

Université Pierre et Marie Curie
Master de Sciences et Technologies
Mention Mathématiques, M1
Année 2014–2015

4M001

ALGÈBRE GÉOMÉTRIQUE

Partie III : Géométrie euclidienne
(semaines 10 à 12)

Patrick Polo

Patrick Polo

Université P. & M. Curie

Institut de Mathématiques de Jussieu (UMR 7586 du CNRS)

URL : <http://webusers.imj-prg.fr/~patrick.polo>

E-mél : patrick.polo@upmc.fr

TABLE DES MATIÈRES

1. Semaine 1 : Espaces affines	1
1. Définition algébrique et exemples.....	1
2. Approche « historique » de la droite et du plan affines réels.....	4
3. Applications affines.....	5
2. Semaine 2 : Coordonnées barycentriques, plongement vectoriel canonique, théorèmes de Ménélaüs et de Céva	9
4. Barycentres et coordonnées barycentriques.....	9
5. Plongement vectoriel et coordonnées barycentriques.....	12
6. Théorèmes de Ménélaüs et de Ceva.....	16
3. Semaine 3 : Espaces projectifs, plongement projectif d'un espace affine, théorèmes de Pappus et de Desargues	19
7. Plongement projectif d'une droite ou d'un plan affine.....	19
8. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines.....	21
9. Théorèmes de Thalès, de Pappus et de Desargues.....	29
4. Semaine 4 : Repères projectifs, groupe $PGL(V)$ et birapport	35
10. Repères projectifs, groupe $PGL(V)$ et birapports.....	35
5. Semaines 5-6 : Perspectivités et projections centrales, involutions d'une droite projective et birapport	47
11. Perspectivités et projections centrales, involutions et birapport.....	47
7. Semaine 7 : Dualité projective, hypersurfaces	65
12. Dualité projective.....	65
13. Hyperplans tangents à une hypersurface affine ou projective.....	73
8. Semaines 8 et 9 : Formes quadratiques, quadriques et coniques	81
14. Formes quadratiques.....	81
15. Quadriques et coniques projectives.....	90
10. Semaine 10 : Géométrie affine euclidienne I. Coniques	103
16. Rappels sur les espaces euclidiens.....	103
17. Coniques du plan affine euclidien.....	108
11. Semaines 11-12 : Géométrie affine euclidienne II. Convexité et polyèdres réguliers	123
18. Parties convexes de \mathbb{R}^n	123
19. Polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3	130

Index..... iii

CHAPITRE 10

SEMAINE 10 : GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE I. CONIQUES

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§III.3.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Du] Antoine Ducros, Géométrie affine et euclidienne, Cours de L3 à l'UPMC 2009-2012 (sections 4 et 5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~antoine.ducros

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. II, VI et VIII.

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§1.9 et 3.3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. 6 et 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

16. Rappels sur les espaces euclidiens

Définitions 16.1. — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel (pas nécessairement de dimension finie).

(1) Soient ϕ une fbs sur E et Q la forme quadratique associée. On dit que Q (ou ϕ) est **définie positive** si $Q(x) > 0$ pour tout $x \in E - \{0\}$. Dans ce cas, on dit que ϕ est un **produit scalaire** et l'on note souvent $\phi(x, y) = (x | y)$.

Rappelons que dans ce cas Q est *non dégénérée* : si $x \in N(Q)$, on a en particulier $Q(x) = 0$, d'où $x = 0$.

(2) Si E est de dimension finie, on dit alors que « E , muni de $(|)$ » est un **espace euclidien**. (Pour abrégé, on écrira souvent : « Soit E un espace euclidien », sans préciser le produit scalaire $(|)$, celui-ci étant sous-entendu.)

Exemples 16.2. — (1) \mathbb{R}^n muni du produit scalaire standard : $(x | y) = x_1y_1 + \dots + x_ny_n$ si

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, la forme quadratique associée étant $Q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$, est un

espace euclidien de dimension n . Pour ce produit scalaire, la base canonique (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{R}^n est *orthonormée*, i.e. on a $(e_i | e_j) = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon.

(2) Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ (il n'est pas de dimension finie!). Il est muni du produit scalaire $(f | g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

Définition 16.3. — Soit E , muni de $(|)$, un espace euclidien.

(1) Une famille $(e_i)_{i \in I}$ de vecteurs est dite **orthonormée** si $(e_i | e_i) = 1$ et $(e_i | e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

(2) Supposons E de dimension n . Une **base orthonormée** est une base (e_1, \dots, e_n) de E qui est une famille orthonormée, i.e. qui vérifie $(e_i | e_i) = 1$ et $(e_i | e_j) = 0$ pour tout $i \neq j$.

(3) Toute famille orthonormée est *libre*. En particulier, si $\dim E = n$, toute famille orthonormée (f_1, \dots, f_n) de cardinal n est une base orthonormée de E .

(4) Dans la suite, on abrégera souvent « base orthonormée » en : b.o.n.

Démonstration. — Prouvons (3). Supposons qu'on ait une relation $0 = t_1 e_{i_1} + \dots + t_p e_{i_p}$, avec $i_1, \dots, i_p \in I$ deux à deux distincts et $t_1, \dots, t_p \in \mathbb{R}$. Fixons un indice $r \in \{1, \dots, p\}$ et appliquons $(e_{i_r} | \cdot)$ à l'égalité précédente. Comme $(e_{i_r} | e_{i_s}) = 0$ pour $s \neq r$, on obtient $0 = t_r (e_{i_r} | e_{i_r}) = t_r$, d'où $t_r = 0$. Ceci prouve que la famille $(e_i)_{i \in I}$ est libre. \square

Théorème 16.4. — *Soit E un espace euclidien de dimension n . Alors E admet une base orthonormée.*

Démonstration. — D'après le théorème d'inertie de Sylvester 14.21, il existe une base orthogonale (e_1, \dots, e_n) telle que $(e_i | e_i) \in \{1, -1, 0\}$; or comme $(\cdot | \cdot)$ est défini positif on a nécessairement $(e_i | e_i) = 1$, donc (e_1, \dots, e_n) est une b.o.n. \square

Définition 16.5 (Normes et distances). — Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel. Une **norme** $\|\cdot\|$ sur E est une application $E \rightarrow \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \|x\|$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

- (1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (2) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \in E$, on a $\|tx\| = |t| \cdot \|x\|$ (où $|t|$ est la valeur absolue de t).
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$, pour tout $u, v \in E$.

L'inégalité précédente est nommée **inégalité triangulaire**, pour la raison suivante. Si on pose $d(x, y) = \|y - x\|$, pour tout $x, y \in E$, alors, compte tenu de (1) et (2) ci-dessus, (3) équivaut à dire (en posant $u = y - x$, $v = z - y$) que l'application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une **distance** sur E , i.e. vérifie :

- (1') $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- (2') $d(x, y) = d(y, x)$.
- (3') **Inégalité triangulaire** : pour tout $x, y, z \in E$, on a : $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Théorème 16.6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz et norme euclidienne)

Soit $(\cdot | \cdot)$ un produit scalaire sur E et soit Q la forme quadratique associée.

(i) On a l'inégalité de Cauchy-Schwarz : $\boxed{\forall x, y \in E \quad (x | y)^2 \leq Q(x)Q(y)}$, avec égalité ssi x et y sont liés.

(ii) L'application $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E , appelée la **norme euclidienne** associée à $(\cdot | \cdot)$, et l'inégalité de Cauchy-Schwarz se réécrit comme suit (où dans le terme de gauche $|\cdot|$ désigne la valeur absolue dans \mathbb{R}) :

$$(CS) \quad \boxed{\forall x, y \in E \quad |(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|}$$

Démonstration. — (i) Si x ou y est nul, les deux membres sont nuls. Supposons donc x et y non nuls. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$0 \leq Q(tx + y) = t^2 Q(x) + 2t(x | y) + Q(y).$$

Comme le polynôme de degré 2 en t ci-dessus ne change pas de signe, alors son discriminant réduit $\Delta' = (x | y)^2 - Q(x)Q(y)$ ⁽¹⁾ est ≤ 0 , ce qui prouve l'inégalité voulue. De plus, on a égalité ssi $\Delta' = 0$, ce qui équivaut à ce que le trinôme ci-dessus ait une racine double $t_0 = -(x | y)/Q(x)$; dans ce cas, l'égalité $Q(t_0x + y) = 0$ équivaut, puisque Q est définie positive, à $t_0x + y = 0$ i.e. à $y = \frac{(x | y)}{(x | x)} x$. Ceci prouve (i).

(ii) Prouvons que $x \mapsto \|x\| = \sqrt{(x | x)}$ est une norme sur E . Comme $(\cdot | \cdot)$ est défini positif, on a $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$. D'autre part, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $x \in E$, on a $|t| = \sqrt{t^2}$ et donc

$$\|tx\| = \sqrt{(tx | tx)} = \sqrt{t^2(x | x)} = |t| \cdot \|x\|.$$

⁽¹⁾Pour un trinôme $aX^2 + 2bX + c$ dont le coefficient de X est écrit sous la forme $2b$, il est commode de considérer le *discriminant réduit* $\Delta' = b^2 - ac$ (au lieu du discriminant usuel $\Delta = (2b)^2 - 4ac = 4\Delta'$).

Enfin, soient $x, y \in E$. D'abord, l'inégalité de Cauchy-Schwarz équivaut (en prenant la racine carrée) à :

$$|(x | y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|;$$

alors, multipliant par 2 et ajoutant $\|x\|^2 + \|y\|^2$ aux deux membres, on obtient

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y) \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2|(x | y)| \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Prenant la racine carrée, ceci entraîne (et équivaut à) l'inégalité triangulaire. Le théorème est démontré. \square

Récrivons certaines conséquences de l'égalité $(x + y | x + y) = (x | x) + (y | y) + 2(x | y)$ en utilisant la norme $\|\cdot\|$ (ou plutôt son carré) :

Proposition 16.7 (Pythagore, parallélogramme et médiane, polarisation)

Soient E un espace euclidien et $\|\cdot\|$ la norme associée au produit scalaire. On a les égalités suivantes :

(Pythagore) $\|x_1 + \dots + x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \dots + \|x_n\|^2$ si x_1, \dots, x_n sont orthogonaux

(Parallélogramme/Médiane) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

(Polarisation) $4(x | y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2$

Démonstration. — L'égalité de Pythagore est immédiate si $n = 2$, et dans ce cas on a même la réciproque : si $\|x_1 + x_2\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ alors $(x_1 | x_2) = 0$. L'égalité pour n vecteurs orthogonaux s'obtient par récurrence sur n . On prendra garde que la réciproque est fautive pour $n \geq 3$: prendre par exemple dans \mathbb{R}^2 euclidien les vecteurs $x_1 = (1, 0)$, $x_2 = (1, 1)$, $x_3 = (-1, 1)$.

Les deux autres égalités s'obtiennent en ajoutant (resp. soustrayant) les égalités :

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y | x + y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x | y), \\ \|x - y\|^2 &= (x - y | x - y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x | y). \end{aligned}$$

\square

Remarques 16.8. — La deuxième égalité s'appelle « *identité du parallélogramme* », car elle exprime que dans le parallélogramme construit sur les vecteurs x et y , la somme des carrés des longueurs des quatre côtés égale la somme des carrés des longueurs des deux diagonales (qui sont $x + y$ et $x - y$). Elle s'appelle aussi « *identité de la médiane* », car dans le triangle construit sur les vecteurs 0 , x et y , la médiane joignant 0 au milieu du côté $[x, y]$ est $(x + y)/2$, et l'on a donc une formule exprimant (le carré de) la longueur de la médiane en fonction de la longueur des côtés :

$$\left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 = \frac{\|x\|^2}{2} + \frac{\|y\|^2}{2} - \frac{\|x - y\|^2}{4}.$$

Enfin, la dernière égalité est appelée « *identité de polarisation* », car elle exprime en fonction de la forme quadratique $Q(x) = \|x\|^2$ le produit scalaire, qui est la forme polaire de Q .

Définition et proposition 16.9 (Isométries vectorielles). — Soient E, F deux espaces euclidiens de même dimension n , notons $(\cdot | \cdot)_E$ et $\|\cdot\|_E$ (resp. $(\cdot | \cdot)_F$ et $\|\cdot\|_F$) le produit scalaire et la norme euclidienne sur E (resp. F). Soit $f : E \rightarrow F$ une application linéaire.

(1) Les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) f préserve la norme : $\forall x \in E, \|x\|_E = \|f(x)\|_F$

(b) f préserve le produit scalaire : $\forall x, y \in E, (x | y)_E = (f(x) | f(y))_F$

(c) Pour toute b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E , la famille $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une b.o.n. de F .

(d) Il existe une b.o.n. $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ soit une b.o.n. de F .

(2) Sous ces conditions, on dit que f est une **isométrie** vectorielle de E sur F

(3) Dans ce cas, f est bijective, et son inverse f^{-1} est aussi une isométrie.

Démonstration. — Supposons que f préserve la norme, et soient $x, y \in E$. Alors $\|x + y\|_E^2 = \|f(x + y)\|_F^2 = \|f(x) + f(y)\|_F^2$, et le premier (resp. dernier) membre égale :

$$\|x\|_E^2 + \|y\|_E^2 + 2(x | y)_E, \quad \text{resp.} \quad \|f(x)\|_F^2 + \|f(y)\|_F^2 + 2(f(x) | f(y))_F$$

et comme $\|x\|_E^2 = \|f(x)\|_F^2$ et $\|y\|_E^2 = \|f(y)\|_F^2$, on obtient que $(x | y)_E = (f(x) | f(y))_F$. Ceci prouve que (a) \Rightarrow (b).

Les implications (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d) sont évidentes, montrons que (d) \Rightarrow (a). Supposons (d) vérifiée. Pour tout $x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ dans E , on a $f(x) = \sum_i x_i f(e_i)$ et, comme (e_1, \dots, e_n) et $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ sont des b.o.n., on obtient

$$\|x\|_E^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 = \|f(x)\|_F^2$$

donc (a) est vérifiée. Ceci prouve l'assertion (1).

Prouvons (3). Soit $f : E \rightarrow F$ une isométrie, et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E . Comme $f(\mathcal{B})$ est une b.o.n. (donc une base) de F , alors f est bijective. Son inverse f^{-1} envoie la b.o.n. $f(\mathcal{B}) = (f(e_1), \dots, f(e_n))$ de F sur la b.o.n. \mathcal{B} de E , donc f^{-1} est une isométrie. Ceci prouve (3). La proposition est démontrée. \square

Définition 16.10. — On dit qu'un espace affine réel (\mathcal{E}, E) est **euclidien** si E est de dimension finie et est muni d'un produit scalaire $(|)$. Dans ce cas, \mathcal{E} est muni de la **distance euclidienne**, définie par $d(x, y) = \|\vec{xy}\| = \sqrt{(\vec{xy} | \vec{xy})}$.

Si (\mathcal{E}, E) est un espace euclidien, alors tout sous-espace affine (\mathcal{F}, F) est euclidien, car la restriction à F du produit scalaire de E est un produit scalaire sur F .

Définition 16.11 (Isométries affines). — Soit \mathcal{E} un espace affine euclidien. Une **isométrie affine** de \mathcal{E} est une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances, i.e. telle que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in \mathcal{E}$. On notera $\text{Is}(\mathcal{E})$ l'ensemble de ces isométries. ⁽²⁾

Rassemblons quelques propriétés des isométries affines, dont on laisse la démonstration au lecteur.

Proposition 16.12. — Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine euclidien.

(i) Une application affine $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ est une isométrie ssi sa partie linéaire \vec{f} est une isométrie vectorielle de E . Dans ce cas, \vec{f} et f sont bijectives.

(ii) En particulier, toute translation $f = t_{\vec{v}}$ est une isométrie affine de \mathcal{E} .

(iii) Si $f, g : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ sont des isométries affines alors $g \circ f$ en est une aussi.

Définition 16.13 (Repères orthonormés). — Soit (\mathcal{E}, E) un espace affine euclidien. Un repère $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ de \mathcal{E} est dit **orthonormé** si \mathcal{B} est une base orthonormée de E .

Donnons quelques exemples d'isométries affines.

Définition 16.14 (Symétries orthogonales). — Soient F un sev de E et \mathcal{F} un sous-espace affine de \mathcal{E} de direction F . La **symétrie orthogonale** s par rapport à \mathcal{F} est la symétrie par rapport à \mathcal{F} de direction F^\perp , i.e. $s(M)$ est l'unique point P vérifiant : $\overrightarrow{MP} \in F^\perp$ et le milieu du segment $[M, P]$ appartient à \mathcal{F} .

⁽²⁾En fait, on peut montrer qu'une application $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ qui conserve les distances est nécessairement affine.

En effet, soit $p(M)$ le projeté orthogonal de M sur \mathcal{F} , i.e. le point d'intersection de $M + F^\perp$ avec \mathcal{F} . Alors, par définition on a $s(M) = M + \overrightarrow{2Mp(M)}$ (cf. 3.12, semaine 1) d'où $\overrightarrow{Ms(M)} = \overrightarrow{2Mp(M)}$ et le milieu de $[M, s(M)]$ est $p(M)$, qui appartient bien à \mathcal{F} . Réciproquement, si un point P vérifie les conditions précédentes alors le milieu I de $[M, P]$ appartient à \mathcal{F} et $\overrightarrow{MI} = (1/2)\overrightarrow{MP}$ appartient à F^\perp , d'où $I = p(M)$, et donc $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{2Mp(M)}$ d'où $P = s(M)$.

Exemple 16.15. — Si $F = \{0\}$ alors \mathcal{F} est un point I et l'on obtient la **symétrie centrale** de centre I : pour tout $M \in \mathcal{E}$ on a $\overrightarrow{Is(M)} = -\overrightarrow{IM}$. Sa partie linéaire est $-\text{id}_E$.

Proposition 16.16 (Symétries par rapport à un hyperplan)

Soient $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$ un repère orthonormé de \mathcal{E} , (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans ce repère, \mathcal{H} un hyperplan affine d'équation $a_1x_1 + \dots + a_nx_n = \lambda$, avec $a_1, \dots, a_n, \lambda \in \mathbb{R}$ et les a_i non tous nuls, et H l'hyperplan vectoriel direction de \mathcal{H} i.e. d'équation $\sum_{i=1}^n a_ix_i = 0$. Alors :

(i) Le vecteur $u = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ est un vecteur **normal** à \mathcal{H} (i.e. orthogonal à H) et l'on a $\mathcal{H} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E} \mid (u \mid x) = \lambda\}$.

(ii) Soit s la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{H} . Pour tout $M = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{E}$, posant $\mu_M = \sum_{i=1}^n a_ix_i$ on a :

$$(\dagger) \quad s(M) = M + 2 \frac{\lambda - \mu_M}{(u \mid u)} u = M + 2 \frac{\lambda - \sum_{i=1}^n a_ix_i}{\sum_{i=1}^n a_i^2} u.$$

Démonstration. — (i) Par définition, \mathcal{H} est l'ensemble des points $M = (x_1, \dots, x_n)$ de \mathcal{E} tels que $\lambda = \sum_{i=1}^n a_ix_i = (u \mid x)$. Fixons arbitrairement un point $M_0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ de \mathcal{H} . Alors pour tout $v \in H$, de coordonnées (y_1, \dots, y_n) dans la base \mathcal{B} le point $M_v = M_0 + v$ appartient à \mathcal{H} et a pour coordonnées $x'_i = x_i^0 + y_i$. On a donc

$$(u \mid v) = \sum_{i=1}^n a_iy_i = \sum_{i=1}^n a_ix'_i - \sum_{i=1}^n a_ix_i^0 = \lambda - \lambda = 0.$$

Ceci montre que u appartient à la droite vectorielle $D = H^\perp$, et comme $u \neq 0$ on a $D = \mathbb{R}u$.

(ii) Soit $M = (x_1, \dots, x_n)$ un point arbitraire de \mathcal{E} et soit $p(M)$ son projeté orthogonal sur \mathcal{H} . Alors $\overrightarrow{Mp(M)}$ égale αu pour un unique $\alpha \in \mathbb{R}$, et notant maintenant (x_1^0, \dots, x_n^0) les coordonnées de $p(M)$, on obtient comme plus haut que

$$\alpha(u \mid u) = (u \mid \alpha u) = \sum_{i=1}^n a_ix_i - \sum_{i=1}^n a_ix_i^0 = \mu_M - \lambda,$$

d'où $\alpha = \frac{\lambda - \mu_M}{(u \mid u)}$. Et comme $\overrightarrow{Ms(M)} = \overrightarrow{2Mp(M)}$ on obtient bien la formule (\dagger) . \square

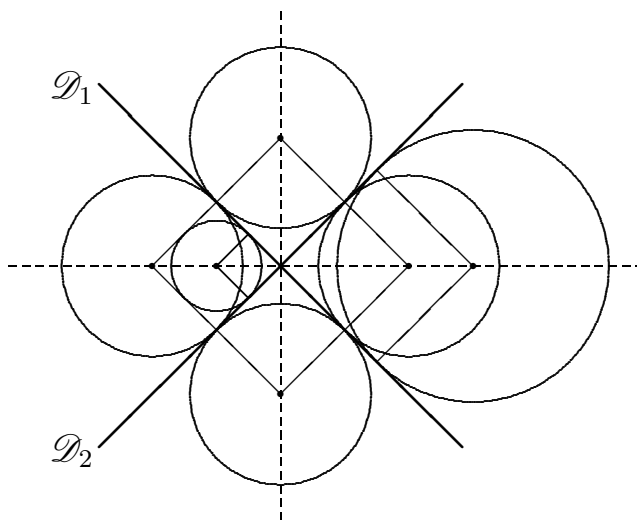
Exercices 16.17. — (1) Dans \mathbb{R}^2 , soit s la symétrie orthogonale par rapport à la droite \mathcal{D} d'équation $x + 2y = 3$. Donner un vecteur normal à \mathcal{D} puis pour tout $M = (x, y)$ déterminer les coordonnées de $s(M)$.

(2) Dans \mathbb{R}^3 , soit σ la symétrie orthogonale par rapport au plan \mathcal{H} d'équation $x + y + z = 3$. Donner un vecteur normal à \mathcal{H} puis pour tout $M = (x, y, z)$ déterminer les coordonnées de $\sigma(M)$.

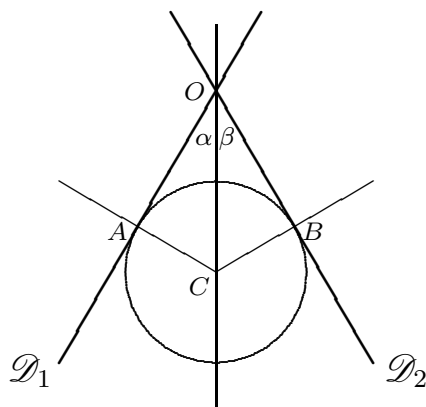
17. Coniques du plan affine euclidien

Si M, N sont des points d'un espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) , on notera MN la longueur du segment $[M, N]$, i.e. la norme euclidienne du vecteur \overrightarrow{MN} . Pour alléger la notation, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sera parfois noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ au lieu de $(\vec{u} | \vec{v})$. Dans la suite, (\mathcal{E}, E) désignera un espace affine euclidien de dimension n arbitraire, et \mathcal{P} un plan affine euclidien.

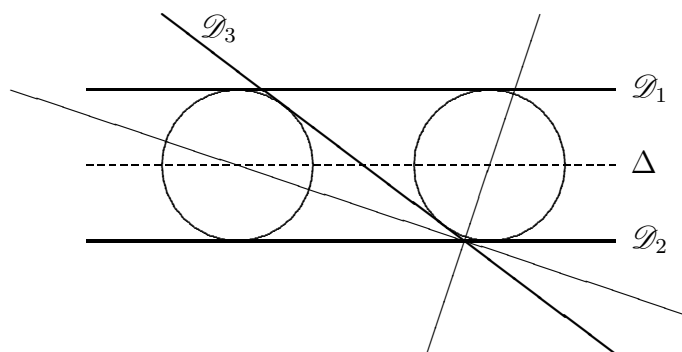
17.1. Cercles tangents à une, deux ou trois droites. — Soient $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ deux droites de \mathcal{P} , distinctes et sécantes en un point O . On rappelle qu'un cercle \mathcal{C} est tangent à \mathcal{D}_1 et à \mathcal{D}_2 ssi son centre appartient à l'une des *bissectrices* de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 (il y en a deux, orthogonales l'un à l'autre) : dans la figure ci-dessous, on a représenté six cercles tangents à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 ; quatre d'entre eux sont centrés sur l'une des bissectrices et les deux autres sur l'autre bissectrice. (On a aussi indiqué les rayons joignant les centres aux points de tangence.)



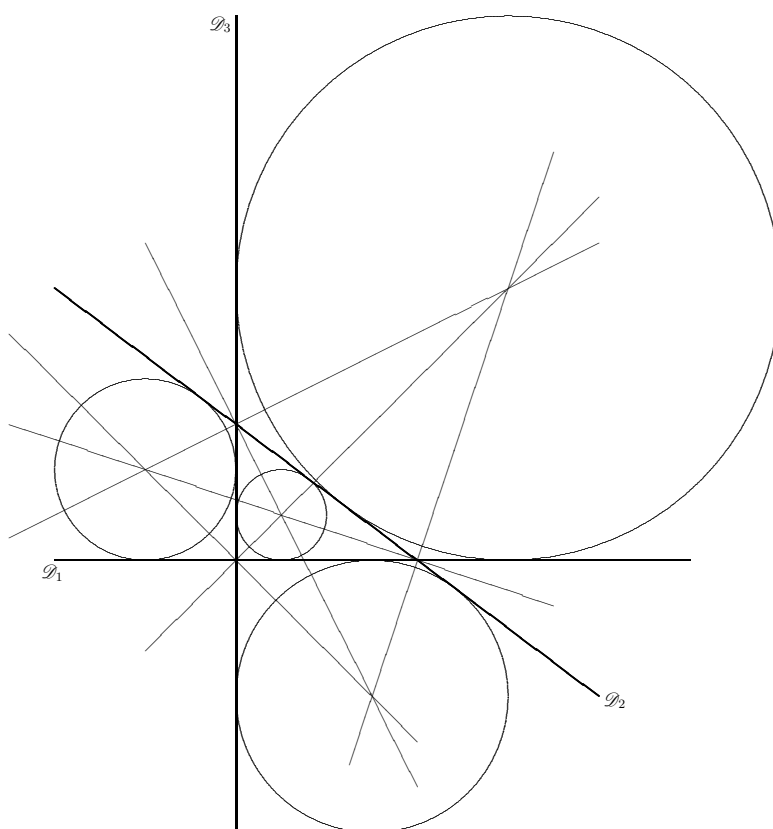
Rappelons une démonstration de ce fait, cf. la figure ci-dessous. Soit C un point de \mathcal{P} hors de $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ et soient A et B ses projections orthogonales sur \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 . Alors C est le centre d'un cercle tangent à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 en A et B ssi $CA = CB$. Comme les triangles AOC et BOC sont rectangles en A et B , on a $AC = OC \sin(\alpha)$ et $BC = OC \sin(\beta)$ et donc $AC = BC$ ssi $\alpha = \beta$.



D'autre part, si \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles, alors les cercles \mathcal{C} tangents à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont centrés sur la parallèle Δ à \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 située « au milieu » (cf. la figure ci-dessous). Donc si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont trois droites distinctes, avec \mathcal{D}_3 sécantes aux deux droites parallèles \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 , on voit qu'il y a exactement deux cercles tangents à $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2$ et \mathcal{D}_3 :



Enfin, si $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ sont trois droites non concourantes mais deux à deux sécantes, i.e. se coupant en des points distincts A, B, C , il y a quatre cercles tangents à ces trois droites : l'un est le cercle *inscrit* du triangle ABC , les trois autres sont les cercles *exinscrits* de ce triangle :



17.2. Sphères tangentes intérieurement à un cône de révolution. — Soit (\mathcal{E}, E) un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Pour tout $I \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$ on note $\Sigma(I, r)$ la sphère de centre I et de rayon r ; elle est de « dimension $n - 1$ ». ⁽³⁾

Définition 17.1 (Puissance d'un point par rapport à une sphère)

Soit $\Sigma = \Sigma(I, r)$ une sphère de \mathcal{E} . La *puissance* d'un point $A \in \mathcal{E}$ par rapport à Σ est $IA^2 - r^2$, qu'on notera $\Sigma(A)$. Alors A est un point de Σ (resp. à l'extérieur de Σ , resp. à l'intérieur) ssi $\Sigma(A) = 0$ (resp. > 0 , resp. < 0).

Lemme 17.2 (Distance d'un point à un sea). — Soient \mathcal{F} un sous-espace affine, M un point de \mathcal{E} et H sa projection orthogonale sur \mathcal{F} .

⁽³⁾Au sens de la géométrie différentielle (ou de la géométrie algébrique).

Pour tout $P \in \mathcal{F}$, on a $\boxed{MH \leq MP}$, avec égalité ssi $P = H$. Donc MH est la distance minimale de M à un point de \mathcal{F} , et l'on pose $MH = d(M, \mathcal{F})$.

Démonstration. — Notons F la direction de \mathcal{F} . Pour $P \in \mathcal{F}$ on a $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP}$ et les vecteurs $\overrightarrow{MH} \in F^\perp$ et $\overrightarrow{HP} \in F$ sont orthogonaux, donc d'après le théorème de Pythagore : $MP^2 = MH^2 + HP^2 \geq MH^2$, avec égalité si et seulement si $P = H$. \square

Proposition 17.3 (Cône de sommet O tangent à une sphère)

Soient $\Sigma = \Sigma(I, r)$ une sphère et O un point de \mathcal{E} extérieur à Σ . Notons Δ la droite (OI) et soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par O .

(i) \mathcal{D} coupe Σ en deux points P, Q et l'on a $\boxed{OP \cdot OQ = \Sigma(O)}$ (P, Q sont confondus si \mathcal{D} est tangente à Σ).

(ii) Supposons \mathcal{D} tangente à Σ en un point P . Alors la distance OP égale $\sqrt{\Sigma(A)}$ donc elle est la même pour toute tangente, de même que l'angle $\theta \in]0, \pi/2[$ défini par $\boxed{OP = \cos(\theta)OI}$. On appelle OP la distance tangentielle de O à Σ et on la notera $d(O, \Sigma)$.

On a donc :

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = \cos(\theta)OI^2 \quad \text{et} \quad d(O, \Sigma)^2 = OP^2 = \cos^2(\theta)OI^2.$$

Soit \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal à Δ passant par P , i.e.

$$\mathcal{H} = \{M \in \mathcal{E} \mid \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OI} = \cos(\theta)OI^2\}.$$

(iii) L'ensemble des points de tangence est une sphère de \mathcal{H} ⁽⁴⁾ : son centre est le point C défini par $\overrightarrow{OC} = \cos^2(\theta)OI$ et son rayon est $r' = r \cos(\theta)$.

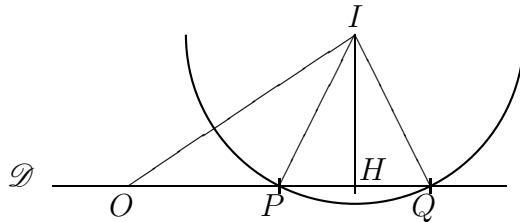
(iv) Soit \mathcal{R} la réunion des tangentes à Σ passant par O : c'est un cône de révolution de sommet O , d'axe $\Delta = (OI)$ et dont θ est le « demi-angle au sommet ».

(v) Pour tout $M \in \mathcal{R}$, notons M_Δ (resp. $M_{\mathcal{H}}$) sa projection orthogonale sur Δ (resp. sur \mathcal{H}). Alors on a $\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{E} \mid OM_\Delta = \cos(\theta)OM\}$ et

$$\mathcal{R} = \{M \in \mathcal{E} \mid MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)\}.$$

Démonstration. — Comme \mathcal{D} et Δ sont sécantes en O elles sont contenues dans un plan \mathcal{P} . ⁽⁵⁾ Alors $\Sigma \cap \mathcal{P}$ est le cercle \mathcal{C} de centre I et de rayon r et O est extérieur à \mathcal{C} donc la droite \mathcal{D} coupe \mathcal{C} en deux points P, Q (confondus si \mathcal{D} est tangente à \mathcal{C}).

(i) Soit H la projection orthogonale de I sur \mathcal{D} . Si $P \neq Q$, l'égalité $IP = IQ$ entraîne que I est sur la médiatrice du segment $[P, Q]$, donc H est le milieu de $[P, Q]$, cf. la figure qui suit.



On a donc : $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}) \cdot (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{HP}) = OH^2 - HP^2$. D'autre part, comme \overrightarrow{OP} et \overrightarrow{OQ} sont colinéaires et de même sens, on a $OP \cdot OQ = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$, d'où :

$$OP \cdot OQ = \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = OH^2 - HP^2 = OI^2 - IH^2 - HP^2 = OI^2 - r^2 = \Sigma(O).$$

⁽⁴⁾Elle est donc de dimension $n - 2$; si $n = 2$ elle est formée de deux points.

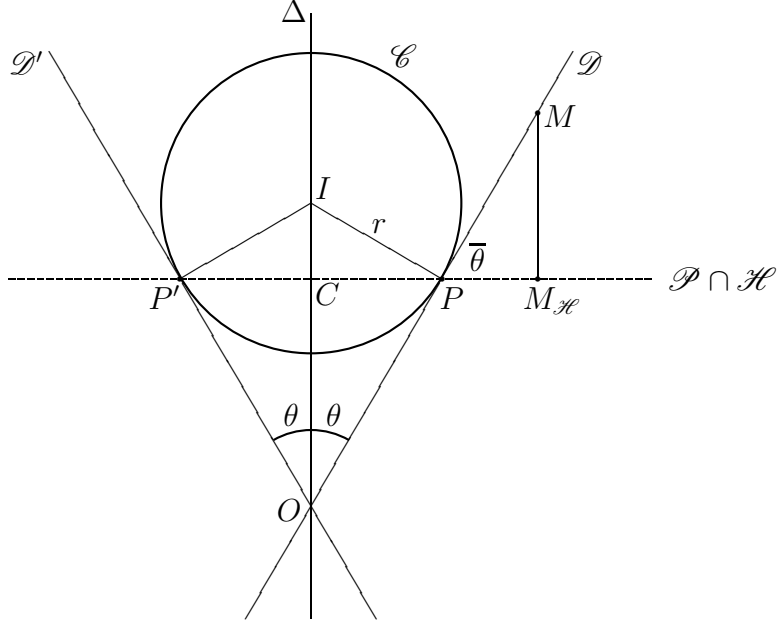
⁽⁵⁾ \mathcal{P} est uniquement déterminé si $\mathcal{D} \neq \Delta$; sinon on peut prendre n'importe quel plan \mathcal{P} contenant Δ .

Supposons désormais \mathcal{D} tangente à \mathcal{C} en $P = Q$. Alors le rayon IP est orthogonal à \mathcal{D} d'où $H = P$ et l'on a $OP^2 = OI^2 - r^2 = \Sigma(O)$. Ceci prouve (i) ainsi que la 1ère assertion de (ii).

Notons C la projection orthogonale de P sur Δ et θ l'angle (non orienté) entre les demi-droites $[OP)$ et $[OI) = [OC)$ (cf. la figure ci-dessous). Alors $d(O, \Sigma) = OP = OI \cos(\theta)$ et

$$\vec{OP} \cdot \vec{OI} = OP \cdot OI \cos(\theta) = \cos(\theta) OI^2.$$

De plus, $\cos(\theta) = d(O, \Sigma)/OI$ est indépendant de la tangente choisie. Ceci achève la preuve de (ii) et prouve aussi que $OC = \cos(\theta)OP = \cos^2(\theta)OI$, d'où $\vec{OC} = \cos^2(\theta)\vec{OI}$.



Comme les triangles OCP et ICP sont rectangles en C alors \widehat{PCO} égale $\bar{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ et donc $\widehat{IPC} = \theta$, d'où $PC = r \cos(\theta)$. Comme l'ensemble Σ' des points de tangence est obtenu par rotation autour de la droite Δ , on obtient donc que Σ' est l'ensemble des points M tels que $CM = CP = r \cos(\theta)$; c'est donc la sphère de \mathcal{H} de centre C et de rayon $r' = r \cos(\theta)$. Ceci prouve (iii), et alors (iv) est clair (cf. la figure).

La 1ère assertion de (v) est claire (l'égalité $OM_{\Delta} = \cos(\theta)OM$ est préservée par les homothéties de centre O , et pour $M = P$ on a $P_{\Delta} = C$). Prouvons la 2ème.

Posant $\mathcal{R}_{\mathcal{D}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$, on a $\mathcal{R}_{\mathcal{D}} = \mathcal{D} \cup \mathcal{D}'$, où \mathcal{D}' est la symétrique de \mathcal{D} par rapport à Δ . Soit $M \in \mathcal{E}$; comme l'assertion à prouver est invariante par rotation autour de Δ , on peut supposer que $M \in \mathcal{P}$. Si M appartient à \mathcal{D} , on a

$$MM_{\mathcal{H}} = \sin(\bar{\theta})MP = \cos(\theta)MP = \cos(\theta)d(M, \Sigma),$$

et de même si $M \in \mathcal{D}'$. Il nous reste à montrer la réciproque, i.e. que si $MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$ alors $M \in \mathcal{R}_{\mathcal{D}}$.

Soit (O, \vec{i}, \vec{j}) un repère orthonormé de \mathcal{P} tel que \vec{j} engendre Δ , et soient (x, y) les coordonnées dans ce repère. Alors $\mathcal{R}_{\mathcal{D}}$ a pour équation $x^2 = \tan^2(\theta)y^2$. D'autre part, posons $b = OI$ et $d = OP = b \cos(\theta)$; alors $b^2 - r^2 = d^2$ et $OC = d \cos(\theta)$. Donc, si $M = (x, y)$ alors $M_{\mathcal{H}} = (x, d \cos(\theta))$ et l'on a :

$$\begin{aligned} MM_{\mathcal{H}}^2 &= (y - d \cos(\theta))^2 = y^2 - 2d \cos(\theta)y + \cos^2(\theta)d^2 = y^2 + \cos^2(\theta)(d^2 - 2b) \\ d(M, \Sigma)^2 &= MI^2 - r^2 = x^2 + (y - b)^2 - r^2 = x^2 + y^2 - 2by + d^2, \end{aligned}$$

d'où $\cos^2(\theta)d(M, \Sigma)^2 - MM_{\mathcal{H}}^2 = \cos^2(\theta)x^2 - \sin^2(\theta)y^2$. L'égalité $MM_{\mathcal{H}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$ entraîne donc $x^2 = \tan^2(\theta)y^2$ d'où $(x, y) \in \mathcal{R}_{\mathcal{F}}$. Ceci achève la preuve du point (v). \square

17.3. Sections coniques et théorème de Dandelin. — Dans ce paragraphe, on se place dans un espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) de dimension 3. Soient $\theta \in]0, \pi/2[$, Δ une droite, O un point de Δ et \mathcal{R} le cône de révolution de sommet O et de demi-angle au sommet θ . En prenant O comme origine, on identifie \mathcal{E} à E .

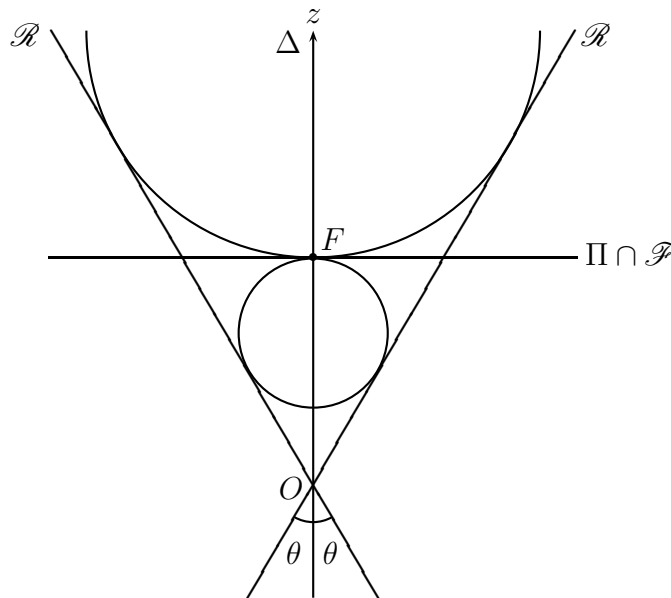
Fixons un vecteur directeur \vec{k} de Δ de norme 1 et considérons ce vecteur comme « vertical » (cf. les dessins plus bas). Alors l'intersection de \mathcal{R} avec chaque plan « horizontal » $\{\vec{u} \in E \mid \vec{u} \cdot \vec{k} = c\}$ est le cercle de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $\tan(\theta)|c|$. Donc, pour toute b.o.n. (\vec{i}, \vec{j}) du plan vectoriel $(\mathbb{R}\vec{k})^\perp$, notant (x, y, z) les coordonnées dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ l'équation de \mathcal{R} est :

$$x^2 + y^2 = \tan^2(\theta)z^2.$$

On peut dire que \mathcal{R} est obtenu en « faisant tourner » autour de l'axe Δ une droite variable, formant avec Δ un angle θ . Les droites ainsi obtenues s'appellent les **génératrices** du cône. Pour tout plan \mathcal{F} contenant Δ , l'intersection $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ est la réunion de deux de ces génératrices (voir les figures plus bas).

Soit Π un plan affine *ne contenant pas* Δ . Pour étudier l'intersection $\Pi \cap \mathcal{R}$, qui est une courbe \mathcal{C} du plan Π , appelée « (section) conique », ⁽⁶⁾ on va considérer les sphères qui sont inscrites dans le cône (i.e. qui lui sont tangentes intérieurement) et tangentes au plan Π . Distinguons deux cas.

Cas « trivial ». Si Π est orthogonal à Δ , la situation est invariante par rotation autour de Δ : la section par n'importe quel plan \mathcal{F} contenant Δ donne la figure ci-dessous :



Dans ce cas, $\mathcal{C} = \mathcal{R} \cap \Pi$ est un cercle de centre F . D'autre part, il existe deux sphères inscrites dans \mathcal{R} et tangentes à Π ; elles sont toutes deux tangentes à Π en F .

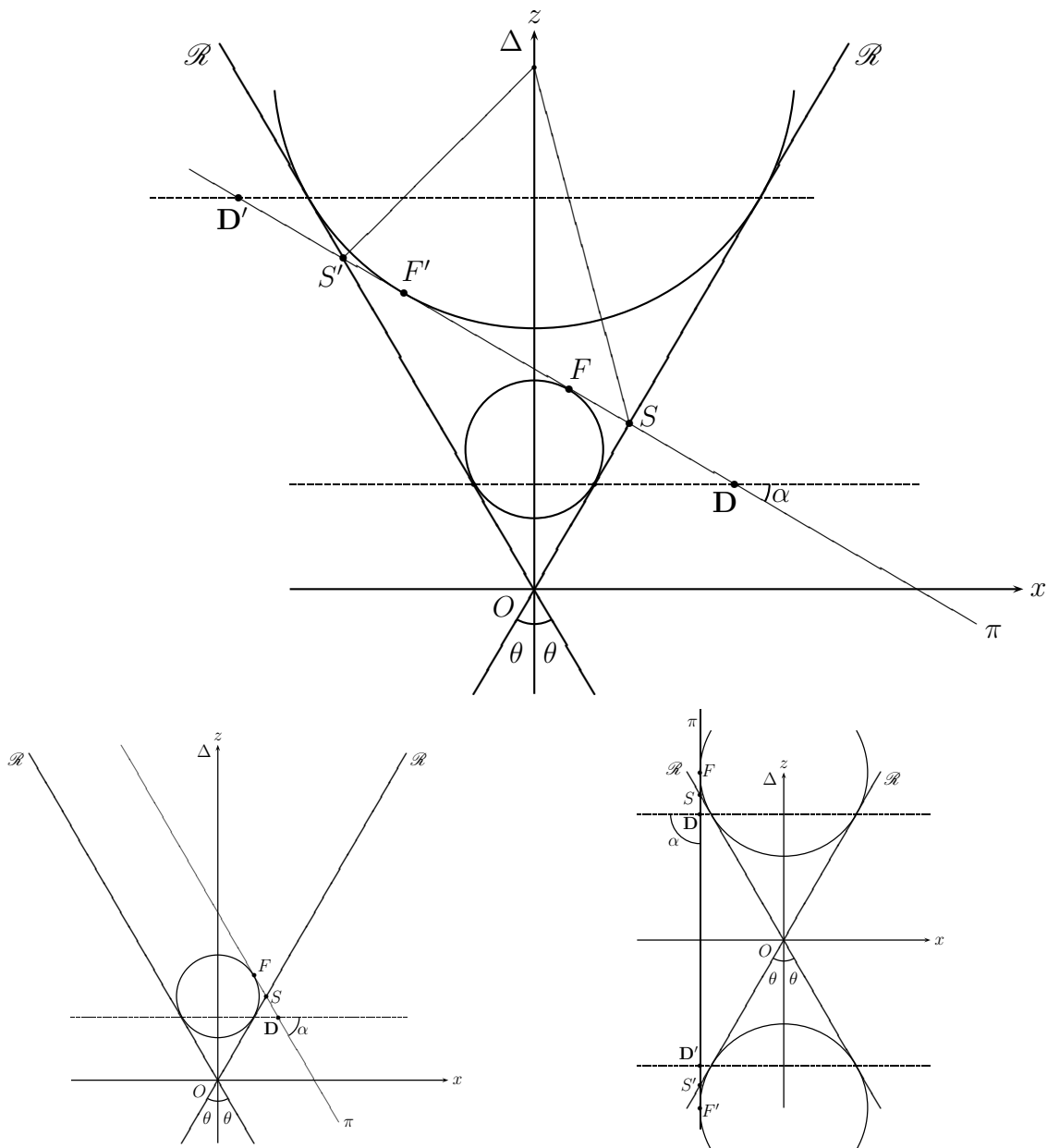
⁽⁶⁾Ces « sections coniques » ont été étudiées en premier par Ménechme (mathématicien grec, environ -390 à -320) et, à sa suite, par de nombreux mathématiciens grecs : Euclide (-325 à -265), Archimède (-287 à -212), Apollonius (-262 à -190)... En particulier les noms de parabole, hyperbole et ellipse semblent dus à Apollonius.

Cas « général ». Supposons désormais Π non orthogonal à Δ . Alors sa direction $\vec{\Pi}$ coupe le plan vectoriel $(\mathbb{R}\vec{k})^\perp$ selon une droite vectorielle Δ_1 , et l'on prendra \vec{j} comme générateur de cette droite.

Si Σ est une sphère inscrite dans \mathcal{R} , son centre C appartient à Δ ; si de plus Σ est tangente à Π en un point F , alors le vecteur \vec{CF} est orthogonal à $\vec{\Pi}$ donc à \vec{j} , donc F appartient au plan $\mathcal{F} = (Oxz)$, et alors $\Sigma \cap \mathcal{F}$ est un cercle inscrit dans le cône $\mathcal{R}_{\mathcal{F}} = \mathcal{R} \cap \mathcal{F}$ et tangent en F à la droite affine $\pi = \Pi \cap \mathcal{F}$.

Réciproquement, si Γ est un tel cercle, disons de rayon r , son centre C appartient à Δ donc la sphère $\Sigma = \Sigma(C, r)$ est inscrite dans \mathcal{R} et la direction du plan tangent $T_F\Sigma$ contient \vec{CF} et \vec{j} donc égale $\vec{\Pi}$, d'où $T_F\Sigma = F + \vec{\Pi} = \Pi$. Ceci montre que les sphères inscrites dans \mathcal{R} et tangentes à Π correspondent aux cercles inscrits dans $\mathcal{R}_{\mathcal{F}}$ et tangents à π .

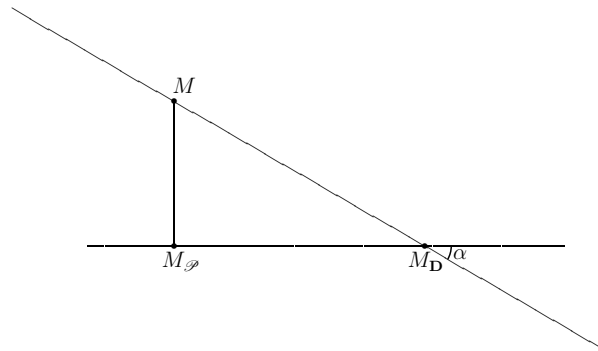
On voit ainsi qu'il y a deux telles sphères, sauf si π est parallèle à l'une des deux génératrices de \mathcal{R} contenues dans \mathcal{F} , cf. les figures ci-dessous :



Fixons donc une sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π en un point F , et notons \mathcal{P} le plan (orthogonal à Δ) contenant le cercle de tangence et \mathbf{D} la droite $\mathcal{P} \cap \mathcal{F}$ (dans les

figures ci-dessus, \mathbf{D} est orthogonale au plan de la feuille). Enfin, notons $\alpha \in]0, \pi/2[$ l'angle entre Π et \mathcal{P} , i.e. l'angle (non orienté) entre les droites π et $p = \mathcal{P} \cap \mathcal{F}$.

Soit M un point de Π ; notons $M_{\mathcal{P}}$ (resp. $M_{\mathbf{D}}$) son projeté orthogonal sur \mathcal{P} (resp. sur \mathbf{D}). Alors, dans le plan parallèle à $\mathcal{F} = (Oxz)$ passant par M , on a la figure suivante :



et donc $\boxed{MM_{\mathcal{P}} = \sin(\alpha)MM_{\mathbf{D}}}$. D'autre part, la droite (MF) est contenue dans Π donc tangente à Σ en F , donc MF égale la distance tangentielle $d(M, \Sigma)$, cf. le point (ii) de la proposition 17.3. De plus, d'après le point (v) de cette proposition, M appartient à \mathcal{R} si et seulement si $MM_{\mathcal{P}} = \cos(\theta)d(M, \Sigma)$.

On en déduit qu'un point M de Π appartient à $\mathcal{C} = \Pi \cap \mathcal{R}$ ssi on a les égalités :

$$MF = d(M, \Sigma) = \frac{1}{\cos(\theta)}MM_{\mathcal{P}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\theta)}MM_{\mathbf{D}} = e \cdot d(M, \mathbf{D}),$$

où l'on a posé $e = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\theta)}$ (c'est un réel > 0). On a donc obtenu le « théorème de Dandelin » (récrit en 17.11 à la fin de ce chapitre) :

$$(\star) \quad \boxed{\mathcal{C} = \Pi \cap \mathcal{R} = \{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, \mathbf{D})\}}.$$

Ceci nous conduit à la définition ci-dessous.

Remarque 17.4. — Anticipant sur ce qui va suivre, remarquons que $e = 1$ ssi $\alpha = \bar{\theta} = \frac{\pi}{2} - \theta$ i.e. ssi $\pi = \Pi \cap \mathcal{F}$ est parallèle à une génératrice. Dans ce cas, on « voit » que \mathcal{C} est une courbe connexe non bornée, et l'on verra plus bas que c'est une parabole.

Le cas $0 < e < 1$ correspond à $0 < \alpha < \bar{\theta}$; dans ce cas on « voit » que \mathcal{C} est une courbe connexe bornée, et l'on verra plus bas que c'est une ellipse. (On a déjà vu que c'est un cercle si $\alpha = 0$ i.e. si Π est orthogonal à Δ .)

Enfin, le cas $e > 1$ correspond à $\alpha > \bar{\theta}$ i.e. $\alpha + \theta > \pi/2$; dans ce cas Π coupe les deux nappes du cône et l'on voit donc que \mathcal{C} a deux composantes connexes. On verra plus bas que c'est une hyperbole.

Définition 17.5 (Définition des coniques par foyer, directrice et excentricité)

On se place dans un plan affine euclidien \mathcal{P} .⁽⁷⁾ Soient \mathcal{D} une droite affine, F un point de \mathcal{P} n'appartenant pas à \mathcal{D} , et e un réel strictement positif. La conique \mathcal{C} de **directrice** \mathcal{D} , de **foyer** F et d'**excentricité** e est :

$$\mathcal{C} = \{M \in \mathcal{P} \mid FM = e \cdot d(M, \mathcal{D})\}.$$

Notons K la projection orthogonale de F sur \mathcal{D} et $h = KF$. Soit Δ la droite (KF) , i.e. la perpendiculaire à \mathcal{D} passant par F . Soit (\vec{i}, \vec{j}) une base orthonormée de \mathbb{R}^2 , telle que

⁽⁷⁾Au lieu du plan noté Π précédemment.

$\overrightarrow{FK} = -h\vec{i}$, i.e. dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, K a pour coordonnées $(-h, 0)$. Enfin, on note σ_Δ la symétrie orthogonale par rapport à Δ .

Soit $M(x, y)$ un point arbitraire de \mathcal{P} , de coordonnées (x, y) dans \mathcal{R} ; sa projection orthogonale sur \mathcal{D} est le point $H(-h, y)$, donc $d(M, \mathcal{D}) = |x + h|$ et M appartient à \mathcal{C} si et seulement si

$$x^2 + y^2 = e^2(x + h)^2 \quad \text{i.e.} \quad y^2 + (1 - e^2)x^2 - 2e^2hx - e^2h^2 = 0.$$

Notons que l'équation ci-dessus est inchangée si l'on change y en $-y$, par conséquent

$$M(x, y) \in \mathcal{C} \iff M(x, -y) \in \mathcal{C}$$

donc $\sigma_\Delta(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$, i.e. Δ est un **axe de symétrie** de \mathcal{C} .

On pose $p = eh > 0$ et on l'appelle le **paramètre** de la conique \mathcal{C} . Tous les points M de la droite d'équation $x = 0$ (la parallèle à \mathcal{D} passant par F) vérifient $d(M, \mathcal{D}) = h$, donc les points d'intersection de cette droite avec \mathcal{C} sont les deux points de coordonnées $(0, p)$ et $(0, -p)$.

D'autre part, les points d'intersection de \mathcal{C} avec la droite Δ (d'équation $y = 0$) sont les points $(\lambda, 0)$, où λ est solution de l'équation :

$$(\dagger) \quad (1 - e^2)\lambda^2 - 2ep\lambda - p^2 = 0.$$

17.4. Paraboles. — Supposons d'abord $e = 1$. Dans ce cas, on trouve $\lambda = -p/2$ et l'équation de \mathcal{C} est

$$y^2 = 2px + p^2 = 2p\left(x + \frac{p}{2}\right).$$

La valeur minimale possible pour x est $x = -p/2$. Le point O de coordonnées $(-p/2, 0)$ dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) est appelé le **sommet** de la parabole; c'est le milieu du segment $[KF]$. Les nouvelles coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$ sont $X = x + (p/2)$ et $Y = y$, donc l'équation de \mathcal{C} devient :

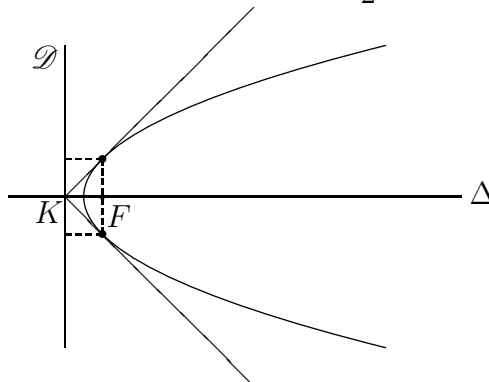
$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \in \mathcal{P} \mid Y^2 = 2pX\}$$

et l'on dit que \mathcal{C} est une **parabole** de paramètre p . Dans \mathcal{R}_0 , la directrice \mathcal{D} a pour équation $X = -p/2$ et le foyer F a pour coordonnées $(p/2, 0)$.

Notons que si $x = p/2$ alors $y^2 = p^2$ donc $y = \pm p$. De plus, posant $Q(x, y) = y^2 - 2px$, la différentielle de Q en un point $P_0 = (x_0, y_0)$ est $2y_0Y - 2pX$ donc si P_0 est un point de \mathcal{C} la tangente à \mathcal{C} en P_0 est donnée par l'équation

$$0 = y_0(Y - y_0) - p(X - x_0) = y_0Y - pX - y_0^2 + px_0 = y_0Y - pX - px_0.$$

Pour $P_0 = (\frac{p}{2}, p)$ on obtient l'équation $Y = X + \frac{p}{2}$, qui est l'équation de la droite joignant $K = (-p/2, 0)$ à P_0 . Et de même pour le point $P'_0 = (\frac{p}{2}, -p)$, d'où la figure :



Supposant maintenant $e \neq 1$, le discriminant réduit du trinôme (†) est $e^2p^2 + (1 - e^2)p^2 = p^2$ donc les solutions sont :

$$\lambda_1 = \frac{ep - p}{1 - e^2} = \frac{-p}{1 + e}, \quad \lambda_2 = \frac{ep + p}{1 - e^2} = \frac{p}{1 - e} \quad \text{et l'on a} \quad \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Notons A_1, A_2 les points correspondants de $\Delta \cap \mathcal{C}$, et O leur milieu. L'abscisse x_O de O dans le repère (F, \vec{i}, \vec{j}) est $x_O = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} = \frac{ep}{1 - e^2}$ et le trinôme s'écrit :

$$(1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{e^2p^2}{1 - e^2} - p^2 = (1 - e^2)(x - x_O)^2 - \frac{p^2}{1 - e^2}.$$

Notons $X = x - x_O$ et $Y = y$ les coordonnées dans le repère $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{i}, \vec{j})$, alors l'équation de \mathcal{C} devient

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid (1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}\}.$$

L'équation est inchangée si l'on change X en $-X$ et l'on voit donc que la droite D_0 d'équation $X = 0$ est un second **axe de symétrie** de \mathcal{C} (et donc le point O est un **centre de symétrie** de \mathcal{C}). Par conséquent, \mathcal{C} possède un second couple (foyer, directrice) (F', \mathcal{D}') , symétrique de (F, \mathcal{D}) par rapport à la droite D_0 . On dit alors que la droite Δ , qui contient les foyers, est l'**axe focal**.

D'autre part, les points $A_1, A_2 \in \Delta$ sont appelés des **sommets** de la conique ; dans \mathcal{R}_0 ils ont pour abscisse :

$$\pm a, \quad \text{où} \quad a = \left| \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} \right| = \frac{p}{|1 - e^2|}.$$

Posons également $b = \frac{p}{\sqrt{|1 - e^2|}}$, d'où $b^2 = \frac{p^2}{|1 - e^2|} = \varepsilon \frac{p^2}{1 - e^2}$, où $\varepsilon = \text{signe de } 1 - e^2$.

Alors l'équation de \mathcal{C} se réécrit :

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \varepsilon \frac{Y^2}{b^2} = 1\}.$$

Distinguons maintenant les cas $0 < e < 1$ et $e > 1$.

17.5. Ellipses. — Supposons $0 < e < 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = 1$, l'équation de \mathcal{C} est :

$$(*) \quad \mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et \mathcal{C} est une **ellipse**. Dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathcal{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1 + e) = -h/(e^{-1} + 1)$ donc est compris entre K et F , de plus $AF = e \cdot AK < AK$, donc A est plus près de F que de K . Le centre de symétrie O est d'abscisse $ep/(1 - e^2) > 0$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O . Ces points sont donc positionnés comme suit :

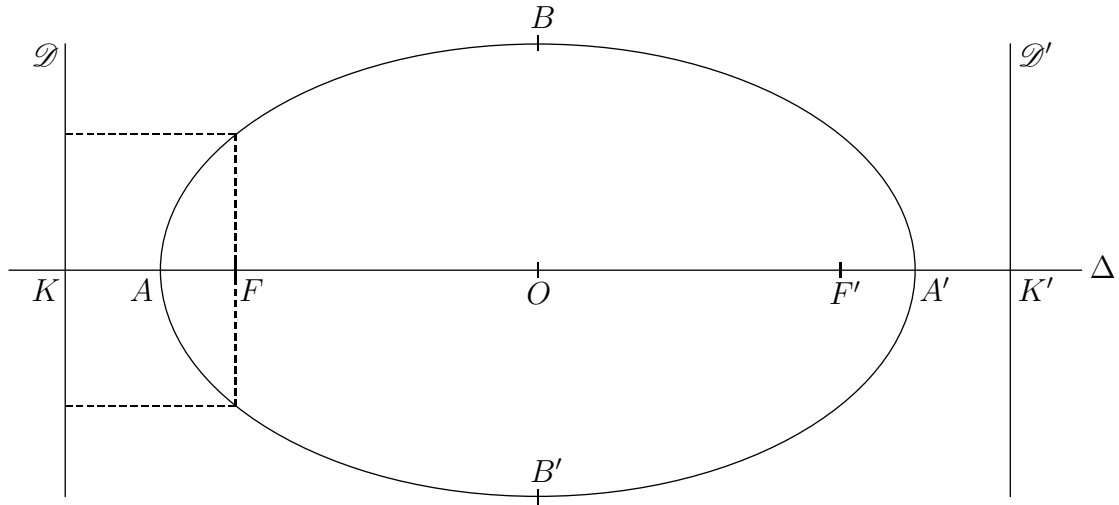
points	K	A	F	O	F'	A'	K'
abscisses dans \mathcal{R}	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0	$\frac{ep}{1 - e^2}$	\dots	\dots	\dots
abscisses dans \mathcal{R}_0	$-h - c$	$-a$	$-c$	0	c	a	$h + c$

où $a = \frac{p}{1 - e^2}$ et $c = \frac{ep}{1 - e^2} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \frac{p^2}{1 - e^2}$, on a $c^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2} = a^2 - b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad h = \frac{b^2}{c}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad KO = h + c = \frac{b^2 + c^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

Par ailleurs, les points $B = (0, b)$ et $B' = (0, -b)$ sont aussi appelés des **sommets** de l'ellipse, et la droite $(BB') = (Oy)$ est appelée le **petit axe**.

Dans la figure qui suit, $a = 5$ et $b = 3$, de sorte que $c = 4$ et $e = 4/5$.



Dans l'équation (*) de l'ellipse, on peut faire $b = a$, on obtient alors le **cercle** de centre $F = O$ et de rayon a .

Remarque. — Remarquons que $b^2 = (1 - e^2)a^2$ et $c = \sqrt{a^2 - b^2} = ea$, d'où $h = \frac{b^2}{c} = \frac{1 - e^2}{e} a$. Donc, en gardant F et a fixés, on obtient le cercle précédent en faisant tendre e vers 0, et dans ce cas la directrice \mathcal{D} , qui est la droite d'équation $x = -\frac{1 - e^2}{e} a$ dans le repère \mathcal{R} , « tend vers l'infini ». On verra plus bas que si on prend la définition « bifocale » de l'ellipse, alors le cas du cercle apparaît de façon naturelle, comme le cas où les deux foyers sont égaux.

17.6. Hyperboles. — Supposons enfin $e > 1$. Dans ce cas, $\varepsilon = -1$, l'équation de \mathcal{C} est :

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1\}$$

et \mathcal{C} est une **hyperbole**. Elle admet pour asymptotes les droites $Y = \frac{b}{a}X$ et $Y = -\frac{b}{a}X$.

Dans le repère $\mathcal{R} = (F, \vec{i}, \vec{j})$, $K = \Delta \cap \mathcal{D}$ est d'abscisse $-h$, le sommet $A = A_1$ est d'abscisse $-p/(1 + e) = -h/(e^{-1} + 1)$ donc est compris entre K et F , de plus $AF = e \cdot AK > AK$, donc ici A est plus près de K que de F .

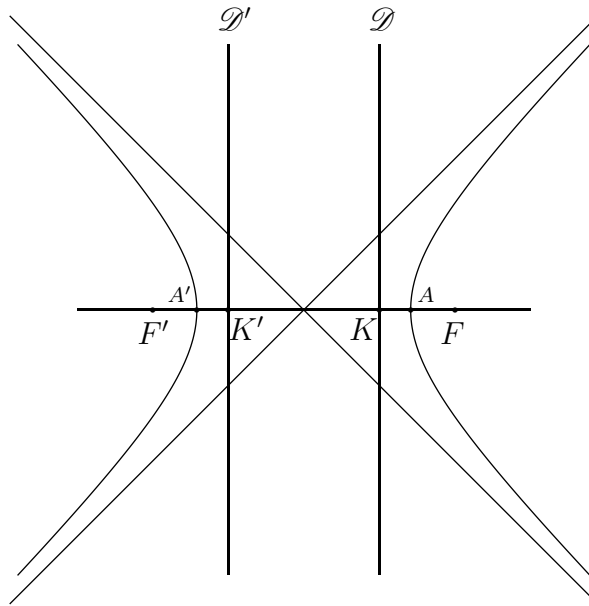
Le centre de symétrie O est d'abscisse $\frac{ep}{1 - e^2} = \frac{e^2h}{1 - e^2} = -h - \frac{h}{e^2 - 1} < -h$, et enfin $F', A' = A_2$ et K' sont symétriques de F, A, K par rapport à O . Ces points sont donc positionnés comme suit :

points	F'	A'	K'	O	K	A	F
abscisses dans \mathcal{R}	$\frac{ep}{1 - e^2}$	$-h$	$\frac{-h}{1 + e^{-1}}$	0
abscisses dans \mathcal{R}_0	$-c$	$-a$	$-(c - h)$	0	$c - h$	a	c

où $a = \frac{p}{e^2 - 1}$ et $c = \frac{ep}{e^2 - 1} = ea$ d'où $e = c/a$. Comme $b^2 = \frac{p^2}{e^2 - 1}$, on a $c^2 = \frac{e^2 p^2}{(e^2 - 1)^2} = a^2 + b^2$, d'une part, et $p = b^2/a$, d'autre part. Enfin, $p = eh$ donne $h = p/e = b^2/c$, d'où :

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad e = \frac{c}{a}, \quad h = \frac{b^2}{c}, \quad p = \frac{b^2}{a}, \quad OK = c - h = \frac{c^2 - b^2}{c} = \frac{a^2}{c} = \frac{a}{e}.$$

Dans la figure suivante, on a pris $a = b = \sqrt{2}$:



17.7. Définition bifocale de l'ellipse ou de l'hyperbole. — Pour l'ellipse ou l'hyperbole, on peut donner une définition géométrique utilisant les deux foyers (et pas de directrice ni d'excentricité), comme indiqué dans ce qui suit.

Proposition 17.6 (Définition bifocale de l'ellipse). — Soient F, F' deux points de \mathcal{P} et O leur milieu. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} tel que $\overrightarrow{OF'} = c\vec{i}$ avec $c = \frac{1}{2}FF' \geq 0$ (et donc $\overrightarrow{OF} = -c\vec{i}$). Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a > c$ et $b^2 = a^2 - c^2$. Alors l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid FM + F'M = 2a\}$$

est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ si $F \neq F'$, et c'est le cercle de centre F et de rayon a si $F' = F$.

Démonstration. — Comme $2a > 0$, l'égalité $FM + F'M = 2a$ équivaut (en l'élevant au carré) à :

$$(0) \quad 2(x^2 + y^2 + c^2) + 2\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)} = 4a^2$$

qui équivaut à :

$$x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2 = -\sqrt{((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2)}.$$

Ceci équivaut à :

$$(1) \quad x^2 + y^2 \leq 2a^2 - c^2 = a^2 + b^2 \quad \text{et}$$

$$(2) \quad \underbrace{(x^2 + y^2 + c^2 - 2a^2)^2}_{\beta} = ((x-c)^2 + y^2)((x+c)^2 + y^2) = \underbrace{(x^2 + c^2 + y^2)^2}_{\alpha} - 4c^2x^2,$$

puis (2) équivaut à :

$$4c^2x^2 = \alpha^2 - \beta^2 = 2a^2 \cdot 2(x^2 + y^2 + c^2 - a^2)$$

qui équivaut à

$$(3) \quad (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \quad \text{soit} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Donc (0) équivaut à :

$$(\dagger) \quad x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2 \quad \text{et} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Mais $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq \frac{x^2}{a^2 + b^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2}$, donc si (3) est satisfaite, on a automatiquement $x^2 + y^2 \leq a^2 + b^2$. Par conséquent, (0) et (\dagger) sont équivalents à la seule condition $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ceci prouve la proposition. \square

Proposition 17.7 (Définition bifocale de l'hyperbole). — Soient (x, y) les coordonnées dans un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ de \mathcal{P} , soient $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et soit \mathcal{C} l'hyperbole d'équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Ses foyers F et F' ont pour coordonnées $(-c, 0)$ et $(c, 0)$, où $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Alors

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \in \mathcal{P} \mid |FM - F'M| = 2a\}$$

et, plus précisément, la branche de l'hyperbole la plus proche de F (resp. F') est formée des points M tels que $F'M - FM = 2a$ (resp. $= -2a$).

La démonstration est laissée comme exercice pour le lecteur.

17.8. Équations quadratiques dans un repère orthonormé. — Soit maintenant $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} . Notons (x, y) les coordonnées dans ce repère, et étudions la nature géométrique de l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}$$

où a, b, c, d, e, f sont des réels fixés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. En d'autres termes, soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v})$ est :

$$S = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right) = axx' + b(xy' + yx') + cyy'$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$. Soit L la forme linéaire sur \mathbb{R}^2 définie par $L(\vec{u}) = 2d$ et $L(\vec{v}) = 2e$, d'où $L(x\vec{u} + y\vec{v}) = 2dx + 2ey$.

Enfin, soit $h : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $h(M) = Q(x, y) + L(x, y) + f$ si $\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$. On s'intéresse donc à l'ensemble

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid h(x, y) = 0\}.$$

Par hypothèse, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ i.e. la forme quadratique Q est non nulle, i.e. la matrice S est non nulle. Donc S est de rang 1 ou 2, selon que son déterminant $\delta = ac - b^2$ est nul ou non. On a le :

Théorème 17.8. — Soit $\mathcal{R}_0 = (O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé de \mathcal{P} , soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Alors :

- (1) Si $\delta = 0$, \mathcal{C} est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).
- (2) Si $\delta = ac - b^2 > 0$, \mathcal{C} est une ellipse ou un point.
- (3) Si $\delta < 0$, \mathcal{C} est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.

Afin de démontrer ceci, rappelons les points suivants. Soit E muni de (\mid) un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E , ϕ sa forme polaire, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi)$, et u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = A$, i.e. $u(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{kj} e_k$ pour tout j . Alors, pour tout i, j on a :

$$(e_i \mid u(e_j)) = a_{ij} = \phi(e_i, e_j) = a_{ji} = (u(e_i) \mid e_j)$$

donc, par bilinéarité, on a $\boxed{\phi(x, y) = (u(x) \mid y) = (x \mid u(y))}$ pour tout $x, y \in E$. Par conséquent, si l'on montre qu'il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour (\mid) et formée de vecteurs propres de u , i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, on aura pour tout i, j :

$$\phi(f_i, f_j) = \lambda_i (f_i \mid f_j) = \lambda_j (f_i \mid f_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ \lambda_i & \text{si } i = j, \end{cases}$$

donc \mathcal{B} sera aussi une base **orthogonale** pour ϕ . Donc, notant (x_1, \dots, x_n) les coordonnées dans \mathcal{B} d'un vecteur x arbitraire, la base \mathcal{B} **réduit simultanément** la forme $x \mapsto (x \mid x)$ à la forme standard $x_1^2 + \dots + x_n^2$, et la forme Q en la somme de carrés $\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2$; pour cette raison, le théorème ci-dessous est appelé « théorème de **réduction simultanée** ».

Théorème 17.9 (Réduction simultanée). — Soient E muni de (\mid) un espace euclidien, Q une forme quadratique arbitraire sur E , ϕ sa forme polaire, $\mathcal{B}_0 = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E , et u l'endomorphisme de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\phi) = A$.

Alors il existe une base $\mathcal{B} = (f_1, \dots, f_n)$ **orthonormée** pour (\mid) et formée de vecteurs propres de u , i.e. $u(f_i) = \lambda_i f_i$, et l'on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont les valeurs propres de u ; plus précisément, la matrice de passage $P = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(\mathcal{B})$ est orthogonale, i.e. ${}^t P = P^{-1}$, donc la matrice ci-dessus égale à la fois ${}^t P A P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi)$ et $P^{-1} A P = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.

Démonstration. — Pour la démonstration de 17.9 on renvoie à un cours de L2 ou L3. Démontrons maintenant le théorème 17.8. D'après le théorème 17.9, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (\vec{f}_1, \vec{f}_2)$ de \mathbb{R}^2 telle que, notant (X, Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \mathcal{B})$, on ait $Q(X, Y) = \lambda X^2 + \mu Y^2$, avec $\lambda\mu = \det S = ac - b^2 = \delta$.

D'autre part, si l'on pose $2\rho = L(\vec{f}_1)$ et $2\sigma = L(\vec{f}_2)$, alors la forme linéaire L s'exprime, dans les coordonnées (X, Y) , par $L(X, Y) = 2\rho X + 2\sigma Y$ (on n'a pas besoin de calculer explicitement les coefficients ρ et σ). Donc, avec les coordonnées (X, Y) , on obtient que :

$$\mathcal{C} = \{M(X, Y) \mid \lambda X^2 + \mu Y^2 + 2\rho X + 2\sigma Y + f = 0\}.$$

Distinguons maintenant les cas suivants.

(1) Si $0 = \delta = \lambda\mu$, on peut supposer, quitte à échanger X et Y (i.e. à remplacer (\vec{f}_1, \vec{f}_2) par (\vec{f}_2, \vec{f}_1)) que $\lambda = 0 \neq \mu$ (λ, μ ne sont pas tous deux nuls, puisque la matrice S n'est pas nulle). Dans ce cas, on obtient l'équation

$$\mu \left(Y + \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 = -2\rho X - f + \frac{\sigma^2}{\mu}, \quad \text{soit} \quad \left(Y + \frac{\sigma}{\mu} \right)^2 = -2\frac{\rho}{\mu} X - \frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}.$$

Si $\rho = 0$, on obtient \emptyset si $K = -\frac{f\mu - \sigma^2}{\mu}$ est < 0 , et si $K \geq 0$ on obtient les droites parallèles d'équations

$$Y = -\frac{\sigma}{\mu} \pm \sqrt{K},$$

celles-ci étant confondues (i.e. égales) si $K = 0$. Si $\rho \neq 0$, on obtient l'équation

$$\left(Y + \frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = -2\frac{\rho}{\mu}\left(X + \frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}\right).$$

Soit alors Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{f\mu - \sigma^2}{2\rho}, -\frac{\sigma}{\mu}\right)$. Notons (\tilde{X}, \tilde{Y}) les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$ et $p = -\frac{\rho}{\mu}$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \tilde{Y}^2 = 2p\tilde{X}\}$$

est une parabole d'axe $\Delta = \Omega + \mathbb{R}\vec{f}_1$, de sommet Ω et de paramètre p .

Supposons $\delta = \lambda\mu \neq 0$. Alors l'équation de \mathcal{C} est :

$$\lambda\left(X + \frac{\rho}{\lambda}\right)^2 + \mu\left(Y + \frac{\sigma}{\mu}\right)^2 = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

Soit Ω le point de coordonnées $\left(-\frac{\rho}{\lambda}, -\frac{\sigma}{\mu}\right)$. Notant (\tilde{X}, \tilde{Y}) les coordonnées dans le repère orthonormé $(\Omega, \vec{f}_1, \vec{f}_2)$, on obtient l'équation

$$\lambda\tilde{X}^2 + \mu\tilde{Y}^2 = K = -f + \frac{\rho^2}{\lambda} + \frac{\sigma^2}{\mu}.$$

(2) Si $\delta = \lambda\mu > 0$, alors λ et μ sont du même signe. Si K est du signe opposé, alors $\mathcal{C} = \emptyset$, tandis que $\mathcal{C} = \{\Omega\}$ si $K = 0$. Enfin, si K est du même signe que λ et μ , alors K/λ et K/μ sont tous deux > 0 ; quitte à échanger \tilde{X} et \tilde{Y} , on peut supposer que $a^2 = K/\lambda > K/\mu = b^2$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \frac{\tilde{X}^2}{a^2} + \frac{\tilde{Y}^2}{b^2} = 1\}$$

est une ellipse, d'axe focal la droite $\Omega\tilde{X}$.

(3) Si $\delta = \lambda\mu < 0$, alors λ et μ sont de signe opposé. Posons $-\lambda/\mu = t^2$. Si $K = 0$, \mathcal{C} est la réunion des droites $\tilde{Y} = t\tilde{X}$ et $\tilde{Y} = -t\tilde{X}$. Enfin, si $K \neq 0$, alors

$$\mathcal{C} = \{M(\tilde{X}, \tilde{Y}) \mid \frac{\tilde{X}^2}{K/\lambda} + \frac{\tilde{Y}^2}{K/\mu} = 1\}$$

est une hyperbole, d'asymptotes les droites précédentes, et d'axe focal $\Omega\tilde{X}$ si $K/\lambda > 0 > K/\mu$ (et d'axe focal $\Omega\tilde{Y}$ si $K/\lambda < 0 < K/\mu$). Ceci achève la preuve du théorème 17.8. \square

On peut énoncer le théorème 17.8 sous une forme un peu plus générale, de la façon suivante. Soit $\mathcal{R}' = (O, \vec{u}', \vec{v}')$ un repère arbitraire de \mathcal{P} , i.e. les vecteurs \vec{u}', \vec{v}' ne sont pas nécessairement unitaires ni orthogonaux. Notons (x', y') les coordonnées dans ce repère, soient $a', b', c', d', e', f' \in \mathbb{R}$, avec $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x', y') \mid a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 + 2d'x' + 2e'y' + f' = 0\}.$$

Soit ϕ la forme bilinéaire symétrique dont la matrice dans la base $\mathcal{B}' = (\vec{u}', \vec{v}')$ est :

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\phi) = \begin{pmatrix} a' & b' \\ b' & c' \end{pmatrix} \quad \text{i.e.} \quad \phi\left(\begin{pmatrix} x'_1 \\ y'_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'_2 \\ y'_2 \end{pmatrix}\right) = a'x'_1x'_2 + b'(x'_1y'_2 + y'_1x'_2) + c'y'_1y'_2$$

et soit Q la forme quadratique associée, i.e. $Q(x', y') = a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2$. Soient $\mathcal{B}_0 = (\vec{u}, \vec{v})$ une base orthonormée, P la matrice de passage $\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}_0)$, et (x, y) les coordonnées dans le repère $\mathcal{B}_0 = (O, \mathcal{B}_0)$. La matrice de ϕ dans \mathcal{B}_0 est :

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^t P A' P,$$

donc $ac - b^2 = \det A = (\det P)^2 \cdot \det A' = (\det P)^2 \cdot (a'c' - b'^2)$ a même signe que $a'c' - b'^2$. Par conséquent, on déduit du théorème 17.8 le :

Corollaire 17.10. — Soit (O, \vec{u}, \vec{v}) un repère arbitraire de \mathcal{P} , soient (x, y) les coordonnées correspondantes, soient $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, et soit

$$\mathcal{C} = \{M(x, y) \mid ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0\}.$$

On suppose $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Alors :

- (1) Si $\delta = 0$, \mathcal{C} est une parabole ou bien la réunion de deux droites parallèles ou « confondues » (i.e. égales).
- (2) Si $\delta = ac - b^2 > 0$, \mathcal{C} est une ellipse ou un point.
- (3) Si $\delta < 0$, \mathcal{C} est une hyperbole ou bien la réunion de deux droites sécantes.

17.9. Retour au théorème de Dandelin. — On avait terminé notre étude de la section \mathcal{C} d'un cône de révolution \mathcal{R} d'axe Δ par un plan Π ne contenant pas Δ et non orthogonal à celui-ci, par la conclusion que :

$$\mathcal{C} = \{M \in \Pi \mid MF = e \cdot d(M, \mathbf{D})\}$$

où, ayant fixé une sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π (il y a au plus deux telles sphères), F est le point de contact de Σ avec Π , \mathbf{D} est la droite intersection de Π avec le plan contenant le cercle de tangence entre \mathcal{R} et Σ , et $e = \sin(\alpha)/\cos(\theta)$ où θ est le demi-angle au sommet du cône et α est l'angle entre Π et un plan orthogonal à Δ (il ne dépend donc pas de la sphère Σ choisie).

D'après ce qui précède, \mathcal{C} est donc une conique de Π de foyer F , directrice \mathbf{D} et excentricité e . De plus, on a vu que si \mathcal{C} est une ellipse ou une hyperbole, il y a deux sphères tangentes ; pour la seconde sphère Σ' on obtient ainsi le deuxième couple (foyer, directrice) = (F', \mathbf{D}') . Quant à l'excentricité, c'est la même, comme remarqué plus haut. On a donc obtenu le :

Théorème 17.11 (de Dandelin). — ⁽⁸⁾ Dans l'espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3, soit \mathcal{R} un cône de révolution d'axe Δ et de demi-angle au sommet θ et soit Π un plan ne contenant pas Δ et faisant un angle $\alpha \neq 0$ avec tout plan orthogonal à Δ . Notons \mathcal{C} la conique $\mathcal{R} \cap \Pi$ et posons $\bar{\theta} = (\pi/2) - \theta$.

(i) Si $\alpha = \bar{\theta}$, il existe une unique sphère Σ inscrite dans \mathcal{R} et tangente à Π ; sinon il existe deux telles sphères Σ et Σ' . Notons F le point de contact de Σ avec Π , Γ son cercle de tangence avec \mathcal{R} et \mathbf{D} la droite intersection de Π avec le plan contenant Γ , et définissons de même F' et \mathbf{D}' si Σ' existe.

(ii) \mathcal{C} est la conique de Π de foyer F , de directrice \mathbf{D} et d'excentricité $e = \sin(\alpha)/\cos(\theta)$.

(iii) \mathcal{C} est une parabole ssi $\alpha = \bar{\theta}$.

(iv) \mathcal{C} est une ellipse (resp. une hyperbole) ssi $\alpha < \bar{\theta}$ (resp. $\alpha > \bar{\theta}$). Dans ces deux cas, les deux sphères Σ et Σ' fournissent les deux couples (foyer, directrice) de \mathcal{C} .

⁽⁸⁾Germinal Dandelin, mathématicien français (1794-1847), qui fit carrière en Belgique.

CHAPITRE 11

SEMAINES 11-12 : GÉOMÉTRIE AFFINE EUCLIDIENNE II. CONVEXITÉ ET POLYÈDRES RÉGULIERS

Références pour ce chapitre :

[Be] Marcel Berger, Géométrie, tome 2 (Nathan, 1990), §§12.5 & 12.6.

[Che] Jean-Yves Chemin, Topologie et calcul différentiel, Cours de L3 à l'UPMC 2012-2013 (LM360), disponible sur le site de la Licence de Mathématiques : www.licence.math.upmc.fr/UE/LM360 et sur la page de l'auteur : www.ljll.math.upmc.fr/~chemin

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. 6 et 7), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

[RWM] J.-P. Ramis, A. Warusfel, F. Moulin, Cours de mathématiques pures et appliquées, Vol. 1 Algèbre et géométrie (De Boeck, 2010), Partie II, Chap. 2.

Le §18.2, ainsi que le th. 18.12, n'ont pas été traités en cours. Dans ce chapitre, ne sont au programme de l'examen que les §§18.1 (sauf 18.11-12), 18.3 et le §19.1 sur les polygones réguliers.

18. Parties convexes de \mathbb{R}^n

Dans toute cette section, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine réel de dimension d muni d'une *structure euclidienne*, i.e. E est muni d'un produit scalaire (de sorte qu'on a la notion de distance entre deux points de \mathcal{E}).⁽¹⁾

18.1. Généralités. —

Terminologie. — Soient $A, B \in \mathcal{E}$. Le **segment** $[A, B] = [B, A]$ est l'ensemble des points $(1-t)A + tB = A + t\overrightarrow{AB} = B + (1-t)\overrightarrow{BA}$, avec $t \in [0, 1]$.

Définition 18.1. — Une partie \mathcal{C} de \mathcal{E} est dite **convexe** si elle contient le segment qui joint deux quelconques de ses points, c.-à-d. si pour tout $A, B \in \mathcal{C}$ on a $[A, B] \subset \mathcal{C}$.⁽²⁾ Au lieu de dire « une partie convexe » on dira aussi « un convexe ».

Exemples 18.2. — (a) Dans un plan euclidien \mathcal{P} , les points intérieurs (bord inclus) à un triangle, un carré ou une ellipse forment une partie convexe, de même que les points d'un disque.

(b) Dans un espace euclidien \mathcal{E} de dimension 3, les points intérieurs (bord inclus) à un tétraèdre ou un cube forment une partie convexe, de même que les points d'une *boule* (ouverte ou fermée) de centre A et de rayon r (voir plus bas).

⁽¹⁾La structure euclidienne n'est pas nécessaire pour définir et étudier la notion de convexité, mais cela facilite l'exposition (et certaines démonstrations).

⁽²⁾On voit donc que la notion de convexité est valable dans tout espace affine réel et ne nécessite pas l'existence d'une structure euclidienne.

Proposition 18.3. — *Tout convexe C de \mathcal{E} est stable par combinaisons barycentriques à coefficients ≥ 0 , c.-à-d. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in C$ et $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}_+$ tels que $\sum_{i=1}^n t_i = 1$, le point $p = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ appartient à C .*

Démonstration. — Si $n = 1$ c'est évident et si $n = 2$ ceci est la définition de la convexité. Supposons donc $n > 2$ et le résultat établi pour $n - 1$. Avec les notations de l'énoncé, montrons que $p = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$ appartient à C . Si $t_n = 1$ alors $p = x_n$ et c'est ok, donc on peut supposer $t_n < 1$. Alors $t = t_1 + \dots + t_{n-1} = 1 - t_n$ est > 0 de sorte qu'on peut poser $\lambda_i = t_i/t$ pour $i = 1, \dots, n-1$. Les λ_i sont ≥ 0 et de somme égale à 1 donc, par hypothèse de récurrence, le point

$$q = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^{n-1} t_i x_i$$

appartient à C . De plus, on a $p = tq + (1-t)x_n$ donc $p \in C$. \square

Remarque 18.4. — Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties convexes de \mathcal{E} , leur intersection C est convexe. En effet, si $x, y \in C$ alors le segment $[x, y]$ est contenu dans C_i pour tout $i \in I$, donc dans C .

Définition 18.5. — Soit X une partie non vide de \mathcal{E} . Son **enveloppe convexe** $\text{Conv}(X)$ est l'ensemble des barycentres à coefficients ≥ 0 de points de X , i.e. un point p de \mathcal{E} appartient à $\text{Conv}(X)$ ssi il existe un entier $n \geq 1$, des points x_1, \dots, x_n de X et des réels $t_i \in [0, 1]$ de somme 1 tels que $p = t_1 x_1 + \dots + t_n x_n$. C'est la plus petite partie convexe contenant X .

Notation. Il est commode, même si X est un ensemble infini, de représenter un élément de $\text{Conv}(X)$ par une somme $\sum_{x \in X} t_x x$, avec la convention que les t_x sont ≥ 0 , de somme égale à 1 (donc tous dans $[0, 1]$) et nuls sauf un nombre fini d'entre eux.

Démonstration. — D'après la proposition 18.3, toute partie convexe contenant X contient aussi $\text{Conv}(X)$, donc il suffit de vérifier que $\text{Conv}(X)$ est convexe. Or, si $p = \sum_{x \in X} s_x x$ et $q = \sum_{x \in X} t_x x$ en sont deux éléments et si $\lambda \in [0, 1]$, on a :

$$\lambda p + (1 - \lambda)q = \sum_{x \in X} (\lambda s_x + (1 - \lambda)t_x) x,$$

et les coefficients $\lambda s_x + (1 - \lambda)t_x$ sont bien dans $[0, 1]$ (car le segment $[0, 1]$ est convexe!) et nuls sauf si $s_x \neq 0$ ou $t_x \neq 0$, ce qui n'est le cas que pour un nombre fini de x . \square

Pour pouvoir parler de parties « ouvertes » ou « fermées », faisons quelques rappels de topologie.

Rappels 18.6. — (1) Pour tout $A \in \mathcal{E}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, la *boule ouverte* (resp. *fermée*) de centre A et de rayon r est :

$$B(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM < r\} \quad \text{resp.} \quad \overline{B}(A, r) = \{M \in \mathcal{E} \mid AM \leq r\}.$$

(2) On dit qu'une partie U de \mathcal{E} est **ouverte** si pour tout $a \in U$ il existe une boule ouverte (de rayon suffisamment petit) centrée en a et contenue dans U , i.e. s'il existe $r = r_a > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Alors :

- \mathcal{E} et \emptyset sont des parties ouvertes (\emptyset ne contient aucun point a donc la condition est vérifiée).
- Toute réunion (finie ou infinie) de parties ouvertes est ouverte.
- Toute intersection finie de parties ouvertes U_1, \dots, U_N est ouverte : en effet, si a appartient à l'intersection U des U_i alors pour $i = 1, \dots, N$ il existe un réel $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subset U_i$; alors posant $r = \min(r_1, \dots, r_N)$ on a $B(a, r) \subset U$.

(3) On dit qu'une partie F de \mathcal{E} est **fermée** si son complémentaire est ouvert. Il résulte de (b) que toute intersection de parties fermées est fermée.

(4) On dit qu'une suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} converge vers une limite $q \in \mathcal{E}$ si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $i \geq i_0$ on ait $qp_i < \varepsilon$, i.e. $p_i \in B(q, \varepsilon)$.

(5) On montre sans difficulté le résultat suivant :

Une partie F de \mathcal{E} est fermée ssi la propriété suivante est vérifiée : pour toute suite $(p_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} qui converge vers une limite $q \in \mathcal{E}$, on a $q \in F$.

(6) Soit A une partie arbitraire de \mathcal{E} . Il existe un plus petit fermé contenant A (c'est l'intersection des fermés contenant A) ; il est noté \overline{A} et appelé **l'adhérence** de A . On dit que ses éléments sont *adhérents* à A . C'est l'ensemble des points de \mathcal{E} qui sont limite d'une suite d'éléments de A .

D'autre part, un point $x \in A$ est dit *intérieur* à A s'il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ tel que A contienne la boule $B(x, r)$; on note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble de ces points et on l'appelle **l'intérieur** de A . Enfin, l'ensemble $\overline{A} - \overset{\circ}{A}$ est appelé la **frontière** (ou le **bord**) de A ; on le notera $\text{Fr}(A)$ ou ∂A . C'est l'ensemble des points qui sont à la fois adhérents à A et à son complémentaire $\mathcal{E} - A$. (En effet, si $x \in \partial A$ alors pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ la boule $B(x, 1/r)$ contient un élément x_r de $\mathcal{E} - A$ (car $x \notin \overset{\circ}{A}$) et ceci fournit une suite $(x_r)_{r \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{E} - A$ convergeant vers x .)

Exemples 18.7. — (a) L'intérieur d'une boule fermée $\overline{B}(x, r)$ est la boule ouverte $B(x, r)$; sa frontière est la sphère $\Sigma(x, r)$.

(b) Si C est le « carré fermé »⁽³⁾ $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ son intérieur est le carré ouvert, défini par les inégalités strictes $-1 < x < 1$ et $-1 < y < 1$, et sa frontière est formée des quatre côtés du carré.

Terminologie 18.8 (Demi-espaces). — Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de \mathcal{E} . Il définit deux demi-espaces ouverts (ou fermés) dont il est la frontière commune. Par exemple, dans le plan \mathbb{R}^2 la droite \mathcal{D} d'équation $y = 0$ définit les deux demi-plans ouverts (resp. fermés) :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} & \text{et} & & \mathcal{D}^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{D}}^+ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{D}}^- &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0\}. \end{aligned}$$

Il en est de même en général. Notons H la direction de \mathcal{H} , choisissons une origine $O \in \mathcal{E}$ et une forme linéaire f telle que $\text{Ker}(f) = H$ et soit M_0 un point arbitraire de \mathcal{H} . Posons $c = f(\overrightarrow{OM_0})$. Alors $\mathcal{H} = M_0 + H$ est l'ensemble des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(\overrightarrow{OM}) = c$ et l'on pose

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) > c\} & \text{et} & & \mathcal{H}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) < c\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{H}}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) \geq c\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{H}}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid f(\overrightarrow{OM}) \leq c\}. \end{aligned}$$

(Ces demi-espaces ne dépendent pas du choix de l'origine O , car si I est une autre origine alors \mathcal{H} (resp. \mathcal{H}^+) est l'ensemble des points M tels que $f(\overrightarrow{IM})$ soit égal (resp. strictement supérieur) à $c - f(\overrightarrow{OI})$. Et si l'on remplace f par un multiple λf , alors les demi-espaces « positif » et « négatif » sont inchangés si $\lambda > 0$, et ils sont intervertis si $\lambda < 0$.) Comme on s'est placé dans un cadre euclidien, on peut aussi considérer un vecteur unitaire u orthogonal à H (il y a deux tels vecteurs : u et $-u$), alors

⁽³⁾Ici et dans la suite, on dira « carré » (resp. « rectangle, triangle », etc.) pour désigner l'ensemble des points qui sont sur le bord du carré (resp. rectangle, triangle, etc.) et à l'intérieur.

\mathcal{H} est donné par l'équation $u \cdot \overrightarrow{OM} = c$, où $c = u \cdot \overrightarrow{OM}_0$, et l'on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} > c\} & \text{et} & & \mathcal{H}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} < c\} \\ \text{resp. } \overline{\mathcal{H}}^+ &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} \geq c\} & \text{et} & & \overline{\mathcal{H}}^- &= \{M \in \mathcal{E} \mid u \cdot \overrightarrow{OM} \leq c\}. \end{aligned}$$

Les demi-espaces fermés jouent un rôle important dans l'étude des parties convexes (voir plus bas).

Pour la suite, on aura besoin d'autres rappels de topologie.

Rappels 18.9. — (1) Une partie X de \mathcal{E} est dite **bornée** si la distance entre deux quelconques de ses points est bornée par une constante $c \in \mathbb{R}_+$, i.e. s'il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que $AB \leq c$ pour tous $A, B \in X$. Fixant un point $A_0 \in X$, ceci entraîne que $X \subset B(A_0, c)$ et réciproquement si l'on a cette inclusion, alors pour tout $A, B \in X$ on a $AB \leq 2c$.

(1') Remarquons que toute suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de \mathcal{E} convergeant vers une limite A est bornée. En effet, il existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tel que $P_r \in B(A, 1)$ pour tout $r \geq r_0$; notant alors R le sup de 1 et des distances AP_i pour $i < r_0$, on a $P_r \in B(A, R)$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

(2) Une partie X de \mathcal{E} est dite **compacte** si de toute suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de X on peut extraire une sous-suite $(P_{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point A de X .

Proposition 18.10. — *Une partie X de \mathcal{E} est compacte ssi elle est fermée et bornée.*

Démonstration. — (i) Supposons X compacte. Soit $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X convergeant vers une limite $A \in \mathcal{E}$. Alors toute sous-suite converge vers A , donc l'hypothèse de compacité entraîne que $A \in X$. Ceci montre que X est fermé. Montrons que X est borné. Soit $A_0 \in X$, il suffit de montrer qu'il existe un réel $R > 0$ tel que $X \subset B(A_0, R)$. Or si ceci était faux alors pour tout entier $r \geq 0$ il existerait un point P_r de X n'appartenant pas à la boule $B(A_0, r)$ et l'on obtiendrait ainsi une suite $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de points de X pour laquelle toute sous-suite est non bornée donc non convergente (cf. (1') plus haut), contredisant la compacité.

(ii) Supposons X fermé et borné (et non vide). Soit (O, \mathcal{B}) un repère orthonormé de \mathcal{E} tel que $O \in X$. Il existe un réel $R > 0$ tel que X soit contenu dans la boule fermée :

$$B(O, R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \leq R\}$$

qui elle-même est contenue dans l'hypercube fermé : $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -R \leq x_i \leq R\}$.

Soit alors $(P_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une suite de points de X ; écrivons $P_r = (x_1^r, \dots, x_n^r)$. Alors la suite réelle $(x_1^r)_{r \in \mathbb{N}}$ est bornée (elle est à valeurs dans $[-R, R]$) donc d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass on peut en extraire une sous-suite $(x_1^{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un réel a_1 . Puis, la suite $(x_2^{\varphi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ étant bornée, on peut de même en extraire une sous-suite $(x_2^{\psi(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un réel a_2 . En extrayant ainsi n fois une sous-suite, on obtient une sous-suite $(P_{\theta(r)})_{r \in \mathbb{N}}$ de la suite initiale, qui converge vers un point $A = (a_1, \dots, a_n)$ de \mathcal{E} . De plus, comme X est fermé on a $A \in X$. Ceci montre que X est compact. \square

Lemme 18.11. — *Soit $A \in \mathcal{E}$. L'application $d_A : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}_+$, $P \mapsto d(A, P) = AP$ est continue; elle est même 1-lipschitzienne⁽⁴⁾ i.e. pour tout $P, Q \in \mathcal{E}$ on a :*

$$(*) \quad |AP - AQ| \leq PQ.$$

Démonstration. — D'après l'inégalité triangulaire, on a $AP \leq AQ + QP$ d'où $AP - AQ \leq QP$ et de même $AQ - AP \leq PQ$, d'où (*). Par conséquent, pour tout $P \in \mathcal{E}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ il existe $r = r_\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $d_A(B(P, r)) \subset]AP - \varepsilon, AP + \varepsilon[$ (ceci est la définition de la continuité) : en effet, la condition $d_A(B(P, r)) \subset]AP - \varepsilon, AP + \varepsilon[$ équivaut à dire que pour tout $Q \in \mathcal{E}$ tel que $PQ < r$, on doit avoir $|AQ - AP| < \varepsilon$ et compte tenu de (*) on voit que ceci est vérifié si l'on prend $r = \varepsilon$. \square

Théorème 18.12. — *Soit $A \in \mathcal{E}$ et soit X une partie fermée non vide de \mathcal{E} .*

⁽⁴⁾Rudolf Lipschitz, mathématicien allemand (1832-1903), qui a introduit la « condition de Lipschitz » pour démontrer un fameux théorème sur les équations différentielles [obtenu dans certains cas particuliers par Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)], le « théorème de Cauchy-Lipschitz ».

(i) La fonction $X \rightarrow \mathbb{R}_+$, $M \mapsto AM$ atteint son minimum en un point P de X .

(ii) Si de plus X est **convexe** alors P est unique et l'on a $(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PM}) \leq 0$ pour tout $M \in X$. Le point P est appelé la projection de A sur le convexe fermé X .

Démonstration. — (i) L'ensemble des distances AM , pour $M \in X$, est une partie non vide de \mathbb{R} minorée par 0 donc admet une borne inférieure r . Par définition de la borne inférieure, il existe une suite $(M_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ de points de X (éventuellement constante) telle que $r \leq AM_i < r + (1/i)$ pour tout i . Cette suite est contenue dans l'ensemble $X \cap \overline{B}(A, AM_1)$ qui est fermé et borné, donc **compact**. On peut donc extraire une sous-suite $(M_{\varphi(i)})_{i \in \mathbb{N}^*}$ qui converge vers un point P de X . Comme la fonction $d_A : M \mapsto AM$ est continue (et même 1-lipschitzienne) alors AP est la limite de la suite réelle $AM_{\varphi(i)}$, qui est r . Ceci prouve (i).

(ii) Supposons de plus X convexe. Soit P comme ci-dessus et soit $M \in X$ arbitraire. Pour tout $t \in [0, 1]$, le point $M_t = P + t\overrightarrow{PM}$ appartient à X et l'on a donc $AM_t \geq AP$ d'où :

$$0 \leq AM_t^2 - AP^2 = t^2 PM^2 + t(\overrightarrow{PM} \mid \overrightarrow{AP})$$

et donc, pour tout $t \in]0, 1]$, $(\overrightarrow{PM} \mid \overrightarrow{AP}) \geq -tPM^2$. Comme la limite du membre de droite lorsque t tend vers 0 est 0, on en déduit que $(\overrightarrow{PM} \mid \overrightarrow{AP}) \geq 0$, d'où $(\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PM}) \leq 0$. Ceci entraîne l'unicité de P car si Q est un second point de X tel que AQ soit minimum, on a :

$$0 \geq (\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PQ}) \quad \text{et} \quad 0 \geq (\overrightarrow{QA} \mid \overrightarrow{QP}) = (\overrightarrow{AQ} \mid \overrightarrow{PQ})$$

et donc $PQ^2 = (\overrightarrow{PA} \mid \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{AQ} \mid \overrightarrow{PQ}) \leq 0$ d'où $Q = P$. □

Terminons cette section avec le résultat suivant :

Définition et proposition 18.13. — Soient $A \neq B$ deux points de \mathcal{E} . L'ensemble des points M tels que $AM = BM$ est l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AB} passant par le milieu I du segment $[A, B]$. Il est appelé **hyperplan médiateur** de A et B .

Démonstration. — Comme $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$ on a :

$$MB^2 - MA^2 = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \mid \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}) = 2(\overrightarrow{MI} \mid \overrightarrow{AB})$$

donc l'égalité $MB = MA$ équivaut à ce que \overrightarrow{IM} soit orthogonal à \overrightarrow{AB} . □

18.2. Théorèmes de Hahn-Banach et de Minkowski. —

Définition 18.14. — Soit C un convexe fermé non vide de \mathcal{E} . On dit qu'un hyperplan \mathcal{H} est un **hyperplan d'appui** de C si $C \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ et si C est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés définis par \mathcal{H} .

Exemples 18.15. — (a) Pour le rectangle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les droites d'appui sont les quatre droites d'équations $x = \pm a, y = \pm b$ et aussi toutes les droites qui passent par un sommet du rectangle et ne le rencontrent qu'en ce point. (Par exemple, pour le sommet (a, b) ce sont les droites D_λ d'équation $y - b = \lambda(x - a)$, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}^*$.)

(b) Pour une boule fermée $\overline{B}(x, r)$, les hyperplans d'appui sont les hyperplans tangents à la sphère $\Sigma(x, r)$.

Théorème 18.16. — Tout convexe fermé C est l'intersection des demi-espaces fermés le contenant et définis par un hyperplan d'appui. (C'est-à-dire, notant $\mathcal{A}(C)$ l'ensemble des hyperplans d'appui de C et, pour tout $\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)$, notant $\overline{\mathcal{H}}^+$ le demi-espace fermé contenant C , on a : $\bigcap_{\mathcal{H} \in \mathcal{A}(C)} \overline{\mathcal{H}}^+ = C$.)

Démonstration. — Notons C' l'intersection. Il est clair que $C \subset C'$. Réciproquement, soit $A \in \mathcal{E}$ hors de C . D'après le théorème 18.12, si l'on note P le projeté de A sur C et \mathcal{H} l'hyperplan orthogonal à \overrightarrow{AP} passant par P , alors C est contenu dans le demi-espace fermé

$$\overline{\mathcal{H}}^+ = \{M \in \mathcal{E} \mid (\overrightarrow{PM} \mid \overrightarrow{PA}) \leq 0\},$$

donc \mathcal{H} est un hyperplan d'appui. Comme $A \notin \overline{\mathcal{H}}^+$, on a donc $A \notin C'$. Ceci montre que $C' \subset C$, d'où l'égalité $C = C'$. \square

Nous admettrons le théorème suivant (pour une démonstration, voir [Be, 11.4.1]).

Théorème 18.17 (de Hahn-Banach géométrique). — ⁽⁵⁾ Soit C un convexe fermé de \mathcal{E} . Par tout point p de la frontière de C , il passe au moins un hyperplan d'appui.

Définitions 18.18. — Soit C une partie convexe de \mathcal{E} et p un point de \mathcal{E} .

(i) On dit que p est un **point extrémal** de C s'il n'est pas intérieur à un segment de points de C , i.e. si les conditions $a, b \in C$ et $p \in [a, b]$ entraînent que $p = a$ ou $p = b$.

(ii) On dit que p est un **sommet** de C si l'intersection des hyperplans d'appui passant par p est égale à $\{p\}$.

(iii) Tout sommet est un point extrémal, mais la réciproque est fautive, cf. les exemples ci-dessous.

Démonstration de (iii). — Supposons que p soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$ et que \mathcal{H} soit un hyperplan d'appui en p , donné par une équation $f(x) = \lambda$. Comme C est contenu dans l'un des demi-espaces définis par \mathcal{H} on peut supposer, quitte à changer f en $-f$, que $f(a)$ et $f(b)$ sont tous deux $\leq \lambda$. Par hypothèse, on a $p = ta + (1-t)b$, avec $0 < t < 1$, et comme $p \in \mathcal{H}$ on a :

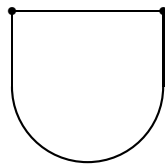
$$\lambda = f(p) = tf(a) + (1-t)f(b) \leq t\lambda + (1-t)\lambda = \lambda.$$

On en déduit que $f(a) = \lambda = f(b)$, et donc \mathcal{H} contient le segment $[a, b]$. Il en résulte que l'intersection des hyperplans d'appui en p contient le segment $[a, b]$, donc p n'est pas un sommet de C . Ceci prouve (iii). \square

Exemples 18.19. — (a) Pour le rectangle $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -b \leq y \leq b\}$, les points extrémaux sont les quatre points $(\pm a, \pm b)$. Ce sont aussi des sommets car par chacun de ces points p il passe plus d'une droite d'appui, de sorte que l'intersection des droites d'appui en p égale $\{p\}$.

(b) Si C est une boule fermée $\overline{B}(x, r)$, tous les points de la sphère $\Sigma = \Sigma(x, r)$ sont des points extrémaux. Aucun n'est un sommet, car par chacun de ces points p il ne passe qu'un seul hyperplan d'appui, qui est l'hyperplan tangent $T_p\Sigma$.

(c) Pour le convexe $C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{array}{l} y \leq 0 \text{ et } x^2 + y^2 \leq 1 \\ \text{ou } 0 \leq y \leq 1 \text{ et } -1 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$ ci-dessous :



les sommets sont les points $(-1, 1)$ et $(1, 1)$. Les autres points extrémaux sont les points de l'arc de cercle ; ce ne sont pas des sommets.

(d) Par contre, si C n'est pas compact il peut ne pas avoir de points extrémaux, par exemple si C est un demi-espace.

⁽⁵⁾Hans Hahn (1879-1934), mathématicien autrichien et Stefan Banach (1892-1945), mathématicien polonais.

Théorème 18.20 (de Minkowski-Krein-Milman). — ⁽⁶⁾ Soit C un convexe compact de \mathcal{E} . Alors C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux.

Démonstration. — On procède par récurrence sur $d = \dim(\mathcal{E})$. Si $d = 1$, alors C est un intervalle $[a, b]$ et c'est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux a et b . Supposons donc le résultat démontré en dimension $< d$. Notons $\text{Extr}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C et \mathcal{C} son enveloppe convexe. Il est clair que $\mathcal{C} \subset C$ et nous allons montrer l'inclusion réciproque.

Remarquons que si \mathcal{H} est un hyperplan d'appui de C et si l'on note C' le convexe $C \cap \mathcal{H}$ de \mathcal{H} , alors on a $\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)$. En effet, supposons que $p \in C'$ ne soit pas un point extrémal de C , i.e. soit intérieur à un segment $[a, b]$, avec $a, b \in C$. Alors, comme dans la preuve de 18.18 (iii), on voit que $[a, b]$ est contenu dans \mathcal{H} , et donc p n'est pas un point extrémal de C' . Ceci prouve que $\boxed{\text{Extr}(C') \subset \text{Extr}(C)}$.

Compte tenu du théorème de Hahn-Banach 18.17 et de l'hypothèse de récurrence, ceci montre déjà que tout point de la frontière de C est dans l'enveloppe convexe des points extrémaux de C .

Il reste à traiter le cas où p est un point intérieur à C . Dans ce cas, soit \mathcal{D} une droite quelconque passant par p . Comme C est un convexe compact, $\mathcal{D} \cap C$ est un segment $[a, b]$ de \mathcal{D} , avec a, b dans C . De plus, a et b appartiennent à la frontière de C . (Sinon il existerait un réel $r > 0$ tel que les boules fermées $\overline{B}(b, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ soient contenues dans C et, notant \vec{u} le vecteur unitaire $(1/\|\vec{ab}\|)\vec{ab}$, on aurait $[a - r\vec{u}, b + r\vec{u}] \subset \mathcal{D} \cap C$, contredisant la définition de a et b .)

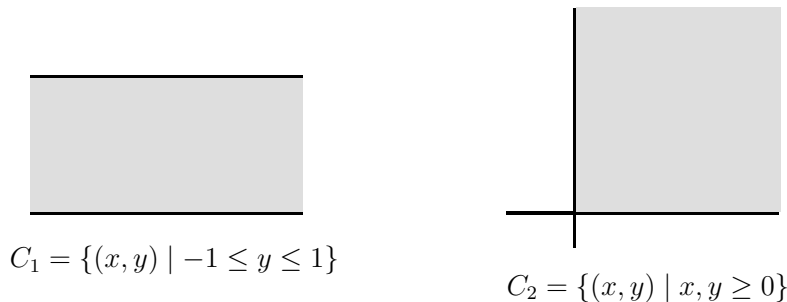
D'après ce qui précède, a, b appartiennent à \mathcal{C} et donc il en est de même de p , puisque $p \in [a, b]$. Le théorème est démontré. \square

18.3. Polyèdres compacts et polytopes convexes. —

Définition 18.21. — Un **polyèdre convexe** C est une intersection *finie* de demi-espaces fermés.

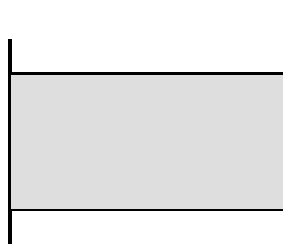
Exemples 18.22. — Plaçons-nous dans un plan.

a) Un demi-espace fermé est un polyèdre convexe, ainsi que l'intersection de deux demi-espaces fermés :

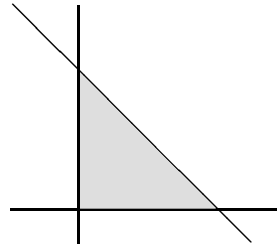


b) Et pour trois demi-espaces fermés, on peut obtenir :

⁽⁶⁾Ce théorème est dû à Hermann Minkowski (mathématicien allemand, 1864 -1909) dans le cas d'un espace affine de dimension finie, mais il est souvent appelé « théorème de Krein-Milman » en raison d'une généralisation en dimension infinie obtenue en 1940 par les mathématiciens soviétiques Mark Krein (1907-1989) et David Milman (1912-1982).



$$C_3 = \{(x, y) \mid -1 \leq y \leq 1, x \geq 0\}$$



$$C_4 = \{(x, y) \mid x, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Terminologie 18.23. — Soient $\mathcal{H}_1, \dots, \mathcal{H}_N$ des hyperplans. Une écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ est dite *non redondante* si l'on ne peut pas supprimer l'un des \mathcal{H}_i sans augmenter strictement C (i.e. si pour tout sous-ensemble I strictement contenu dans $\{1, \dots, N\}$ on a $C \neq \bigcap_{i \in I} \overline{\mathcal{H}_i}^+$). Dans les exemples ci-dessus les écritures sont non redondantes. Par contre, on aurait pu définir C_4 comme l'intersection des cinq demi-espaces : $x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1, x \leq 1, y \leq 1$, et dans ce cas les deux derniers s'avèrent être superflus, i.e. C_4 est l'intersection des trois premiers.

On peut montrer que tout polyèdre convexe possède une *unique* écriture $C = \bigcap_{i=1}^N \overline{\mathcal{H}_i}^+$ non redondante. (Pour une démonstration, voir [Be, 12.1.5] ou [RWM, Partie II, Chap. 5, Th. 82].)

Définition 18.24. — Un **polytope convexe** est l'enveloppe convexe d'un ensemble *fini* de points.

Exemples 18.25. — (a) Dans le plan, tout polygone convexe à n côtés est l'enveloppe convexe de ses n sommets.

(b) Dans l'espace de dimension 3, un tétraèdre (resp. un cube, resp. un octaèdre) est l'enveloppe convexe de ses 4 (resp. 8, resp. 6) sommets.

Proposition 18.26. — *Tout polyèdre convexe compact C est un polytope.*

Esquisse de démonstration. — D'après le théorème de Minkowski 18.20, C est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux. Or on peut montrer, par récurrence sur la dimension de \mathcal{E} , qu'un polyèdre convexe n'a qu'un nombre fini de points extrémaux. (Pour une démonstration, voir [RWM, Partie II, Chap. 5, Prop. 83].) \square

Remarque 18.27. — Réciproquement, on peut montrer que tout polytope convexe est un polyèdre (convexe compact), i.e. est l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces fermés. Voir par exemple [RWM, Partie II, Chap. 5, Th. 87] (en prenant garde qu'ils appellent « \mathcal{V} -polytope » un polytope et « polytope » un polyèdre convexe compact).

19. Polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3

Dans cette section, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien. On note $\text{Is}(E)$ le groupe des isométries vectorielles de E et $\text{Is}(\mathcal{E})$ celui des isométries affines de \mathcal{E} . On rappelle que :

(1) Tout élément de $\text{Is}(E)$ est de déterminant égal à 1 ou -1 ; ceux de déterminant 1 forment le sous-groupe $\text{Is}^+(E)$ des isométries *directes* ; les autres sont dites *indirectes* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(E)$ (ce n'est pas un sous-groupe : le produit de deux éléments de $\text{Is}^-(E)$ est dans $\text{Is}^+(E)$).

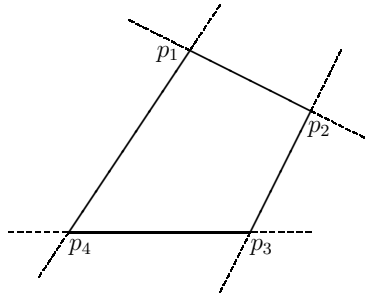
(2) Les éléments de $\text{Is}(\mathcal{E})$ dont la partie linéaire est dans $\text{Is}^+(E)$ forment un sous-groupe $\text{Is}^+(\mathcal{E})$, appelé le groupe des isométries directes (ou *déplacements*) ; les autres sont appelés isométries indirectes ou *anti-déplacements* et leur ensemble est noté $\text{Is}^-(\mathcal{E})$.

Notation. — Soit X une partie non vide de \mathcal{E} . On note $\text{Is}(X)$ le sous-groupe de $\text{Is}(\mathcal{E})$ formé des isométries f de \mathcal{E} qui vérifient $f(X) = X$, et l'on définit de même $\text{Is}^+(X)$.

19.1. Polygones réguliers de \mathbb{R}^2 . — Afin de justifier la définition que l'on va donner plus bas des polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 , commençons par les polygones réguliers d'un plan euclidien (\mathcal{E}, E) .

Définitions 19.1. — Soit n un entier ≥ 3 et soient p_1, \dots, p_n des points du plan euclidien, deux à deux distincts. On dit que ces points forment (dans cet ordre) un *n-gone convexe* si la condition suivante est vérifiée. (On pose $p_{n+1} = p_1$ et $p_0 = p_n$.)

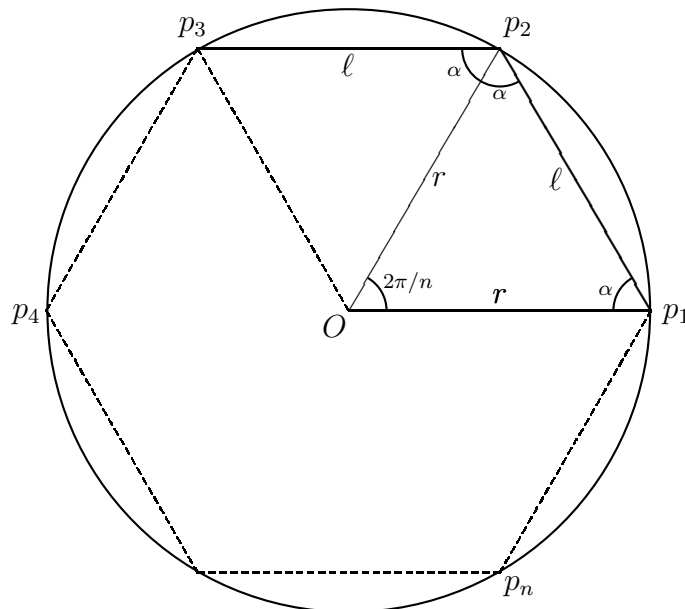
(*) Pour chaque $i = 1, \dots, n$, tous les points p_j avec $j \neq i, i + 1$ sont contenus dans l'un des demi-plans ouverts définis par la droite $(p_i p_{i+1})$, cf. la figure ci-dessous :



Et l'on dit que ce *n-gone convexe* est **régulier** si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) Les arêtes $[p_i, p_{i+1}]$ sont toutes d'une même longueur ℓ .
- (ii) Les angles $\widehat{p_{i-1}p_i p_{i+1}}$ sont tous égaux.

Sous ces conditions, la valeur commune des angles est $\theta = (n - 2)\pi/n = \pi - \frac{2\pi}{n}$.⁽⁷⁾ Soit D_1 (resp. D_2) la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{p_0 p_1 p_2}$ (resp. $\widehat{p_1 p_2 p_3}$) et soit O leur point de concours. Posant $\alpha = \theta/2$ et $r = Op_1$, on a la figure suivante :



Notant R la rotation de centre O et d'angle $2\pi/n$ (qui envoie p_1 sur p_2), on voit alors que $R(p_2)$ égale p_3 . Et de même $R(p_i) = p_{i+1}$ pour tout $i = 1, \dots, n$. Ceci montre que les p_i

⁽⁷⁾Sachant que la somme des angles d'un triangle vaut π , on montre facilement par récurrence que, pour tout $n \geq 3$, la somme des angles d'un *n-gone convexe* vaut $(n - 2)\pi$.

sont tous situés sur le cercle de centre O et de rayon r , où r est défini par $r \sin(\pi/n) = \ell/2$, et que les angle $\widehat{p_i O p_{i+1}}$ valent tous $2\pi/n$. De plus, O est le centre de gravité des p_i .

Notant P le n -gone régulier formé par les p_i , on en déduit que $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique d'ordre n , formé des rotations de centre O et d'angle $2k\pi/n$, pour $k = 1, \dots, n$. En effet, toute isométrie directe f du plan euclidien est une rotation ; si elle laisse stable P elle fixe son centre de gravité O , donc c'est une rotation de centre O ; enfin comme $p_0 = p_n$ est envoyé sur un certain p_k , avec $0 \leq k < n$, c'est la rotation R^k de centre O et d'angle $2k\pi/n$.

Pour décrire $\text{Is}(P)$, on peut identifier \mathcal{E} , muni de l'origine O , au « plan complexe » $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Quitte à faire tourner tous les p_i , on peut supposer que p_n est le nombre complexe 1 ; alors $p_k = \exp(2ik\pi/n) = \cos(2k\pi/n) + i \sin(2k\pi/n)$ pour $k = 0, \dots, n$.

On voit alors que la conjugaison complexe $\tau : z \mapsto \bar{z}$, i.e. la symétrie orthogonale par rapport à la droite (Ox) , est un élément de $\text{Is}(P)$. Si σ en est un autre élément, alors $\tau\sigma$ appartient à $\text{Is}^+(P)$ donc est une rotation $R^k : z \mapsto \exp(2ik\pi/n)z$ et donc on a :

$$\sigma(z) = (\tau \circ R^k)(z) \overline{\exp(2ik\pi/n)z} = \exp(-2ik\pi/n)\bar{z} = (R^{-k} \circ \tau)(z).$$

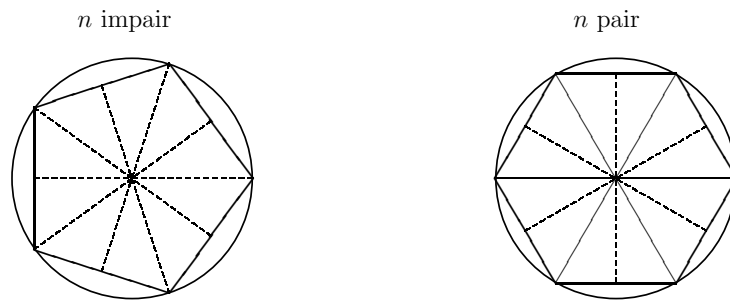
Ceci montre que les éléments de $\text{Is}(P)$ sont les rotations R^k et les symétries orthogonales $\tau_k = \tau R^k = R^{-k}\tau$, pour $k = 0, 1, \dots, n-1$. De plus, on a la formule $\boxed{\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}}$.

De plus τ_k laisse fixe le point $q_k = \exp(-ik\pi/n)$ donc c'est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $D_k = (Oq_k)$. L'angle entre les droites D_k et D_{k+1} est π/n , donc la composée $\tau_{k+1}\tau_k$ est la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

Remarque 19.2. — Remarquons que le point opposé $-q_k$ égale $\exp((n-k)i\pi/n)$ et donc :

a) si $n = 2m + 1$ alors l'un des entiers k et $n - k$ est pair et l'autre impair, donc les droites D_k sont toutes conjuguées sous $\text{Is}^+(P)$: ce sont les droites joignant chaque p_i au milieu du côté opposé.

b) si $n = 2m$ alors les droites D_k sont de deux types : si $k = 2r$ alors D_k joint les points opposés p_r et p_{r+m} , tandis que si $k = 2r + 1$ alors D_k joint le milieu du segment $[p_r, p_{r+1}]$ avec le milieu du segment opposé $[p_{r+m}, p_{r+m+1}]$:



On peut résumer ce qui précède en la :

Proposition 19.3. — Soit P un n -gone régulier du plan euclidien et soit O son centre de gravité (i.e. celui des sommets de P). Alors :

(i) $\text{Is}^+(P)$ est un groupe cyclique C_n d'ordre n , engendré par la rotation R de centre O et d'angle $2\pi/n$.

(ii) $\text{Is}^-(P)$ est formé des symétries orthogonales par rapport aux n droites D_k décrites plus haut.

(iii) $\text{Is}(P)$ a $2n$ éléments ; il est engendré par R et l'une quelconque des symétries précédentes, disons τ , et l'on a $\tau R^k \tau^{-1} = R^{-k}$. Par conséquent, $\text{Is}(P)$ est le produit semi-direct du groupe cyclique C_n et du groupe à deux éléments $\{1, \tau\}$.

(iv) $\text{Is}(P)$ est appelé le **groupe diédral** de cardinal $2n$.⁽⁸⁾ Il est aussi engendré par tout couple (s, t) de symétries « consécutives » (i.e. correspondant à deux droites D_k et D_{k+1}) puisqu'alors le produit est égale R .

Terminologie. — Appelons **drapeau** de P tout couple (s, A) où A est une arête de P et s un sommet de A .

Remarque 19.4. — (1) Le groupe $\text{Is}(P)$ agit **transitivement** sur l'ensemble des drapeaux de P .

En effet, fixons deux arêtes A et A' et notons s et t les deux sommets de A . Il existe un unique élément f de $\text{Is}^+(P)$ tel que $f(A) = A'$; posons $s' = f(s)$ et $t' = f(t)$. Soit D la droite passant par O et le milieu de A' , alors la symétrie orthogonale τ_D par rapport à D échange s' et t' , donc f (resp. $\tau_D \circ f$) envoie (s, A) sur (s', A') (resp. (t', A')). Ceci prouve que l'action est transitive.

(2) D'autre part, cette action est **libre**. En effet, si $f \in \text{Is}(P)$ fixe un drapeau (s, A) alors f fixe aussi le second sommet t de A , et comme tout élément de $\text{Is}(P)$ fixe O on obtient que f fixe les points O, s, t , qui forment un repère du plan, d'où $f = \text{id}$.

Réciproquement, on peut prendre la propriété (1) de la remarque précédente comme *définition* d'un polygone convexe régulier, i.e. :

Définition 19.5. — Soit C un n -gone convexe du plan euclidien, de sommets (consécutifs) p_1, \dots, p_n . On dit que C est **régulier** si le groupe $\text{Is}(P)$ agit transitivement sur les drapeaux de P . Dans ce cas, l'action est également libre.

En effet, on a vu qu'avec la définition antérieure l'action est libre et transitive. Réciproquement, si l'action est transitive sur les arêtes (resp. les sommets) alors toutes les longueurs (resp. tous les angles) sont égaux, donc C est régulier au sens de la définition antérieure.

19.2. Polyèdres réguliers de \mathbb{R}^3 . — Dans ce paragraphe, (\mathcal{E}, E) désigne un espace affine euclidien de dimension 3. Rappelons la classification des isométries de \mathcal{E} ayant un point fixe (cf. [Po, Chap. 6]).

(1) Tout élément f de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p est une *rotation* et si $f \neq \text{id}_{\mathcal{E}}$ l'ensemble des points fixes est une droite \mathcal{D} passant par p , appelée l'axe de rotation.

Supposons maintenant que g soit un élément de $\text{Is}^-(\mathcal{E})$ ayant un point fixe p . Distinguons plusieurs cas :

(2) Si la partie linéaire \vec{g} de g est $-\text{id}_E$, alors g est la *symétrie centrale* de centre p , i.e. pour tout point m de \mathcal{E} on a $\overrightarrow{pg(m)} = -\overrightarrow{pm}$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe.

Sinon $\text{Ker}(\vec{g} + \text{id}_E)$ est une droite vectorielle D , appelée la droite des *anti-invariants* (c'est l'ensemble des $u \in E$ tels que $\vec{g}(u) = -u$). Posons $\mathcal{D} = p + D$ et $\mathcal{P} = p + D^\perp$. On a alors les deux cas suivants :

(3) g est la *symétrie orthogonale* $\tau_{\mathcal{D}}$ par rapport à \mathcal{D} , auquel cas l'ensemble des points fixes est le plan \mathcal{P} .

(4) g est la composée de $\tau_{\mathcal{D}}$ et d'une rotation d'axe \mathcal{D} et d'angle $\theta \neq 0$. Dans ce cas, p est l'unique point fixe et l'on dit que g est une *rotation gauche* d'axe \mathcal{D} (on pourrait dire aussi « anti-axe »).

En particulier, tout $h \in \text{Is}(\mathcal{E})$ ayant au moins deux points fixes est soit une rotation, soit une symétrie orthogonale.

⁽⁸⁾Certains auteurs le notent D_{2n} et d'autres D_n , donc il vaut mieux préciser qu'il est « de cardinal » $2n$.

Terminologie. — Soit C un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^3 , de dimension 3 (i.e. qui n'est pas contenu dans un plan). Appelons **drapeau** de C tout triplet (p, A, F) où F est une face de C , A une arête de F et p un sommet de A .

Définition 19.6. — Soit C un polyèdre convexe compact de \mathbb{R}^3 , de dimension 3. On dit que C est **régulier** si $\text{Is}(C)$ agit transitivement l'ensemble des drapeaux de C .

Fixons un tel polyèdre régulier C et tirons des conséquences de la définition.

Notations. — (1) Notons s (resp. a , f) le nombre de sommets (resp. arêtes, faces) de C .

(2) Soit O le centre de gravité des sommets. Tout élément h de $\text{Is}(C)$ permute les sommets, donc fixe le point O .

(3) Comme l'action de $\text{Is}(C)$ sur les faces (resp. les sommets, resp. les arêtes) est transitive, alors toutes les faces ont le même nombre $m \geq 3$ d'arêtes, par chaque sommet passe le même nombre $k \geq 3$ d'arêtes, et toutes les arêtes ont la même longueur. De plus, tous les sommets sont à égale distance de O .

(4) Pour toute face F et toute arête A , notons q_F le centre de gravité des sommets de F et q_A le milieu de A .

Lemme 19.7. — (i) $\text{Is}(C)$ agit librement sur les drapeaux et est de cardinal $2mf$.

(ii) Pour toute face F (resp. arête A , resp. sommet p), $\text{Is}^-(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale qui fixe F (resp. A , resp. p).

(iii) $G = \text{Is}^+(C)$ est de cardinal mf et agit transitivement sur les faces (resp. les arêtes, resp. les sommets).

Démonstration. — Soit (p, A, F) un drapeau et soit $g \in \text{Is}(C)$ fixant ce drapeau. Alors g fixe les points O, p, q_A, q_F et comme ceux-ci forment un repère affine de \mathcal{E} (car p, q_A, q_F ne sont pas alignés et O n'est pas dans le plan engendré par F), il en résulte que g est l'identité. Ceci prouve que l'action de $\text{Is}(C)$ sur les drapeaux est libre. Comme elle est transitive, le cardinal de $\text{Is}(C)$ est le nombre de drapeaux. Comme chaque face a m arêtes et chaque arête deux sommets, ce nombre est $2mf$. Ceci prouve (i).

(ii) Notons t le second sommet de A et B la seconde arête passant par p . Par hypothèse, il existe un élément h (resp. h') de $\text{Is}(C)$ qui envoie le drapeau (p, A, F) sur le drapeau (t, A, F) (resp. (p, B, F)). Alors h fixe les points O, q_F, q_A donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P} qu'ils engendrent. Comme $h \neq \text{id}$ (puisque $h(p) = t$), il en résulte que h est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P} (qui est donc le plan médiateur de p et t). Elle vérifie $h(F) = F$ et $h(A) = A$. De même, h' fixe les points O, p, q_F donc laisse fixe tout point du plan affine \mathcal{P}' qu'ils engendrent. Comme $h' \neq \text{id}$ (puisque $h'(A) = B$), il en résulte que h' est la symétrie orthogonale par rapport à \mathcal{P}' ; elle vérifie $h'(F) = F$ et $h'(p) = p$. Ceci prouve (ii).

Prouvons (iii). D'après (ii), $\text{Is}(C)$ contient au moins une symétrie orthogonale h . Alors, l'application $G \rightarrow \text{Is}^-(C)$, $g \mapsto h \circ g$ est bijective (son inverse étant $\tau \mapsto h \circ \tau$) et comme $\text{Is}(C)$ est réunion disjointe de G et de $\text{Is}^-(C)$ on obtient que $|\text{Is}(C)| = 2|G|$ d'où $|G| = mf$.

D'autre part, soient F, F' (resp. A, A' , resp. p, p') deux faces (resp. arêtes, resp. sommets) quelconques de C . Par hypothèse, il existe $g \in \text{Is}(C)$ envoyant F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Si $g \in G$ c'est gagné, et si $g \notin G$ soit τ un élément de $\text{Is}^-(C)$ fixant F (resp. A , resp. p), alors $g\tau$ est dans G et envoie F sur F' (resp. A sur A' , resp. p sur p'). Ceci achève la preuve de (iii). \square

Proposition 19.8. — Soient F , A , p une face, une arête et un sommet de C .

(i) F est un m -gone régulier et son stabilisateur G_F dans G est un groupe cyclique d'ordre m , engendré par la rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$. (On retrouve ainsi que $|G| = mf$).

(ii) Le stabilisateur G_p de p dans G est un groupe cyclique d'ordre k , engendré par la rotation d'axe orienté par \overrightarrow{Op} et d'angle $2\pi/k$. On a donc $|G| = ks$.

(iii) Le stabilisateur G_A de A dans G est un groupe cyclique d'ordre 2, engendré par le demi-tour d'axe (Oq_A) . On a donc $|G| = 2a$.

(iv) Les éléments de G sont de type (i), (ii) ou (iii) et les possibilités pour k, m, f, a, s sont données par le tableau suivant, où l'on a posé $n = |G|$:

k	m	n	f	a	s
3	3	12	4	6	4
3	4	24	6	12	8
4	3	24	8	12	6
3	5	60	12	30	20
5	3	60	20	30	12

Démonstration. — (i) Notons \mathcal{P} le plan affine engendré par F . Remarquons d'abord que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(F) = F$ alors, d'une part, $g(q_F) = q_F$ donc la droite (Oq_F) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan \mathcal{P} et sa restriction $g' = g_{\mathcal{P}}$ vérifie $g'(F) = F$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(F)$.

Par hypothèse, pour tout couple de drapeaux (s_1, A_1) et (s_2, A_2) de F , il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie (s_1, A_1, F) sur (s_2, A_2, F) et alors g' envoie (s_1, A_1) sur (s_2, A_2) . Ceci montre que $\text{Is}(F)$ agit transitivement sur les drapeaux de F , et donc F est un m -gone régulier.

On en déduit que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(F) = F$ alors on a les possibilités suivantes :

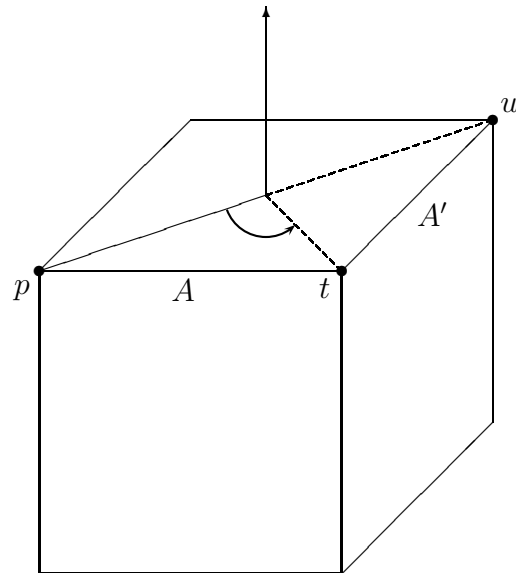
a) g est l'identité ou une rotation d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$. Dans le second cas, l'angle de g est $2r\pi/m$ pour un certain $r \in \{1, \dots, m-1\}$.

b) g est la symétrie orthogonale par rapport à un plan Π contenant la droite (Oq_F) . Dans ce cas, $g_{\mathcal{P}}$ est un élément de $\text{Is}^-(F)$ et d'après la proposition 19.3, on en déduit que le plan Π passe par un sommet de F ou le milieu d'une arête de F .

Montrons maintenant que la rotation R d'axe orienté par $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle $2\pi/m$ appartient bien à $G = \text{Is}^+(C)$.⁽⁹⁾ Compte tenu de (a) ci-dessus, ceci prouvera que G_F est le groupe cyclique d'ordre m engendré par R .

Fixons une arête A de F et notons p le sommet de A n'appartenant pas à $A' = R(A)$, $t = R(p)$ son second sommet (qui est aussi un sommet de A') et u le second sommet de A' (cf. la figure ci-dessous).

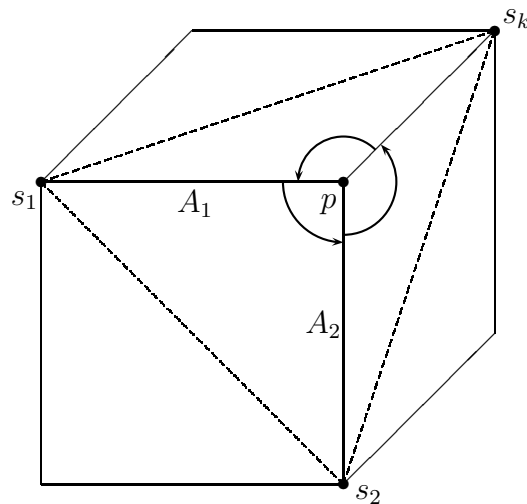
⁽⁹⁾Une autre démonstration est la suivante : on sait déjà que G_F est formé de rotations d'axe $\overrightarrow{Oq_F}$ et d'angle un multiple entier de $2\pi/m$; or d'après le point (iii) du lemme précédent, G_F est de cardinal m , donc il contient toutes ces rotations.



D'après l'hypothèse de transitivité, il existe $h \in \text{Is}(C)$ qui vérifie $h(F) = F$, $h(A) = A'$ et $h(p) = t$. Alors h envoie t (le second sommet de A) sur u , et fixe q_F . Par conséquent, h et R coïncident sur les points O, q_F, p, t , qui forment un repère affine de \mathcal{E} , d'où $h = R$. Donc R appartient à $\text{Is}(C)$, donc à $\text{Is}^+(C) = G$ puisque c'est une rotation. Ceci achève la preuve de (i).

Prouvons (ii). Nommons A_1, \dots, A_k les arêtes passant par p , de telle sorte que A_i et A_{i+1} appartiennent à une même face F_i , et notons s_i le second sommet de A_i . (On pose $A_{k+1} = A_1$ et $s_{k+1} = s_1$.) Comme $Os_1 = Os_i$ et $ps_1 = ps_i$, alors O et p appartiennent au plan médiateur de s_1 et s_i , donc $\overrightarrow{s_1s_i}$ est orthogonal à \overrightarrow{Op} , donc s_1, \dots, s_k appartiennent au plan $\Pi = s_1 + (\mathbb{R}\overrightarrow{Op})^\perp$.

Alors $C \cap \Pi$ est un polygone convexe Γ_p , dont chaque arête $[s_i, s_{i+1}]$ est l'intersection de Π avec la face F_i , cf. la figure ci-dessous :



Remarquons maintenant que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(p) = p$ alors la droite (Op) est formée de points fixes de g et, d'autre part, g laisse stable le plan Π et sa restriction $g' = g_\Pi$ vérifie $g'(\Gamma_p) = \Gamma_p$, i.e. c'est un élément de $\text{Is}(\Gamma_p)$.

Donnons-nous deux drapeaux $\mathcal{D}_1 = (s_i, \alpha)$ et $\mathcal{D}_2 = (s_j, \beta)$ de Γ_p , où α (resp. β) est l'intersection de Γ_p avec une face F (resp. F') de C contenant l'arête A_i (resp. A_j). Ils correspondent aux deux drapeaux $\tilde{\mathcal{D}}_1 = (p, A_i, F)$ et $\tilde{\mathcal{D}}_2 = (p, A_j, F')$ de C . Par hypothèse,

il existe un élément g de $\text{Is}(C)$ qui envoie $\tilde{\mathcal{D}}_1$ sur $\tilde{\mathcal{D}}_2$; alors g fixe p et sa restriction g' à Π envoie \mathcal{D}_1 sur \mathcal{D}_2 . Ceci montre que $\text{Is}(\Gamma_p)$ agit transitivement sur les drapeaux de Γ_p , et donc Γ_p est un k -gone régulier.

On en déduit que si un élément g de $\text{Is}(C)$ vérifie $g(p) = p$ alors on a les possibilités suivantes :

a) g est l'identité ou une rotation d'axe orienté par \vec{Op} . Dans le second cas, l'angle de g est $2r\pi/k$ pour un certain $r \in \{1, \dots, k-1\}$.

b) g est la symétrie orthogonale par rapport à un plan Ω contenant la droite (Op) . Dans ce cas, g_Π est un élément de $\text{Is}^-(\Gamma_p)$ et d'après la proposition 19.3, on en déduit que le plan Ω passe par un sommet s_i ou par le milieu d'une arête de Γ_p .

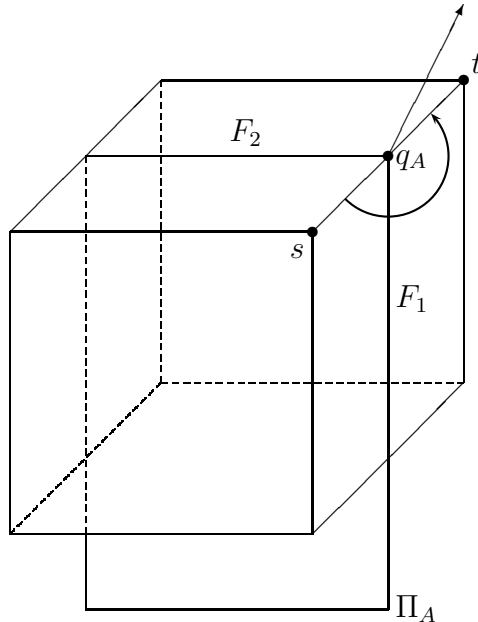
Montrons maintenant que la rotation R d'axe orienté par \vec{Op} et d'angle $2\pi/k$ appartient bien à $G = \text{Is}^+(C)$. Compte tenu de (a) ci-dessus, ceci prouvera que G_p est le groupe cyclique d'ordre k engendré par R .

Considérons les faces F_1 et F_2 , qui ont en commun l'arête A_2 . Par hypothèse, il existe $h \in \text{Is}(C)$ qui envoie le drapeau (p, A_1, F_1) sur (p, A_2, F_2) . Alors h envoie A_2 sur la seconde arête de F_2 passant par p , à savoir A_3 , donc h coïncide avec R sur les points O, p, s_1, s_2 , qui forment un repère affine de \mathcal{E} , donc $h = R$. Ceci achève la preuve de (ii).

Prouvons (iii). Soient A une arête, p, t ses deux sommets, et F_1 et F_2 les deux faces qui ont A comme arête commune.

Soit g un élément de $\text{Is}(C)$, distinct de l'identité, vérifiant $g(A) = A$; alors $g(q_A) = q_A$ et donc la droite (Oq_A) est formée de points fixes de g ; d'autre part ou bien g échange p et t , ou bien elle les laisse tous les deux fixes.

Dans le second cas, le plan engendré par O, p, t est formé de points fixes, et donc g est la symétrie orthogonale par rapport à ce plan. Si g échange p et t , alors g est ou bien la symétrie orthogonale par rapport au plan Π_A médiateur de p et t , auquel cas on a $g(F_1) = F_1$ et $g(F_2) = F_2$, ou bien le demi-tour d'axe (Oq_A) , qui échange les faces F_1 et F_2 , cf. la figure ci-dessous :



Pour prouver (iii), il suffit donc de montrer que le demi-tour R d'axe (Oq_A) appartient à $\text{Is}(C)$. Or, par hypothèse, il existe un élément $h \in \text{Is}(C)$ qui envoie (s, A, F_1) sur (t, A, F_2) . Comme $h(s) \neq s$ et $h(F_1) \neq F_1$, alors h ne peut être aucune des deux symétries mentionnées plus haut, donc h est nécessairement égal à R . Ceci prouve (iii).

Prouvons (iv). Tout $g \in G$ distinct de l'identité est une rotation, donc fixe exactement deux points de la frontière de C . Soit q un tel point fixe. Distinguons trois cas :

(1) Si q est intérieur à une face F , alors $g(F) = F$ (car $q = g(q)$ est intérieur à la face $g(F)$), donc on est dans le cas (i) : l'unique point de F fixé par g est q_F , d'où $q = q_F$.

(2) Si q est intérieur à une arête A , alors $g(A) = A$ (car $q = g(q)$ est intérieur à l'arête $g(A)$), donc on est dans le cas (iii) et donc $q = q_A$.

(3) Enfin, dans le cas restant, q est un sommet p et l'on est dans le cas (ii).

En faisant la somme du nombre de cas considérés dans (i), (ii), (ii), on obtient donc tous les éléments de $G - \{\text{id}\}$, chaque tel élément étant compté deux fois puisque son axe rencontre la frontière de C en deux points distincts. Notant $n = |G|$ on obtient donc l'égalité :

$$(\dagger) \quad f \cdot (m - 1) + s \cdot (k - 1) + a \cdot 1 = 2(n - 1) = 2n - 2.$$

En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (\dagger) se réécrit de plusieurs façons. D'une part, en divisant par n , on obtient

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{m} - \frac{1}{k} = -\frac{2}{n} < 0$$

ce qui entraîne que m, k ne peuvent être tous deux ≥ 4 (car sinon le terme de gauche serait ≥ 0). Comme m, k sont ≥ 3 , le plus petit d'entre eux doit être égal à 3 et, désignant par β le second, on a

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{\beta} = -\frac{2}{n} < 0$$

et donc β ne peut prendre que les valeurs 3, 4, 5, auxquels cas on a, respectivement,

$$-\frac{2}{n} = \begin{cases} -\frac{1}{6} & \text{d'où } n = 12, \\ -\frac{1}{12} & \text{d'où } n = 24, \\ -\frac{1}{30} & \text{d'où } n = 60. \end{cases}$$

On obtient ainsi les trois premières colonnes du tableau, et compte tenu des égalités $n = mf = ks = 2a$ les trois autres s'en déduisent. Ceci prouve (iv). \square

Remarque 19.9. — En tenant compte des égalités $n = mf = ks = 2a$, l'égalité (\dagger) se réécrit $-f - s + a = -2$, i.e. :

$$(\star) \quad \boxed{f - a + s = 2}$$

ce qui est la célèbre *formule d'Euler*, valable en fait pour tout polyèdre compact convexe, pas nécessairement régulier ; voir par exemple [Be, §12.7] (ou, pour une jolie démonstration combinatoire : D.M.Y. Sommerville, An introduction to the geometry of n dimensions (Dover, 1958), Chap. IX).

Avant de montrer l'existence d'un polyèdre régulier correspondant à chaque ligne du tableau, montrons d'abord qu'un tel polyèdre (s'il existe) est unique à une similitude directe près.

Définition 19.10. — Le groupe des *similitudes* (directes) de l'espace affine euclidien (\mathcal{E}, E) est le sous-groupe de $\text{GA}(\mathcal{E})$ engendré par les homothéties de rapport $\lambda > 0$ et les isométries (directes).

Soient C un polyèdre régulier de centre O . Conservons les notations (m, k) précédentes et notons ℓ la longueur d'une arête. Introduisons de plus les longueurs suivantes : soient (p, A, F) un drapeau de C et Γ le k -gone régulier formé par les sommets s_1, \dots, s_k voisins de p ; alors on note :

- r_C le rayon de C , i.e. la distance Op .
- r_F le rayon de F , i.e. la distance $q_F p$.
- r_Γ le rayon de Γ , i.e. la distance $q_\Gamma s_i$, où q_Γ désigne le centre de Γ .
- L la longueur d'une arête de Γ (i.e. $s_k s_1$).
- φ l'angle au centre entre deux sommets voisins, i.e. l'angle en O du triangle $pO s_1$.

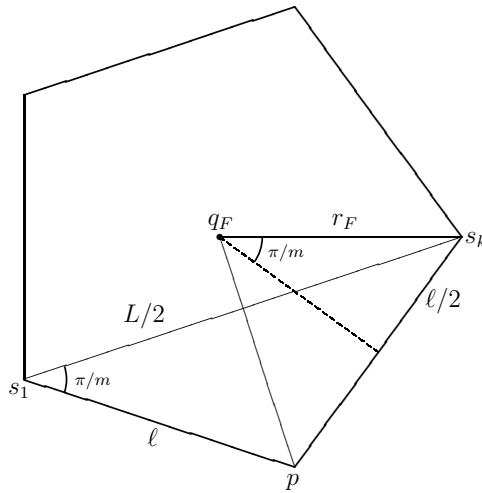
Proposition 19.11. — On a les relations suivantes : (*) $Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2$ et

$$(1) \quad \frac{\ell}{2} = r_F \sin\left(\frac{\pi}{m}\right) \qquad (2) \quad \frac{L}{2} = \ell \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \qquad (3) \quad \frac{L}{2} = r_\Gamma \sin\left(\frac{\pi}{k}\right)$$

$$(4) \quad r_\Gamma = \ell \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \qquad (5) \quad \frac{\ell}{2} = r_C \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right).$$

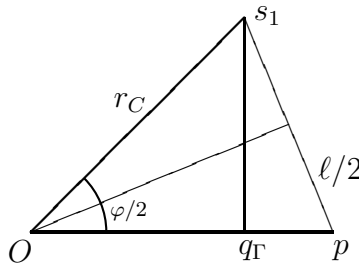
Par conséquent, $r_F, L, r_\Gamma, \varphi, r_C$ et Oq_F sont déterminés par ℓ .

Démonstration. — Les deux sommets de F voisins de p sont s_1 et s_k . Comme F est un m -gone régulier, on a la figure ci-dessous :



On en déduit les égalités : (1) $\ell/2 = r_F \sin(\pi/m)$ et (2) $L/2 = \ell \cos(\pi/m)$. De plus, comme O et q_F appartiennent à l'hyperplan médiateur de chaque arête de F , alors $\overrightarrow{Oq_F}$ est orthogonal au plan engendré par F donc au vecteur $\overrightarrow{q_F p}$, d'où : (*) $Oq_F^2 + r_F^2 = r_C^2$.

De même, dans le k -gone régulier Γ , on a l'égalité : (3) $L/2 = r_\Gamma \sin(\pi/k)$. D'autre part, dans le plan engendré par O, p et s_1 , on a la figure ci-dessous :



de laquelle on déduit : (5) $\ell/2 = r_C \sin(\varphi/2)$ et $r_\Gamma = r_C \sin(\varphi) = 2r_C \sin(\varphi/2) \cos(\varphi/2)$, d'où : (4) $r_\Gamma = \ell \cos(\varphi/2)$. (Ceci s'obtient aussi en disant que l'angle $\widehat{q_\Gamma s_1 p}$ vaut $\varphi/2$.)

On voit donc que, ℓ étant fixé, les formules (1-4) déterminent successivement $r_F, L, r_\Gamma, \frac{\varphi}{2}$ (et donc φ) ; plus précisément on déduit de (4), (3) et (2) que :

$$(\star) \quad \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{r_\Gamma}{\ell} = \frac{\cos(\pi/m)}{\sin(\pi/k)}.$$

Puis (5) détermine r_C et alors (*) détermine Oq_F . \square

Proposition 19.12. — *S'il existe un polyèdre régulier C correspondant à une ligne du tableau 19.8 (iv), il est unique à une similitude directe près.*

Démonstration. — Supposons donnés deux polyèdres réguliers C et C' correspondant à une même valeur du couple (k, m) . Notons O, O' leurs centres et ℓ, ℓ' la longueur de leurs arêtes.

En appliquant à C' la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$, on peut supposer $O' = O$. Puis, en appliquant à C' l'homothétie de centre O et de rapport ℓ/ℓ' , on peut supposer que les arêtes de C' sont aussi de longueur ℓ . Fixons une face F (resp. F') de C (resp. C') ; d'après la proposition précédente leurs centres $q_{F'}$ et q_F sont à la même distance de O donc en appliquant à C' une rotation de centre O on peut supposer que $q_{F'} = q_F$. Alors F et F' sont deux m -gones réguliers contenus dans le plan $q_F + (\mathbb{R}\overrightarrow{Oq_F})^\perp$, centrés en q_F et de même rayon $r_F = \ell/2 \sin(\pi/m)$. En appliquant alors à C' une rotation d'axe (Oq_F) , on peut faire coïncider un sommet p' de F' avec un sommet p de F , et alors $F' = F$ (car tous les sommets se déduisent de p par des rotations d'angle $2r\pi/m$).

D'autre part, on a vu dans la démonstration de la proposition 19.8 que si F_1 est une face de C (resp. C') alors toutes les faces de C (resp. C') ayant un sommet p_1 commun avec F_1 se déduisent de F_1 par des rotations d'axe (Op_1) et d'angle $2r\pi/k$. Il en résulte que si F_1 est une face commune à C et C' , alors chaque face de C voisine de F_1 est aussi une face de C' , et réciproquement.

Comme on peut passer de la face F à toute face F_N de C par un chemin de faces voisines $F = F_0, F_1, \dots, F_N$, on en déduit que toute face de C est une face de C' et réciproquement. Il en résulte que $C' = C$. Ceci montre que C est unique à similitude directe près (puisqu'on a fait coïncider C' et C en appliquant à C' une translation, une homothétie de rapport ℓ/ℓ' et des rotations). \square

Pour construire les cinq polyèdres réguliers, on aura besoin du :

Lemme 19.13. — *Soient (p_0, p_1, p_2, p_3) et (p'_0, p'_1, p'_2, p'_3) deux repères affines de \mathcal{E} et soit f l'unique élément de $\text{GA}(\mathcal{E})$ envoyant p_i sur p'_i pour $i = 0, \dots, 3$. Si $p'_i p'_j = p_i p_j$ pour tout i, j , alors f est une isométrie.*

Démonstration. — Notons g la partie linéaire de f et introduisons les vecteurs $u_i = \overrightarrow{p_0 p_i}$ et $u'_i = \overrightarrow{p'_0 p'_i} = g(u_i)$. Pour $i, j = 1, 2, 3$, on a

$$(u'_i | u'_i) = (p'_0 p'_i)^2 = (p_0 p_i)^2 = (u_i | u_i)$$

et l'égalité de $(p'_i p'_j)^2 = (u'_j - u'_i | u'_j - u'_i) = (u'_j | u'_j) + (u'_i | u'_i) - 2(u'_i | u'_j)$ avec $(p_i p_j)^2$ entraîne alors que $(u'_i | u'_j) = (u_i | u_j)$ pour tout $i, j = 1, 2, 3$.

Pour des vecteurs $x = \sum_{i=1}^3 x_i u_i$ et $y = \sum_{j=1}^3 y_j u_j$ arbitraires, on a donc :

$$(g(x) | g(y)) = \left(\sum_{i=1}^3 x_i u'_i \mid \sum_{j=1}^3 y_j u'_j \right) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u'_i | u'_j) = \sum_{i,j=1}^3 x_i y_j (u_i | u_j) = (x | y).$$

Ceci montre que g préserve le produit scalaire donc est une isométrie vectorielle de E . Par conséquent f est une isométrie de \mathcal{E} . \square

Le tétraèdre régulier 19.14. — Partons du triangle équilatéral donné, dans le plan horizontal $z = 0$ identifié à \mathbb{C} , par les racines cubiques de l'unité, et considérons donc dans \mathbb{R}^3 les trois points :

$$p_1 = (1, 0, 0), \quad p_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right), \quad p_3 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

On a $(p_1 p_2)^2 = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$, donc les distances $p_i p_j$ sont toutes égales à $\sqrt{3}$. Posons $p_4 = (0, 0, \sqrt{2})$, alors pour $i = 1, 2, 3$ on a $(p_4 p_i)^2 = 3$.

Notons alors T le tétraèdre de sommets p_1, \dots, p_4 (i.e. l'enveloppe convexe de ces points). Toutes ses arêtes sont de longueur $\sqrt{3}$. Remarquons que le centre de gravité de p_1, p_2, p_3 est $(0, 0, 0)$ et donc le centre de gravité de T est le point $(0, 0, \sqrt{2}/4)$, que l'on notera O .

Pour tout élément σ du groupe symétrique S_4 , notons f_σ l'élément de $\text{GA}(\mathbb{R}^3)$ défini par $f_\sigma(p_i) = p_{\sigma(i)}$ pour $i = 1, 2, 3, 4$. Ceci définit un morphisme de groupes $S_4 \rightarrow \text{GA}(\mathcal{E})$.

D'après le lemme précédent, f_σ est une isométrie de \mathbb{R}^3 , et c'est donc un élément de $\text{Is}(T)$. Comme S_4 agit transitivement sur les triplets (i, j, k) , alors $\text{Is}(T)$ agit transitivement sur les drapeaux de T , donc T est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. Enfin, tout élément de $\text{Is}(T)$ permute nécessairement les sommets de T , donc est l'un des éléments f_σ définis plus haut. Il en résulte que l'application $\sigma \mapsto f_\sigma$ est un *isomorphisme* de groupes de S_4 sur $\text{Is}(T)$. Décrivons explicitement l'isométrie associée à chaque permutation.

Rappelons que, pour tout $n \geq 2$, les éléments de S_n de signature 1 forment un sous-groupe de S_n de cardinal $n!/2$, appelé le *groupe alterné* et noté A_n . Alors, les 11 éléments de $A_4 - \{\text{id}\}$ se répartissent comme suit :

(1) Pour chaque i , il y a deux 3-cycles qui fixent i : ils correspondent aux deux rotations d'axe (Op_i) et d'angle $\pm 2\pi/3$. On obtient ainsi les 8 rotations qui fixent un sommet et laissent stable la face opposée.

(2) L'élément $(12)(34)$ échange 1 et 2 d'une part, et 3 et 4 d'autre part : il correspond au demi-tour d'axe la droite joignant le milieu de $[p_1, p_2]$ au milieu de $[p_3, p_4]$. De même pour les deux éléments $(13)(24)$ et $(14)(23)$.

Et les 12 éléments de $S_4 - A_4$ se répartissent comme suit :

(3) Chaque transposition (ij) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan médiateur de $[p_i, p_j]$, qui est le plan passant par O et les deux autres sommets p_k et p_ℓ . Elle laisse stable les deux faces $p_i p_j p_k$ et $p_i p_j p_\ell$ et échange les deux autres $p_k p_\ell p_i$ et $p_k p_\ell p_j$. On obtient ainsi 6 symétries orthogonales, dont chacune fixe deux sommets.

(4) Les 6 éléments restants de S_4 sont les 4-cycles. Notons q_{ij} le milieu de l'arête $[p_i, p_j]$ et considérons, par exemple, le 4-cycle $c : 1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, qu'on note (1234) . Il échange q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{12} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{41} \rightarrow q_{12}.$$

Son inverse c^{-1} est le 4-cycle $(4321) = (1432)$, il échange aussi q_{13} et q_{24} et permute les autres milieux comme suit :

$$q_{41} \rightarrow q_{34} \rightarrow q_{23} \rightarrow q_{12} \rightarrow q_{41}.$$

On en déduit que c et c^{-1} correspondent aux rotations gauches d'axe $(q_{12} q_{34})$ et d'angles $\pm\pi/4$. De même, (1243) et son inverse (1342) (resp. (1324) et son inverse (1423)) correspondent aux rotations gauches d'angles $\pm\pi/4$ et d'axe $(q_{14} q_{23})$ (resp. $(q_{12} q_{34})$).

Le cube 19.15. — Soit C le cube dont les huit sommets sont les points $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. D'une part, soit $\tau_x : (x, y, z) \mapsto (-x, y, z)$ la symétrie orthogonale par rapport au plan Oyz et définissons de même τ_y et τ_z . On voit aussitôt que τ_x , τ_y et τ_z commutent entre elles et

engendrent un sous-groupe V de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ de cardinal 8, isomorphe à $\{\pm 1\}^3$. Dans la suite, on identifie le groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3$ à V .

D'autre part, S_3 agit de façon isométrique sur \mathbb{R}^3 par permutation des coordonnées, i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ on pose

$$f_\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}).$$

De façon plus concrète, S_3 est engendré par les transpositions et (12) (resp. (23), resp. (13)) correspond à la symétrie orthogonale par rapport au plan d'équation $x_1 = x_2$ (resp. $x_2 = x_3$, resp. $x_1 = x_3$). Alors le 3-cycle $c = (123)$, égal au produit (12)(23), correspond à la composée :

$$(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_3, x_2) \mapsto (x_3, x_1, x_2)$$

qui est la rotation R d'axe orienté par le vecteur \overrightarrow{Op} , où $p = (1, 1, 1)$, et d'angle $2\pi/3$. Enfin, c^{-1} correspond à la rotation inverse $R^{-1} = R^2$. On obtient ainsi un sous-groupe Σ_3 de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$, isomorphe à S_3 . On note A_3 le sous-groupe $\{\text{id}_\mathcal{E}, R, R^{-1}\}$ (on l'utilisera pour construire le dodécaèdre régulier).

Remarquons que S_3 agit aussi sur $V = \{\pm 1\}^3$ par permutation des facteurs, et que cette action respecte la structure de groupe de V , i.e. pour tout $\sigma \in S_3$ et $x, y \in V$, on a $\sigma(x)\sigma(y) = \sigma(xy)$.

Notons alors W le sous-groupe de $\text{Is}(\mathbb{R}^3)$ engendré par V et Σ_3 . Pour tout $v = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \in V$ et $\sigma \in S_3$, on a pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} (f_\sigma \circ v)(x) &= f_\sigma(\varepsilon_1 x_1, \varepsilon_2 x_2, \varepsilon_3 x_3) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)} x_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)} x_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)} x_{\sigma^{-1}(3)}) \\ &= (\varepsilon_{\sigma^{-1}(1)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(2)}, \varepsilon_{\sigma^{-1}(3)})(f_\sigma(x)) = (\sigma(v) \circ f_\sigma)(x) \end{aligned}$$

d'où $\boxed{f_\sigma \circ v = \sigma(v) \circ f_\sigma \quad (\star)}$ et donc $f_\sigma \circ v \circ f_\sigma^{-1} = \sigma(v)$.

Il en résulte que V est un sous-groupe distingué de W et que l'application $\Sigma_3 \times V \rightarrow W$, $(f_\sigma, v) \mapsto f_\sigma \circ v$ est *surjective*, car on déduit de (\star) par récurrence sur N que tout produit $g_1 \cdots g_N$ avec chaque g_i dans V ou dans Σ_3 s'écrit sous la forme $f_\sigma \circ v$. De plus, on voit facilement que $V \cap \Sigma_3 = \{\text{id}\}$ et il en résulte que l'application précédente est *injective*. C'est donc une bijection, et donc W est le produit semi-direct de V par Σ_3 . (Il est de plus isomorphe au groupe « abstrait » $\{\pm 1\}^3 \rtimes S_3$.) Il est de cardinal 48.

Montrons que l'action de W sur les drapeaux est transitive. Comme il y a 6 faces et que chacune a 4 arêtes, le nombre de drapeaux est $6 \cdot 4 \cdot 2 = 48 = |W|$, donc pour montrer que l'action est transitive il suffit de montrer qu'elle est libre.

Soit alors $g = f_\sigma \circ v$ un élément de W fixant le drapeau (p, A, F) , où F est la face donnée par $z = 1$, A l'arête donnée par $z = 1 = y$ et p le sommet $(1, 1, 1)$. Comme $g(p) = p$ on a nécessairement $v = (1, 1, 1)$ d'où $g = f_\sigma$ pour un certain $\sigma \in S_3$, et comme $f_\sigma(F) = F$ alors σ ne peut être que l'identité ou la transposition (12), et comme le second sommet $(0, 1, 1)$ de A est laissé fixe, alors $\sigma = \text{id}$. Ceci prouve que l'action de W sur les drapeaux de C est libre et donc transitive. Donc C est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6.

De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(C)$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(C) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

L'octaèdre régulier 19.16. — Notons \mathcal{O} l'octaèdre dont les 6 sommets q_1, \dots, q_6 sont les centres des six faces du cube C , i.e. ce sont les points $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$. Alors $q_i q_j$ est une arête ssi les faces correspondantes F_i et F_j du cube sont voisines ; on dira alors que l'arête $q_i q_j$ de \mathcal{O} est « duale » de l'arête commune aux faces F_i et F_j de C . Par

exemple, si $q_1 = (0, 0, 1)$ est le centre de la face supérieure du cube, les quatre sommets voisins sont les centres des faces latérales du cube : $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(-1, 0, 0)$ et $(0, -1, 0)$.

Les 8 faces de \mathcal{O} sont des triangles; plus précisément trois sommets q_i, q_j, q_k de \mathcal{O} forment une face \mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k ont en commun un sommet p ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{O} est « duale » du sommet p de C .

On voit alors que $\text{Is}(C) = W$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{O} (car chaque drapeau de \mathcal{O} est « dual » d'un unique drapeau de C), et donc \mathcal{O} est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(\mathcal{O})$ est de cardinal $2 \cdot 24 = 48$, et comme il contient W on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{O}) = W$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de W .

Pour finir, signalons que le cube est également le « dual » de l'octaèdre, i.e. étant donné un octaèdre régulier, les centres de ses huit faces forment les sommets d'un cube.

Avant de décrire le dodécaèdre et l'icosaèdre réguliers, commençons par le :

Lemme 19.17. — On a : $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ et $\cos(\pi/5) = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

Démonstration. — Posons $\xi = \exp(2i\pi/5)$ et $z = 2 \cos(2\pi/5) = \xi + \bar{\xi} = \xi + \xi^4$. Alors

$$z^2 = \xi^2 + \xi^8 + 2 = \xi^2 + \xi^3 + 2.$$

Or ξ est racine du polynôme $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$, puisque $X^5 - 1 = (X - 1)P$. Par conséquent,

$$z^2 = 1 - \xi - \xi^2 = 1 - z$$

donc z est racine du polynôme $X^2 + X - 1$, dont les racines sont $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Comme $\cos(2\pi/5)$ est > 0 , on en déduit que $z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$, d'où $\cos(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$. Et comme $\cos(2\theta) = 2 \cos^2(\theta) - 1$, on obtient que $\cos^2(\frac{\pi}{5}) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$. Or

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}(6+2\sqrt{5}) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$$

et comme $\cos(\pi/5)$ est > 0 on en déduit qu'il vaut $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$. □

Le dodécaèdre régulier 19.18. — Posons $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On a $\xi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} = \xi + 1$ et $\xi^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \xi - 1$.

On peut construire le dodécaèdre à partir du cube C en ajoutant à chaque face un « toit », de la façon suivante. Soit $A_3 = \{\text{id}_{\mathcal{O}}, R, R^{-1}\}$ le sous-groupe cyclique de Σ_3 formé des rotations et soit H le sous-groupe $V \rtimes A_3$ de $\text{Is}(C) = V \rtimes \Sigma_3$. Alors H est de cardinal 24 et ses éléments se répartissent comme suit. Les 12 éléments de $H^+ = H \cap \text{Is}^+(C)$ sont :

- (1) $\text{id}_{\mathcal{O}}$
- (2) Les 8 rotations dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.

(3) Les 3 demi-tours dont l'axe passe par le centre de deux faces opposés, i.e. les demi-tours qui changent (x, y, z) en $(-x, -y, z)$, resp. $(x, -y, -z)$, resp. $(-x, y, -z)$.

Et les 12 éléments de $H^- = H \cap \text{Is}^-(C)$ sont :

(4) $-\text{id}_{\mathcal{E}}$

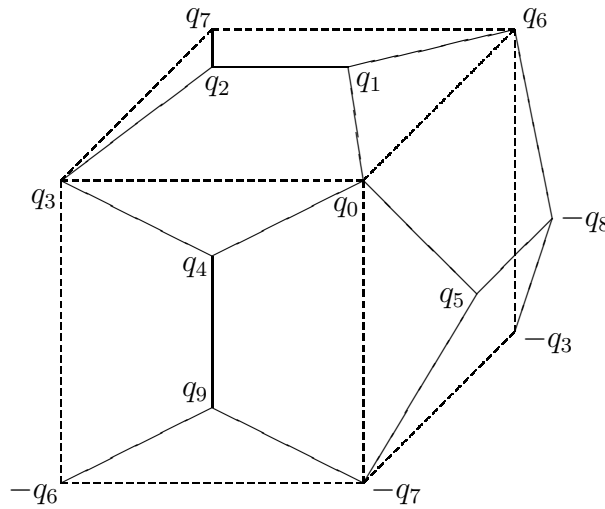
(5) Les 8 rotations gauches dont l'axe passe par une paire de sommets opposés de C et d'angle $\pm 2\pi/3$.

(6) Les 3 symétries orthogonales τ_x, τ_y, τ_z qui changent de signe une coordonnée, i.e. qui envoient (x, y, z) sur $(-x, y, z)$, resp. $(x, -y, z)$, resp. $(x, y, -z)$.

Au-dessus de la face supérieure ($z = 1$) du cube, plaçons le point $q_1 = (0, \xi^{-1}, \xi)$ et son image $q_2 = (0, -\xi^{-1}, \xi)$ par τ_y . Leurs images par la rotation R (resp. R^{-1}) sont les points suivants, qui sont « devant » la face $x = 1$ (resp. « à droite » de la face $y = 1$) :

$$\begin{aligned} q_4 &= R(q_1) = (\xi, 0, \xi^{-1}), & q_9 &= R(q_2) = (\xi, 0, -\xi^{-1}), \\ q_5 &= R^{-1}(q_1) = (\xi^{-1}, \xi, 0), & -q_8 &= R^{-1}(q_2) = (-\xi^{-1}, \xi, 0). \end{aligned}$$

Cette numérotation est expliquée, en posant $q_0 = (1, 1, 1)$, $q_3 = (1, -1, 1)$, $q_6 = (-1, 1, 1)$ et $q_7 = (-1, -1, 1)$, par la figure ci-dessous :



Notons \mathcal{D} l'enveloppe convexe des 20 points $\pm q_i$, pour $i = 0, \dots, 9$. Par construction, ces 20 points forment deux orbites sous l'action de H : les 8 sommets du cube et les 12 nouveaux points, donc $H \subset \text{Is}(\mathcal{D})$.

Le centre de gravité des points q_0, \dots, q_4 est

$$\frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{5} + 5}{2}, 0, \frac{3\sqrt{5} + 5}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} (\xi, 0, \xi^2).$$

Notons u le vecteur $(\xi, 0, \xi^2)$. On vérifie que les produits scalaires $\overrightarrow{Oq_i} \cdot u$ valent tous $\xi^2 + \xi = 2 + \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$, et tous 1 pour $i = 5, \dots, 9$. On a donc aussi $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -1$ pour $i = 5, \dots, 9$ et $-\overrightarrow{Oq_i} \cdot u = -2 - \sqrt{5}$ pour $i = 0, \dots, 4$.

Posant $H = (\mathbb{R}u)^\perp$, ceci montre que \mathcal{D} est contenu dans l'un des demi-espaces fermés définis par le plan $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} = q_0 + H$, et que $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2} \cap \mathcal{D}$ est le pentagone Γ formé par les points q_0, \dots, q_4 . Montrons que ce pentagone est régulier, de même que le pentagone Γ' formé par les points q_5, \dots, q_9 dans le plan $\mathcal{H}_1 = q_5 + H$. Remarquons que ces deux pentagones sont invariants par la symétrie τ_y .

La longueur q_2q_1 vaut $2\xi^{-1} = \sqrt{5} - 1$, son carré est $6 - 2\sqrt{5}$. On vérifie que c'est aussi le carré des longueurs $q_1q_0 = q_2q_3$ et $q_0q_4 = q_3q_4$ (les égalités se déduisant par la symétrie τ_y). Donc toutes les arêtes de Γ sont de longueur $2\xi^{-1}$.

Tenant compte de la symétrie τ_y , il suffit de vérifier que les angles de Γ en q_1, q_0 et q_4 sont les mêmes (et donc égaux à $3\pi/5$). Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_2q_1} \cdot \overrightarrow{q_1q_0}, \quad \overrightarrow{q_1q_0} \cdot \overrightarrow{q_0q_4} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_0q_4} \cdot \overrightarrow{q_4q_3}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}(1-\xi^{-1})$. Comme ceci est égal à $(2\xi^{-1})^2 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que

$$\cos(\theta) = \frac{\xi}{2}(1 - \xi^{-1}) = \frac{\xi - 1}{2} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur est bien $3\pi/5$, comme il se doit. Ceci montre que Γ est un pentagone régulier.

On voit aussi que la longueur p_7p_6 vaut 2, et l'on vérifie qu'il en est de même pour p_6p_5 et p_5p_9 . Tenant compte de la symétrie τ_y , on a ainsi obtenu que toutes les arêtes de Γ' sont de longueur 2, et il reste à vérifier que les angles de Γ' en q_6, q_5 et q_9 sont tous égaux à $3\pi/5$. Or on vérifie que les produits scalaires

$$\overrightarrow{q_7q_6} \cdot \overrightarrow{q_6q_5}, \quad \overrightarrow{q_6q_5} \cdot \overrightarrow{q_5q_9} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{q_5q_9} \cdot \overrightarrow{q_9q_8}$$

valent tous les trois $2\xi^{-1}$. Comme ceci est égal à $4 \cos(\theta)$, où θ désigne l'angle « extérieur » en chacun de ces sommets, on en déduit que $\cos(\theta) = \xi^{-1}/2 = (\sqrt{5}-1)/4$, d'où $\theta = 2\pi/5$ et donc chaque angle intérieur vaut bien $3\pi/5$. Ceci montre que Γ' est un pentagone régulier.

De plus, le centre de gravité de Γ' est :

$$\frac{1}{5} \left(\frac{3\sqrt{5}-5}{2}, 0, \frac{5-\sqrt{5}}{2} \right) = \frac{1}{2\sqrt{5}} (3 - \sqrt{5}, 0, \sqrt{5} - 1)$$

et l'on voit que les vecteurs u et $(3 - \sqrt{5}, 0, \sqrt{5} - 1)$ sont liés, car le déterminant ci-dessous est nul :

$$\begin{vmatrix} 1 + \sqrt{5} & 3 - \sqrt{5} \\ 3 + \sqrt{5} & \sqrt{5} - 1 \end{vmatrix} = (5 - 1) - (9 - 5) = 0.$$

On obtient ainsi que Γ et Γ' sont deux pentagones réguliers contenus respectivement dans les plans $\mathcal{H}_{\xi+\xi^2}$ et \mathcal{H}_1 orthogonaux à la droite $\mathbb{R}u$, et dont les centres sont situés sur cette droite. Il en résulte que la rotation \mathbf{R} d'axe orienté par u et d'angle $2\pi/5$ permute cycliquement les points p_0, \dots, p_4 d'une part, et p_5, \dots, p_9 d'autre part, ainsi bien entendu que leurs opposés. Donc \mathbf{R} appartient à $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Montrons alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{D} . Considérons le drapeau (q_0, q_0q_1, Γ) de \mathcal{D} et un drapeau arbitraire (p, A, F') . Par construction, le groupe H agit transitivement sur les faces de \mathcal{D} , donc en appliquant à F' un élément de H on se ramène au cas où $F' = F$. Orientons les arêtes de Γ dans le sens $q_0 \rightarrow q_1 \rightarrow q_2$ etc. Alors, quitte à appliquer la symétrie orthogonale τ_y (qui préserve Γ mais renverse l'orientation de ses arêtes), on peut supposer que p est l'origine de l'arête orientée A . Alors, la rotation \mathbf{R}^k qui applique p sur q_0 applique A sur q_0q_1 . Ceci prouve que \mathcal{D} est un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6.

Alors, d'après la proposition 19.8, $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ est de cardinal 60. De plus, comme $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ appartient à $\text{Is}^-(\mathcal{D})$ et que l'application $g \mapsto -\text{id}_{\mathcal{E}} \circ g$ est une bijection de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ sur $\text{Is}^-(\mathcal{D})$, on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{D})$ est le produit direct de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$ et du groupe à deux éléments $\{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$.

Reste à déterminer la structure de $\text{Is}^+(\mathcal{D})$. Remarquons que \mathcal{D} contient cinq cubes, qui sont les transformés du cube initial C par $\text{Is}(\mathcal{D})$: pour chacun de ces cubes, les 12 arêtes joignent dans chaque face de \mathcal{D} deux sommets non adjacents et, réciproquement, chaque telle « arête » est contenue dans un unique cube. Par exemple, revenant à la figure précédente, « l'arête » q_0q_{-8} appartient au cube C' de sommets $\pm q_0, \pm q_8, \pm q_9, \pm q_2$.

L'action de $\text{Is}(\mathcal{D})$ sur ces cinq cubes définit un morphisme de groupes $\phi : \text{Is}(\mathcal{D}) \rightarrow S_5$, dont le noyau contient $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ (qui préserve chaque cube). Réciproquement, si h appartient à $\text{Ker}(\phi)$ alors il préserve les deux cubes C et C' , dont les seuls sommets communs sont $\pm q_0$, donc h laisse stable la paire de sommets opposés $(q_0, -q_0)$, et il en est de même pour toute

autre paire de sommets opposés. Quitte à composer h avec $-\text{id}_{\mathcal{E}}$, on peut supposer que $h(q_0) = q_0$ et alors ses trois voisins doivent rester voisins de q_0 , donc sont tous les trois fixés par h , qui fixe donc un repère affine de \mathcal{E} , d'où $h = \text{id}_{\mathcal{E}}$. Ceci montre que $\text{Ker}(\phi) = \{\pm \text{id}_{\mathcal{E}}\}$ et donc ϕ induit un *isomorphisme* de $\text{Is}^+(\mathcal{E})$ sur un sous-groupe K de S_5 , de cardinal 60. D'après le lemme ci-dessous, K est un sous-groupe *distingué* de S_5 .

Lemme 19.19. — Soient G un groupe fini et K un sous-groupe de G d'indice 2, i.e. tel que $|G| = 2|K|$. Alors :

- (i) K est un sous-groupe distingué.
- (ii) Le groupe quotient G/K est de cardinal 2 et donc pour tout $hh' \in G - K$ le produit hh' est dans K .

Démonstration. — Fixons un élément g de $G - K$. Alors G est la réunion disjointe de K et gK d'une part, et de K et Kg d'autre part. Comme $gK \cap K = \emptyset$, on a nécessairement $gK \subset Kg$, d'où l'égalité puisque ces deux ensembles ont même cardinal $|K|$. Il en résulte que $gK = Kg$, d'où $gKg^{-1} = K$. De plus, tout élément h de $G - K$ est de la forme gk avec $k \in K$ et comme $kKk^{-1} = K$ pour tout $k \in K$, on a donc

$$hKh^{-1} = g(kKk^{-1})g^{-1} = gKg^{-1} = K.$$

Ceci prouve que K est distingué dans G . On peut donc former le groupe quotient G/K , et il a deux éléments : la classe \bar{e} de l'élément neutre e et celle \bar{g} de g . On a alors $\bar{g}^2 = \bar{e}$ et donc si h, h' appartiennent à $G - K$, ils ont tous deux pour image \bar{g} et donc leur produit hh' a pour image \bar{e} , i.e. hh' est dans K . \square

Comme S_5 est engendré par les transpositions (ij) et que celles-ci sont toutes conjuguées, aucune n'est contenue dans le sous-groupe distingué K . Donc, d'après le lemme précédent, K contient tous les produits de deux transpositions. Or ces produits engendrent le groupe alterné A_5 . (Pour tout $n \geq 3$, A_n est le sous-groupe de S_n formé de tous les produits d'un nombre *pair* de transpositions.) Ceci prouve que $K = A_5$. En conclusion, on a obtenu que :

$$\boxed{\text{Is}(\mathcal{D}) \simeq A_5 \times \{\pm 1\}.}$$

Noter que $\text{Is}(\mathcal{D})$ n'est **pas** isomorphe à S_5 car $-\text{id}_{\mathcal{E}}$ est un élément *central* (i.e. qui commute à tous les autres) de $\text{Is}(\mathcal{D})$, tandis que le centre de S_5 est réduit à l'élément neutre.

L'icosaèdre régulier 19.20. — L'icosaèdre est « dual » du dodécaèdre, i.e. on peut le définir comme l'enveloppe convexe \mathcal{I} des 12 points p_1, \dots, p_{12} qui sont les centres des faces du dodécaèdre \mathcal{D} . Alors $p_i p_j$ est une arête de \mathcal{I} ssi les faces F_i et F_j de \mathcal{D} ont en commun une arête A ; on dira alors que l'arête $p_i p_j$ de \mathcal{I} est « duale » de l'arête A de \mathcal{D} . Les 20 faces de \mathcal{I} sont des triangles; plus précisément trois sommets p_i, p_j, p_k de \mathcal{I} en forment une face \mathcal{F} ssi les faces correspondantes F_i, F_j, F_k de \mathcal{D} ont en commun un sommet q ; on dira alors que la face \mathcal{F} de \mathcal{I} est « duale » du sommet q de \mathcal{D} .

On voit alors que $\text{Is}(\mathcal{D})$ agit transitivement sur les drapeaux de \mathcal{I} (car chaque drapeau de \mathcal{I} est « dual » d'un unique drapeau de \mathcal{D}), et donc \mathcal{I} est bien un polyèdre régulier au sens de la définition 19.6. De plus, d'après le lemme 19.7 et la proposition 19.8, on sait que $\text{Is}(\mathcal{I})$ est de cardinal $2 \cdot 60 = 120$, et comme il contient $\text{Is}(\mathcal{D})$ on en déduit que $\text{Is}(\mathcal{O}) = \text{Is}(\mathcal{D})$. On laisse au lecteur le soin de décrire explicitement l'isométrie correspondant à chaque élément de $\text{Is}(\mathcal{D})$.

Réciproquement, le dodécaèdre est aussi le « dual » de l'icosaèdre, i.e. étant donné un icosaèdre régulier, les centres de ses 20 faces forment les sommets d'un dodécaèdre régulier.

Enfin, partant d'un cube C , nous avons construit un dodécaèdre \mathcal{D} contenant C et dont les faces « correspondent » aux arêtes de C . De façon duale, partant d'un octaèdre régulier \mathcal{O} (le dual du cube), on peut y inscrire un icosaèdre régulier \mathcal{I} en plaçant de façon appropriée les 12 sommets de \mathcal{I} sur les arêtes de \mathcal{O} , cf. [Be, 12.5.5.3].

INDEX

- Action d'un groupe, 2, 36, 63, 64
 - fidèle, 36
 - libre, 36, 133, 134
 - simplement transitive, 2
 - transitive, 2, 36, 133, 134
- Adhérence, 125
- $\text{Aff}(X)$, 10
- Affine
 - application, 5
 - espace, 1, 3
 - groupe, 5
 - ouvert $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, 25
 - sous-espace, 3, 27
- Affinement indépendants (points), 11
- Affinement liés (points), 11
- Algébriquement clos (corps), 86, 98, 100
- Alignés (points), 23, 28
- Appui (hyperplan), 127
- Autodualité du th. de Desargues, 70
- Axe focal, 116
- Banach (théorème de Hahn-), 128
- Barycentre, 9
- Base orthogonale, 86
- Bases orthonormées (existence de), 104
- Bézout (théorème de), 101
- Bilinéaire (application), 81
- Birapport, 43, 44, 46, 62–64
 - de quatre droites d'un pinceau, 68
 - de quatre hyperplans d'un pinceau, 69
- Bornée (partie), 126
- Boule (ouverte ou fermée), 124
- Brianchon (théorème de), 96
- Cauchy-Schwarz (inégalité de), 104
- Cercles tangents, 108
- Ceva (théorème de), 17
- Chasles (relation de), 1
- Compact(e)
 - partie, 126
 - polyèdre convexe, 130
- Composante irréductible, 101
- Cône
 - de révolution, 112
 - de sommet O tangent à une sphère, 110
- Conique
 - définie par foyer, directrice et excentricité, 114
 - passant par 5 points, 93
 - projective, 90
 - projective réelle, 97
 - section, 112
- Conjugués (sous une action), 36
- Continue (application), 126
- Convexe, 123
 - enveloppe, 124
- Coordonnées
 - barycentriques, 11
 - homogènes, 23
- Courbe projective plane, 98
- Cube, 141
- Cycles, 61
- Côtés opposés
 - d'un hexagone, 93
 - d'un quadrangle complet, 75
- Dandelin (théorème de), 114, 122
- Dégénérée
 - conique, 92
 - forme bil. symétrique ou quadratique, 84
- Demi-espace (ouvert ou fermé), 125
- Dérivée d'un polynôme, 74
- Dérivées partielles d'un polynôme, 75
- Desargues (théorème de), 32, 33, 70
- Diagonaux (points), 55, 56
- Différentielle d'un polynôme, 76, 88
- Direction (d'un espace affine), 1
- Directrice d'une conique, 114–117
- Discriminant réduit d'un trinôme, 104
- Distance, 104
 - à un sous-espace affine, 109
- Distingué (sous-groupe), 36, 64
- Division harmonique, 56, 60
- Diédral (groupe), 132
- Double
 - droite, 92
 - point, 90
- Drapeau, 133, 134

- Dualité entre $\mathbb{P}(V)$ et $\mathbb{P}(V^*)$, 67
- Élation, 55
- Ellipse, 116, 119, 122
 - définition bifocale, 118
- Engendré
 - sous-espace affine, 10
 - sous-espace projectif, 23, 65
- Enveloppe convexe, 124
- Espace
 - affine, 1, 3
 - projectif, 21
- Euclidien
 - espace affine, 106
 - espace vectoriel, 103
- Euler (formule d'Euler)
 - pour les polynômes homogènes, 75
 - $s - a + f = 2$, 138
- Extension des scalaires, 87
- Extrémal (point), 128
- Factoriel (anneau), 100
- Fermée
 - boule, 124
 - partie, 124
- Fidèle (action), 36
- Fixe (point), 6, 36, 55, 60
- Forme
 - bilinéaire symétrique, 81
 - polaire d'une forme quadratique, 81
 - quadratique, 81
- Foyer d'une conique, 114–119
- Frontière, 125
- Groupe
 - affine, 5, 52, 53
 - alterné A_n , 141, 146
 - des homothéties et translations, 7
 - diédral, 132
 - projectif, 37, 44
 - symétrique S_n , 61, 63, 64
- Harmonique (division), 56, 60
- Homographie, 37, 44, 46
- Homogène (polynôme), 75
- Homologie, 55
- Homothéties, 6
- Hyperbole, 117, 119, 122
 - définition bifocale, 119
- Hyperbolique (plan), 90
- Hyperplan
 - affine, 13
 - d'appui, 127
 - médiateur, 127
 - projectif, 24, 52, 53, 55
- Hyperplan tangent, 76, 78, 79, 88, 91
- Hypersurface algébrique
 - de $\mathbb{P}^n(k)$, 78
 - de k^n , 75
- Intérieur, 125
- Involution, 56–60
- Isométrie
 - affine, 106
 - de \mathbb{R}^3 , 133
 - vectorielle, 105
- Isotrope
 - cône, 85, 88
 - totalement, 90
 - vecteur, 85, 89
- Libre (action), 36
- Lipschitzienne (application), 126
- Lisse (point), 76, 78, 79, 89
- Matrice
 - d'une forme bil. symétrique ou quadratique, 82
- Médianes d'un triangle, 10
- Ménélaüs (théorème de), 16
- Multiplicité, 98–100
- Médiane (égalité de la), 105
- Médiateur (plan ou hyperplan), 127
- n -gone convexe, 131
 - régulier, 131–133
- N-rapport, 41, 44, 46
- Non dégénérée
 - forme bil. symétrique ou quadratique, 84, 86
- Normal (vecteur), 107
- Norme
 - euclidienne, 104
 - sur un \mathbb{R} -espace vectoriel, 104
- Noyau
 - d'une forme bil. sym. ou quadratique, 84, 88
- Opposés (côtés), 55, 93
- Orbite, 36
- Orthogonale (base), 86
- Orthogonale (symétrie), 106
- Orthogonalité
 - entre V et V^* , 24, 65
 - pour une forme bil. sym. ou quadratique, 84
- Orthonormé (repère), 106
- Orthonormée (famille, base), 103
- Ouverte
 - boule, 124
 - partie, 124
- Pappus (théorème de), 30, 31
- Pappus (théorème dual de), 73
- Parabole, 115, 119, 122
- Parallélogramme (égalité du), 105
- Partie
 - bornée, 126
 - compacte, 126
- Partie linéaire d'une appl. affine, 5
- Pascal (théorème de), 93
- Perspective (figures en), 47
- Perspectivité, 49–51
- Pinceau
 - d'hyperplans, 66
 - de droites, 66
- Plongement
 - projectif, 19, 20, 22
 - vectoriel, 13
- Point

- lisse, 76, 78, 79, 89
- singulier, 76, 78, 88, 89
- Polaire
 - d'un point, 95, 97
 - forme, 81
- Polarité, 95
- Polyèdre
 - convexe, 129
 - régulier, 134, 135, 139, 140
- Polygone convexe, 131
- Polynôme
 - à plusieurs variables, 73
 - dérivée d'un, 74
 - dérivées partielles d'un, 75
 - différentielle d'un, 76, 88
 - homogène, 75
- Polytope, 130
- Position générale (points en), 48
- Produit scalaire, 103
- Projectif
 - espace, 21
 - groupe, 37, 44
 - repère, 44, 45
 - sous-espace, 27
- Projection
 - centrale, 50
 - sur \mathcal{F} de direction G , 7
 - sur un convexe fermé, 126
- Projectivement indépendants (points), 35
- Projectivité, 49
- Puissance d'un point par rapport à une sphère, 109
- Pythagore (égalité de), 105
- Pôle
 - d'un hyperplan, 95
 - d'une droite, 97
- Quadrangle complet, 55, 59
- Quadrilatère complet, 67
- Quadrique projective, 85, 89, 90
- Quotient
 - ensemble, 36
 - groupe, 53, 63
- Rang
 - d'une forme bil. sym. ou quadratique, 83, 86
- Réduction simultanée (théorème de), 120
- Régulier
 - dodécaèdre, 143
 - hexaèdre (cube), 141
 - icosaèdre, 146
 - octaèdre, 142
 - polyèdre, 134
 - polygone, 131–133
 - tétraèdre, 141
- Repère
 - affine, 11, 12, 39
 - orthonormé, 106
 - projectif, 35, 38, 39, 44, 45
- Restriction à un sous-espace d'une forme bil. sym. ou quadratique, 86
- Rotation, 133
 - gauche, 133
- Segment, 123
- Semi-direct (produit), 52, 53, 63
- Signature
 - d'une forme quadratique réelle, 86
- Similitude (directe), 138, 140
- Simplement transitive (action), 2
- Singulier (point), 76, 78, 88, 89
- Sommet
 - d'un convexe, 128
 - d'une conique, 115–117
- Sous-espace
 - affine, 3, 27
 - affine engendré, 10
 - projectif, 22, 27
 - projectif engendré, 23
- Stabilisateur, 36, 64, 135
- Sylvester (théorème de), 86
- Symétrie
 - centrale, 107, 133
 - orthogonale, 106, 133
 - par rapport à \mathcal{F} de direction G , 7
 - par rapport à un hyperplan, 107
- Symétrique (groupe), 61, 63, 64
- Thalès
 - (réciproque du théorème), 30
 - (théorème de), 29
 - (version projective), 69
- Théorème
 - d'existence de bases orthogonales, 86
 - de Bézout, 101
 - de Brianchon, 96
 - de Ceva, 17
 - de Dandelin, 114, 122
 - de Desargues affine, 32
 - de Desargues projectif, 33, 70
 - de Hahn-Banach, 128
 - de Ménélaüs, 16
 - de Minkowski-Krein-Milman, 129
 - de Pappus affine, 30
 - de Pappus dual, 73
 - de Pappus projectif, 31
 - de Pascal, 93
 - de réduction simultanée, 120
 - de Sylvester, 86
 - de Thalès, 29
 - de Thalès (réciproque), 30
 - de Thalès projectif, 69
- Totalement isotrope (sev), 90
- Transitive (action), 2, 36
- Translations, 6
- Transpositions, 61
- Triangulaire (inégalité), 104
- Tétraèdre régulier, 141