

# CHAPITRE 5

## DUALITÉ PROJECTIVE

Dans tout ce chapitre,  $k$  désigne un corps et  $V$  un  $k$ -ev de dimension finie.

### 20. Définitions

**Rappels 20.1 (sur la dualité).** — Soit  $V$  un  $k$ -espace vectoriel de dimension finie.

(1) Si  $F$  est un sev de  $V^*$ , son *orthogonal dans  $V$*  est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On rappelle que :

(i)  $\boxed{\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F)}.$

(ii) Si  $(f_1, \dots, f_r)$  est une famille génératrice de  $F$  (par exemple une base), alors  $F^0 = \{v \in V \mid f_i(v) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \text{Ker}(f_i)$ .

(2) De même, si  $W$  est un sev de  $V$ , son *orthogonal dans  $V^*$*  est :

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in W\}.$$

On a :

(i)  $\boxed{\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W)}.$

(ii) Si  $(v_1, \dots, v_r)$  est une famille génératrice de  $W$  (par exemple une base), alors  $W^0 = \{f \in V^* \mid f(v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\}$ .

(3) Avec les notations précédentes, on a  $\boxed{W = W^{00} \text{ et } F = F^{00}}.$

(4) Le dual de l'espace quotient  $V/W$  s'identifie à  $W^0$ , i.e. on a :  $\boxed{(V/W)^* = W^0}.$

(5) L'orthogonalité « *renverse les inclusions et échange les sommes et les intersections* », c.-à-d., si  $E \subset F$  et  $E_1, \dots, E_r$  sont des sev de  $V$  ou de  $V^*$ , alors  $F^0 \subset E^0$  et l'on a :

$$(E_1 + \dots + E_r)^0 = E_1^0 \cap \dots \cap E_r^0 \quad \text{et} \quad (E_1 \cap \dots \cap E_r)^0 = E_1^0 + \dots + E_r^0.$$

*Démonstration.* — Pour (1)–(4), voir par exemple [Po, §§1.3, 1.7, 3.5]. Prouvons (5).

D'abord, l'inclusion  $F^0 \subset E^0$  est évidente. Posons  $W = E_1 + \dots + E_n$ . Comme  $E_i \subset W$ , alors  $W^0$  est contenu dans chaque  $E_i^0$  donc dans leur intersection.

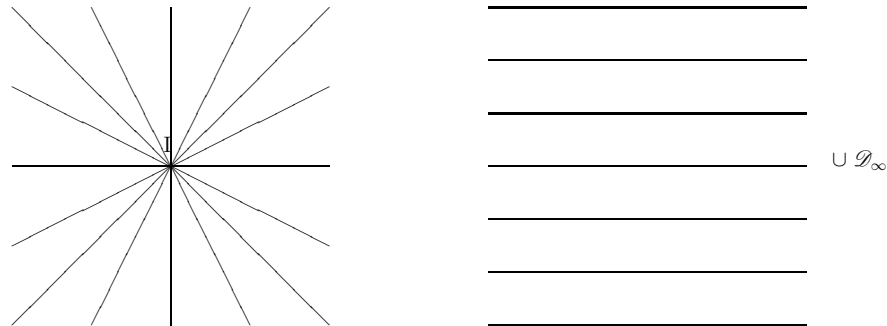
Réciproquement, si un élément  $y$  appartient à  $E_1^0 \cap \dots \cap E_r^0$  alors il est orthogonal à toute somme  $x_1 + \dots + x_n$ , où  $x_i \in E_i$ , donc  $y \in W^0$ . Ceci prouve la 1ère égalité. La 2ème se déduit de la 1ère appliquée aux  $E_i^0$ , en utilisant (3).  $\square$

Dans la suite, on suppose que  $\dim(V) = n + 1$  est  $\geq 3$ , i.e. que  $\dim \mathbb{P}(V) = n$  est  $\geq 2$ .

**Définition 20.2 (Pinceaux d'hyperplans).** — Soit  $\Delta = \mathbb{P}(F)$  une droite de  $\mathbb{P}(V^*)$ , i.e.  $F$  est un sev de  $V^*$  de dimension 2. Soit  $W = F^0$ , c'est un sev de  $V$  de codimension 2. Pour tout  $[f] \in \Delta$ ,  $\mathbb{P}(\text{Ker}(f))$  est un hyperplan de  $\mathbb{P}(V)$  contenant  $\mathbb{P}(W)$ . Réciproquement, si  $\mathbb{P}(H)$  est un tel hyperplan, soit  $f \in V^*$  une équation de  $H$  (i.e.  $\text{Ker}(f) = H$ ); comme  $W \subset H$  alors  $kf = H^0$  est contenu dans  $W^0 = F$ .

Donc les hyperplans de  $\mathbb{P}(V)$  contenant  $\mathbb{P}(W)$  sont exactement les  $\mathbb{P}(\text{Ker}(f))$ , pour  $[f]$  décrivant  $\Delta$  (noter que  $\text{Ker}(\lambda f) = \text{Ker}(f)$  pour tout  $\lambda \in k^\times$ ). L'ensemble de ces hyperplans s'appelle le *pinceau d'hyperplans* <sup>(1)</sup> associé à  $\Delta$  ou encore le *pinceau d'hyperplans de centre*  $\mathbb{P}(W)$ . Si  $\mathbb{P}(H)$  et  $\mathbb{P}(H')$  sont deux éléments distincts du pinceau, leur intersection est  $\mathbb{P}(W)$  (car  $H \cap H' = W$ ).

**Exemple 20.3.** — Si  $\mathbf{P}$  est un plan projectif et  $I$  un point de  $\mathbf{P}$ , alors le pinceau de droites de centre  $I$  est l'ensemble des droites projectives passant par  $I$ . Remarquons que si l'on choisit l'une de ces droites comme droite à l'infini  $\mathcal{D}_\infty$ , alors dans le plan affine  $\mathcal{P} = \mathbf{P} - \mathcal{D}_\infty$ , les autres droites du pinceau sont parallèles, cf. la figure de droite ci-dessous :



**Notations 20.4.** — (1) Notons  $\mathcal{S}(V)$  l'ensemble des sev  $E$  de  $V$ . Plus précisément, pour  $r = 0, 1, \dots, n+1$ , notons  $\mathcal{S}_r(V)$  l'ensemble des sev de  $V$  de dimension  $r$ .

(2) Pour l'énoncé de la dualité projective (cf. ci-dessous), il est commode de s'autoriser à considérer  $\mathbb{P}(\{0\}) = \emptyset$  comme un sous-espace projectif de  $\mathbb{P}(V)$ , et de décréter qu'il est de dimension  $-1$ .

(3) Alors, pour  $d = -1, 0, \dots, n-1, n$ , notons  $\mathcal{S}_d(\mathbb{P}(V))$  l'ensemble des sous-espaces projectifs de  $\mathbb{P}(V)$  de dimension  $d$ , i.e.

$$\mathcal{S}_d(\mathbb{P}(V)) = \{\mathbb{P}(E) \mid E \in \mathcal{S}_{d+1}(V)\}.$$

et notons  $\mathcal{S}(\mathbb{P}(V))$  l'ensemble de tous les sous-espaces projectifs  $\mathbb{P}(E)$ , pour  $E \in \mathcal{S}(V)$ . Remarquons que  $\mathcal{S}_0(\mathbb{P}(V))$  n'est autre que l'ensemble des *points* de  $\mathbb{P}(V)$ , que  $\mathcal{S}_1(\mathbb{P}(V))$  est l'ensemble des *droites* de  $\mathbb{P}(V)$  et que  $\mathcal{S}_{n-1}(\mathbb{P}(V))$  est l'ensemble des *hyperplans* de  $\mathbb{P}(V)$ .

**Lemme 20.5.** — L'application  $E \mapsto E^0$  est une bijection de  $\mathcal{S}(V)$  sur  $\mathcal{S}(V^*)$ . Plus précisément, pour tout  $r = 0, 1, \dots, n+1$ , c'est une bijection de  $\mathcal{S}_r(V)$  sur  $\mathcal{S}_{n+1-r}(V^*)$ .

*Démonstration.* — Ceci découle des rappels précédents. □

**Définition et proposition 20.6 (Dualité projective).** — On suppose que  $\dim \mathbb{P}(V) = n$  est  $\geq 2$ .

(i) L'application  $\mathbb{P}(E) \mapsto \mathbb{P}(E^0)$  est une **bijection** de  $\mathcal{S}(\mathbb{P}(V))$  sur  $\mathcal{S}(\mathbb{P}(V^*))$ , qui envoie  $\mathcal{S}_d(\mathbb{P}(V))$  sur  $\mathcal{S}_{n-d-1}(\mathbb{P}(V^*))$  pour tout  $d = -1, 0, \dots, n-1, n$ .

<sup>(1)</sup>On dit aussi « faisceau d'hyperplans », mais nous préférons la terminologie « pinceau », qui est celle utilisée en géométrie algébrique.

(i bis) *En particulier, pour tout  $f \in V^* - \{0\}$  le point  $[f]$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  correspond à l'hyperplan  $\mathbb{P}(H)$ , où  $H = \text{Ker}(f)$ . Et toute droite  $\Delta = \mathbb{P}(F)$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  correspond au pinceau d'hyperplans de centre  $\mathbb{P}(W)$ , où  $W = F^0$ .*

(ii) *Cette bijection renverse les inclusions :  $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F) \iff \mathbb{P}(F^0) \subset \mathbb{P}(E^0)$ .*

(iii) *Elle échange les notions d'intersection et de sous-espace engendré, i.e. si  $E_1, \dots, E_r$  sont des sev de  $V$ , elle échange, d'une part,  $\mathbb{P}(E_1) \cap \dots \cap \mathbb{P}(E_r)$  et  $\mathbb{P}(E_1^0 + \dots + E_r^0)$  et, d'autre part,  $\mathbb{P}(E_1 + \dots + E_r)$  et  $\mathbb{P}(E_1^0 \cap \dots \cap E_r^0)$ .*

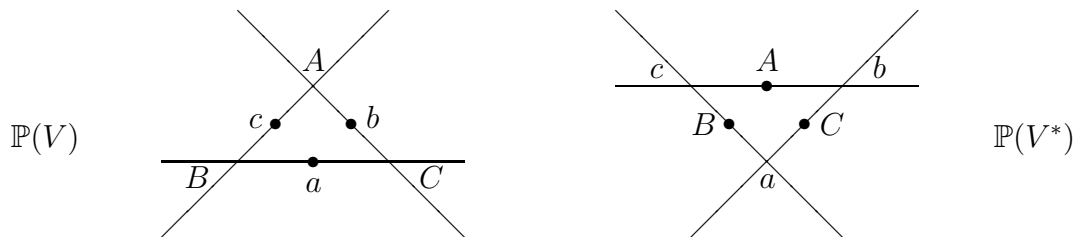
(iii bis) *En particulier, pour tout entier  $r \geq 3$ , des points distincts  $[f_1], \dots, [f_r]$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  sont alignés ssi, posant  $H_i = \text{Ker}(f_i)$ , les hyperplans  $\mathbb{P}(H_i)$  de  $\mathbb{P}(V)$  contiennent un sous-espace projectif  $\mathbb{P}(W)$  de dimension  $n - 2$ .*

(iii ter) *En particulier, si  $n = 2$ , les  $[f_i]$  comme ci-dessus sont alignés ssi les droites  $D_i = \mathbb{P}(H_i)$  sont concourantes.*

*Démonstration.* — Les assertions (i)–(iii) découlent aussitôt du lemme précédent. Prouvons (iii bis). Si les  $[f_i]$  engendrent une droite  $\Delta = \mathbb{P}(F)$  alors les  $\mathbb{P}(H_i)$  appartiennent au pinceau de centre  $\mathbb{P}(W)$ , où  $W = F^0$ . Réciproquement, si les  $\mathbb{P}(H_i)$  contiennent un sous-espace projectif  $\mathbb{P}(W)$  de dimension  $n - 2$ , alors les  $f_i$  appartiennent tous au plan  $F = W^0$ , donc les  $[f_i]$  appartiennent à la droite  $\Delta = \mathbb{P}(F)$ . Enfin, (iii ter) est un cas particulier, car dans ce cas  $\mathbb{P}(W)$  est un point  $I$  du plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ . □

**Terminologie 20.7.** — Plaçons-nous dans un plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ . Si  $\mathbf{D}$  est une droite de  $\mathbb{P}(V)$  et  $d$  le point correspondant de  $\mathbb{P}(V^*)$ , on dit que  $d$  est « le point dual de la droite  $\mathbf{D}$  ». De même, si  $p$  est un point de  $\mathbb{P}(V)$  et  $\Delta$  la droite correspondante de  $\mathbb{P}(V^*)$ , on dit que  $\Delta$  est « la droite duale du point  $p$  ».

**Exemple 20.8.** — Si  $ABC$  est un triangle dans  $\mathbb{P}(V)$  (i.e. si les points  $A, B, C$  de  $\mathbb{P}(V)$  sont non alignés), on notera  $a \in \mathbb{P}(V^*)$  le point « dual » de la droite  $(BC)$ , et  $b$  (resp.  $c$ ) le point « dual » de la droite  $(CA)$  (resp.  $(AB)$ ). Alors, comme  $(BC)$  et  $(CA)$  se coupent en  $C$ , la droite  $(ab)$  est duale du point  $C$ , et de même  $(bc)$  est duale de  $A$  et  $(ca)$  de  $B$ .

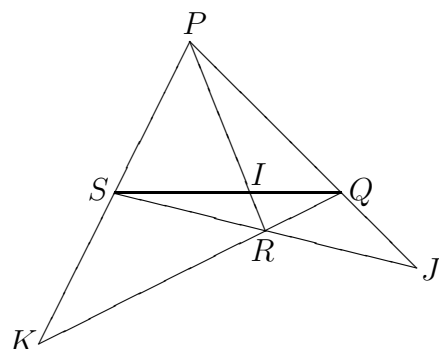


Donc un triangle est une configuration « autoduale ».

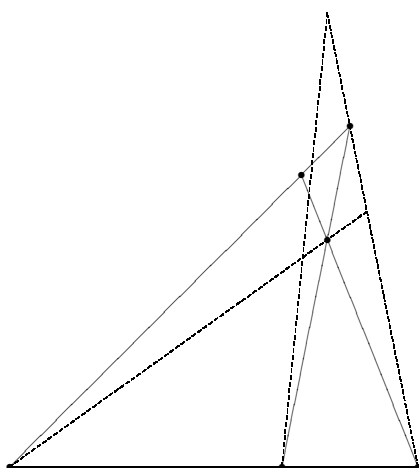
**Exemples 20.9.** — Soit  $\mathbf{P}$  un plan projectif.

(1) Un *quadrangle complet* dans  $\mathbf{P}$  est la donnée de quatre points  $P, Q, R, S$  formant un repère projectif (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés), appelés les *sommets*, et des  $\binom{4}{2} = 6$  droites qui les joignent, appelées les *côtés* (cf. la figure suivante).

Deux côtés qui ne se coupent pas en un sommet sont dits *opposés* ; les trois paires de côtés opposés se coupent en trois points supplémentaires  $I, J, K$ , appelés les points *diagonaux*.



(2) La configuration duale est appelée un *quadrilatère complet* : c'est la donnée de quatre droites distinctes dont trois ne sont jamais concourantes, appelées les *côtés* du quadrilatère ; elles se coupent deux à deux en  $\binom{4}{2} = 6$  points distincts, appelés les *sommets*. Deux sommets sont dits *opposés* si la droite qui les joint n'est pas un côté, elle est alors appelée une *diagonale*. On obtient ainsi trois diagonales (en pointillés sur le dessin ci-dessous).



Remarque : si la caractéristique de  $k$  est  $\neq 2$ , il résulte du lemme ci-dessous que les trois points diagonaux d'un quadrangle complet ne sont pas alignés et, dualement, que les trois diagonales d'un quadrilatère complet ne sont pas concourantes.

**Lemme 20.10.** — Soit  $(P, Q, R, S)$  un quadrangle complet du plan projectif  $\mathbf{P}$ . On suppose que  $\text{car}(k) \neq 2$ . Alors les points diagonaux  $I, J, K$  ne sont pas alignés.<sup>(2)</sup>

*Démonstration.* — Les points  $P, Q, R, S$  définissent un repère projectif dans lequel leurs coordonnées homogènes sont  $[1, 0, 0]$ ,  $[0, 1, 0]$ ,  $[0, 0, 1]$  et  $[1, 1, 1]$ . Alors la droite  $(PQ)$  (resp.  $(RS)$ ) a pour équation  $z = 0$  (resp.  $x = y$ ), donc  $K = [1, 1, 0]$ . On obtient de même que  $J = [0, 1, 1]$  et  $I = [1, 0, 1]$ . On a

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \quad (\text{car } \text{car}(k) \neq 2)$$

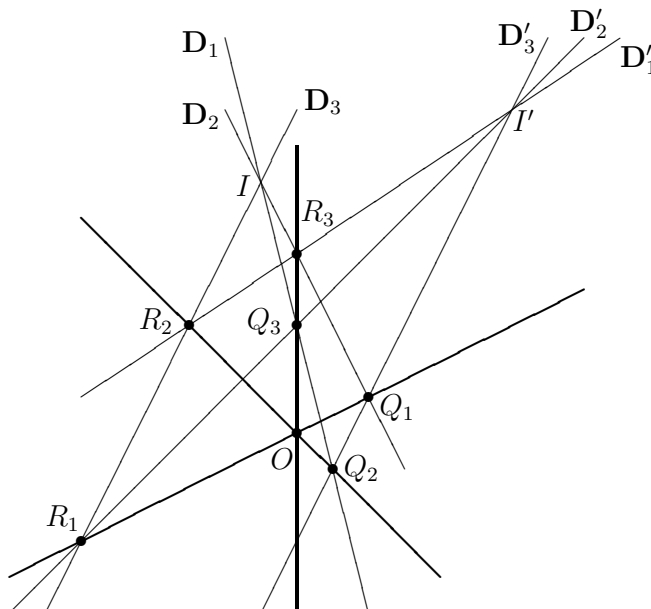
donc  $I, J, K$  ne sont pas alignés. □

## 21. Dualité et théorèmes de Pappus et de Desargues

En dualisant le théorème de Pappus projectif (17.1), on obtient un nouveau théorème, le théorème « de Pappus dual » :

<sup>(2)</sup>A fortiori, ils sont deux à deux distincts.

**Théorème 21.1 (de Pappus dual).** — Dans un plan projectif, soient  $I, I'$  deux points distincts et  $D_1, D_2, D_3$  (resp.  $D'_1, D'_2, D'_3$ ) trois droites distinctes passant par  $I$  (resp.  $I'$ ) et distinctes de la droite  $(II')$ . Notons  $Q_1$  (resp.  $R_1$ ) le point de concours de  $D_2$  et  $D'_3$  (resp.  $D'_2$  et  $D_3$ ) et définissons de même  $Q_2, R_2, Q_3$  et  $R_3$ . Alors les droites  $(Q_1R_1), (Q_2R_2)$  et  $(Q_3R_3)$  sont concourantes.



Par contre, on va voir que le théorème de Desargues est « auto-dual ». Même si cela ne fournit pas un nouveau théorème, cette « autodualité » du théorème de Desargues est intéressante. Plaçons-nous dans un plan projectif  $\mathbb{P}(V)$ . Commençons par rappeler les hypothèses du théorème de Desargues.

On suppose que  $A, B, C$  (resp.  $A', B', C'$ ) sont non alignés et que :

$$\begin{array}{l|l} A \neq A' \text{ donnent la droite } (AA') & (BC) \neq (B'C') \text{ se coupent en un point } A_1 \\ B \neq B' \text{ donnent la droite } (BB') & (CA) \neq (C'A') \text{ se coupent en un point } B_1 \\ C \neq C' \text{ donnent la droite } (CC') & (AB) \neq (A'B') \text{ se coupent en un point } C_1 \\ (AA'), (BB'), (CC') \text{ distinctes} & A_1, B_1, C_1 \text{ distincts} \end{array}$$

Que  $A_1, B_1, C_1$  soient distincts ne fait pas partie des hypothèses initiales, mais en découle. En effet, si on avait par exemple  $A_1 = B_1$  alors les droites  $(AC)$  et  $(BC)$ , distinctes car  $A, B, C$  non alignés, auraient en commun les points  $M = A_1 = B_1$  et  $C$ , donc nécessairement  $M = C$ , et de même  $M = C'$ , d'où  $C = C'$ , contradiction.

Notons  $a \in \mathbb{P}(V^*)$  le point « dual » de la droite  $(BC)$ , et  $b$  (resp.  $c$ ) le point « dual » de la droite  $(CA)$  (resp.  $(AB)$ ), et définissons de même  $a', b', c'$ .

Alors, comme  $(BC)$  et  $(CA)$  se coupent en  $C$ , la droite  $(ab)$  est duale du point  $C$ , et de même  $(bc)$  est duale de  $A$  et  $(ca)$  de  $B$ . De même,  $(a'b')$ ,  $(b'c')$  et  $(c'a')$  sont duales, respectivement, des points  $C', A'$  et  $B'$ .

Comme  $C \neq C'$ , alors  $(ab)$  et  $(a'b')$  sont distinctes donc se coupent en un point  $c_1$  qui est dual de la droite  $(CC')$ . De même,  $(bc)$  et  $(b'c')$  se coupent au point  $a_1$  dual de  $(AA')$ , et  $(ca)$  et  $(c'a')$  se coupent au point  $b_1$  dual de  $(BB')$ .

De plus, comme  $c$  est dual de  $(AB)$  et  $c'$  de  $(A'B')$ , alors la droite  $(cc')$  est duale du point  $C_1 = (AB) \cap (A'B')$ , et de même  $(bb')$  est duale de  $B_1$  et  $(aa')$  de  $A_1$ . On voit donc que les hypothèses sont « auto-duales », i.e. qu'elles équivalent aux hypothèses analogues sur les objets duaux :

$a, b, c$  (resp.  $a', b', c'$ ) sont non alignés et :

$$\begin{array}{l|l} (bc) \neq (b'c') \text{ se coupent en un point } a_1 & a \neq a' \text{ donnent la droite } (aa') \\ (ca) \neq (c'a') \text{ se coupent en un point } b_1 & b \neq b' \text{ donnent la droite } (bb') \\ (ab) \neq (a'b') \text{ se coupent en un point } c_1 & c \neq c' \text{ donnent la droite } (cc') \\ a_1, b_1, c_1 \text{ distincts} & (aa'), (bb'), (cc') \text{ distinctes} \end{array}$$

On peut maintenant énoncer (et démontrer!) le théorème de Desargues sous la forme suivante : <sup>(3)</sup>

**Théorème 21.2 (de Desargues projectif).** — *On se place sous les hypothèses autoduales précédentes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

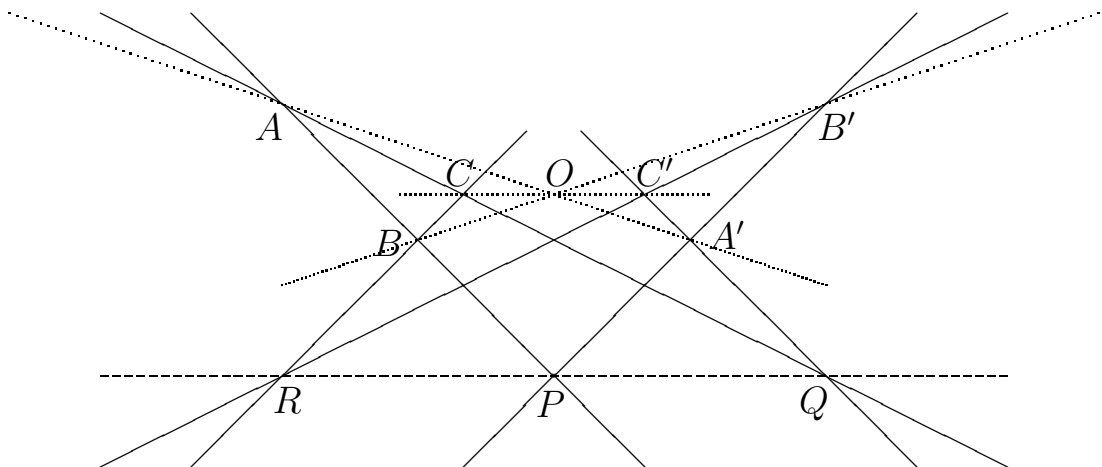
- (i)  $A_1, B_1, C_1$  sont alignés sur une droite  $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}(V)$ .
- (ii)  $(AA'), (BB'), (CC')$  sont concourantes en un point  $O \in \mathbb{P}(V)$ .
- (iii)  $(aa'), (bb'), (cc')$  sont concourantes au point  $d \in \mathbb{P}(V^*)$  dual de la droite  $\mathbf{D}$ .
- (iv)  $a_1, b_1, c_1$  sont alignés sur la droite  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  duale du point  $O$ .

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on est dans l'une des situations suivantes :

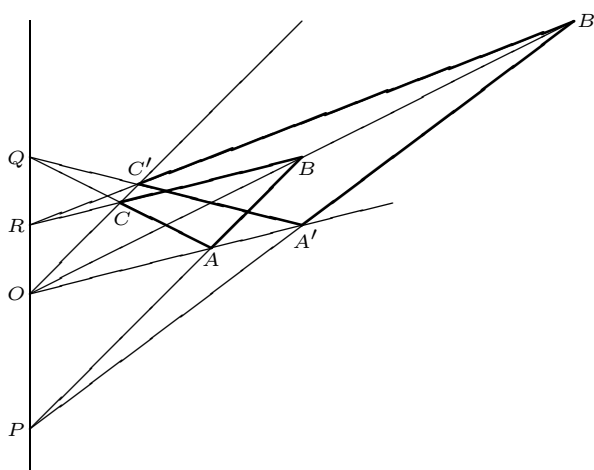
a) **Cas non dégénéré :** aucune des 6 droites  $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$  ne contient  $O$  ; de façon équivalente,  $\mathbf{D}$  ne contient aucun des 6 points  $C, A, B, C', A', B'$ . Dans ce cas, avec les 4 droites  $(AA'), (BB'), (CC'), \mathbf{D}$  et les 4 points  $A_1, B_1, C_1, O$  on obtient dix points et dix droites deux à deux distincts. Le point  $O$  peut appartenir ou pas à la droite  $\mathbf{D}$  : voir les deux figures ci-dessous.

b) **Cas dégénéré :**  $O$  est égal à l'un des points  $A, B, C, A', B', C'$ , disons  $A$ . Alors on a trois égalités de points :  $A = O, B' = C_1$  et  $C' = B_1$ , et trois égalités de droites :  $(BB') = (AB), (CC') = (AC)$  et  $\mathbf{D} = (B'C')$ . Si  $O \notin \mathbf{D}$ , on obtient ainsi 7 points et 7 droites deux à deux distincts. Si  $O \in \mathbf{D}$ , on obtient deux égalités de points (resp. de droites) en plus, par exemple  $A = B'$  et  $C = A_1$  (resp.  $(A'A) = (A'B')$  et  $(C'C) = \mathbf{D}$ ), d'où seulement 5 points et 5 droites.

Avant de commencer la démonstration, donnons deux figures correspondant au cas « non dégénéré » ; dans la première on a  $O \notin \mathbf{D}$  et dans la seconde  $O \in \mathbf{D}$  :



<sup>(3)</sup>La démonstration par « expédition de  $\mathbf{D}$  à l'infini » donnée au chap. 3 avait une hypothèse supplémentaire, assurant que  $\mathbf{D}$  ne contient aucun des points  $A, B, C, A', B', C'$ , ce qui excluait les cas « dégénérés » du théorème.



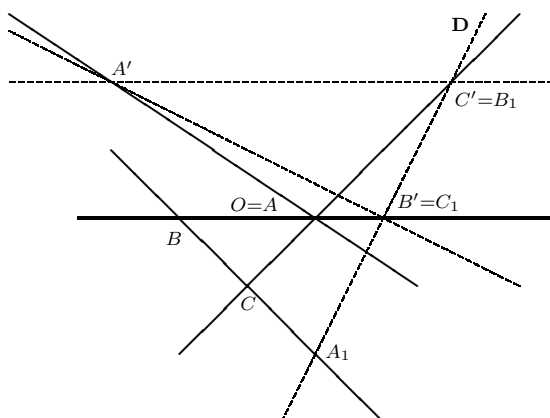
*Démonstration.* — Par dualité, on a les équivalences (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) et (ii)  $\Leftrightarrow$  (iv). De plus, si l'on a montré l'implication  $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$  et si (i) est vérifié alors (iii) l'est aussi et donc, par l'implication précédente appliquée dans  $\mathbb{P}(V^*)$ , (iv) est vérifié et donc (ii) est vérifié. Donc il suffit d'établir que (ii)  $\Rightarrow$  (i), en tenant compte des cas dégénérés.

Supposons donc  $(AA'), (BB'), (CC')$  concourantes en un point  $O$ . Alors, dans  $\mathbb{P}(V^*)$ , les points  $a_1, b_1, c_1$  appartiennent à la droite  $\Omega$  duale de  $O$ . Distinguons les cas suivants.

(1)  $O$  appartient à une des 6 droites  $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$ , par exemple à  $(AB)$ . Si  $O$  était distinct de  $A$  et de  $B$ , alors la droite  $(AB)$  serait égale à  $(OA) = (A'A)$  et à  $(OB) = (B'B)$  donc on aurait  $(A'A) = (B'B)$  contrairement à l'hypothèse. Ceci montre que  $O = A$  ou  $B$ . Supposons par exemple  $O = A$ .

Alors,  $(BB') = (AB)$  et  $(CC') = (AC)$ . De plus, comme  $B' \in (AB) \cap (A'B')$  on a  $B' = C_1$  et de même, comme  $C' \in (AC) \cap (A'C')$ , on a  $C' = B_1$ . Par conséquent, on a  $(C_1B_1) = (B'C')$  et cette droite contient évidemment le point  $A_1 = (B'C') \cap (BC)$ . Ceci montre déjà que dans ce cas  $A_1, B_1, C_1$  sont alignés sur la droite  $\mathbf{D} = (B'C')$ .

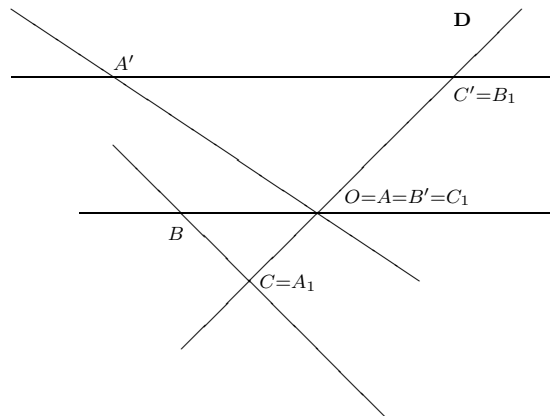
De plus, on a la configuration suivante, où les 4 droites en gras (resp. les 3 en pointillés) sont deux à deux distinctes :



En effet,  $(A'A)$  est distincte de  $(BAB')$  (resp.  $(CAC')$ ) car sinon on aurait  $(A'A) = (BB')$  (resp.  $(A'A) = (CC')$ ), et elle est distincte de  $(BC)$  car  $A, B, C$  sont non alignés.

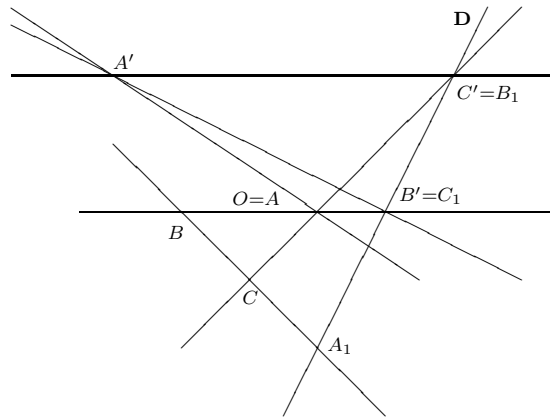
De plus,  $\mathbf{D} = (B'C')$  est distincte de  $(BC)$  par hypothèse, et elle est distincte de  $(A'A)$  et  $(A'B')$  car  $A', B', C'$  sont non alignés. Donc les seules égalités de droites possibles sont l'égalité de  $\mathbf{D}$  avec  $(CAC')$  ou  $(BAB')$ , et l'égalité de  $(A'A)$  avec  $(A'B')$  ou  $(A'C')$ .

Si  $\mathbf{D} = (CC')$  alors  $B'$  appartient à  $(CC') \cap (BB')$  donc  $B' = O = A$ , et  $C$  appartient à  $(BC)$  et à  $(CC') = (B'C')$  donc  $C = A_1$ . On obtient donc la configuration suivante de 5 points et 5 droites :



De même, si  $\mathbf{D} = (BB')$  on obtient une configuration analogue avec cette fois  $O = A = C' = B_1$  et  $B = A_1$ . Dans ces deux cas,  $O = A$  appartient à  $\mathbf{D}$ . Réciproquement, si  $O \in \mathbf{D}$  et si  $O$  est distinct de  $C'$  (resp. de  $B'$ ), alors  $\mathbf{D}$  et  $(CC')$  (resp.  $(BB')$ ) ont en commun les points distincts  $O$  et  $C'$  (resp.  $O$  et  $B'$ ) donc  $\mathbf{D} = (CC')$  (resp.  $\mathbf{D} = (BB')$ ) et l'on est dans le cas juste étudié.

Au contraire, si  $O = A$  n'appartient pas à  $\mathbf{D}$  alors  $\mathbf{D}$  est distincte de  $(CAC')$  et  $(BAB')$ , et  $(A'A) \neq (A'B')$  car sinon on aurait  $B' \in (B'B) \cap (A'A)$  d'où  $B' = O = A$ ; de même,  $(A'A) \neq (A'C')$ . On obtient donc une configuration de 7 points et 7 droites deux à deux distincts :



Ceci achève l'analyse du cas où l'une des 6 droites  $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$  contient  $O$ .

(2) Considérons maintenant le cas où aucune de ces 6 droites ne contient  $O$ . Alors, par dualité, la droite  $\Omega$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  ne contient aucun des points  $c, a, b, c', a', b'$ .

Dans ce cas, on peut appliquer la démonstration donnée au chap. 3, i.e. prenons  $\Omega$  comme droite à l'infini dans  $\mathbb{P}(V^*)$ . Alors les 6 points  $a, b, c, a', b', c'$  sont dans le plan affine  $\mathcal{P} = \mathbb{P}(V^*) - \Omega$  et les droites  $(ab)$  et  $(a'b')$  sont parallèles, ainsi que  $(bc)$  et  $(b'c')$  et  $(ca)$  et  $(c'a')$ . Ceci implique que les 6 points  $a, b, c, a', b', c'$  sont distincts : en effet, si on avait par exemple  $a = b'$ , alors les droites parallèles  $(ab)$  et  $(a'b')$  seraient égales, et l'on aurait  $(aa') = (aa')$  contrairement à l'hypothèse. On est donc sous les hypothèses du théorème de Desargues affine 7.2. Par conséquent, les droites  $(aa')$ ,  $(bb')$  et  $(cc')$  sont concourantes en un point  $d$  et donc, par dualité, les points  $A_1, B_1, C_1$  de  $\mathbb{P}(V)$  appartiennent à la droite  $\mathbf{D}$  duale de  $d$ . Ceci termine déjà la preuve de l'implication (ii)  $\Rightarrow$  (i).



De plus, la démonstration du théorème 7.2 montre que les droites  $(aa'), (bb'), (cc')$  sont soit concourantes en un point  $d \in \mathcal{P}$  qui est distinct des six points,<sup>(4)</sup> soit parallèles, et en ce cas elles ne sont parallèles à aucune des droites  $(ab), (bc), (ca)$ , donc coupent la droite à l'infini  $\Omega$  en un point  $d$  qui est distinct de  $a_1, b_1, c_1$ . On obtient donc que les dix points  $a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, d$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  sont distincts, et donc les dix droites correspondantes de  $\mathbb{P}(V)$  sont distinctes.

Comme ceci est exclusif du cas dégénéré traité en (1), on obtient ainsi, en tenant compte de la dualité, les deux situations a) et b) du théorème.  $\square$

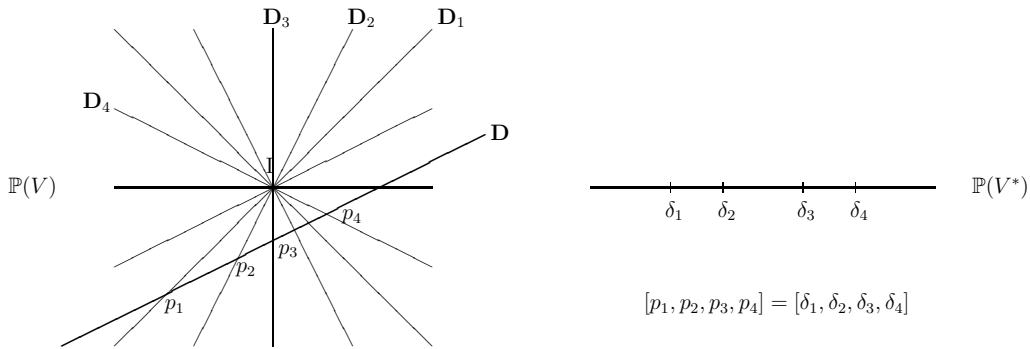
### 22. Théorème de Thalès projectif

Commençons par le cas d'un plan projectif.

**Proposition 22.1 (Birapport de quatre droites concourantes d'un plan)**

Soient  $D_1, D_2, D_3, D_4$  quatre droites distinctes d'un plan projectif, concourantes en un point  $I$ . Soit  $D$  une droite ne passant pas par  $I$ , elle coupe alors les  $D_i$  en quatre points  $p_i$  deux à deux distincts. Alors :

- (i) Le birapport  $[p_1, p_2, p_3, p_4]$  est indépendant de la droite  $D$ .
- (ii) Plus précisément, c'est le birapport des quatre points  $\delta_i$  de la droite projective  $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$  correspondant au pinceau des droites passant par  $I$ .



*Démonstration.* — On peut choisir des coordonnées homogènes  $[x, y, z]$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telles que  $D$  soit donnée par l'équation  $z = 0$  et que  $I = [0, 0, 1]$ . Ceci munit  $\mathbb{P}(V^*)$  de coordonnées homogènes « duales »  $[a, b, c]$ , i.e. le point  $[a, b, c]$  de  $\mathbb{P}(V^*)$  correspond à la droite de  $\mathbb{P}(V)$  d'équation  $ax + by + cz = 0$ .

Alors, pour tout point  $p = [x_0, y_0, 0]$  de  $D$ , la droite  $(Ip)$  a pour équation  $y_0x - x_0y = 0$  donc correspond au point  $[y_0, -x_0, 0]$  de  $\Delta$ . Comme l'application

$$D \rightarrow \Delta, \quad [x, y, 0] \mapsto [y, -x, 0]$$

est une homographie, donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4]$ . (On pourrait aussi vérifier ceci par un calcul direct en utilisant la formule explicite du birapport.)  $\square$

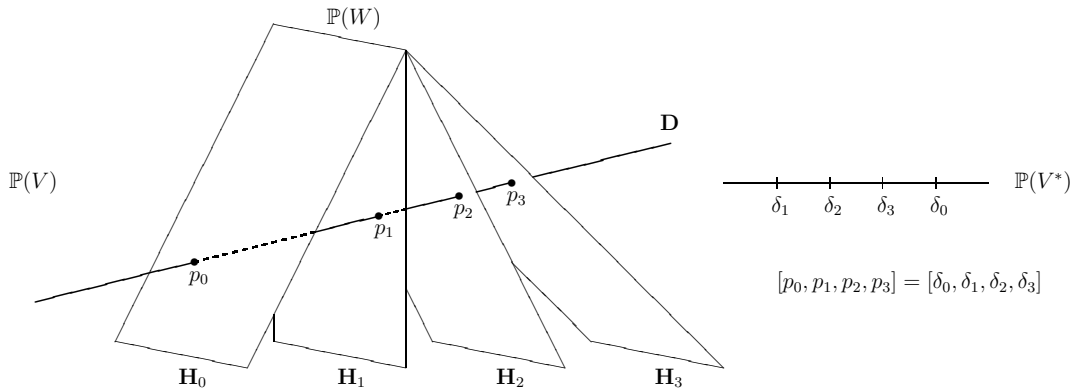
Plus généralement, on a la :

**Proposition 22.2 (Birapport de quatre hyperplans d'un pinceau)**

Dans  $\mathbb{P}(V)$ , soient  $H_0, H_1, H_2, H_3$  quatre éléments distincts d'un pinceau d'hyperplans de centre  $\mathbb{P}(W)$ . Soit  $D$  une droite ne rencontrant pas  $\mathbb{P}(W)$ , elle coupe alors les  $H_i$  en quatre points  $p_i$  deux à deux distincts. Alors :

<sup>(4)</sup>car  $\overrightarrow{aa'} = (1 - \lambda)\overrightarrow{ad}$ , etc.

- (i) Le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  est indépendant de la droite  $\mathbf{D}$ .
- (ii) Plus précisément, c'est le birapport des quatre points  $\delta_i$  de la droite projective  $\Delta \subset \mathbb{P}(V^*)$  correspondant au pinceau.



*Démonstration.* — Elle est analogue à la précédente. On a  $\mathbf{D} = \mathbb{P}(F)$  pour un certain sev  $F$  de  $V$  de dimension 2 tel que  $F \cap W = \{0\}$  et donc  $V = F \oplus W$ . Soit  $(e_0, e_1)$  une base de  $F$ , complétons-la en une base  $(e_0, e_1, e_2, \dots, e_n)$  de  $V$ , d'où des coordonnées homogènes  $[x_0, \dots, x_n]$  sur  $\mathbb{P}(V)$  telles que  $\mathbb{P}(W)$  (resp.  $\mathbf{D}$ ) soit donné par les équations  $x_0 = 0 = x_1$  (resp.  $x_2 = 0 = \dots = x_n$ ) et donc

$$\mathbf{D} = \{[x_0, x_1, 0, \dots, 0] \mid (x_0, x_1) \in k^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

La base duale  $(e_0^*, \dots, e_n^*)$  de  $V^*$  munit  $\mathbb{P}(V^*)$  de coordonnées homogènes  $[a_0, \dots, a_n]$ , pour lesquelles la droite  $\Delta = \mathbb{P}(W^0)$  a pour équations  $a_2 = 0 = \dots = a_n$ , i.e.

$$\Delta = \{[a_0, a_1, 0, \dots, 0] \mid (a_0, a_1) \in k^2 - \{(0, 0)\}\}.$$

Pour tout point  $p = [a, b, 0, \dots, 0]$  de  $\mathbf{D}$ , le sous-espace projectif engendré par  $p$  et  $\mathbb{P}(W)$  est égal à  $\mathbb{P}(H_p)$ , où  $H_p$  est l'hyperplan vectoriel engendré par  $W$  et la droite vectorielle  $k(ae_0 + be_1)$ . On voit que  $H_p$  a pour équation  $bx_0 - ax_1 = 0$ , donc  $\mathbb{P}(H_p)$  correspond au point  $[b, -a, 0, \dots, 0]$  de  $\Delta$ . Comme l'application  $\mathbf{D} \rightarrow \Delta$ ,  $[a, b, 0] \mapsto [b, -a, 0]$  est une homographie, donnée par la matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ , on en déduit que  $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3]$ .  $\square$

**Remarque 22.3.** — La proposition précédente peut être appelée **théorème de Thalès projectif**. En effet, posons  $E = H_{p_0}$  et prenons  $\mathbf{H}_0 = \mathbb{P}(E)$  comme hyperplan à l'infini  $\mathbf{H}_\infty$  de  $\mathbb{P}(V)$ , et donc  $p_0$  comme point à l'infini sur la droite  $\mathbf{D}$ . D'une part, dans l'espace affine  $\mathcal{E} = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}_0$  (de direction  $E$ ), les hyperplans affines  $\mathcal{H}_i = \mathcal{E} \cap \mathbf{H}_i$  sont parallèles, pour  $i = 1, 2, 3$  (car  $\mathbf{H}_i \cap \mathbf{H}_j = \mathbb{P}(W) \subset \mathbf{H}_\infty$ ).<sup>(5)</sup> D'autre part, le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3]$  est égal à  $[\lambda, 1]$ , où le scalaire  $\lambda$  est :

$$(\dagger) \quad \lambda = \frac{\overrightarrow{p_1 p_3}}{\overrightarrow{p_1 p_2}}.$$

Ceci peut se voir en utilisant la formule explicite du birapport ou, mieux, en la retrouvant directement dans ce cas particulier. Soit  $h$  l'homographie  $\mathbf{D} \rightarrow \mathbb{P}^1$  qui envoie  $(p_0, p_1, p_2)$  sur  $(\infty, 0, 1)$ ; elle induit, par restriction, une application affine de la droite affine  $\mathcal{D} = \mathbf{D} - \{p_0\}$  sur la droite affine  $k = \mathbb{P}^1(k) - \{\infty\}$ , qui envoie  $p_1$  sur 0 et  $p_2$  sur 1. Ceci revient à prendre  $(p_1, p_2)$  comme repère affine de  $\mathcal{D}$  et alors le birapport  $[p_0, p_1, p_2, p_3] = h(p_3)$  n'est autre que le scalaire  $\lambda$  tel que  $\overrightarrow{p_1 p_3} = \lambda \overrightarrow{p_1 p_2}$ . Ceci prouve la formule  $(\dagger)$ .

<sup>(5)</sup>Et, d'après la Prop. 16.15, la direction de chaque  $\mathcal{H}_i$  est  $H_{p_i} \cap E = W$ .

On voit donc que la proposition précédente contient comme cas particulier (en mettant  $\mathbf{H}_0$  à l'infini) le théorème de Thalès, i.e. que si  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{D}'$  sont deux droites affines coupant les  $\mathcal{H}_i$  en  $A_1, A_2, A_3$  et  $B_1, B_2, B_3$  respectivement, alors on a

$$\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}} = \frac{\overrightarrow{B_1B_3}}{\overrightarrow{B_1B_2}}. \quad (6)$$

**Références pour ce chapitre :**

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire, Hermann, 1997. (§VII.8)

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013, disponible sur la page de l'auteur : [www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2](http://www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2)

---

<sup>(6)</sup>Et ce scalaire est le birapport des hyperplans projectifs  $\mathbf{H}_\infty = \mathbb{P}(E)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_1)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_2)$ ,  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{H}_3)$  de  $\widehat{\mathbb{P}}(\mathcal{E}) = \mathbb{P}(V)$ , qui appartiennent au pinceau de centre  $\mathbb{P}(W)$ , où  $W \subset E$  est la direction commune des  $\mathcal{H}_i$ .



# INDEX

- Action d'un groupe, 1, 3
  - à gauche ou à droite, 3
  - libre, 3, 10, 46, 47, 91
  - transitive, 3, 10, 46, 47, 91
- Action de  $S_n$  sur  $X^n$ , 2
- Adhérence, 29
- Aff( $X$ ), 35
- Affine
  - application, 15
  - espace, 10
  - groupe, 20
  - ouvert  $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ , 76
  - repère, 14
  - sous-espace, 8, 9, 13, 77
- Affinement indépendants (points), 36
- Affinement liés (points), 36
- Alignés (points), 74, 79
- Appui (hyperplan), 30
- Autodualité du th. de Desargues, 100
- Banach (théorème de Hahn-), 34, 36
- Barycentre, 21
- Birapport, 84, 91, 93, 94
  - de quatre droites d'un pinceau, 103
  - de quatre hyperplans d'un pinceau, 103
- Bornée (partie), 29
- Boule (ouverte ou fermée), 28
- Cauchy (théorème de), 5
- Centre
  - d'un groupe, 6
  - de gravité, 22
- Ceva (théorème de), 69
- Changement de repère
  - affine, 14
- Chasles (relation de), 10
- Classes
  - à droite, 4
  - à gauche, 4
  - doubles, 4
  - (formule des), 5
- Compact(e)
  - partie, 29
  - polyèdre convexe, 63
- Conjugués
  - sous-groupes, 3
- Continue (application), 29, 37
- Convexe, 27
  - enveloppe, 28
- Coordonnées
  - barycentriques, 68
  - homogènes, 75, 91
- Cube, 54
- Côtés opposés
  - d'un quadrangle complet, 97
- Demi-espace (ouvert ou fermé), 30
- Desargues (théorème de), 25, 81, 100
- Diagonaux (points), 97, 98
- Dimension
  - d'un convexe, 36
- Direction (d'un espace affine), 10
- Distingué (sous-groupe), 1, 20
- Division
  - équianharmonique, 89
  - harmonique, 89
- Diédral (groupe), 34
- Drapeau, 44, 46
- Dualité entre  $\mathbb{P}(V)$  et  $\mathbb{P}(V^*)$ , 96
- Engendré
  - sous-espace affine, 35
  - sous-espace projectif, 74
- Enveloppe convexe, 28
- Épais (convexe), 36
- Équianharmonique (division), 89
- Équivariante
  - (application), 91
- Espace
  - affine, 10
  - projectif, 73
- Étoile d'un sommet, 48
- Euler (formule d'Euler)
  - $s - a + f = 2$ , 50
- Extrémal (point), 40
- Extr( $C$ ), 40
- Face, 42
- Fermée

- boule, 28
- partie, 28
- Fixe (point), 17
- Frontière, 29
- $GA(\mathcal{E})$ , 20
- Groupe, 1
  - affine  $GA(\mathcal{E})$ , 20
  - alterné  $A_n$ , 53, 58
  - des homothéties et translations, 21
  - diédral, 34
  - projectif, 84, 90
  - symétrique  $S_n$ , 1, 86, 94
- Harmonique (division), 89
- Homographies
  - de  $\mathbb{P}(E)$  sur  $\mathbb{P}(F)$ , 90, 93
  - de  $\mathbb{P}(V)$ , 84
  - de  $\mathbb{P}^1(k)$ , 83, 86, 94
- Homothéties, 17
- Hyperplan
  - affine, 65
  - d'appui, 30
  - médiateur, 46
  - projectif, 75
- Intérieur, 29
  - relatif d'un convexe, 42
- Isobarycentre, 22
- Isométrie
  - affine, 33
  - de  $\mathbb{R}^3$ , 46
  - vectorielle, 33
- $Is(X)$ ,  $Is^+(X)$ , 33
- Lagrange (théorème de), 4
- Libre (action), 3, 10, 91
- Lipschitzienne (application), 29, 37
- Médianes d'un triangle, 22
- Ménélaüs (théorème de), 69
- Médiateur (plan ou hyperplan), 46
- $n$ -gone convexe, 30
  - régulier, 32, 34, 46
- N-rapport, 91, 93
- Opposés (côtés), 97
- Orbite, 3, 88, 91
- Orthogonalité
  - entre  $V$  et  $V^*$ , 76, 95
- Ouverte
  - boule, 28
  - partie, 28
- $p$ -groupe, 6
- Pappus (théorème de), 24, 80
- Pappus (théorème dual de), 99
- Partie linéaire d'une appl. affine, 15
- Pinceau
  - d'hyperplans, 96
  - de droites, 96
- Plongement
  - projectif, 70, 71, 73
  - vectériel, 65
- Polyèdre convexe, 63
- Polygone convexe, 30
- Polytope, 41
  - régulier, 47, 48, 51, 52
- Projectif
  - espace, 73
  - groupe, 84, 90
  - repère, 91
  - sous-espace, 77
- Projection
  - sur  $\mathcal{F}$  de direction  $G$ , 18
  - sur un convexe fermé, 38
- Projectivement indépendants (points), 89
- Quadrangle complet, 97
- Quadrilatère complet, 97
- Quotient
  - ensemble, 3
  - groupe, 4
- Régulier
  - dodécaèdre, 56
  - hexaèdre (cube), 54
  - icosaèdre, 58
  - octaèdre, 55
  - polygone, 32, 34, 46
  - polytope, 47, 48
  - tétraèdre, 53
- Représentations d'un groupe, 3
- Repère
  - affine, 14, 68
  - projectif, 90, 91
- Restriction d'une action
  - à un sous-ensemble stable, 2
  - à un sous-groupe, 2
- Rotation, 46
  - gauche, 47
- Segment, 27
- Semi-direct (produit), 6, 20, 21, 85
- Similitude (directe), 50, 52
- Simplexe, 36
- Sommet
  - d'un convexe, 40
- Sous-espace
  - affine, 13, 77
  - affine engendré, 35
  - projectif, 73, 77
  - projectif engendré, 74
- Stabilisateur, 3, 48, 88
- Stable
  - sous-ensemble, 2
- Symétrie
  - centrale, 47
  - orthogonale, 47
  - par rapport à  $\mathcal{F}$  de direction  $G$ , 18
- Symétrique (groupe), 1, 86, 94
- Thalès
  - (réciproque du théorème), 19
  - (théorème de), 19
  - (version projective), 104
- Théorème

- de Cauchy, 5
- de Ceva, 69
- de Desargues affine, 25
- de Desargues projectif, 81, 100
- de Hahn-Banach, 34, 36
- de Lagrange, 4
- de Ménélaüs, 69
- de Minkowski-Krein-Milman, 40
- de Pappus, 24
- de Pappus dual, 99
- de Pappus projectif, 80
- de Thalès, 19
- de Thalès (réciproque), 19
- de Thalès projectif, 104
- Transitive (action), 3, 10, 91
- Translations, 15