb{R}[T]$, tels que

$$f(x) = R_f\bigl(\log(1-x)\bigr) + O\bigl((1-x)^\kappa\bigr) \qquad \text{quand} \quad x \to 1.$$

Écrivons P_f sur la base des P_{f_k}:

$$P_f = \sum_{k=1}^d \lambda_k P_{f_k}.$$

Posons $\tilde{f} = f - \sum_{k=1}^d \lambda_k f_k$. Alors $P_{\tilde{f}} = 0$. Quitte à remplacer f par $\tilde{f}$, on peut supposer $P_f = 0$. Nous allons montrer que l'hypothèse

$$n^{1+\alpha}|a_n| \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

entraîne l'existence de $\kappa > 0$ tel que

$$f(x) = f(1) + O\bigl((1-x)^\kappa\bigr) \quad \text{quand} \quad x \to 1, \quad 0 < x < 1.$$

Cela montrera en même temps que si $P_f = 0$, alors R_f est le polynôme constant $f(1)$, tandis que si $P_f \neq 0$, si d désigne son degré et aT^d son terme de plus haut degré, alors

$$f(x) \sim \frac{(-1)^{d+1}}{d+1} a\bigl(\log(1-x)\bigr)^{d+1}$$

quand $x \to 1$, donc R_f a pour degré $d+1$ et pour terme de plus haut degré

$$\frac{(-1)^{d+1}}{d+1} aT^{d+1}.$$

Pour $0 < x < 1$ on a

$$1 - x^n \le n(1-x) \quad \text{et} \quad 1 - x^n < 1,$$

donc pour $0 < \kappa < 1$

$$1 - x^n < (1-x^n)^\kappa < n^\kappa (1-x)^\kappa.$$

Par conséquent pour $0 < \kappa < \min\{1, \alpha\}$ on a

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1-x^n}{n^{\alpha+1}} \le \sum_{n=1}^\infty \frac{n^\kappa (1-x)^\kappa}{n^{\alpha+1}} = O\bigl((1-x)^\kappa\bigr)$$

quand $x \to 1$, $0 < x < 1$. Il est utile pour tout-à-l'heure (question 2d) de noter que cela signifie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^{\alpha+1}} = \zeta(\alpha+1) + O\big((1-x)^{\kappa}\big) \quad \text{quand} \quad x \to 1, \quad 0 < x < 1.$$

Reprenons notre fonction f avec $n^{1+\alpha}|a_n| \to 0$. On écrit

$$|f(x) - f(1)| \le \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|(1-x^n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-x^n}{n^{\alpha+1}} + O(1-x) = O\big((1-x)^{\kappa}\big).$$

b) Ici encore l'unicité de R_f est facile, de même que le fait que l'application $f \mapsto R_f$ soit linéaire.

c) On a vu dans ci-dessus que si $P_f = 0$, alors le polynôme R_f est constant égal à $f(1)$.

On a vu ausi que si P_f n'est pas nul et a pour degré d, alors R_f a pour degré $d+1$, et en particulier n'est pas constant.

d) Si Q_f est une constante c, alors la série $\sum a_n$ converge vers c, ce qui entraîne (lemme d'Abel: cf Dieudonné, op. cit., p. 195) que $f(x) \to c$ quand $x \to 1$, $0 < x < 1$, d'où on déduit $R_f = c$.

Inversement, si R_f est une constante c, alors $f(x) \to c$ quand $x \to 1$, $0 < x < 1$. De plus, le polynôme R_f étant de degré 0, il en résulte que P_f est nul, c'est-à-dire $a_n = O(n^{-1-\alpha})$, ce qui permet d'écrire, pour $0 < x < 1$,

$$\left| \sum_{n \ge 0} a_n - \sum_{n \ge 0} a_n x^n \right| \le \sum_{n \ge 0} |a_n|(1-x^n) \le \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n^{1+\alpha}}(1-x^n) \to 0$$

quand $x \to 1$, donc

$$\sum_{n \ge 0} a_n = \lim_{x \to 1} f(x) = c.$$

Ainsi pour $c \in K$ la condition $R_f = c$ équivaut à $Q_f = c$. Pour $c = 0$ on en déduit le résultat demandé.

3) Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes car $P_f = (d/dT)Q_f$. Nous avons vu aussi à la question 2c que (i) équivaut à (iii); quand ces conditions (i) et (iii) sont vérifiées on a aussi $Q_f = R_f$.

Que (i) implique (iv) résulte du fait que si $P_f = 0$, alors la série $\sum |a_n|$ converge.

Enfin, si la série $\sum_{n \ge 1} a_n$ converge, c'est-à-dire si la suite $(A_n)_{n \ge 1}$ converge, alors Q_f est constant égal à $\sum_{n \ge 0} a_n = \lim A_n$.

Il résulte de ce qui vient d'être dit que, quand ces conditions (i) à (iv) sont vérifiées, on a

$$\lim_{x \to 1} f(x) = R_f = Q_f = \lim_{n \to \infty} A_n = \sum_{n \ge 0} a_n.$$

4) Le point essentiel consiste à montrer que les fonctions $\widehat{\mathrm{Li}}_w$, pour $w \in \mathfrak{H}^1$, appartiennent à $\mathcal{E}$. Par linéarité il suffit de considérer le cas où $w = y_{\underline{s}}$ avec $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$. Commençons par le cas $k = 1$.

Si $s_1 = 1$, comme on l'a déjà vu, on a $\mathrm{Li}_1 = \widehat{\mathrm{Li}}_{x_1} = f_1 \in \mathcal{E}$ avec $P_{\mathrm{Li}_1} = P_{f_1} = \mathcal{P}_{x_1} = 1$.

Si $s_1 \geq 2$ on a

$$\mathrm{Li}_{s_1}(x) = \widehat{\mathrm{Li}}_{x_0^{s_1-1}x_1}(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n^{s_1}},$$

donc $\mathrm{Li}_{s_1} \in \mathcal{E}$ avec $P_{\mathrm{Li}_{s_1}} = \mathcal{P}_{y_{s_1}} = 0$, $\mathcal{Q}_{y_{s_1}} = \mathcal{R}_{y_{s_1}} = \zeta(s_1)$.

Supposons maintenant $k \geq 2$. Par récurrence sur k on suppose $\mathrm{Li}_{s_2,\ldots,s_k} \in \mathcal{E}$ pour tout $(s_2, \ldots, s_k)$. Pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$, notons d'abord

$$a_n^{(\underline{s})} = \frac{1}{n^{s_1}} \sum_{\substack{(n_2,\ldots,n_k)\\ n>n_2>\cdots>n_k\geq 1}} \frac{1}{n_2^{s_2}\cdots n_k^{s_k}},$$

de sorte que

$$\mathrm{Li}_{\underline{s}}(x) = \sum_{n\geq 1} a_n^{(\underline{s})} x^n,$$

puis

$$A_n^{(\underline{s})} = \sum_{m=1}^{n-1} a_m^{(\underline{s})}.$$

Examinons déjà le cas $s_1 = 1$. On a, pour $n \geq 1$,

$$a_n^{(1,s_2,\ldots,s_k)} = \frac{1}{n} A_{n-1}^{(s_2,\ldots,s_k)}.$$

On en déduit $\mathrm{Li}_{1,s_2,\ldots,s_k} \in \mathcal{E}$ avec

$$P_{\mathrm{Li}_{1,s_2,\ldots,s_k}} = Q_{\mathrm{Li}_{s_2,\ldots,s_k}}.$$

Considérons maintenant le cas $s_1 \geq 2$. Si on minore chaque s_i $(2 \leq i \leq k)$ par 1, on trouve

$$a_n^{(s_1,\ldots,s_k)} = O\bigl(n^{-s_1}(\log n)^{k-1}\bigr).$$

Cela permet de vérifier $\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k} \in \mathcal{E}$ avec

$$P_{\mathrm{Li}_{s_1,\ldots,s_k}} = \mathcal{P}_{y_{\underline{s}}} = 0, \qquad \mathcal{Q}_{y_{\underline{s}}} = \mathcal{R}_{y_{\underline{s}}} = \zeta(\underline{s}).$$

On peut aussi obtenir ce résultat en écrivant

$$a_n^{(s_1,\ldots,s_k)} = n^{-s_1} a_n^{(1,s_2,\ldots,s_k)} = n^{-s_1} Q_{\mathrm{Li}_{s_2,\ldots,s_k}}(\log n) + O\bigl((\log n)^{-1-\beta}\bigr).$$

a) On vient de voir que si $s_1 \geq 2$ on a $\mathrm{Li}_{\underline{s}} \in \mathcal{E}$ et le polynôme $P_{\mathrm{Li}_{\underline{s}}} = \mathcal{P}_{y_{\underline{s}}}$ associé est nul. Par linéarité on en déduit que le polynôme $\mathcal{P}_w = P_{\widehat{\mathrm{Li}}_w}$ est nul pour $w \in \mathfrak{H}^0$.

Inversement, montrons que si $\mathcal{P}_w = 0$, alors $w \in \mathfrak{H}^0$.

Tout élément $w \in \mathfrak{H}^1$ autre que le mot vide s'écrit de manière unique

$$w = x_1^{k-1}x_0w_1 + x_1^{k-2}x_0w_2 + \cdots + x_0w_k$$

avec $k \geq 1$ et $w_1, \ldots, w_k$ dans $\mathfrak{H}^1$. Un tel élément appartient à $\mathfrak{H}^0$ si et seulement si $k = 1$. De plus on a

$$\widehat{\mathsf{Li}}_w(x) \sim c\big(\log(1-x)\big)^{k-1}$$

quand $x \to 1$, avec une constante $c \neq 0$. Donc $\widehat{\mathsf{Li}}_w(x)$ est borné quand $x \to 1$, $0 < x < 1$, si et seulement si $k = 1$. Ainsi la condition $\mathcal{P}_w = 0$ implique $w \in \mathfrak{H}^0$ et dans ce cas $\widehat{\mathsf{Li}}_w(x)$ converge en $x = 1$ vers $\widehat{\zeta}(w)$,

b) Pour vérifier $\mathcal{P}_{x_1w} = \mathcal{Q}_w$ il suffit par linéarité de le faire quand $w = y_{\underline{s}}$. Nous avons vu que le coefficient $a_n^{(1,\underline{s})}$ de x^n dans le développement de Taylor à l'origine de $\widehat{\mathsf{Li}}_{x_1y_{\underline{s}}}$ était relié à la somme $A_n^{(\underline{s})}$ des n premiers coefficients de Taylor de $\widehat{\mathsf{Li}}_{y_{\underline{s}}} = \mathsf{Li}_{\underline{s}}$ par la relation

$$na_n^{(1,\underline{s})} = A_{n-1}^{(\underline{s})}.$$

On en déduit $\mathcal{P}_{x_1y_{\underline{s}}} = \mathcal{Q}_{y_{\underline{s}}}$

c) Pour résoudre la question 2a nous déjà montré que, pour tout $k \geq 1$, $\deg \mathcal{P}_{x_1^k} = k-1$ et $\deg \mathcal{Q}_{x_1^k} = \deg \mathcal{R}_{x_1^k} = k$.

d) Pour $w \in \mathfrak{H}^0$ on déduit de la question 3 avec $f = \widehat{\mathsf{Li}}_w$ que l'on a $\mathcal{Q}_w = \mathcal{R}_w = \widehat{\zeta}(w)$.

Problème III.

1) Pour $\lambda \in K$, désignons par ψ_λ l'automorphisme de la K-algèbre $\mathfrak{H}$ qui laisse fixe x_0 et envoie x_1 sur $x_1 + \lambda x_0$. L'application $\lambda \mapsto \psi_\lambda$ est un homomorphisme du groupe additif de K dans le groupe des automorphismes de la K-algèbre $\mathfrak{H}$.

On définit un endomorphisme K-linéaire $\widetilde{\varphi}_\lambda$ de $\mathfrak{H}^1 = Ke + \mathfrak{H}x_1$ par $\widetilde{\varphi}_\lambda(e) = e$ et

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(wx_1) = \psi_\lambda(w)x_1$$

pour $w \in \mathfrak{H}$. On a

$$\widetilde{\varphi}_\lambda(y_s) = \widetilde{\varphi}_\lambda(x_0^{s-1}x_1) = \psi_\lambda(x_0^{s-1})x_1 = x_0^{s-1}x_1 = y_s$$

pour $s \geq 1$ et

$$\begin{aligned}
\widetilde{\varphi}_\lambda(y_sy_tu) &= \widetilde{\varphi}_\lambda(x_0^{s-1}x_1x_0^{t-1}x_1u)\\
&= x_0^{s-1}(x_1 + \lambda x_0)x_0^{t-1}\widetilde{\varphi}_\lambda(x_1u)\\
&= x_0^{s-1}x_1x_0^{t-1}\widetilde{\varphi}_\lambda(x_1u) + \lambda x_0^{s+t-1}\widetilde{\varphi}_\lambda(x_1u)\\
&= x_0^{s-1}x_1\widetilde{\varphi}_\lambda(x_0^{t-1}x_1u) + \lambda\widetilde{\varphi}_\lambda(x_0^{s+t-1}x_1u)\\
&= y_s\widetilde{\varphi}_\lambda(y_tu) + \lambda\widetilde{\varphi}_\lambda(y_{s+t}u)
\end{aligned}$$

pour s et t entiers positifs, $u \in \mathfrak{H}^1$. Ceci montre que $\widetilde{\varphi}_\lambda$ n'est autre que la restriction de φ_λ à $\mathfrak{H}^1$.

Pour $u = wx_1 \in \mathfrak{H}x_1$ on a

$$\varphi_\lambda \circ \varphi_{-\lambda}(u) = \varphi_\lambda \circ \varphi_{-\lambda}(wx_1) = \varphi_\lambda\bigl(\psi_{-\lambda}(w)x_1\bigr) = \bigl(\psi_\lambda \circ \psi_{-\lambda}(w)\bigr)x_1 = wx_1 = u$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_\lambda\bigl(y_s\varphi_{-\lambda}(y_tu)\bigr) &= \varphi_\lambda\bigl(x_0^{s-1}x_1\varphi_{-\lambda}(x_0^{t-1}x_1wx_1)\bigr)\\ &= \varphi_\lambda\bigl(x_0^{s-1}x_1x_0^{t-1}(x_1-\lambda x_0)\psi_{-\lambda}(w)x_1\bigr)\\ &= x_0^{s-1}(x_1+\lambda x_0)x_0^{t-1}x_1wx_1\\ &= x_0^{s-1}x_1x_0^{t-1}x_1wx_1 + \lambda x_0^{s+t-1}x_1wx_1\\ &= y_sy_tu + \lambda y_{s+t}u.\end{aligned}$$

Cette relation, que nous venons d'établir pour $u \in \mathfrak{H}x_1$, est encore vraie pour $u = e$:

$$\varphi_\lambda\bigl(y_s\varphi_{-\lambda}(y_t)\bigr) = \varphi_\lambda(y_sy_t) = y_s\varphi_\lambda(y_t) + \lambda y_{s+t} = y_sy_t + \lambda y_{s+t}$$

et par linéarité elle s'étend à $\mathfrak{H}^1 = Ke + \mathfrak{H}x_1$. Pour $u = wx_0^n$ avec $w \in \mathfrak{H}^1$ et $n \geq 0$ on a

$$\varphi_\lambda(u) = \varphi_\lambda(w)x_0^n, \quad \varphi_{-\lambda}(y_tu) = \varphi_{-\lambda}(y_tw)x_0^n$$

et

$$\varphi_\lambda\bigl(y_s\varphi_{-\lambda}(y_tu)\bigr) = \varphi_\lambda\bigl(y_s\varphi_{-\lambda}(y_tw)\bigr)x_0^n = (y_sy_tw + \lambda y_{s+t}w)x_0^n = y_sy_tu + \lambda y_{s+t}u.$$

De nouveau par linéarité cette relation s'étend à $u \in \mathfrak{H}$.

Pour $u \in \mathfrak{H}$ et λ_1, λ_2 dans K on a

$$\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2}(ux_1) = \varphi_{\lambda_1} \circ \psi_{\lambda_2}(u)x_1 = \psi_{\lambda_1+\lambda_2}(u)x_1 = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}(ux_1)$$

et enfin, pour $w \in \mathfrak{H}^1$,

$$\varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2}(wx_0^n) = \varphi_{\lambda_1} \circ \varphi_{\lambda_2}(w)x_0^n = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}(w)x_0^n = \varphi_{\lambda_1+\lambda_2}(wx_0^n).$$

2) Comme $\varphi_\lambda(wx_1) = \psi_\lambda(w)x_1$, on a

$$\varphi_\lambda(y_{\underline{s}}) = x_0^{s_1-1}(x_1+\lambda x_0)\cdots x_0^{s_{k-1}-1}(x_1+\lambda x_0)x_0^{s_k-1}x_1$$

pour $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_k)$.

On développe le membre de droite: on obtient une somme de 2^{k-1} termes, correspondant aux choix entre x_1 et λx_0 dans chacun des $k-1$ facteurs $(x_1 + \lambda x_0)$. Le choix x_1 donne $* =$, tandis que le choix λx_0 donne $* = +$.

3)

a) Montrons, par récurrence sur $k-\ell \geq 0$, que l'on a

$$\widehat{\mathsf{Li}}_{y_{s_1}\cdots y_{s_{\ell-1}}\varphi_1(y_{s_\ell}\cdots y_{s_k})}(x) = \sum_{n_1>n_2\ldots>n_\ell\geq n_{\ell+1}\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{x^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}.$$

Pour $k-\ell=0$ cette relation est claire puisque $\varphi_1(y_{s_k}) = y_{s_k}$ et $\widehat{\mathsf{Li}}_{y_{\underline{s}}}(x) = \mathsf{Li}_{\underline{s}}(x)$.

Supposons donc $k-\ell \geq 1$. On a

$$\varphi_1(y_{s_\ell}\cdots y_{s_k}) = y_{s_\ell}\varphi_1(y_{s_{\ell+1}}\cdots y_{s_k}) + \varphi_1(y_{s_\ell+s_{\ell+1}}y_{s_{\ell+2}}\cdots y_{s_k}).$$

Cela correspond à la partition de l'ensemble des $(n_1,\ldots,n_k)$ vérifiant

$$n_1 > n_2 \ldots > n_\ell \geq n_{\ell+1} \geq \cdots \geq n_k \geq 1$$

en deux sous-ensembles, le premier avec $n_\ell > n_{\ell+1}$ et le second avec $n_\ell = n_{\ell+1}$. L'hypothèse de récurrence donne

$$\sum_{n_1>n_2\ldots>n_\ell>n_{\ell+1}\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{x^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} = \widehat{\mathsf{Li}}_{y_{s_1}\cdots y_{s_\ell}\varphi_1(y_{s_\ell+1}\cdots y_{s_k})}(x)$$

et

$$\sum_{n_1>n_2\ldots>n_\ell=n_{\ell+1}\geq\cdots\geq n_k\geq 1} \frac{x^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} = \widehat{\mathsf{Li}}_{y_{s_1}\cdots y_{s_{\ell-1}}\varphi_1(y_{s_\ell+s_{\ell+1}}y_{s_{\ell+2}}\cdots y_{s_k})}(x),$$

ce qui établit la récurrence.

Pour $\ell=1$ on en déduit la relation

$$\mathsf{Li}^{(1)}_{\underline{s}}(x) = \sum_{n_1\geq n_2\ldots\geq n_k\geq 1} \frac{z^{n_1}}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}}$$

qui, pour $z=1$, donne

$$\zeta^{(1)}(\underline{s}) = \mathsf{Li}^{(1)}_{\underline{s}}(1) = \sum_{n_1\geq n_2\ldots\geq n_k\geq 1} \frac{1}{n_1^{s_1}\cdots n_k^{s_k}} \qquad \text{si} \quad s_1\geq 2.$$

b) Les relations

$$\mathsf{Li}^{1}_{\underline{s}}(x) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} \mathsf{Li}_{\underline{\sigma}}(x) \quad \text{et} \quad \mathsf{Li}_{\underline{s}}(x) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} (-1)^{a(\underline{\sigma})}\mathsf{Li}^{1}_{\underline{\sigma}}(x)$$

pour tout $\underline{s}=(s_1,\ldots,s_k)$, puis

$$\zeta^{(1)}(\underline{s}) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} \zeta(\underline{\sigma}) \quad \text{et} \quad \zeta(\underline{s}) = \sum_{\underline{\sigma}\in\mathcal{A}(\underline{s})} (-1)^{a(\underline{\sigma})}\zeta^{(1)}(\underline{\sigma})$$

quand $s_1 \geq 2$ résultent alors de la question 2).

4) Les deux lois $\star_\lambda$ et $ш_\lambda$ sont définies par transport de structure sur $\mathfrak{H}^1$ des lois de mélange $\star$ et $ш$ grâce à l'isomorphisme linéaire φ_λ: on a donc

$$\widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{u ш_\lambda v}(x) = \widehat{\mathrm{Li}}_{\varphi_\lambda(u ш_\lambda v)}(x) = \widehat{\mathrm{Li}}_{\varphi_\lambda(u) ш \varphi_\lambda(v)}(x) = \widehat{\mathrm{Li}}_{\varphi_\lambda(u)}(x) \cdot \widehat{\mathrm{Li}}_{\varphi_\lambda(v)}(x) = \widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{u}(x) \cdot \widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{v}(x)$$

et

$$\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u \star_\lambda v) = \widehat{\zeta} \circ \varphi_\lambda(u \star_\lambda v) = \widehat{\zeta}\bigl(\varphi_\lambda(u) \star \varphi_\lambda(v)\bigr) = \widehat{\zeta}\bigl(\varphi_\lambda(u)\bigr)\widehat{\zeta}\bigl(\varphi_\lambda(v)\bigr) = \widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u)\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(v).$$

5) Pour u et v dans $\mathfrak{H}^0$, on a

$$\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u ш_\lambda v) = \widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{u ш_\lambda v}(1) = \widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{u}(1) \cdot \widehat{\mathrm{Li}}^{(\lambda)}_{v}(1) = \widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u)\widehat{\zeta}^{(\lambda)}(v) = \widehat{\zeta}^{(\lambda)}(u \star_\lambda v),$$

donc $u ш_\lambda v - u \star_\lambda v$ est dans le noyau de $\widehat{\zeta}^{(\lambda)}$.

Enfin, pour $u \in \mathfrak{H}^0$,

$$y_1 ш_\lambda u = \varphi_{-\lambda}\bigl(\varphi_\lambda(y_1) ш \varphi_\lambda(u)\bigr) = \varphi_{-\lambda}\bigl(y_1 ш \varphi_\lambda(u)\bigr)$$

tandis que

$$y_1 \star_\lambda u = \varphi_{-\lambda}\bigl(\varphi_\lambda(y_1) \star \varphi_\lambda(u)\bigr) = \varphi_{-\lambda}\bigl(y_1 \star \varphi_\lambda(u)\bigr).$$

Comme $\varphi_\lambda(u) \in \mathfrak{H}^0$ on a

$$y_1 ш_\lambda u - y_1 \star_\lambda u = \varphi_{-\lambda}\bigl(y_1 ш \varphi_\lambda(u) - y_1 \star \varphi_\lambda(u)\bigr) \in \varphi_{-\lambda}\bigl(\ker \widehat{\zeta}\bigr) = \ker \widehat{\zeta}^{(\lambda)}.$$

Remarques

1) On peut écrire $\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{\underline{s}}(x)$ comme une intégrale itérée de Chen

$$\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{\underline{s}}(x) = \int_0^x \omega_0^{s_1-1}\omega'_\lambda \cdots \omega_0^{s_{k-1}-1}\omega'_\lambda\omega_0^{s_k-1}\omega_1$$

avec

$$\omega_0 = \frac{dx}{x}, \quad \omega_1 = \frac{dx}{1-x}, \quad \omega'_\lambda = \omega_1 + \lambda\omega_0 = \frac{\lambda + (1-\lambda)x}{x(1-x)} \cdot dx.$$

La loi de mélange $ш_\lambda$ reflète les équations différentielles satisfaites par les fonction $\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{\underline{s}}(x)$, qui sont

$$\frac{d}{dx}\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{\underline{s}}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{s_1-1,s_2,\ldots,s_k}(x) & \text{si } s_1 \geq 2, \\ \left(\dfrac{1}{1-x} + \dfrac{\lambda}{x}\right)\mathrm{Li}^{(\lambda)}_{s_2,\ldots,s_k}(x) & \text{si } s_1 = 1 \text{ et } k \geq 2, \\ \dfrac{1}{1-x} & \text{si } s_1 = 1 \text{ et } k = 1. \end{cases}$$

2) Pour $\lambda = 0$, la loi $\star_0$ coïncide avec la loi harmonique $\star$ de Hoffmann, puisque φ_0 est l'identité.

Pour s et t entiers positifs et $\lambda \in K$ on a

$$y_s \star_\lambda y_t = y_s y_t + y_t y_s + (1 - 2\lambda) y_{s+t}.$$

La relation

$$y_s u \star_\lambda y_t v = y_s (u \star_\lambda y_t v) + y_t (y_s u \star_\lambda v) + (1 - 2\lambda) y_{s+t} (u \star_\lambda v)$$

est donc vraie pour $\lambda = 0$, u et v dans $\mathfrak{H}^1$, et elle est encore vraie quand $\lambda \in K$, $u = v = e$, mais elle n'est pas vraie par exemple quand $\lambda \neq 0$ $u = e$ et $v = y_r$, $r \geq 1$.