Exercices - Feuille A `18 Février 2004`

Exercice A1.

a) Soient a et n des entiers ≥ 2. On suppose que $a^n - 1$ est premier. Montrer que $a = 2$ et que n est premier.
Quand p est un nombre premier on note $\mathsf{M}_p = 2^p - 1$ (*nombre de Mersenne d'indice* p).

b) Soient p un nombre premier et q un facteur premier de M_p. Vérifier $q \equiv 1 \pmod p$.

c) On dit qu'un nombre entier positif est *parfait* s'il est égal à la somme de ses diviseurs distincts de lui-même.
Montrer qu'un entier pair est parfait si et seulement s'il est de la forme $2^{p-1}\mathsf{M}_p$ avec p premier impair et $\mathsf{M}_p = 2^p - 1$ nombre premier de Mersenne.

Exercice A2.

a) Soient a et n des entiers ≥ 2. On suppose que $a^n + 1$ est premier. Montrer a est pair et que n est une puissance de 2.
Quand n est un nombre entier ≥ 0 on note $\mathsf{F}_n = 2^{2^n} + 1$ (*nombre de Fermat d'indice* n).

b) Vérifier $\mathsf{F}_n = \mathsf{F}_0\mathsf{F}_1 \cdots \mathsf{F}_{n-1} + 2$ pour $n \geq 1$. En déduire $\mathrm{pgcd}(\mathsf{F}_n, \mathsf{F}_m) = 1$ pour $n \neq m$.

c) Montrer que F_5 est divisible par 641
`Indication:` $641 = 2^4 + 5^4 = 5 \cdot 2^7 + 1$.

d) Soit p un diviseur premier de F_n. Vérifier

$$p \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}.$$

`Indication:` *Montrer que* 2 *est d'ordre* 2^{n+1} *modulo* p.

e) On admet le résultat suivant (qui sera établi quand on étudiera la loi de réciprocité quadratique): *si* p *est un nombre premier et congru à* 5 *modulo* 12, *alors*

$$3^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p.$$

En déduire que pour p premier impair le nombre F_p est premier si et seulement si

$$3^{(\mathsf{F}_p-1)/2} \equiv -1 \pmod{\mathsf{F}_p}.$$

Exercice A3.

a) Vérifier

$$2^{340} \equiv 1 \pmod{341}.$$

b) Vérifier que le nombre 561 est un *nombre de Carmichael* :

$$a^{560} \equiv 1 \pmod{561} \quad \text{pour tout } a \in \mathbf{Z} \text{ avec } (a, n) = 1.$$

http://www.math.jussieu.fr/~miw/enseignement.html