CHAPITRE 4

REPÈRES PROJECTIFS, GROUPE $\mathrm{PGL}(V)$ ET BIRAPPORT

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps.

18. Birapport pour l'Agrégation

Le birapport étant la seule partie de géométrie projective à figurer explicitement dans le programme de l'Agrégation, nous en donnons ici une présentation rapide (et calculatoire), que le lecteur pourra comparer avec celle de la section suivante.

18.1. Homographies, repères projectifs et birapport. —

Notation 18.1. — L'espace projectif $\mathbb{P}^1(k)$ est l'ensemble des coordonnées homogènes $[x, y]$, où $(x, y) \neq (0, 0)$ et $[x, y] = [\lambda x, \lambda y]$ pour tout $\lambda \in k^\times$. En particulier, si $y \neq 0$, on a $[x, y] = [x/y, 1]$.

On identifie tout élément x de k avec le point $[x, 1]$ de $\mathbb{P}^1(k)$. D'autre part, on note ∞ l'unique point de $\mathbb{P}^1(k)$ pour lequel $y = 0$, i.e. $\infty = [1, 0]$ ($= [t, 0]$ pour tout $t \in k^\times$). On obtient ainsi : [(1)]

$$\mathbb{P}^1(k) = k \sqcup \{\infty\} = \big\{[x, 1] \mid x \in k\big\} \sqcup \big\{[1, 0]\big\}. \tag{†}$$

***Définition 18.2* (Homographies).** — L'action linéaire de $\mathrm{GL}_2(k)$ sur k^2 :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

induit une action de $\mathrm{GL}_2(k)$ sur $\mathbb{P}(k^2) = \mathbb{P}^1(k)$, donnée par

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} [x, y] = [ax + by, cx + dy]. \tag{1}$$

Avec l'identification (†), on obtient que $\mathrm{GL}_2(k)$ agit sur $k \sqcup \{\infty\}$ par homographies :

(i) Pour tout $x \in k$, on a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax + b}{cx + d} \in k \sqcup \{\infty\} \tag{2}$$

le terme de droite étant ∞ si et seulement si $cx + d = 0$.

(ii) On a :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \infty = \frac{a}{c}. \tag{2'}$$

---

(1) Le symbole $\sqcup$ désigne une réunion *disjointe*.

Si $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de sa valeur absolue, $\dfrac{a}{c}$ est la limite du rapport $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ lorsque $|x|$ tend vers $+\infty$. Pour un corps quelconque k, (2′) s'obtient en revenant à (1) appliqué à $\infty = [1, 0]$.

Définition 18.3 **(Homographies de $\mathbb{P}(V)$).** — De façon plus générale, soit V un k-ev de dimension $n \geq 2$. Pour tout $v \in V - \{0\}$, on note $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$ (i.e. la droite engendrée par v). Alors l'action de $G = \mathrm{GL}(V)$ sur V induit une action de G sur $\mathbb{P}(V)$, donnée par : $g \cdot [v] = [gv]$ pour tout $v \in V - \{0\}$ et $g \in G$.

Alors, un élément g de G agit trivialement sur $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si g laisse stable chaque droite de V. C'est un exercice classique (cf. 19.1) de montrer que ceci est le cas ssi g appartient au sous-groupe des homothéties : $H = \{\lambda\, \mathrm{id}_V \mid \lambda \in k^\times\}$.

Par conséquent, le « groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(V)$ » (i.e. des bijections de $\mathbb{P}(V)$ induites par un élément de $\mathrm{GL}(V)$) est $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$. Par analogie avec le cas où $V = k^2$, ses éléments sont appelés *homographies* de $\mathbb{P}(V)$.

Notation. Pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ on notera $\overline{g}$ son image dans $\mathrm{PGL}(V)$.

Définition 18.4 **(Repères de $\mathbb{P}^1(k)$).** — Soit V un k-ev de dimension 2. Un *repère projectif* de $\mathbb{P}(V)$ est un triplet (p_0, p_1, p_2) de points deux à deux distincts. On notera $\mathrm{RP}(V)$ l'ensemble de ces repères.

Lorsque $V = k^2$, on dira que le triplet $(\infty, 0, 1)$, donné par les trois points $[1, 0]$, $[0, 1]$ et $[1, 1]$ est le repère « standard » de $\mathbb{P}^1(k)$.

Proposition 18.5. — (i) $\mathrm{GL}_2(k)$ *agit transitivement sur* $\mathrm{RP}(k^2)$ *et le stabilisateur de chaque repère est le sous-groupe H des homothéties.*

(ii) *Par conséquent,* $\mathrm{PGL}_2(k) = \mathrm{GL}_2(k)/H$ *agit de façon libre et transitive sur* $\mathrm{RP}(k^2)$.

Démonstration. — Soit (e_1, e_2) la base standard de $V = k^2$ et soit $\mathscr{R} = ([v_1], [v_2], [v_3])$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$. Alors v_1, v_2, v_3 sont deux à deux linéairement indépendants, donc $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ est une base de V et v_3 s'écrit dans cette base $v_3 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$ avec $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Alors l'élément g de $\mathrm{GL}(V)$ défini par $g(e_i) = \lambda_i v_i$ pour $i = 1, 2$ envoie $\infty = [e_1]$ sur v_1, $0 = [e_2]$ sur $[v_2]$ et $1 = [e_1 + e_2]$ sur $[\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2] = [v_3]$. Ceci prouve que l'action est transitive.

Le stabilisateur de $\mathscr{R}$ est formé des $g \in \mathrm{GL}(V)$ qui préservent les droites kv_1, kv_2 et kv_3. Les deux premières conditions entraînent que la matrice de g dans la base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ est diagonale : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ et alors on voit que $g(v_3) = \alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2$ est colinéaire à v_3 ssi $\beta = \alpha$, i.e. ssi g est une homothétie. Ceci prouve (i), et (ii) en découle. $\square$

Définition 18.6 **(Birapport).** — Soient $p_i = [x_i, y_i]$ $(i = 1, \dots, 3)$ trois points distincts de $\mathbb{P}^1(k)$ et $p_4 = [x_4, y_4]$ un quatrième point. Le birapport du quadruplet (p_1, p_2, p_3, p_4), noté $[p_1, p_2, p_3, p_4]$, est le point suivant de $\mathbb{P}^1(k)$:

$$(\star) \qquad [p_1, p_2, p_3, p_4] = \left[\frac{x_4 y_2 - x_2 y_4}{x_3 y_2 - x_2 y_3}, \frac{x_4 y_1 - x_1 y_4}{x_3 y_1 - x_1 y_3}\right].$$

Il est bien défini, car si on remplace chaque (x_i, y_i) par $\lambda_i(x_i, y_i)$, alors chaque coordonnée homogène du birapport est multipliée par $\lambda_4\lambda_3^{-1}$.

Si $p_i \in k$ **et si** l'on écrit $p_i = [x_i, 1]$, l'expression devient :

$$(\star\star) \qquad [p_1, p_2, p_3, p_4] = \left[\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}, \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1}\right].$$

Dans les deux cas, on a la donnée de deux rapports, ce qui explique le nom de *birapport*.

Remarquons tout de suite que $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ est égal à 0 (resp. ∞) ssi $x_4y_2 - x_2y_4 = 0$ (resp. $x_1y_4 - x_4y_1 = 0$), i.e. ssi $p_4 = p_2$ (resp. $p_4 = p_1$).

Remarque 18.7. — Si $(p_0, p_1, p_2) = (\infty, 0, 1)$, i.e. si $[x_1, y_1] = [1, 0]$, $[x_2, y_2] = [0, 1]$ et $[x_3, y_3] = [1, 1]$, alors pour tout $p_4 = [x_4, y_4]$ on a :

$$[\infty, 0, 1, p_4] = \left[\frac{x_4}{1}, \frac{-y_4}{-1}\right] = p_4.$$

Rappel 18.8. — On rappelle que $\mathrm{GL}_2(k)$ est engendré par les matrices

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad U(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad H(\mu) = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{pour } \alpha \in k,\ \mu \in k^\times,$$

qui correspondent respectivement aux homographies $x \mapsto 1/x$, $x \mapsto x + \alpha$, et $x \mapsto \mu x$. En effet, en conjuguant $U(\alpha)$ resp. $H(\mu)$ par S on obtient aussi les matrices $U'(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \alpha & 1 \end{pmatrix}$ et $H'(\mu) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ et l'on sait que toute matrice $A \in \mathrm{GL}_2(k)$ peut être ramenée à la matrice identité I_2 par des opérations élémentaires, i.e. multiplication par une matrice d'un des types précédents.

Lemme 18.9. — *Le birapport est invariant par l'action de* $\mathrm{GL}_2(k)$, *i.e. on a :*

$$\big[g(p_1), g(p_2), g(p_3), g(p_4)\big] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$$

pour tout $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in \mathrm{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$ *et* $g \in \mathrm{GL}_2(k)$.

Démonstration. — D'après la définition $(\star)$ du birapport, ceci se vérifie directement pour l'une des matrices $S, U(\alpha)$ ou $H(\mu)$, d'où le résultat d'après le rappel précédent. [(2)] $\square$

Théorème 18.10. — *Deux éléments* (p_1, p_2, p_3, p_4) *et* (q_1, q_2, q_3, q_4) *de* $\mathrm{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$ *sont conjugués (de façon unique) par l'action de* $\mathrm{PGL}_2(k)$ *ssi* $[p_1, \dots, p_4] = [q_1, \dots, q_4]$.

Démonstration. — S'il existe $g \in \mathrm{PGL}_2(k)$ tel que $q_i = g(p_i)$ pour $i = 1, \dots, 4$ alors $[q_1, \dots, q_4] = [p_1, \dots, p_4]$ d'après le lemme précédent.

Réciproquement, supposons $[q_1, \dots, q_4] = [p_1, \dots, p_4]$. D'après la proposition 18.5, il existe $g, h \in \mathrm{PGL}_2(k)$ (uniques) envoyant respectivement (p_1, p_2, p_3) et (q_1, q_2, q_3) sur $(\infty, 0, 1)$. On a donc $h^{-1}g(p_i) = q_i$ pour $i = 1, 2, 3$ (et $h^{-1}g$ est *l'unique* homographie ayant cette propriété).

D'autre part, d'après 18.7 et 18.9, on a :

$$g(p_4) = [\infty, 0, 1, g(p_4)] = [p_1, \dots, p_4] = [q_1, \dots, q_4] = [\infty, 0, 1, h(q_4)] = h(q_4),$$

d'où aussi $h^{-1}g(p_4) = q_4$. $\square$

Rappel 18.11. — On notera V_4 le sous-groupe de S_4 formé de l'identité et des trois produits de deux transpositions de supports disjoints, i.e. les éléments $(13)(24)$, $(14)(23)$ et $(12)(34)$. C'est un sous-groupe distingué de S_4 et son intersection avec le sous-groupe

$$S_3 = \{\sigma \in S_4 \mid \sigma(4) = 4\}$$

égale $\{\mathrm{id}\}$. Par conséquent, l'application de multiplication $V_4 \times S_3 \to S_4$, $(v, \sigma) \mapsto v\sigma$ est injective, et comme $|V_4 \times S_3| = 24 = |S_4|$, cette application est bijective. Donc S_4 est le produit semi-direct de V par S_3.

Par conséquent, on obtient un isomorphisme $S_4/V_4 \xrightarrow{\sim} S_3$ et l'on notera $\pi : S_4 \to S_3$ la composée de la projection $S_4 \to S_4/V_4$ et de cet isomorphisme.

[(2)] Voir plus loin (19.12) pour une autre démonstration.

Notation 18.12. — On note $Q^\times$ l'ensemble des quadruplets de points de $\mathbb{P}^1(k)$ *deux à deux distincts* et $X(k^2) = \mathrm{RP}(k^2) \times \mathbb{P}^1(k)$. Alors, d'après 1.4 et 1.3, S_4 (resp. S_3) agit à gauche sur $Q^\times$ (resp. sur $X(k^2)$) et l'on peut donc considérer les applications $[\cdot]\circ\sigma : Q^\times \to \mathbb{P}^1(k)$ (resp. $[\cdot]\circ\tau : X(k^2) \to \mathbb{P}^1(k)$), pour tout $\sigma \in S_4$ (resp. $\tau \in S_3$).

Remarque 18.13. — Soient $\omega = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$ et $\alpha = [p_1, p_2, p_3, p_4]$. En écrivant :

$$\alpha = \Big[(x_4y_2 - x_2y_4)(x_3y_1 - x_1y_3), (x_4y_1 - x_1y_4)(x_3y_2 - x_2y_3)\Big]$$

on voit que α est inchangé si l'on applique à ω les permutations (13)(24), (14)(23) ou (12)(34). Par conséquent, pour tout $v \in V_4$ les applications $[\cdot]$ et $[\cdot]\circ v$ coïncident sur $Q^\times$.

Corollaire 18.14. — *Soient $p_1, \dots, p_4$ quatre points distincts de $\mathbb{P}^1(k)$. Il existe une unique homographie h qui échange p_1 et p_2 d'une part et p_3 et p_4 d'autre part. De plus, h est une involution, i.e. $h \circ h = \mathrm{id}$.*

Démonstration. — D'après la remarque précédente, on a $[p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ donc, d'après le théorème 18.10, il existe une unique homographie h envoyant (p_1, p_2, p_3, p_4) sur (p_2, p_1, p_4, p_3). Alors $h^2 = h \circ h$ fixe chaque p_i donc, d'après 18.5, $h^2 = \mathrm{id}$. □

Donnons une autre démonstration de 18.13.

Proposition 18.15. — *Soient V un k-ev de dimension 2 et $\{A, D\}$ et $\{B, E\}$ deux paires disjointes de points de $\mathbb{P}(V)$, avec $A \neq D$.*

(i) *Il existe une unique homographie h qui échange A et D d'une part, et B et E d'autre part.*

(ii) *h est une involution.*

Démonstration. — Comme A, D, B sont deux à deux distincts, ils forment un repère projectif. Il existe donc une base (e_1, e_2) de V telle que $[e_1] = A$, $[e_2] = D$ et $[e_1 + e_2] = B$. Comme E est distinct de A et B, alors $E = [ae_1 + be_2]$ pour certains $a, b \in k^\times$.

On cherche une matrice $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ qui échange A et D d'une part, et B et E d'autre part. La première condition signifie que g envoie e_1 sur λe_2 et e_2 sur μe_1, pour certains $\lambda, \mu \in k^\times$, i.e. que g est de la forme $g = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons déjà que $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ est une homothétie, donc l'homographie $h = \overline{g}$ est une involution (car $\overline{g}^2 = \overline{g^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$). Ceci prouve (ii).

D'autre part, on veut que $g(e_1 + e_2) = \mu e_1 + \lambda e_2$ soit colinéaire à $ae_1 + be_2$, ce qui équivaut à $b\mu = a\lambda$. Posant $\nu = \lambda/b = \mu/a$, on a donc $\lambda = b\nu$ et $\mu = a\nu$, d'où :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & a\nu \\ b\nu & 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Il en résulte que $h = \overline{g}$ est l'unique homographie échangeant A et D et envoyant B sur E. Comme $h^2 = \mathrm{id}$, on a donc aussi $h(E) = B$, d'où (i). La proposition est démontrée. □

Théorème 18.16. — (i) *L'action à gauche de S_3 sur $\mathrm{RP}(k^2)$ induit un morphisme de groupes $\phi : S_3 \to \mathrm{PGL}_2(k)$ tel que, pour tout $x = (p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(k^2)$, $p_4 \in \mathbb{P}^1(k)$ et $\sigma \in S_3$, on ait :*

$$\phi(\sigma)\big([p_1, p_2, p_3, p_4]\big) = \big[\sigma \cdot x, p_4\big] = \big[p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_4\big].$$

(ii) *ϕ est un isomorphisme de S_3 sur le sous-groupe $\mathscr{G}$ de* $\mathrm{PGL}_2(k)$ *formé de* id *et des homographies suivantes :*

$$\phi((12))(t) = \frac{1}{t}, \qquad \phi((23))(t) = 1 - t, \qquad \phi((13))(t) = \frac{t}{t-1},$$
$$\phi(c)(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad \phi(c^{-1})(t) = 1 - \frac{1}{t},$$

où $c = (123) = (12)(23)$.

(iii) *De plus, pour tout $\omega = (p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$ et $\sigma \in S_4$, on a :*

$$\phi\big(\pi(\sigma)\big)\big([p_1, p_2, p_3, p_4]\big) = \big[\sigma \cdot \omega\big] = \big[p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_{\sigma^{-1}(4)}\big].$$

Démonstration. — Remarquons d'abord que pour tout $x = (p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(k^2)$, $p_4 \in \mathbb{P}^1(k)$ et $\sigma \in S_3$, $[\sigma \cdot x, p_4]$ ne dépend que du birapport $t = [x, p_4]$.

En effet, supposons que $[x, p_4] = [y, q_4]$, avec $y = (q_1, q_2, q_3) \in \mathrm{RP}(k^2)$ et $q_4 \in \mathbb{P}^1(k)$. Alors il existe $h \in \mathrm{PGL}_2(k)$ tel que $q_i = h(p_i)$ pour tout i et l'on a :

$$[\sigma{\cdot}y, q_4] = \big[h(p_{\sigma^{-1}(1)}), h(p_{\sigma^{-1}(2)}), h(p_{\sigma^{-1}(3)}), h(p_4)\big] = \big[p_{\sigma^{-1}(1)}, p_{\sigma^{-1}(2)}, p_{\sigma^{-1}(3)}, p_4\big] = [\sigma{\cdot}x, p_4].$$

Donc il existe une application $R_\sigma : \mathbb{P}^1(k) \to \mathbb{P}^1(k)$ vérifiant $R_\sigma \circ [\cdot] = [\cdot] \circ \sigma$, et R_σ est unique car tout élément t de $\mathbb{P}^1(k)$ est un birapport, puisque $t = [\infty, 0, 1, t]$.

Pour tout $\sigma, \tau \in S_3$, on a alors :

$$R_\sigma \circ R_\tau \circ [\cdot] = R_\sigma \circ [\cdot] \circ \tau = [\cdot] \circ \sigma \circ \tau = [\cdot] \circ (\sigma\tau) = R_{\sigma\tau} \circ [\cdot]$$

d'où, par unicité, $R_{\sigma\tau} = R_\sigma \circ R_\tau$.

Il est clair que $R_{\mathrm{id}} = \mathrm{id}$. En utilisant que $t = [\infty, 0, 1, t]$ et la formule $(\star)$ on obtient que

$$R_{(12)}(t) = R_{(12)}\big([\infty, 0, 1, t]\big) = [0, \infty, 1, t] = \left[\frac{t \cdot 0 - 1}{t \cdot 0 - 1}, \frac{t - 0}{1 - 0}\right] = [1, t] = \frac{1}{t}$$

$$R_{(23)}(t) = R_{(23)}\big([\infty, 0, 1, t]\big) = [\infty, 1, 0, t] = \left[\frac{t \cdot 1 - 1}{0 - 1}, \frac{0 - 1}{0 - 1}\right] = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ce sont des homograhies, i.e. des éléments de $\mathrm{PGL}_2(k)$, et comme (12) et (23) engendrent S_3 ceci, combiné avec $R_{\sigma\tau} = R_\sigma \circ R_\tau$, entraîne que $\phi : \sigma \mapsto R_\sigma$ est un morphisme de groupes de S_3 vers $\mathrm{PGL}_2(k)$. De plus, ϕ est injectif car sinon $\mathrm{Ker}(\phi)$ contiendrait le sous-groupe distingué $A_3 = \{\mathrm{id}, c, c^2\}$ et l'on aurait $R_{(12)} = R_{(23)}$, ce qui n'est pas le cas.

Enfin, comme $c = (12)(23)$, $c^{-1} = (23)(12)$ et $(13) = (12)(23)(12)$ on obtient :

$$R_c(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad R_{c^{-1}}(t) = 1 - \frac{1}{t}, \qquad R_{(13)}(t) = \frac{t}{t-1}.$$

Ceci prouve (i) et (ii).

Enfin, tout $\sigma \in S_4$ s'écrit de façon unique $\sigma = v\pi(\sigma)$ avec $v \in V_4$. Alors, pour tout $\omega \in Q^\times$ on a, d'après (i) et 18.13 ou 18.15 :

$$[\sigma \cdot \omega] = [v\pi(\sigma) \cdot \omega] = [\pi(\sigma) \cdot \omega] = R_{\pi(\sigma)}([\omega]).$$

Ceci prouve (iii). □

Remarque 18.17. — Comme $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)$ n'a que trois éléments : $0, 1, \infty$, il découle de la démonstration précédente que $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{F}_2) \simeq S_3$.

18.2. Divisions harmoniques ou équianharmoniques. — Commençons par la proposition suivante.

Proposition 18.18. — *Soient V un k-ev de dimension 2, $p = [v_1]$ un point de $\mathbb{P}(V)$ et G_p son stabilisateur dans* $\mathrm{PGL}(V)$*. Alors G_p agit sur la droite affine $\mathscr{D} = \mathbb{P}(V) - \{p\}$ par automorphismes affines, et tout élément de* $\mathrm{GA}(\mathscr{D})$ *est ainsi obtenu.*

Démonstration. — Complétons v_1 en une base $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ de V et identifions $\mathrm{GL}(V)$ à $\mathrm{GL}_2(k)$ au moyen de cette base. Alors le stabilisateur de $[v_1]$ dans $\mathrm{GL}(V)$ est le sous-groupe formé des matrices triangulaires supérieures, qui est isomorphe au produit direct du groupe H des homothéties par le groupe

$$G_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha \in k^\times,\ b \in k \right\}.$$

Il en résulte que la projection $\pi : \mathrm{GL}(V) \to \mathrm{PGL}(V)$ induit un isomorphisme ϕ de G_1 sur G_p. D'autre part, notant (v_1^*, v_2^*) la base duale de $\mathscr{B}$, l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \{p\}$ s'identifie à la droite affine

$$\mathscr{D} = \{v \in V \mid v_2^*(v) = 1\} = v_2 + \{x v_1 \mid x \in k\}$$

et pour tout $g = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dans G_1 et tout $v = v_2 + x v_1$, on a :

$$\phi(g) \cdot [v] = [g(v)] = [v_2 + b v_1 + \alpha x v_1] = [v_2 + (\alpha x + b) v_1].$$

Ceci montre que G_p agit sur $\mathscr{D} \cong k$ par les automorphismes affines $x \mapsto \alpha x + b$, et tout élément de $\mathrm{GA}(\mathscr{D})$ est ainsi obtenu. $\square$

Fixons maintenant $x = (p_1, \dots, p_4) \in Q^\times$ et notons $O(x) = \{[\sigma \cdot x] \mid \sigma \in S_4\}$ l'ensemble des valeurs prises sur x par les « birapports permutés » $[\cdot] \circ \sigma$. On déduit du théorème 18.16 le lemme suivant :

Lemme 18.19. — *$O(x)$ est l'orbite de $t = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ sous l'action de $\mathscr{G}$ et de S_4 définie en* 18.16 (iii)*, et le stabilisateur Γ_x de x dans S_4 est l'image inverse dans S_4 du stabilisateur $\mathscr{G}_t$, i.e. on a $\Gamma_x / V_4 \simeq \mathscr{G}_t$.*

Terminologie 18.20. — On dira que la configuration de points $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in Q^\times$ (resp. la valeur du birapport $t = [p_1, p_2, p_3, p_4] \in k - \{0, 1\}$) est « *particulière* » si $\mathscr{G}_t \neq \{\mathrm{id}\}$, i.e. si l'ensemble $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ est laissé stable par une homographie qui fixe au moins l'un des p_i, par exemple p_4.

On décrit plus bas les différents cas, en supposant pour simplifier que $\mathrm{car}(k) > 3$. (On laisse aux lecteurs intéressés la discussion des cas particuliers en caractéristique 2 ou 3.)

Divison harmonique et variantes 18.21. — Supposons $\mathscr{G}_t = \{\mathrm{id}, R_\tau\}$ pour une transposition τ. Dans ce cas, selon que τ égale (12), (23) ou (13), on obtient que t vérifie $t^2 = 1$, resp. $2t = 1$, resp. $t(t-1) = t$, et comme $t \neq 0, 1$ ceci entraîne que t vaut -1, resp. $1/2$, resp. 2.

Dans tous les cas, prenant le point fixe p_4 comme point à l'infini, la restriction de R_τ à la droite affine $\mathscr{D} = \mathbb{P}^1(k) - \{p_4\}$ est une involution affine qui fixe un point p_i et échange les deux autres p_j et p_ℓ, donc c'est la symétrie de centre le milieu O de $[p_j, p_\ell]$, d'où $p_i = O$. Réciproquement, si ces conditions sont vérifiées, la symétrie centrale précédente définit une homographie qui fixe p_4 et p_i et échange p_j et p_ℓ.

En résumé, ceci se produit ssi en plaçant l'un des points à l'infini, alors l'un des trois points restants est le milieu des deux autres dans la droite affine $\mathbb{P}^1(k) - \{p_\infty\}$. Plus précisément :

a) Si $\tau = (12)$ alors le birapport vaut -1 et des exemples de telles configurations sont $(-1, 1, 0, \infty)$ ou $(\infty, 0, 1, -1)$. Dans ce cas, on dit que les points (p_1, p_2, p_3, p_4) sont en **division harmonique**. D'après ce qui précède, ceci équivaut à dire qu'il existe une homographie qui fixe p_3 et p_4 et échange p_1, p_2 ou, de façon équivalente (d'après 18.15), qui fixe p_1 et p_2 et échange p_3, p_4. [(3)]

b) Si $\tau = (23)$ alors le birapport vaut $1/2$ et des exemples de telles configurations sont $(1/2, 1, 0, \infty)$ ou $(\infty, 0, 1, 1/2)$. Une configuration (p_1, p_2, p_3, p_4) vérifie cette condition ssi il existe une homographie qui fixe p_1 et p_4 et échange p_2, p_3 ou, de façon équivalente, qui fixe p_2 et p_3 et échange p_1, p_4. Ceci équivaut aussi à dire que (p_3, p_2, p_1, p_4) est une division harmonique.

c) Si $\tau = (13)$ alors le birapport vaut 2 et des exemples de telles configurations sont $(2, 1, 0, \infty)$ ou $(\infty, 0, 1, 2)$. Une configuration (p_1, p_2, p_3, p_4) vérifie cette condition ssi il existe une homographie qui fixe p_2 et p_4 et échange p_1, p_3 ou, de façon équivalente, qui fixe p_1 et p_3 et échange p_2, p_4. Ceci équivaut aussi à dire que (p_1, p_3, p_2, p_4) est une division harmonique.

Divison équianharmonique 18.22. — D'autre part, $\mathscr{G}_t$ égale le sous-groupe distingué $\{\mathrm{id}, R_c, R_c^2\}$ ssi t vérifie $t^2 - t + 1 = 0$, i.e. si t est une racine primitive 6-ième de l'unité. Dans ce cas, on dit que les points forment une divison **équi-anharmonique**.

Prenant p_1 comme point fixe et comme point à l'infini, la condition précédente équivaut à dire qu'il existe une bijection affine f de la droite $\mathscr{D} = \mathbb{P}^1(k) - \{p_1\}$ qui permute cycliquement les trois autres points.

Si $k = \mathbb{C}$ et si $(p_1, p_2, p_3) = (\infty, 0, 1)$, ceci se produit ssi $p_4 = \xi$ est l'une des racines primitives 6-ièmes de l'unité, i.e. $\xi = \exp(\pm i\pi/3)$, ce qui équivaut à dire que dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, les points $0, 1, \xi$ forment un triangle équilatéral. Ainsi, le quadruplet $(\infty, 0, 1, \xi)$ est une division équianharmonique, de birapport ξ.

19. Repères projectifs, groupe PGL(V) et $(n+1)$-rapport

Lemme 19.1. — *Soient V un k-ev et $f : V \to V$ un endomorphisme non nul tel que $f(D) \subset D$ pour toute droite D. Alors f est une homothétie.*

Démonstration. — Si $\dim(V) = 1$ tout endomorphisme non nul est une homothétie. On peut donc supposer $\dim(V) > 1$. Par hypothèse, pour tout $x \in V - \{0\}$ il existe $\lambda_x \in k$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Fixons un tel x_0 et posons $\lambda_0 = \lambda_{x_0}$.

Soit $y \in V - \{0\}$ arbitraire. Si $y = tx_0$ alors par linéarité $f(y) = tf(x_0) = \lambda_0 t x_0$ donc $\lambda_y = \lambda_0$. Si y et x_0 sont linéairement indépendants, alors l'égalité

$$f(x_0 + y) = \lambda_0 x_0 + \lambda_y y = \lambda_{x_0+y}(x_0 + y)$$

entraîne que $\lambda_y = \lambda_{x_0+y} = \lambda_0$. Donc $\lambda_y = \lambda_0$ pour tout $y \neq 0$ et donc $f = \lambda_0 \,\mathrm{id}_V$. Enfin, comme $f \neq 0$ par hypothèse, on a $\lambda_0 \neq 0$. □

19.1. Points projectivement indépendants et repères projectifs. — Pour toute la suite, on fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n+1$.

Définition 19.2. — Soit $N \leq n$. On dit que $N+1$ points $p_0, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$ sont **projectivement indépendants** si le sous-espace projectif qu'ils engendrent (cf. Déf. 16.7) est de dimension N. Si $N = 1$ (resp. $N = 2$, resp. $N = 3$), ceci équivaut à dire que p_0, p_1 sont *distincts*, resp. que p_0, p_1, p_2 sont *non alignés*, resp. que p_0, p_1, p_2, p_3 sont *non coplanaires*

[(3)] Il y a de nombreuses autres caractérisations géométriques des divisions harmoniques, voir par exemple les TD.

Remarque 19.3. — Attention, la donnée de $n+1$ points projectivement indépendants de $\mathbb{P}(V)$ ne suffit pas à déterminer des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$.

***Définition 19.4* (Repères projectifs)**. — (i) On dit qu'un $(n+2)$-uplet $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ de points de $\mathbb{P}(V)$ est un **repère projectif** si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants. On notera $\mathrm{RP}(V)$ l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(ii) Si $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ est une base de V, on appellera « repère (projectif) standard » associé à $\mathscr{B}$ le repère $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ où $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$.

Terminologie 19.5. — Lorsque $V = k^{n+1}$, on désigne $\mathbb{P}(k^{n+1})$ par $\mathbb{P}^n(k)$. Comme k^{n+1} est muni de la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$, alors $\mathbb{P}^n(k)$ est muni des coordonnées homogènes « canoniques » $[x_0, \ldots, x_n]$ et du repère projectif « canonique » $(p_0, \ldots, p_{n+1}) = ([e_0], \ldots, [e_n], [e_0 + \cdots + e_n])$.

19.2. Homographies de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$ et repères projectifs. — On a déjà défini en 18.3 les homographies de $\mathbb{P}(V)$: ce sont les éléments de $\mathrm{PGL}(V)$, i.e. les bijections de $\mathbb{P}(V)$ dans lui-même induites par un automorphisme linéaire de V. On a besoin d'étendre ceci au cas de deux k-ev E et F de même dimension.

Définition 19.6. — (i) Soient E, F deux k-espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Notons $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes (i.e. applications linéaires bijectives) de E sur F. Il est muni d'une action du groupe multiplicatif $k^\times$, définie pour tout $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $\lambda \in k^\times$ par : $\lambda \cdot \phi = \phi \circ (\lambda \,\mathrm{id}_E) = (\lambda \,\mathrm{id}_F) \circ \phi$.

Soient $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $\psi = \phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(F,E)$ l'isomorphisme réciproque. Alors ϕ transforme toute droite de E en une droite de F, donc induit une application $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, $D \mapsto \phi(D)$, qu'on notera $\mathbb{P}(\phi)$ ou simplement $\overline{\phi}$. Cette application est bijective, car elle admet pour réciproque l'application $\overline{\psi} : \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(E)$. Notant $\mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, on obtient donc une application :

$$\mathrm{Isom}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big), \quad \phi \mapsto \overline{\phi}.$$

Les bijections $\overline{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ ainsi obtenues s'appellent des **homographies** de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, et l'ensemble de ces homographies sera noté $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$. Si $F = E$, il s'identifie à $\mathrm{PGL}(E)$ (voir plus bas).

(ii) Notons que l'application $\phi \mapsto \overline{\phi}$ « respecte la composition des applications », i.e. si $\theta \in \mathrm{Isom}(F,V)$ on a $\overline{\theta \circ \phi} = \overline{\theta} \circ \overline{\phi}$. (En particulier, l'application $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$, $\phi \mapsto \overline{\phi}$ est un morphisme de groupes.)

Proposition 19.7. — *On conserve les notations précédentes. Soient* $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

(i) *Alors :* $\overline{\phi} = \overline{\psi} \iff$ *il existe* $\lambda \in k^\times$ *tel que* $\phi = \lambda\psi$.

(ii) *En particulier, le noyau du morphisme de groupes* $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ *est le sous-groupe* $k^\times \,\mathrm{id}_E$ *des homothéties de* E*, et donc* $\mathrm{PGL}(E)$ *s'identifie bien au groupe quotient* $\mathrm{GL}(E)/k^\times \,\mathrm{id}_E$.

(iii) *Pour tout sev* W *de* E*, on a* $\overline{\phi}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\phi(W))$*, donc* $\overline{\phi}$ *transforme tout sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(E)$ *en un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(F)$ *de même dimension.*

(iv) *Par conséquent, toute homographie* $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ *respecte la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère de* $\mathbb{P}(E)$ *en un repère de* $\mathbb{P}(F)$.

Démonstration. — (i) On a : $\overline{\phi} = \overline{\psi}$ si et seulement si $\overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi^{-1} \circ \phi}$ est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ de $\mathbb{P}(E)$. Or $f = \psi^{-1} \circ \phi$ est un automorphisme de E et d'après le lemme

19.1, $\overline{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$, ce qui équivaut à $\phi = \lambda\psi$. Ceci prouve (i), et (ii) en est un cas particulier.

(iii) Soit W un sev non nul de E et soit $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Alors $\phi(W)$ est un sev de F de même dimension que W et pour toute droite D de E on a : $D \subset W \Leftrightarrow \phi(D) \subset \phi(W)$. Il en résulte que

$$\overline{\phi}\big(\mathbb{P}(W)\big) = \{\overline{\phi}(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \{\phi(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \mathbb{P}(\phi(W)).$$

Ceci prouve (iii), et (iv) en découle. □

Définition 19.8. — Soient X, Y deux ensembles munis d'une action d'un groupe G. Une application $f : X \to Y$ est dite G-équivariante si $f(gx) = gf(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$.

Théorème 19.9 **(L'action de** $\mathrm{PGL}(V)$ **sur les repères projectifs)**
Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Posons $G = \mathrm{PGL}(V)$ et notons $\mathscr{R}_0$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

(i) *Pour chaque $\mathscr{R} \in \mathrm{RP}(V)$, il existe un* unique *$h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ tel que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$.*

(ii) *Ceci donne une bijection G-équivariante $\mathrm{RP}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Par conséquent, l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$ est libre et transitive.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{B}_0 = (e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de k^{n+1} et $\mathscr{R}_0 = (p_0, \dots, p_{n+1})$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

Soit $\mathscr{R} = (q_0, \dots, q_{n+1}) \in \mathrm{RP}(V)$. Pour $i = 0, \dots, n+1$, choisissons un vecteur $v_i \in V$ tel que $[v_i] = q_i$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V et v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout i.

Notons g l'élément de $\mathrm{Isom}(k^{n+1}, V)$ défini par $g(e_i) = \lambda_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$, il vérifie alors $g(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$.

Pour $h \in \mathrm{Isom}(k^{n+1}, V)$ arbitraire, la condition $h([e_i]) = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ équivaut à : il existe $\mu_0, \dots, \mu_n \in k^\times$ tels que $h(e_i) = \mu_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Sous ces conditions, $h(e_0 + \cdots + e_n) = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n$ est colinéaire à v_{n+1} ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mu_i = \lambda\lambda_i$ pour $i = 0, \dots, n$, c.-à-d. ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $h = \lambda g$, et cette condition équivaut à ce que h et g aient pour image $\overline{g}$ dans $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Ceci montre que $\overline{g}$ est l'unique élément de $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ tel que $\overline{g}(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$. Ceci prouve (i).

On obtient donc une bijection $\beta : \mathrm{RP}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Elle est G-équivariante car si $\beta(\mathscr{R}) = h$, i.e. $\mathscr{R} = h(\mathscr{R}_0)$, et si $\mathscr{R}' = g(\mathscr{R})$ avec $g \in G$, alors $\mathscr{R}' = gh(\mathscr{R}_0)$ et donc $\beta(\mathscr{R}') = gh$.

De plus, l'action de G sur $\Gamma = \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ est libre et transitive (car pour tout $h_0 \in \Gamma$, l'application $g \mapsto gh_0$ admet pour inverse l'application $h \mapsto hh_0^{-1}$), donc il en est de même de l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$. Ceci prouve (ii). □

Notation 19.10. — Conservons les notations précédentes et posons $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$. Pour chaque $x = (\mathscr{R}, q) \in X$, notant h l'unique homographie $\mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}(V)$ telle que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$, on pose $\phi(x) = h^{-1}(q)$. Ceci définit une application $\phi : X \to \mathbb{P}^n(k)$.

Théorème 19.11 **(« du** $(n+1)$**-rapport »)**. — [4] *Soient $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$ et $\phi : X \to \mathbb{P}^n(k)$ comme ci-dessus.*

(i) *ϕ est constante sur chaque orbite de G dans X et induit une application $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$ qui est* **bijective**.

[4] Cette terminologie est due à l'auteur, donc n'est peut-être pas standard.

(ii) *Pour tout* $x = (q_0, \dots, q_{n+2}) \in X$, *écrivons* $q_i = [v_i]$ *pour* $i = 0, \dots, n+2$. *Alors, pour toute base* $\mathscr{B}$ *de* V, *les coordonnées homogènes* ξ_i *de* $\phi(x) \in \mathbb{P}^n(k)$ *sont données par :*

$$(\star) \qquad \forall i = 0, \dots, n \qquad \xi_i = \frac{\operatorname{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \dots, v_n)}{\operatorname{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n)}.$$

Cette application $\phi : \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k)$ est appelée le « $(n+1)$-*rapport* », et le **birapport** lorsque $n = 1$.

Démonstration. — (i) Soient $x = (\mathscr{R}, q) \in X$ et $g \in G$, posons $x' = gx = (\mathscr{R}', q')$, où $\mathscr{R}' = g(\mathscr{R})$ et $q' = g(q)$. Soit h l'unique homographie de $\mathbb{P}^n(k)$ sur $\mathbb{P}(V)$ telle que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$; par définition on a $\phi(x) = h^{-1}(q)$. D'autre part, l'homographie gh envoie $\mathscr{R}_0$ sur $g(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$, donc par définition aussi, on a $\phi(x') = (gh)^{-1}(q') = h^{-1}g^{-1}(g(q)) = h^{-1}(q)$, d'où $\phi(x') = \phi(x)$. Ceci montre que ϕ est constante sur les G-orbites. Elle induit donc une application $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$, $Gx \mapsto \phi(x)$.

Pour montrer que $\overline{\phi}$ est bijective, remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$, l'ensemble

$$\theta(\alpha) = \Big\{ (h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)) \mid h \in \operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) \Big\}$$

est une orbite sous G : en effet, pour toute homographie $h : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}(V)$ *fixée*, on a : $\operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) = \{gh \mid g \in G\}$ et donc $\theta(\alpha)$ est la G-orbite du point $(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha))$ de X. Donc θ est une application $\mathbb{P}^n(k) \to X/G$ et d'après la définition de $\overline{\phi}$ on a $(\overline{\phi} \circ \theta)(\alpha) = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$.

D'autre part, pour tout $h \in \operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ et $q \in \mathbb{P}(V)$, $(\theta \circ \phi)(h(\mathscr{R}_0), q) = \theta(h^{-1}(q))$ est la G-orbite de $\big(h(\mathscr{R}_0), h(h^{-1}(q))\big) = (h(\mathscr{R}_0), q)$. Ceci montre que θ et $\overline{\phi}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve (i).

(ii) Choisissons arbitrairement des vecteurs $v_0, \dots, v_{n+2}$ tels que $[v_i] = q_i$ pour tout i. Alors $\mathscr{C} = (v_0, \dots, v_n)$ est une base de V donc on peut écrire de façon unique

$$(*) \qquad v_{n+1} = \mu_0 v_0 + \cdots + \mu_n v_n, \qquad v_{n+2} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$$

et l'on a $\mu_i \neq 0$ pour tout i puisque $\mathscr{R} = (q_0, \dots, q_{n+1})$ est un repère de V. Pour tout $i = 0, \dots, n$, notons $f_i : V \to k$ la forme linéaire définie par $f_i(u) = \operatorname{dét}_{\mathscr{C}}(v_0, \dots, u, \dots, v_n)$, où u se trouve à la i-ème place (à la place de v_i). Alors il résulte de $(*)$ et des propriétés du déterminant que l'on a :

$$(**) \qquad f_i(v_{n+2}) = \lambda_i, \qquad f_i(v_{n+1}) = \mu_i.$$

Soit g l'application linéaire $V \to k^{n+1}$ envoyant $\mu_i v_i$ sur e_i pour $i = 0, \dots, n$; alors $g(v_{n+1}) = e_{n+1}$ donc l'homographie $h : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k)$ définie par g envoie $\mathscr{R}$ sur $\mathscr{R}_0$ et donc on a $\phi(x) = h(q_{n+2}) = [g(v_{n+2})]$. De plus, comme $v_{n+2} = \sum_{i=0}^{n} (\lambda_i/\mu_i)\mu_i v_i$, on a :

$$g(v_{n+2}) = \sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda_i}{\mu_i} e_i$$

et donc, pour tout $i = 0, \dots, n$, sa i-ème coordonnée homogène est :

$$\xi = \frac{\lambda_i}{\mu_i} = \frac{\operatorname{dét}_{\mathscr{C}}(v_0, \dots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \dots, v_n)}{\operatorname{dét}_{\mathscr{C}}(v_0, \dots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n)}.$$

Enfin, si on remplace $\mathscr{C}$ par une base arbitraire $\mathscr{B}$ de V, on a $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\cdot) = \text{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})\,\text{dét}_{\mathscr{C}}(\cdot)$, donc le numérateur et le dénominateur dans la formule ci-dessus sont tous deux multipliés par le scalaire $\text{dét}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C}) \neq 0$ donc le quotient est inchangé. Ceci prouve la formule $(\star)$. $\square$

Il résulte immédiatement de cette définition du $(n+1)$-rapport qu'il est préservé par toute homographie, i.e. on a le :

Corollaire 19.12. — *Soient $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ deux espaces projectifs de même dimension n et soit $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ une homographie. Alors « f préserve le $(n+1)$-rapport », i.e. pour tout $(q_0, \dots, q_{n+2}) \in X(V) = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$, on a :*

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+2})] = [q_0, \dots, q_{n+2}].$$

Démonstration. — Notons $\mathscr{R}_0$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$ et soit $(q_0, \dots, q_{n+2}) = (\mathscr{R}, q_{n+2})$ un élément de $X(V)$.

D'après 19.7 (iv), $\mathscr{R}' = f(\mathscr{R})$ est un repère projectif de $\mathbb{P}(V')$; soit h' l'unique homographie $\mathbb{P}(V') \to \mathbb{P}^n(k)$ telle que $h'(\mathscr{R}') = \mathscr{R}_0$. Alors $h = h' \circ f$ est l'unique homographie $\mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k)$ telle que $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}_0$. Donc, par définition du $(n+1)$-rapport dans $\mathbb{P}(V')$ et $\mathbb{P}(V)$, on a :

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(q_{n+2})] = h'\big(f(q_{n+2})\big) = (h' \circ f)(q_{n+2}) = [q_0, \dots, q_{n+1}, q_{n+2}].$$

$\square$

Le corollaire précédent admet la « réciproque » suivante :

Proposition 19.13. — *Soient $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V')$ deux espaces projectifs de même dimension n et soit $f : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$ une application* bijective. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un repère projectif $\mathscr{R} = (q_0, \dots, q_{n+1})$ de $\mathbb{P}(V)$ tel que $(f(q_0), \dots, f(q_{n+1}))$ soit un repère projectif $\mathscr{R}'$ de $\mathbb{P}(V')$, et pour tout $x \in \mathbb{P}(V)$ on a :*

$$[q_0, \dots, q_{n+1}, x] = [f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(x)].$$

(ii) *L'assertion précédente est vérifiée pour* tout *repère projectif $\mathscr{R}$ de $\mathbb{P}(V)$.*

(iii) *f est une homographie.*

On peut résumer ceci en disant que : « f est une homographie ssi elle préserve le $(n+1)$-rapport ».

Démonstration. — On a déjà vu (iii) $\Rightarrow$ (ii) et (ii) $\Rightarrow$ (i) est évident. Supposons (i) vérifié. Soit h (resp. h') l'unique homographie de $\mathbb{P}(V)$ (resp. $\mathbb{P}(V')$) sur $\mathbb{P}^n(k)$ telle $h(\mathscr{R})$ (resp. $h'(\mathscr{R}')$) égale $\mathscr{R}_0$. Par définition du $(n+1)$-rapport dans $\mathbb{P}(V')$ et $\mathbb{P}(V)$, on a :

$$[f(q_0), \dots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) \qquad \text{et} \qquad [q_0, \dots, q_{n+1}, x] = h(x)$$

et l'égalité de ces deux quantités entraîne $f(x) = h'^{-1}\big(h(x)\big)$, pour tout $x \in \mathbb{P}(V)$. On a donc $f = h'^{-1} \circ h$, ce qui prouve que f est une homographie. $\square$

19.3. Retour sur le birapport. — Soit $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ une droite projective (i.e. $\dim(W) = 2$). Dans ce cas, trois points p_1, p_2, p_3 de $\mathbf{D}$ forment un repère projectif ssi ils sont deux à deux distincts. Soit $\mathscr{B} = (e_0, e_1)$ une base de W et notons $[x, y]$ les coordonnées homogènes correspondantes.

Proposition 19.14. — *Soient p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points de $\mathbf{D}$, avec p_1, p_2, p_3 deux à deux distincts. Notant $[x_i, y_i]$ les coordonnées homogènes de p_i, le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ est égal à :*

$$\left[\frac{\begin{vmatrix} x_4 & x_2 \\ y_4 & y_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & x_2 \\ y_3 & y_2 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ y_1 & y_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}}\right] = \left[\frac{x_4y_2 - x_2y_4}{x_3y_2 - x_2y_3}, \frac{x_1y_4 - x_4y_1}{x_1y_3 - x_3y_1}\right] = \left[\frac{x_4y_2 - x_2y_4}{x_3y_2 - x_2y_3}, \frac{x_4y_1 - x_1y_4}{x_3y_1 - x_1y_3}\right]$$

(*dans la 2ème égalité, on a changé le signe du numérateur et du dénominateur du 2ème rapport*).

Démonstration. — Ceci est la formule $(\star)$ du théorème 19.11 dans le cas $n = 1$. $\square$

La définition 19.11 du birapport permet de déterminer sans calcul les birapports « permutés » $[\cdot] \circ \tau$ pour $\tau = (12)$ ou (23) puis, par composition, pour tout $\tau \in S_3$ (cf. 18.16) :

Proposition 19.15. — *Soient (p_1, p_2, p_3) trois points distincts de $\mathbf{D}$ et q un quatrième point. Posons $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$. Alors :*

$$\boxed{[p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda}} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda}$$

(avec $1/0 = \infty$ et $1/\infty = 0$ et $1 - \infty = \infty$). Par conséquent, on a l'hexagone suivant : [5]

$$\begin{tikzcd}
& {[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda} \arrow[dl, "(12)"'] \arrow[dr, "(23)"] & \\
{[p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda}} \arrow[d, "(23)"'] & & {[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda} \arrow[d, "(12)"] \\
{[p_2, p_3, p_1, q] = 1 - \frac{1}{\lambda}} \arrow[dr, "(12)"'] & & {[p_3, p_1, p_2, q] = \frac{1}{1 - \lambda}} \arrow[dl, "(23)"] \\
& {[p_3, p_2, p_1, q] = \frac{\lambda}{\lambda - 1}} &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. — Soit $h : \mathbf{D} \to \mathbb{P}^1$ l'unique homographie envoyant le triplet (p_1, p_2, p_3) sur le triplet standard $(\infty, 0, 1)$, alors $h(q) = \lambda$.

D'autre part, h envoie le triplet (p_2, p_1, p_3) sur le triplet $(0, \infty, 1)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie σ qui échange 0 et ∞ et fixe 1. Celle-ci est donnée par $\sigma([x, y]) = [y, x]$, i.e. σ échange $0 = [0, 1]$ et $\infty = [1, 0]$ et, pour tout $t \in k^*$, on a :

$$\sigma(t) = \sigma([t, 1]) = [1, t] = \Big[\frac{1}{t}, 1\Big] = \frac{1}{t}.$$

Ainsi, $\sigma \circ h$ envoie (p_2, p_1, p_3) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_2, p_1, p_3, q] = \sigma(h(q)) = \sigma(\lambda)$. Ceci prouve la première égalité (y compris les cas particuliers $1/0 = \sigma(0) = \infty$ et $1/\infty = \sigma(\infty) = 0$).

La deuxième s'obtient de façon analogue : h envoie (p_1, p_3, p_2) sur le triplet $(\infty, 1, 0)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie τ qui échange 0 et 1 et fixe ∞. Celle-ci est donnée par $\tau([x, y]) = [y - x, y]$, i.e. $\tau(\infty) = \infty$ et, pour tout $t \in k$, on a :

$$\tau(t) = \tau([t, 1]) = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ainsi, $\tau \circ h$ envoie (p_1, p_3, p_2) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_1, p_3, p_2, q] = \tau(h(q)) = \tau(\lambda)$. Ceci prouve la seconde égalité (y compris le cas particulier $1 - \infty = \tau(\infty) = \infty$).

Enfin, comme les transpositions (12) et (23) engendrent S_3, l'hexagone s'obtient en procédant de façon répétée à des échanges des places $1, 2$ ou $2, 3$. $\square$

[5] **Attention !** À chaque étape ce sont les *places* $(1, 2$ ou $3)$ des p_i que l'on échange, et non leurs indices.

INDEX

TABLE DES MATIÈRES