CHAPITRE 2

COMPLÉTÉ PROJECTIF D'UN ESPACE AFFINE, ESPACES PROJECTIFS

[(1)] Dans tout ce chapitre, k désigne un corps.

8. Plongement vectoriel d'un espace affine

Il est utile de connaître le résultat suivant :

Lemme 8.1. — *Soient X un ensemble non vide et E un k-ev.*

(i) *L'ensemble $\mathscr{A}(X,E)$ de toutes les applications $f : X \to E$ est muni d'une structure de k-espace vectoriel, définie comme suit : pour $f,g \in \mathscr{A}(X,E)$ et $\lambda \in k$, l'application $(\lambda f + g) : X \to E$ envoie tout $x \in X$ sur $\lambda f(x) + g(x)$.*

(ii) *E s'identifie au sev formé des applications* constantes *de X dans E, i.e. on identifie un élément $u \in E$ avec la fonction constante $f_u : X \to E$ de valeur u.*

Démonstration. — (i) Il faut vérifier des égalités de fonctions : $1\cdot f = f$, $\lambda\cdot(\mu\cdot f) = (\lambda\mu)\cdot f$, $(\lambda+\mu)\cdot f = \lambda\cdot f + \mu\cdot f$, etc. Elles découlent de ce que, pour tout $x \in X$, on a les égalités correspondantes dans E :

$$1\cdot f(x) = f(x), \quad \lambda\cdot(\mu\cdot f(x)) = (\lambda\mu)\cdot f(x), \quad (\lambda+\mu)\cdot f(x) = \lambda\cdot f(x) + \mu\cdot f(x),$$

etc., qui découlent de la structure de k-ev de E.

(ii) L'application qui à $u \in E$ associe f_u est linéaire et injective, donc c'est un isomorphisme de E sur le sev des applications constantes. $\square$

***Théorème 8.2* (Plongement vectoriel)**. — *Soit $(\mathscr{E},E)$ un espace affine. Il existe un espace vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ et une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, définis de façon canonique, tels que* $\mathrm{Ker}(\phi) = E$ *et que $\mathscr{E}$ soit isomorphe à l'hyperplan affine $\{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(x) = 1\}$ (qui est un espace affine de direction E). (Noter que si E est de dimension finie d, alors* $\dim(\widehat{\mathscr{E}}) = d+1$.)

1ère démonstration. — Pour tout $A \in \mathscr{E}$ notons f_A l'application $\mathscr{E} \to E$, $M \mapsto \overrightarrow{MA}$. Soit $\widehat{\mathscr{E}}$ le sev de $\mathscr{A}(\mathscr{E},E)$ engendré par ces applications et les applications constantes.

Remarquons d'abord que, pour tout $A,B \in \mathscr{E}$ on a :

$$f_B - f_A = \overrightarrow{AB}. \tag{†}$$

En effet, pour tout $M \in \mathscr{E}$ on a : $f_B(M) - f_A(M) = \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$.

[(1)] Version du 4 oct. 2016, avec R,Q,P renommés A_1,B_1,C_1 dans le th. de Desargues 14.3.

Montrons que E est un *hyperplan* de $\widehat{\mathscr{E}}$, i.e. admet un supplémentaire de dimension 1. Quelques soient $n \in \mathbb{N}^*$, $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$, on a :

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i} - (\sum_{i=1}^n \lambda_i) f_{A_0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (f_{A_i} - f_{A_0}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0 A_i} \in E.$$

donc $\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}$ appartient à $kf_{A_0} + E$, d'où $\widehat{\mathscr{E}} = kf_{A_0} + E$. De plus, cette somme est directe, car $f_{A_0} \notin E$ puisque l'application $f_{A_0} : M \mapsto \overrightarrow{MA_0}$ n'est pas constante, d'où :

$$(**) \qquad \widehat{\mathscr{E}} = E \oplus kf_{A_0}.$$

On peut alors définir une forme linéaire ϕ sur $\widehat{\mathscr{E}}$, de noyau E, en posant $\phi(x) = 0$ si $x \in E$ et $\phi(f_{A_0}) = 1$. Alors

$$\mathscr{H} = \{x \in \widehat{\mathscr{E}} \mid \phi(x) = 1\}$$

est un sous-espace affine de $\widehat{\mathscr{E}}$ de direction E. Comme pour tout $A \in \mathscr{E}$ on a $f_A = f_{A_0} + \overrightarrow{A_0 A}$, on a donc

$$\mathscr{H} = f_{A_0} + E = \{f_{A_0} + \overrightarrow{A_0 A} \mid A \in \mathscr{E}\} = \{f_A \mid A \in \mathscr{E}\},$$

donc l'application $A \mapsto f_A$ est une bijection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{H}$. Remarquons au passage que ϕ ne dépend pas du choix de A_0, puisque $\phi(f_A) = 1$ pour tout $A \in \mathscr{E}$, et que pour $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in k$ on a :

$$\phi(\sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i.$$

Ainsi, un élément arbitraire $x = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_{A_i}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$ appartient à $\mathscr{H}$ si et seulement si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, et dans ce cas on a $x = f_G$, où G est le barycentre des points pondérés (A_i, λ_i) (vérifier cette assertion !).

Enfin la bijection $\mathscr{E} \to \mathscr{H}$, $A \mapsto f_A$ est *affine*, de partie linéaire id_E, car d'après (†) pour tout $A, B \in \mathscr{E}$ on a :

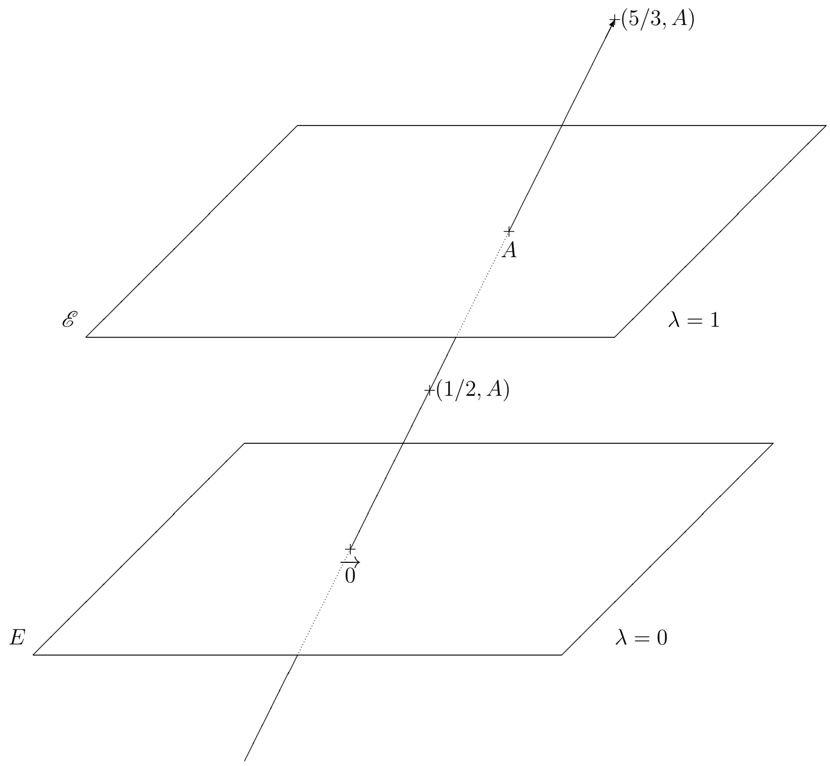
$$(\ddagger) \qquad \overrightarrow{f_A f_B} = f_B - f_A = \overrightarrow{AB}.$$

Via cette bijection affine, on peut donc identifier $\mathscr{E}$ à l'hyperplan $\mathscr{H}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$. Ceci prouve le théorème.(2) □

Faisons enfin la remarque générale suivante. Si E est un hyperplan d'un espace vectoriel W, défini par une forme linéaire ϕ (i.e. $E = \mathrm{Ker}(\phi)$), alors W est la réunion disjointe de E et de son complémentaire $W_\phi = \{w \in W \mid \phi(w) \neq 0\}$, et tout $w \in W_\phi$ s'écrit *de façon unique* $w = \lambda x$, avec $\phi(x) = 1$ et $\lambda \in k$. En effet, ces conditions entraînent que $\phi(w) = \lambda$ et donc $x = \phi(w)^{-1} w$. Ceci montre que si l'on pose $\mathscr{H} = \{x \in W \mid \phi(x) = 1\}$ alors, en tant qu'ensemble, W est la réunion de E et de l'ensemble des couples (λ, x), où $\lambda \in k^*$ et $x \in \mathscr{H}$.

Ceci permet de voir « géométriquement » $\widehat{\mathscr{E}}$ comme la réunion de E et des droites épointées $k^\times f_A = \{\lambda f_A \mid \lambda \in k^\times\} = \{(\lambda, A) \mid \lambda \in k^\times\}$ pour A parcourant $\mathscr{E}$:

(2)Par ailleurs, on peut montrer (exercice !) qu'en tant que sev de $\mathscr{A}(\mathscr{E}, E)$, $\widehat{\mathscr{E}}$ est formé des applications affines $f : \mathscr{E} \to E$ dont la partie linéaire est un multiple de id_E ; de plus on a $\overrightarrow{f} = \phi(f)\, \mathrm{id}_E$.



2ème démonstration. — On peut définir $\widehat{\mathscr{E}}$, en tant qu'ensemble, comme la réunion de E et des couples (λ, A), pour $\lambda \in k^\times$ et $A \in \mathscr{E}$, et l'on identifie un point $A \in \mathscr{E}$ avec le couple $(1, A)$. La multiplication par un scalaire $\mu \neq 0$ est définie de façon évidente : $\mu \cdot (\lambda, A) = (\mu\lambda, A)$ et si $u \in E$ alors $\mu \cdot u$ est l'élément μu de E. De même, si $u, v \in E$ leur somme est l'élément $u + v$ de E. On pose $(\lambda, A) + u = (\lambda, A + \lambda^{-1}u)$ et :

$$(\lambda, A) + (\mu, B) = \begin{cases} \left(\lambda + \mu, \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} A + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu} B\right) & \text{si } \lambda + \mu \neq 0, \\ \mu \overrightarrow{AB} & \text{si } \lambda = -\mu. \end{cases}$$

On peut alors vérifier directement que les axiomes d'espace vectoriel sont vérifiés, puis que l'application ϕ définie par $\phi(u) = 0$ et $\phi\big((\lambda, A)\big) = \lambda$ est une forme linéaire de noyau E ; alors $\mathscr{E}$ s'identifie à l'hyperplan affine formé des $x \in \widehat{\mathscr{E}}$ tels que $\phi(x) = 1$. Les détails de la vérification sont laissés en exercice. □

Notation 8.3. — Tout point de $\mathscr{E}$ peut être considéré comme un « vecteur » de $\widehat{\mathscr{E}}$. Pour distinguer les deux notions, il est utile d'introduire la notation suivante. En tant qu'espace vectoriel, $\widehat{\mathscr{E}}$ est de façon naturelle un espace affine (avec $\overrightarrow{xy} = y - x$) ; notons O le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ de $\widehat{\mathscr{E}}$ et pour tout « point » $M \in \widehat{\mathscr{E}}$, notons $\overrightarrow{OM}$ le vecteur correspondant.

Proposition 8.4. — *Soient $A_0, A_1, \ldots, A_p$ des points de $\mathscr{E}$. On a l'égalité :*

$$(\star) \qquad \dim \operatorname{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p}) = 1 + \dim \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle.$$

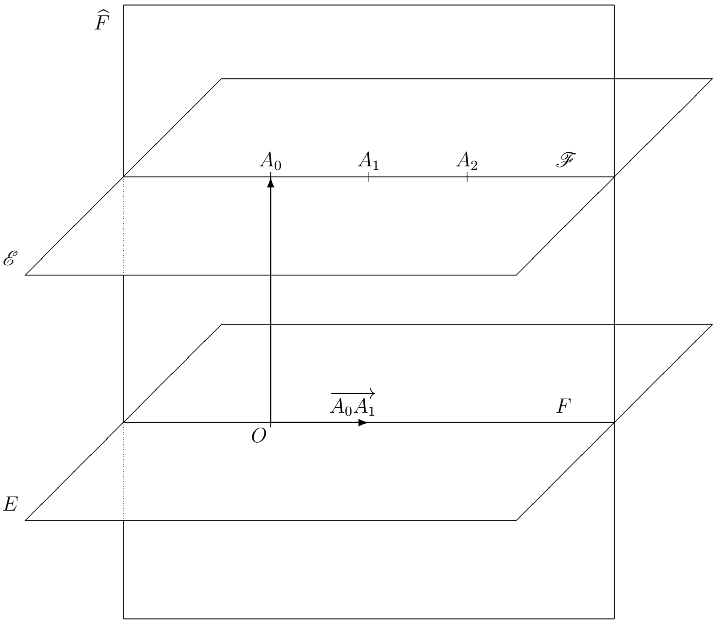
Démonstration. — Posons $\mathscr{F} = \operatorname{Aff}\langle A_0, \ldots, A_p\rangle$. Sa direction est le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_p})$ de E et l'on a $\dim(\mathscr{F}) = \dim(F)$. (Ceci est $\leq p$ avec égalité ssi $A_0, \ldots, A_p$ sont affinement indépendants.)

Posons $\widehat{F} = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_p})$. Comme $\overrightarrow{OA_i} = \overrightarrow{OA_0} + \overrightarrow{A_0A_i}$ pour tout $i \geq 1$, on a

$$\widehat{F} = k\overrightarrow{OA_0} + F$$

et comme $F \subset E$ et $\overrightarrow{OA_0} \notin E$ (car $\phi(\overrightarrow{OA_0}) = 1$), on a $\overrightarrow{OA_0} \notin F$, donc la somme ci-dessus est directe. On a donc $\dim(\widehat{F}) = 1 + \dim(F)$. □

Exemple 8.5. — Illustrons ceci lorsque $(\mathscr{E}, E)$ est un plan affine sur $\mathbb{R}$ et que les points A_0, A_1, A_2 sont distincts et alignés. Alors F est la droite vectorielle $\mathbb{R}\overrightarrow{A_0A_1} \subset E$ et, dans le dessin ci-dessous, $\widehat{F}$ est le plan « vertical » engendré par $\overrightarrow{A_0A_1}$ et $\overrightarrow{OA_0}$:



9. Coordonnées barycentriques, théorèmes de Ménélaüs et de Ceva

De l'avis de l'auteur de ces lignes, l'intérêt principal du prolongement vectoriel est la construction du complété projectif de $\mathscr{E}$ (voir la section suivante). Toutefois, on l'utilise dans cette section pour démontrer les théorèmes de Ménélaüs et de Ceva.

Définition 9.1. — Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine de $\mathscr{E}$ (cf. 3.7). Pour tout $M \in \mathscr{E}$ il existe un *unique* $(n+1)$-uplet $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in k^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$. On dit que $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ sont les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère $\mathscr{R}$.

Démonstration. — *L'existence* résulte de la Prop. 6.8 : comme $\mathrm{Aff}\langle A_0, \ldots, A_n\rangle = \mathscr{E}$, tout point M de $\mathscr{E}$ s'écrit comme barycentre des A_i. Prouvons *l'unicité* : si $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$ et $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i A_i$, on a $\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$ donc, comme $(\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ est une base de E, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont uniquement déterminés. Alors λ_0 l'est aussi puisque $\lambda_0 = 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i$. □

Proposition 9.2. — *Supposons* $\dim(\mathscr{E}) = n$ *et soit* $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \ldots, A_n)$ *un repère affine de* $\mathscr{E}$. *Alors :*

a) *Les vecteurs* $\overrightarrow{OA_0}, \ldots, \overrightarrow{OA_n}$ *forment une* **base** $\widehat{\mathscr{R}}$ *de* $\widehat{\mathscr{E}}$. *Notons* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ *les coordonnées dans cette base.*

b) *Un « point »* M *de* $\widehat{\mathscr{E}}$ *appartient à* $\mathscr{E}$ *ssi les coordonnées* $(\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$ *de* $\overrightarrow{OM}$ *vérifient* $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$.

c) *De plus, les coordonnées barycentriques d'un point* $M \in \mathscr{E}$ *dans le repère* $\mathscr{R}$ *sont les coordonnées du vecteur* $\overrightarrow{OM}$ *dans la base* $\widehat{\mathscr{R}}$. *On peut donc dire que :* les coordonnées barycentriques dans $\mathscr{E}$ se prolongent en des coordonnées « vectorielles » dans $\widehat{\mathscr{E}}$.

Démonstration. — Le point (a) découle de la Prop. 8.4. D'autre part, si M est un élément de $\widehat{\mathscr{E}}$, l'écriture $\overrightarrow{OM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}$ signifie, avec les notations du théorème 8.2, que $M = \sum_{i=0}^n \lambda_i f_{A_i}$; comme ϕ est linéaire et vaut 1 sur chaque f_{A_i}, on a donc $\phi(M) = \sum_{i=0}^n \lambda_i$. Le point (b) en découle.

Prouvons (c). Soit $M \in \mathscr{E}$ et soient $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ ses coordonnées barycentriques dans $\mathscr{R}$. Alors pour tout $P \in \mathscr{E}$, on a $\overrightarrow{PM} = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i}$ et, comme $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, on a donc :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM} = \Big(\sum_{i=0}^n \lambda_i\Big)\overrightarrow{OP} + \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{PA_i} = \sum_{i=0}^n \lambda_i(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PA_i}) = \sum_{i=0}^n \lambda_i \overrightarrow{OA_i}.$$

□

Théorème 9.3. — *Soient $\mathscr{E}$ un espace affine de dimension n et $\mathscr{R} = (A_0, A_1, \dots, A_n)$ un repère de $\mathscr{E}$. Donnons-nous $n+1$ points $B_0, \dots, B_n$ de $\mathscr{E}$ et pour $j = 0, \dots, n$ notons $(\lambda_{0j}, \dots, \lambda_{nj})$ les coordonnées barycentriques de B_j dans le repère $\mathscr{R}$. Alors les points $B_0, \dots, B_n$ sont affinement liés ssi le déterminant de la matrice $\Lambda = (\lambda_{ij})_{i,j=0,\dots,n}$ est nul.*

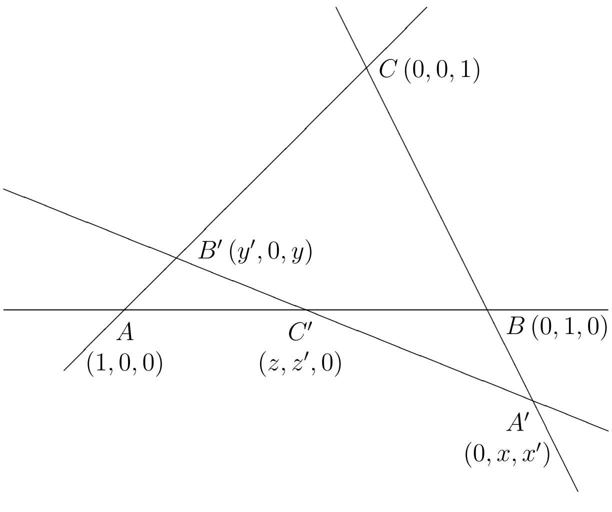
Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $V = \widehat{\mathscr{E}}$ de $\mathscr{E}$ et notons $F = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{B_0B_1}, \dots, \overrightarrow{B_0B_n})$ et $\widehat{F} = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n})$. On a les équivalences :

$$\text{les } B_i \text{ sont liés} \iff \dim(F) < n \iff \dim(\widehat{F}) < n+1 \iff \mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n}) = 0,$$

où $\mathscr{B}$ désigne la base $\widehat{\mathscr{R}}$ de V. Or la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{OB_0}, \dots, \overrightarrow{OB_n})$ (qui exprime les $\overrightarrow{OB_j}$ dans la base $\mathscr{B}$) n'est autre que Λ, d'où le résultat. (3) □

Dans la suite de cette section, on se place dans un *plan affine* $(\mathscr{P}, P)$.

***Théorème 9.4* (de Ménélaüs).** — (4) *Dans le plan $\mathscr{P}$, soient A, B, C trois points non alignés, qui forment donc un repère, d'où des coordonnées barycentriques. Soit A' un point de la droite (BC), ses coordonnées barycentriques sont donc de la forme $(0, x, x')$. De même, soient $B' \in (CA)$, de coordonnées $(y', 0, y)$* (5) *et $C' \in (AB)$ de coordonnées $(z, z', 0)$. Alors les points A', B' et C' sont alignés ssi $xyz + x'y'z' = 0$.*



(3) Pour une autre démonstration, n'utilisant pas le plongement vectoriel, voir [Be, Prop. I.2.3].
(4) Mathématicien grec qui vécut autour de l'an 100.
(5) Pour que le résultat final soit « joli », i.e. $xyz + x'y'z' = 0$, on utilise l'ordre « cyclique » $ABCA$.

Démonstration. — D'après le théorème 9.3, A', B' et C' sont alignés ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & y' & z \\ x & 0 & z' \\ x' & y & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement que ce déterminant vaut $xyz + x'y'z'$. □

***Théorème 9.5* (de Céva).** — [6] *Mêmes hypothèses et notations que dans le théorème de Ménélaüs. Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi $xyz = x'y'z'$.*

Démonstration. — On note $\mathscr{R}$ le repère (A, B, C) et l'on se place dans l'espace vectoriel $V = \widehat{\mathscr{P}}$, muni des coordonnées (λ, μ, ν) dans la base $\widehat{\mathscr{R}}$. La démonstration se fait en quatre étapes. Notons P la direction de $\mathscr{P}$.

(i) Remarquons d'abord que toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$ est l'intersection du plan vectoriel Π qu'elle engendre dans V, et de $\mathscr{P}$. Or Π est défini dans V par l'annulation d'une forme linéaire $f(\lambda, \mu, \nu) = a\lambda + b\mu + c\nu$, laquelle est unique à multiplication par un scalaire non nul près. Donc $\mathscr{D}$ est définie dans $\mathscr{P}$ par « l'équation en les coordonnées barycentriques » $a\lambda + b\mu + c\nu = 0$. De plus, $\Pi \cap P$ est la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$ (voir la figure dans l'exemple 8.5).

(ii) Soient maintenant dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, soient Π_1, Π_2, Π_3 les plans vectoriels associés, et soient $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ une forme linéaire définissant Π_i. Comme $\mathscr{D}_1 \neq \mathscr{D}_2$ alors $\Pi_1 \neq \Pi_2$ donc $\Pi_1 \cap \Pi_2$ est une droite vectorielle Δ, et donc le sous-espace $W = \Pi_1 \cap \Pi_2 \cap \Pi_3$ est égal soit à Δ (si $\Delta \subset \Pi_3$), soit à $\{0\}$ (si $\Delta \not\subset \Pi_3$). De plus, comme $\Pi_i = \mathrm{Ker}(f_i)$ est l'orthogonal dans V de la droite $kf_i \subset V^*$, alors W est l'orthogonal dans V du sous-espace $\mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$ de V^* et donc on a :

$$(*) \qquad \boxed{W = \Delta \iff W \neq \{0\} \iff f_1, f_2, f_3 \text{ sont liées.}}$$

(iii) $W = \Delta$ équivaut à ce que les droites $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ soient concourantes ou parallèles. Plus précisément :

– Si Δ n'est pas contenue dans P elle coupe $\mathscr{P}$ en un point I qui appartient à $\mathscr{P} \cap \Pi_1 \cap \Pi_2$ donc I est le point de concours de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$. Dans ce cas, on voit que $W = \Delta$ ssi $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes en I.

– Si $\Delta \subset P$ alors Δ est contenue dans $P \cap \Pi_i$ pour $i = 1, 2$, donc $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles, de direction D. Dans ce cas, on voit que $W = \Delta$ ssi $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont parallèles.

On a ainsi démontré, au passage, la proposition suivante :

Proposition 9.6. — *Soient dans $\mathscr{P}$ trois droites affines distinctes $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$, définies respectivement par les équations en les coordonnées barycentriques : $a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Alors $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \mathscr{D}_3$ sont concourantes ou parallèles ssi* $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$.

En effet, la nullité de ce déterminant équivaut au fait que les formes linéaires $f_i(\lambda, \mu, \nu) = a_i\lambda + b_i\mu + c_i\nu$ soient liées.

[6] Giovanni Ceva, mathématicien italien (1647-734). Son nom est souvent francisé en : « Jean (de) Céva », probablement pour le distinguer de son frère Tommaso (jésuite et mathématicien, qui eut pour élève le géomètre (et jésuite aussi) Giovanni Saccheri). Source : www-history.mcs.st-and.ac.uk

(iv) Achevons maintenant la démonstration du théorème de Ceva. Comme la droite $\mathscr{D}_1 = (AA')$ passe par les points de coordonnées $(1,0,0)$ et $(0,x,x')$, on voit que l'équation f_1 du plan Π_1 est $x'\mu - x\nu = 0$. De même, comme la droite $\mathscr{D}_2 = (BB')$ passe par les points de coordonnées $(0,1,0)$ et $(y',0,y)$, on voit que l'équation f_2 de Π_2 est $-y\lambda + y'\nu = 0$. Et comme $\mathscr{D}_3 = (CC')$ passe par les points de coordonnées $(0,0,1)$ et $(z,z',0)$, on voit que l'équation f_3 de Π_3 est $z'\lambda - z\mu = 0$. On obtient donc que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles ssi le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & -y & z' \\ x' & 0 & -z \\ -x & y' & 0 \end{vmatrix}$ est nul. Or on voit facilement qu'il vaut $x'y'z' - xyz$. $\square$

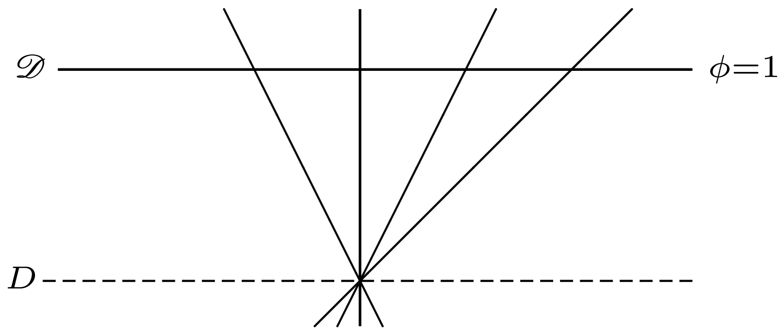
Exercice 9.7. — Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine réel, $s, t \in]0,1[$, $C' = A + s\,\overrightarrow{AB}$ et $A' = B + t\,\overrightarrow{BC}$. Soit I le point de concours de (AA') et (CC') et B' le point de concours de (BI) et (CA).

(i) Quelle est la condition sur s, t pour que B' soit le milieu de $[C, A]$?
(ii) On suppose $s = 1/3$ et $t = 1/4$. Déterminer le réel λ tel que $B' = (1-\lambda)C + \lambda A$.
(iii) Même question lorsque $s = 1/3$ et $t = 3/4$.

10. Complété projectif d'une droite ou d'un plan affine

10.1. Complété projectif d'une droite affine. — Soit $\mathscr{D}$ une droite affine, de direction D. Alors $V = \widehat{\mathscr{D}}$ est un k-espace vectoriel de dimension 2 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{D} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On peut le voir de plusieurs façons.

(a) Sur le dessin ci-dessous, on voit que, à l'exception de D, toute droite vectorielle de V coupe $\mathscr{D}$ en un unique point. On peut donc identifier $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ à l'ensemble des points de $\mathscr{D}$, auxquels on rajoute un point, noté ∞, qui correspond à la droite D et qu'on appelle le « point à l'infini ». Donc, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathscr{D} \cup \{\infty\}$.



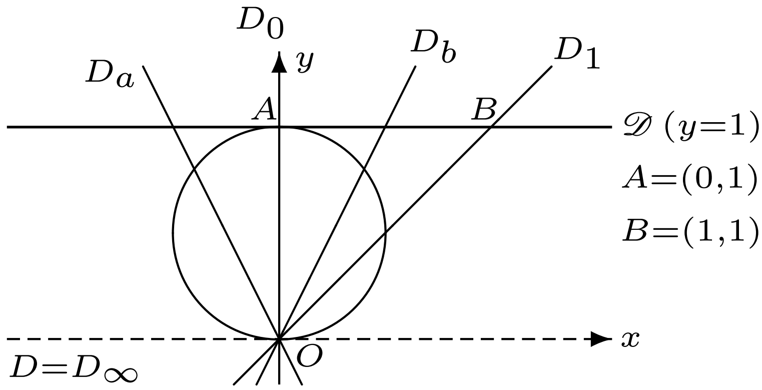
(b) Choisissons des coordonnées (x,y) sur V telles que $\mathscr{D}$ (resp. D) soit donnée par l'équation $y = 1$ (resp. $y = 0$).[7] Alors les droites vectorielles de V sont :

(i) Pour $\lambda \in k$, la droite D_λ d'équation $x = \lambda y$ (engendrée par $e_2 + \lambda e_1$), qui coupe $\mathscr{D}$ en le point $(\lambda, 1)$.

(ii) La droite $D = ke_1$, d'équation $y = 0$.

[7]Pour cela, on choisit une forme linéaire ψ non colinéaire à notre ϕ, alors (ψ,ϕ) est une base de V^*, duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de V et donc les formes linéaires « coordonnées dans cette base » sont (ψ, ϕ).

Dans la figure suivante, pour $k = \mathbb{R}$ on a représenté les droites D_0 et D_1, ainsi que D_a et D_b, où $a = -1/2 = -b$. De plus, lorsque $k = \mathbb{R}$, on voit que lorsque λ tend vers $\pm\infty$, la droite D_λ « tend » vers la droite $D_\infty = D$. Bien qu'on n'ait pas encore défini de topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut comprendre l'assertion précédente en remarquant que chaque droite D_λ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$ en un unique point $P_\lambda \neq O$, tandis que $D = D_\infty$ est tangente à $\mathscr{C}$ en O, et que, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, le point P_λ tend vers O quand λ tend vers $\pm\infty$. Donc, on peut identifier $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ au cercle $\mathscr{C}$ (on reviendra sur ceci plus tard).



Revenant à un corps quelconque k, soit V un k-espace vectoriel de dimension 2.

Définition 10.1. — (a) On note $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble des droites vectorielles de V, et l'on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une *droite projective.*

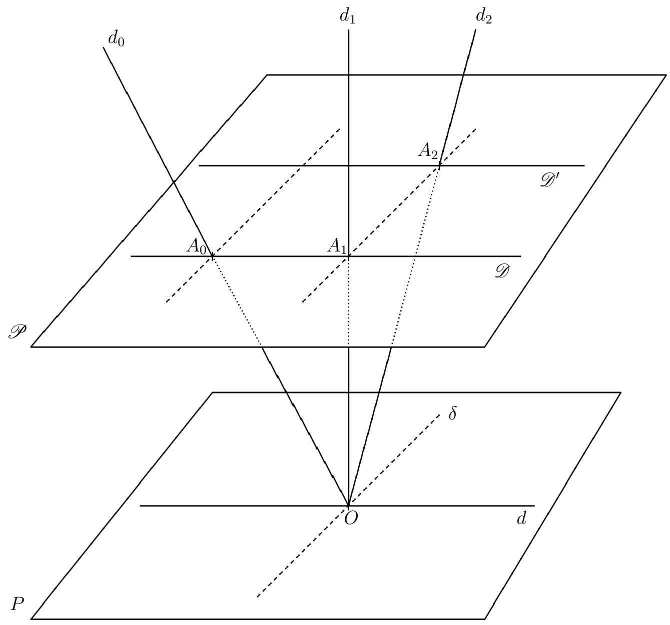
(b) Lorsque $V = \widehat{\mathscr{D}}$ pour une droite affine $\mathscr{D}$, on note $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{D}})$ et l'on dit que c'est le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{D}$.

L'intérêt de cette notion de « droite projective » va apparaître dans le paragraphe suivant.

10.2. Complété projectif d'un plan affine. — Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, de direction P. Alors $V = \widehat{\mathscr{P}}$ est un k-espace vectoriel de dimension 3 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{P} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un *plan projectif*, et que c'est le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{P}$.

Comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est la réunion des points de $\mathscr{P}$, qui correspondent aux droites vectorielles de $\widehat{\mathscr{P}}$ non contenues dans P, et des points de $\mathbb{P}(P)$, qui correspondent aux droites vectorielles de P.[8]

[8] C'est pour cette raison que, dans la figure suivante, on a noté par des lettres minuscules les droites vectorielles d_0, d_1, d_2, d, δ : elles correspondent à des « points » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.



Les points de $\mathbb{P}(P)$ forment ce qu'on appelle la « droite (projective) à l'infini », qu'on notera $\mathscr{D}_\infty$. Dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, chaque droite affine $\mathscr{D}$ est « complétée » en lui adjoignant son « point à l'infini », qui est le point de $\mathbb{P}(P)$ correspondant à la direction de $\mathscr{D}$; on obtient ainsi la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$.[9] De plus, deux droites parallèles ont le même point à l'infini : par exemple, dans la figure, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont d pour point à l'infini, tandis que la droite (A_1A_2) et sa parallèle passant par A_0 ont toutes deux δ comme point à l'infini. On voit ainsi que :

(i) Dans $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines distinctes, alors dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_1)$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_2)$ se coupent en un unique point x, et x appartient à $\mathscr{P}$ (resp. à la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$) si et seulement si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont concourantes (resp. parallèles). (Ceci suffit déjà à justifier l'étude des espaces projectifs et de la « géométrie projective ».)

(ii) De plus, pour toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$, la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ coupe $\mathscr{D}_\infty$ en un unique point, qui est le point à l'infini de $\mathscr{D}$. Donc, en appelant « **droites** » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ ainsi que la droite $\mathscr{D}_\infty$, on obtient que :

« dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ deux droites distinctes se coupent en un unique point »,

ce qui est une situation « plus agréable » que dans le plan affine. De plus, on verra plus bas que, en fait, $\mathscr{D}_\infty$ ne joue pas un rôle particulier et peut être remplacée par n'importe quelle droite de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

Remarque 10.2. — Lorsque $k = \mathbb{R}$ le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est muni d'une structure de variété C^∞ compacte mais attention, il ne s'identifie *pas* à la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. On peut essayer de se le représenter comme la demi-sphère supérieure : $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ en identifiant deux à deux les points diamétralement opposés $(x, y, 0)$ et $(-x, -y, 0)$. En effet, chaque droite vectorielle non contenue dans le plan horizontal $z = 0$ coupe la demi-sphère en un unique point, pour lequel $z > 0$. D'autre part, chaque droite vectorielle horizontale coupe le cercle horizontal $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en deux points diamétralement opposés, qu'il faut donc identifier. On peut montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une surface compacte *non orientable* (i.e. elle a une seule face au lieu de deux, comme un ruban

[9] En effet, le sev de $\widehat{\mathscr{P}}$ engendré par $\mathscr{D}$ s'identifie à $\widehat{\mathscr{D}}$ et l'on retrouve la construction du §1.

de Möbius) et donc n'est pas homéomorphe à une surface contenue dans $\mathbb{R}^3$. Mais ceci n'empêche pas de faire de la géométrie projective !

11. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines

11.1. Espaces projectifs et coordonnées homogènes. — On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n+1$.

Définition 11.1. — L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}(V)$, est l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un espace projectif *de dimension* $n = \dim(V) - 1$.[10] Si $V = k^{n+1}$, on le note aussi $\mathbb{P}^n(k)$.

En particulier, si $\dim(V) = 1$ alors $\mathbb{P}(V)$ est un point. Si $\dim(V) = 2$ (resp. 3), on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective (resp. un plan projectif).

Terminologie. Si V est le plongement vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, alors $\mathbb{P}(\widehat{\mathscr{E}})$ est noté $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$ et appelé le **complété** (ou plongement) **projectif** de $\mathscr{E}$.

Notation 11.2. — Considérons sur $V - \{0\}$ la relation d'équivalence définie par $v \sim v'$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v' = \lambda v$. Comme toute droite D est définie par un vecteur non nul v et que deux vecteurs non nuls v, v' définissent la même droite ssi $v \sim v'$, on voit que $\mathbb{P}(V)$ s'identifie à *l'ensemble quotient* $(V - \{0\})/\sim$, qu'on note $(V - \{0\})/k^\times$.

Pour tout $v \in V - \{0\}$, on notera $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$, i.e. le point de $\mathbb{P}(V)$ défini par la droite kv.

***Définition 11.3* (Sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$).** — Soit W un sev non nul de V. Alors $\mathbb{P}(W)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$ (en effet, les droites vectorielles de V contenues dans W sont exactement les droites vectorielles de W). On dira que c'est un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$, *de dimension* $\dim(W)-1$.[11] En particulier, si $\dim(W) = 2$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est une *droite* (projective) de $\mathbb{P}(V)$, et si $\dim(W) = \dim(V) - 1$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est un *hyperplan* (projectif) de $\mathbb{P}(V)$.

Terminologie. Si V est le plongement vectoriel $\widehat{\mathscr{E}}$ d'un espace affine $\mathscr{E}$ de dimension n, alors E est un hyperplan de $\widehat{\mathscr{E}}$ donc $\mathbb{P}(E)$ est un hyperplan de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{E}})$. On dit que c'est l'hyperplan **à l'infini** car $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$ s'identifie à la réunion disjointe de $\mathscr{E}$ et de $\mathbb{P}(E)$.

Rappelons le lemme suivant, dont on se servira de façon répétée.

Lemme 11.4. — *Soient H un hyperplan de V et W un sev de V non contenu dans H. Alors on a* $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$.

Démonstration. — En effet, rappelons la formule :

$$(\dagger) \qquad \dim(W \cap H) = \dim(W) + \dim(H) - \dim(W + H).$$

Comme $\dim(H) = \dim(V) - 1$ et comme l'inclusion $H \subset H + W$ est *stricte* (car $W \not\subset H$), on a $\dim(W + H) \geq \dim(V)$ et donc $W + H = V$. Reportant ceci dans (†), on obtient $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$. □

[10] Par convention, $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$.

[11] Si $W = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(W)$ est l'ensemble vide $\varnothing$, auquel on peut attribuer la dimension -1.

On a vu au §10.2 que, si $\mathscr{P}$ est un plan affine, alors le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{P}})$ a la propriété suivante : deux droites projectives distinctes se coupent en un unique point. On va voir que ceci est vrai dans tout plan projectif. Plus généralement, on a la :

Proposition 11.5. — *Soient E, F deux sev non nuls de V. Posons $p = \dim \mathbb{P}(E)$ et $q = \dim \mathbb{P}(F)$.*

(i) *On a $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F)$; ceci est non vide ssi $E \cap F \neq \{0\}$.*

(ii) *Si $p + q \geq n = \dim \mathbb{P}(V)$ alors $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est non vide et est de dimension $\geq p + q - n$.*

(iii) *Par ailleurs, on a : $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$ et donc : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.*

(iv) *Si H est un hyperplan de V et si $\mathbf{D}$ est une droite projective non contenue dans $\mathbb{P}(H)$, alors $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H)$ est formé d'un seul point.*

Démonstration. — $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est formé des droites vectorielles de V contenues dans E et dans F, i.e. contenues dans $E \cap F$. La 1ère assertion de (i) en découle, et la 2ème est claire.

(ii) On sait que $\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) = p + 1 + q + 1 = p + q + 2$, et comme $\dim(E + F) \leq \dim(V) = n + 1$ on a donc :

$$\dim(E \cap F) \geq p + q + 2 - (n + 1) = p + q + 1 - n.$$

Sous l'hypothèse $p+q \geq n$, ceci est ≥ 1, donc $E \cap F$ est non nul, de dimension $\geq p+q-n+1$, donc $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est de dimension $\geq p + q - n$.

(iii) Il est clair que si $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$, alors pour tout v non nul dans E, la droite kv est contenue dans F, d'où $v \in F$ et donc $E \subset F$. Ceci prouve la 1ère assertion de (iii), et la 2ème en découle.

(iv) On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ pour un certain plan vectoriel W de V (uniquement déterminé, d'après (iii)), non contenu dans H. Alors $\Delta = W \cap H$ est une droite vectorielle de H et donc $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point δ de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. □

Corollaire 11.6. — (i) *Dans un plan projectif, deux droites projectives distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ se coupent en un unique point.*

(ii) *Dans un espace projectif* $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3 (*i.e.* $\dim(V) = 4$), *soient $\mathbf{P}$ un plan projectif et $\mathbf{D}$ une droite projective non contenue dans $\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ se coupent en un unique point.*

Pour faire de la géométrie dans le plan projectif (cf. la section 14 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues), on aura besoin de la notion de « *droite projective engendrée par deux points distincts* » et de celle de « *points alignés* » dans $\mathbb{P}(V)$. Pour cela, on a besoin de la :

***Définition 11.7* (Sous-espace projectif engendré, points alignés)**

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{P}(V)$. Notons δ_x la droite vectorielle de V correspondant à un élément x de X, et soit E le sev de V engendré par les δ_x. En d'autres termes, si $X = \{p_1, \ldots, p_N\}$ et si $p_i = [v_i]$, alors $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_N)$. Alors :

(i) $\mathbb{P}(E)$ est le *plus petit* sous-espace projectif de V contenant X. On dit que c'est le sous-espace projectif *engendré* par X.

(ii) Si X est formé de deux points distincts p_1, p_2, alors $\dim(E) = 2$ et l'on dit que $\mathbb{P}(E)$ est la *droite projective engendrée* par p_1 et p_2. On la note $(p_1 p_2)$.

(iii) Soient $N \geq 2$ et $p_1, \ldots, p_N$ des points de $\mathbb{P}(V)$, pas tous égaux. On dit qu'ils sont *alignés* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent est une droite projective.

Démonstration. — Il n'y a que la première phrase de (i) à démontrer. Mais c'est clair, car si X est contenu dans un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ alors W contient les δ_x donc contient E, d'où $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(W)$. □

***Définition 11.8* (Coordonnées homogènes).** — Munissons V d'une base $(e_0, \ldots, e_n)$, notée $\mathscr{B}$. Alors chaque point de $\mathbb{P}(V)$, correspondant à une droite vectorielle D, peut être paramétré par ses « *coordonnées homogènes* » $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$: ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un élément non nul v de D. Noter que comme $v \neq 0$, les x_i ne sont pas tous nuls. Bien sûr, pour tout $\lambda \in k^\times$, v et λv engendrent la même droite, donc les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à la multiplication près par un scalaire non nul, i.e. $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ et $[\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n]$ représentent le même point.

On va voir que malgré cette « non unicité » (qui au prime abord peut sembler gênante), les coordonnées homogènes sont un outil très utile.

En particulier, si $V = k^{n+1}$, les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ ne sont autres que les classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets $(x_0, \ldots, x_n) \in k^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}$, où $(x_0, \ldots, x_n) \sim (x'_0, \ldots, x'_n)$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout i, et la classe d'équivalence de $(x_0, \ldots, x_n)$ est notée $[x_0, \ldots, x_n]$.

11.2. Ouverts affines. — On appellera plus bas « ouverts affines » de $\mathbb{P}(V)$ certains espaces affines, analogues de l'espace affine $\mathscr{E}$ plongé dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$. Pour justifier la terminologie « ouverts », commençons par la définition suivante.

***Remarque 11.9*.** — Pour tout polynôme **homogène** $F \in k[X_0, \ldots, X_n]$, disons de degré d, on peut définir son « lieu des zéros » dans $\mathbb{P}^n(k)$ par :

$$\mathscr{V}(F) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid F(x_0, \ldots, x_n) = 0\}.$$

Ceci est bien défini, car puisque F est homogène de degré d, on a $F(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \ldots, x_n)$ pour tout $\lambda \in k^\times$, donc si F s'annule sur *un* représentant $(x_0, \ldots, x_n)$ de $[x_0, \ldots, x_n]$ il s'annule sur *tout* représentant.

Plus généralement, pour tout ensemble $\{F_1, \ldots, F_N\}$ de polynômes homogènes (où F_i est, disons, de degré d_i), on pose :

$$\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N) = \{[x_0, \ldots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid \forall i = 1, \ldots, N, \quad F_i(x_0, \ldots, x_n) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{V}(F_i).$$

On appellera ces sous-ensembles des *fermés algébriques* de $\mathbb{P}^n(k)$. [12]

La remarque précédente est valable, indépendamment d'un choix de coordonnées, pour toute *forme linéaire* f sur V. Plus précisément :

[12] On peut vérifier (nous n'en aurons pas besoin) que les $\mathscr{V}(F)$ forment les fermés d'une certaine topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$, appelée la topologie de Zariski. De plus, si k est le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}^{n+1}$ est muni d'une topologie canonique, ainsi que le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{K}^\times$, et comme les fonctions polynomiales (homogènes) $F = \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ sont *continues*, on obtient que les $\mathscr{V}(F_1, \ldots, F_N)$ sont aussi des fermés pour cette topologie.

Définition 11.10 **(Hyperplans de $\mathbb{P}(V)$).** — (i) Pour toute $f \in V^*$ non nulle, son lieu des zéros $\mathscr{V}(f) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid f(v) = 0\}$ est appelé un **hyperplan** de $\mathbb{P}(V)$. Notant H l'hyperplan $\operatorname{Ker}(f) \subset V$, on voit que $\mathscr{V}(f)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles contenues dans H, c.-à-d. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) Plus généralement, pour $f_1, \dots, f_r \in V^*$, le lieu des zéros $\mathscr{V}(f_1, \dots, f_r)$ est bien défini et s'identifie au sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigcap_{i=1}^r \operatorname{Ker}(f_i)$. [13]

Rappel 11.11. — Si F est un sev de V, son orthogonal dans V^* est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On a $\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F)$. En particulier, si $F = H$ est un hyperplan de V alors H^0 est une droite vectorielle de V^*.

Explications 11.12. — Afin « d'expliquer » les propositions 11.13 et 11.15 qui vont suivre, résumons ici le but poursuivi dans la suite de cette section. On a vu au §10.2 que le complété projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ d'un plan affine $(\mathscr{P}, P)$, obtenu en ajoutant à $\mathscr{P}$ la droite projective $\mathbb{P}(P)$, a de meilleures propriétés d'incidence que $\mathscr{P}$ (i.e. deux droites distinctes se coupent en un unique point). On verra plus loin que pour certains énoncés de géométrie affine dans $\mathscr{P}$, il est avantageux de démontrer d'abord un énoncé analogue dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, puis d'en déduire le résultat « en revenant » dans $\mathscr{P}$.

Ceci se généralise en dimension quelconque : si $V = \widehat{\mathscr{E}}$ est le plongement vectoriel d'un espace affine $(\mathscr{E}, E)$, alors $\mathscr{E}$ est le complémentaire dans $\mathbb{P}(V)$ de « l'hyperplan à l'infini » $\mathbb{P}(E)$. Mais il y a bien plus que cela : on va voir que pour **tout** hyperplan projectif $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$, l'ouvert complémentaire $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ est muni d'une structure naturelle d'espace affine de dimension n, et si l'on part d'un énoncé affine dans $\mathscr{E}$ que l'on transforme en énoncé projectif dans $\mathbb{P}(V)$, alors en se plaçant dans l'espace affine U, on peut obtenir de nouveaux théorèmes affines (voir les théorèmes de Pappus et de Desargues dans la section suivante).

Définition et proposition 11.13 **(Les « ouverts » affines $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**

Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\operatorname{Ker}(f) = H$*, et soit $\mathscr{H}$ l'hyperplan affine de V d'équation $f(x) = 1$.*

Alors l'application $\mathscr{H}_\lambda \to U$, $x \mapsto [x]$ est une bijection. Via cette bijection U est muni d'une structure d'espace affine de direction H, définie par $[x] + u = [x + u]$.

Démonstration. — Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = 1$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = f(w)^{-1}w$ vérifie $f(v) = 1$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu$, donc $f(v') = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}$ sur U. De plus, d'après 2.6, $\mathscr{H}$ est un espace affine de direction H. Via la bijection précédente, ceci munit U d'une structure d'espace affine de direction H. □

Remarque 11.14. — Ce qui précède devient très simple si on l'écrit en coordonnées homogènes. Soit H un hyperplan de V. On peut trouver des coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ telles que H soit donné par l'annulation d'une des coordonnées, disons par l'équation $x_0 = 0$. En effet, soit f_0 une forme linéaire telle que $\operatorname{Ker}(f_0) = H$; complétons-la en une base $(f_0, \dots, f_n)$ de V^*. C'est la base duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de

(13) On rappelle que si $W = \{0\}$ alors $\mathbb{P}(W) = \varnothing$.

V et, notant $(x_0, \dots, x_n)$ les coordonnées dans cette base et $[x_0, \dots, x_n]$ les coordonnées homogènes correspondantes sur $\mathbb{P}(V)$, chaque forme linéaire coordonnée $e_i^* = x_i$ n'est autre que f_i et donc H est bien donné par l'équation $x_0 = 0$. Alors l'ouvert $U_0 = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ s'identifie à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{[1, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(V)\} = e_0 + H$.

Comme $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ a une structure d'espace affine, on peut parler de ses sous-espaces affines. Ils sont décrits explicitement par la proposition suivante.

Proposition 11.15 **(Sous-espaces affines de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**
Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$. Alors on a ce qui suit :

(i) *Pour tout sev W de V non contenu dans H, de dimension $d+1$, $\mathbb{P}(W) \cap U$ est un sous-espace affine $\mathscr{W}$ de U de dimension d et de direction $W \cap H$, et l'on a $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de U, de dimension d, et soit W le sev de V engendré par les droites kv, pour tout $[v] \in \mathscr{W}$. Alors W est de dimension $d+1$, n'est pas contenu dans H et $W \cap H$ est la direction de $\mathscr{W}$. Le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ est de dimension d et l'on a $\mathbb{P}(W) \cap U = \mathscr{W}$.*

(iii) *Donc les applications $\mathscr{W} \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et $\mathbb{P}(W) \mapsto \mathbb{P}(W) \cap U$ sont des* bijections réciproques *entre l'ensemble des sous-espaces affines de U et celui des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$. Ces bijections préservent la dimension.*

Démonstration. — Pour la démonstration, identifions $\mathscr{H}$ à U, via la bijection $x \mapsto [x]$.

(i) Soit W un sev de V non contenu dans H. Alors f induit, par restriction, une forme linéaire sur W, non nulle (car $W \not\subset \mathrm{Ker}(f)$) qu'on notera f_W. Alors on a les identifications suivantes :

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{v \in W \mid f_W(v) = 1\}$$

qui montrent que $\mathscr{W} = \mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W)$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f_W) = W \cap H$, donc de dimension $\dim(W) - 1$.

De plus, montrons que le sev $W' = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$ de W égale W. Fixons $v_0 \in \mathscr{W}$. Alors pour tout $w \in W \cap H$ le point $v_0 + w$ appartient à $\mathscr{W}$, donc $w \in W'$. Ceci montre que W' contient l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f_W)$ de W ; comme il contient de plus v_0 qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(f_W)$ (puisque $f_W(v_0) = 1$), on a donc $W' = W$. Ceci prouve (i).

(ii) Soient $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de dimension d de $\mathscr{H}$, on peut l'écrire $v_0 + F$ où F est un sev de dimension d de H. Posant $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$, on a donc $W = kv_0 + F$ et, comme $v_0 \notin H$ (puisque $f(v_0) = 1$), cette somme est directe : $W = kv_0 \oplus F$ et l'on a $W \cap H = F$.

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(W) \cap \mathscr{H} = \mathscr{W}$. Comme plus haut, on a les identifications

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{w \in W \mid f(w) = 1\}.$$

Or, écrivant $w = \lambda v_0 + u$, avec $u \in F = W \cap H$, on a $f(w) = \lambda$ donc $f(w) = 1 \Leftrightarrow w \in v_0 + F$. Ceci montre que $\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = v_0 + F = \mathscr{W}$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Enfin, (iii) découle aussitôt de (i) et (ii) car pour tout $\mathscr{W}$ on a $\mathscr{W} = U \cap \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et pour tout W on a $W = \mathrm{Vect}(\mathbb{P}(W) \cap U)$. □

Pour les lecteurs intéressés, ajoutons le **complément** suivant. On peut récrire la proposition 11.13 de façon plus « canonique » (i.e. sans choisir un générateur f de H^0). D'abord, on a le lemme suivant.

Lemme 11.16. — *Soit H un hyperplan de V et soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ l'espace vectoriel des applications linéaires de V/H dans H. Alors :*

(i) *Le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un isomorphisme d'espaces vectoriels $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$.*

(ii) *Plus précisément, pour tout $u \in H$ et $v \in V$, on a : $\boxed{\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u}$ (où $\overline{v}$ désigne l'image de v dans V/H).*

Démonstration. — (i) En effet, V/H étant de dimension 1, si l'on en fixe un générateur e alors $E = \mathrm{Hom}(ke, H)$ s'identifie à H via l'isomorphisme $\theta \mapsto \theta(e)$. Or, le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un générateur e de V/H, à savoir l'unique élément e tel que $f(e) = 1$.

(ii) Fixons f et e comme ci-dessus. Pour tout $u \in H$ on a, par définition, $\phi_f(u)(\mu e) = \mu u$ pour tout $\mu \in k$. D'autre part, pour $v \in V$, posons $\overline{v} = \mu_v e$. Alors $\mu_v = f(\overline{v}) = f(v)$ et donc $\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u$. [14] $\square$

Proposition 11.17. — *Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ et, pour tout $f \in H^0 - \{0\}$, soit $\mathscr{H}_f = \{x \in V \mid f(x) = 1\}$.*

(i) *U est un espace affine de direction E (et donc de dimension $n = \dim(V) - 1$).*

(ii) *Pour tout $f \in H^0 - \{0\}$ la bijection $\mathscr{H}_f \to U$, $x \mapsto [x]$ est une application* affine, *de partie linéaire l'isomorphisme $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$ du lemme* 11.16. *C'est donc un* isomorphisme *entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E).*

Démonstration. — (i) D'abord, pour tout $v \in V$, notons $\overline{v}$ son image dans V/H. On définit alors l'action de E sur U comme suit. Pour tout $\theta \in E$ et $[v] \in U$, on pose :

$$(*) \qquad [v] \boldsymbol{+} \theta = [\, v + \theta(\overline{v})\,].$$

Vérifions que ceci est bien défini. D'une part, comme $\theta(\overline{v}) \in H$, le vecteur $v+\theta(\overline{v})$ n'appartient pas à H, car sinon on aurait $v \in H$, contradiction. D'autre part, si $v' = \lambda v$ est un autre représentant de $[v]$, on a $\theta(\overline{v'}) = \theta(\lambda\overline{v}) = \lambda\theta(\overline{v})$ et donc $v' + \theta(\overline{v'}) = \lambda(v + \theta(\overline{v}))$. Ceci montre que $(*)$ définit bien une application $U \times E \to U$, $([v], \theta) \mapsto [v] \boldsymbol{+} \theta$.

Si $\theta = 0$ (l'application nulle), on a bien $[v] \boldsymbol{+} 0 = [v]$. Et pour tout $\theta, \theta' \in E$, $([v] \boldsymbol{+} \theta) \boldsymbol{+} \theta' = [v + \theta(\overline{v})] \boldsymbol{+} \theta'$ désigne la droite engendrée par le vecteur

$$v + \theta(\overline{v}) + \theta'(v + \theta(\overline{v})) = v + \theta(\overline{v}) + \theta'(\overline{v}) = v + (\theta + \theta')(\overline{v}).$$

Ceci montre que $([v] \boldsymbol{+} \theta) \boldsymbol{+} \theta' = [v] \boldsymbol{+} (\theta + \theta')$, donc $(*)$ définit bien une *action* de E sur U. Il reste à montrer que cette action est simplement transitive, et l'on va démontrer ceci en même temps que le point (ii).

(ii) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = 1$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = f(w)^{-1}w$ vérifie $f(v) = 1$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu$, donc $f(v') = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $p_f : x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_f$ sur U.

Soient $x \in U$ et $u \in H$. D'après le lemme 11.16, on a $\phi_f(u)(x) = f(x)u = u$ et l'on a donc les égalités :

$$(**) \qquad p_f(x + u) = [x + u] = [\, x + \phi_f(u)(x)\,] = [x] \boldsymbol{+} \phi_f(u) = p_f(x) \boldsymbol{+} \phi_f(u).$$

Ceci montre que, via la bijection p_f, l'action $\boldsymbol{+}$ de E sur U correspond à l'action naturelle de H sur $\mathscr{H}_f$. Comme celle-ci est simplement transitive, on en déduit qu'il en est de même de l'action $\boldsymbol{+}$. Ceci achève de prouver que (U, E) est un espace affine. Mais alors, $(**)$ nous dit que la bijection

[14] Tout ceci devient plus clair si l'on connaît les produits tensoriels (cf. le cours 4M002) : $\mathrm{Hom}(V/H, H)$ s'identifie au produit tensoriel $(V/H)^* \otimes H = H^0 \otimes H$, et comme $\dim(H^0) = 1$ tout élément est de la forme $f \otimes u$, avec $f \in H^0$ et $u \in H$. Pour tout $\lambda \in k^\times$, $\lambda f \otimes u = f \otimes \lambda u$ correspond à l'application $v \mapsto \lambda f(v)u$, qui est $\phi_{\lambda f}(u)$ aussi bien que $\phi_f(\lambda u)$.

$p : \mathscr{H}_f \to U$ est affine, de partie linéaire ϕ_f ; c'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E). $\square$

11.3. Passage de l'affine au projectif, et inversement. — Comme expliqué en 11.12, on veut pouvoir passer d'un énoncé affine dans un espace affine $\mathscr{E}$ à un énonce projectif dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$, puis revenir à un énoncé affine dans un ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Pour cela, on aura besoin de l'énoncé suivant, que l'on peut paraphraser en disant que les bijections de la Prop. 11.15 « *préservent l'alignement des points* » (en un sens rendu précis par la proposition ci-dessous).

Proposition 11.18. — *Soient $p_1, \dots, p_N$, avec $N \geq 3$, des points deux à deux distincts de $\mathbb{P}(V)$ (où $\dim(V) \geq 2$).*

(i) *On suppose que les p_i sont alignés au sens de la définition* 11.7, *i.e. que le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent soit une droite projective (i.e. $\dim(W) = 2$). Alors, pour* **tout** *hyperplan H de V tel que les p_i ne soient pas tous dans $\mathbb{P}(H)$ (i.e. tel $W \not\subset H$) on a ce qui suit : $W \cap H$ est une droite vectorielle D et, notant U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, on est dans l'une des deux situations suivantes :*

(a) *tous les p_i sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$.*

(b) *tous les p_i sauf un sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$, et le dernier, disons p_N, est dans « l'hyperplan à l'infini » $\mathbb{P}(H)$ et correspond à la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$.*

(ii) *Réciproquement, s'il existe* **un** *hyperplan H de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b) ci-dessus, alors le sev W de V engendré par $\mathscr{D}$ est de dimension 2 et les p_i appartiennent à la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$.*

Démonstration. — (i) Posant $p_i = [v_i]$, soit W le sev de V engendré par les droites kv_i. Supposons $\dim(W) = 2$. Soit H un hyperplan de V ne contenant pas H, alors $W \cap H$ est une droite vectorielle D. D'après la Prop. 11.15, $U \cap \mathbb{P}(W)$ est une droite affine $\mathscr{D}$ de direction D. De plus, $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(D) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à la droite D. Comme les p_i sont deux à deux distincts, au plus l'un d'entre eux peut être égal à d, et l'on est donc dans l'une des situations (a) ou (b).

(ii) Réciproquement, soit H un hyperplan de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b). D'après la Prop. 11.15, il existe un unique plan vectoriel W de V, non contenu dans H, tel que $\mathscr{D} = U \cap \mathbb{P}(W)$.[15]. De plus, la direction de $\mathscr{D}$ est la droite vectorielle $D = W \cap H$. On a donc $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à D. Donc, dans chacun des cas (a) et (b), les p_i sont contenus dans la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$. $\square$

Exercice 11.19. — Soient $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$. On suppose :

(i) $\dim(V) \geq 3$ et $N \geq 5$.

(ii) Les p_i sont *coplanaires*, i.e. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent est un plan projectif,

(iii) Trois quelconques des p_i ne sont jamais alignés (i.e. pour i, j, k deux à deux distincts, les points p_i, p_j, p_k ne sont pas alignés).

[15] Explicitement, comme $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ sont distincts et contenus dans $\mathscr{D}$, alors $W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

Montrer que pour tout hyperplan H ne contenant pas W, tous les p_i sauf au plus deux sont dans l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et y engendrent un plan affine $\mathscr{P}$. Décrire les trois situations possibles selon le nombre de p_i contenus dans $\mathbb{P}(H)$.

12. Repères projectifs, homographies et coordonnées homogènes

Lemme 12.1. — *Soient V un k-ev et $f : V \to V$ un endomorphisme non nul tel que $f(D) \subset D$ pour toute droite D. Alors f est une homothétie.*

Démonstration. — Si $\dim(V) = 1$ tout endomorphisme non nul est une homothétie. On peut donc supposer $\dim(V) > 1$. Par hypothèse, pour tout $x \in V - \{0\}$ il existe $\lambda_x \in k$ tel que $f(x) = \lambda_x x$. Fixons un tel x_0 et posons $\lambda_0 = \lambda_{x_0}$.

Soit $y \in V - \{0\}$ arbitraire. Si $y = tx_0$ alors par linéarité $f(y) = tf(x_0) = \lambda_0 t x_0$ donc $\lambda_y = \lambda_0$. Si y et x_0 sont linéairement indépendants, alors l'égalité

$$f(x_0 + y) = \lambda_0 x_0 + \lambda_y y = \lambda_{x_0+y}(x_0 + y)$$

entraîne que $\lambda_y = \lambda_{x_0+y} = \lambda_0$. Donc $\lambda_y = \lambda_0$ pour tout $y \neq 0$ et donc $f = \lambda_0 \,\mathrm{id}_V$. Enfin, comme $f \neq 0$ par hypothèse, on a $\lambda_0 \neq 0$. □

Pour toute la suite, on fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n + 1$.

Définition 12.2. — Soit $N \leq n$. On dit que $N + 1$ points $p_0, \ldots, p_N \in \mathbb{P}(V)$ sont **projectivement indépendants** si le sous-espace projectif qu'ils engendrent (cf. Déf. 11.7) est de dimension N. Si $N = 1$ (resp. $N = 2$, resp. $N = 3$), ceci équivaut à dire que p_0, p_1 sont *distincts*, resp. que p_0, p_1, p_2 sont *non alignés*, resp. que p_0, p_1, p_2, p_3 sont *non coplanaires*

Remarque. — Attention, la donnée de $n + 1$ points projectivement indépendants de $\mathbb{P}(V)$ ne suffit pas à déterminer des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$, voir ce qui suit.

***Définition 12.3* (Repères projectifs)**. — (i) On dit qu'un $(n+2)$-uplet $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ de points de $\mathbb{P}(V)$ est un **repère projectif** si $n + 1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants. On notera $\mathrm{RP}(V)$ l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(ii) Si $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ est une base de V, on appellera « repère (projectif) standard » associé à $\mathscr{B}$ le repère $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ où $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \ldots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$.

Terminologie 12.4. — Lorsque $V = k^{n+1}$, on désigne $\mathbb{P}(k^{n+1})$ par $\mathbb{P}^n(k)$. Comme k^{n+1} est muni de la base canonique $(e_0, \ldots, e_n)$, alors $\mathbb{P}^n(k)$ est muni des coordonnées homogènes « canoniques » $[x_0, \ldots, x_n]$ et du repère projectif « canonique » $(p_0, \ldots, p_{n+1}) = ([e_0], \ldots, [e_n], [e_0 + \cdots + e_n])$.

***Définition 12.5* (Homographies de $\mathbb{P}(V)$)**. — Pour tout $v \in V - \{0\}$, on note $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$ (i.e. la droite engendrée par v). Alors l'action de $G = \mathrm{GL}(V)$ sur V induit une action de G sur $\mathbb{P}(V)$, donnée par : $g \cdot [v] = [gv]$ pour tout $v \in V - \{0\}$ et $g \in G$.

Alors, un élément g de G agit trivialement sur $\mathbb{P}(V)$ si et seulement si g laisse stable chaque droite de V. D'après le lemme 12.1, ceci est le cas ssi g appartient au sous-groupe des homothéties $H = \{\lambda \,\mathrm{id}_V \mid \lambda \in k^\times\}$.

Par conséquent, le « groupe des automorphismes de $\mathbb{P}(V)$ » (i.e. des bijections de $\mathbb{P}(V)$ induites par un élément de $\mathrm{GL}(V)$) est $\mathrm{PGL}(V) = \mathrm{GL}(V)/H$. Ses éléments sont appelés *homographies* de $\mathbb{P}(V)$.[16]

Notation. Pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ on notera $\overline{g}$ son image dans $\mathrm{PGL}(V)$.

On a besoin d'étendre cette définition au cas de deux k-ev E et F de même dimension.

Définition 12.6. — (i) Soient E, F deux k-espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Notons $\mathrm{Isom}(E, F)$ l'ensemble des isomorphismes (i.e. applications linéaires bijectives) de E sur F. Il est muni d'une action du groupe multiplicatif $k^\times$, définie pour tout $\phi \in \mathrm{Isom}(E, F)$ et $\lambda \in k^\times$ par : $\lambda \cdot \phi = \phi \circ (\lambda \,\mathrm{id}_E) = (\lambda \,\mathrm{id}_F) \circ \phi$.

Soient $\phi \in \mathrm{Isom}(E, F)$ et $\psi = \phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(F, E)$ l'isomorphisme réciproque. Alors ϕ transforme toute droite de E en une droite de F, donc induit une application $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, $D \mapsto \phi(D)$, qu'on notera $\mathbb{P}(\phi)$ ou simplement $\overline{\phi}$. Cette application est bijective, car elle admet pour réciproque l'application $\overline{\psi} : \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(E)$. Notant $\mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, on obtient donc une application :

$$\mathrm{Isom}(E, F) \longrightarrow \mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big), \quad \phi \mapsto \overline{\phi}.$$

Les bijections $\overline{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ ainsi obtenues s'appellent des **homographies** de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, et l'ensemble de ces homographies sera noté $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$. Si $F = E$, il s'identifie à $\mathrm{PGL}(E)$, d'après ce qu'on a vu plus haut.

(ii) Notons que l'application $\phi \mapsto \overline{\phi}$ « respecte la composition des applications », i.e. si $\theta \in \mathrm{Isom}(F, V)$ on a $\overline{\theta \circ \phi} = \overline{\theta} \circ \overline{\phi}$. (En particulier, l'application $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$, $\phi \mapsto \overline{\phi}$ est un morphisme de groupes.)

Proposition 12.7. — *On conserve les notations précédentes. Soient $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(E, F)$.*

(i) *Alors : $\overline{\phi} = \overline{\psi} \iff$ il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\phi = \lambda\psi$.*

(ii) *En particulier, le noyau du morphisme de groupes $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ est le sous-groupe $k^\times \mathrm{id}_E$ des homothéties de E, et donc $\mathrm{PGL}(E)$ s'identifie bien au groupe quotient $\mathrm{GL}(E)/k^\times \mathrm{id}_E$.*

(iii) *Pour tout sev W de E, on a $\overline{\phi}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\phi(W))$, donc $\overline{\phi}$ transforme tout sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ en un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(F)$ de même dimension.*

(iv) *Par conséquent, toute homographie $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ respecte la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère de $\mathbb{P}(E)$ en un repère de $\mathbb{P}(F)$.*

Démonstration. — (i) On a : $\overline{\phi} = \overline{\psi}$ si et seulement si $\overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi^{-1} \circ \phi}$ est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ de $\mathbb{P}(E)$. Or $f = \psi^{-1} \circ \phi$ est un automorphisme de E et d'après le lemme 12.1, $\overline{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f = \lambda \,\mathrm{id}_E$, ce qui équivaut à $\phi = \lambda\psi$. Ceci prouve (i), et (ii) en est un cas particulier.

(iii) Soit W un sev non nul de E et soit $\phi \in \mathrm{Isom}(E, F)$. Alors $\phi(W)$ est un sev de F de même dimension que W et pour toute droite D de E on a : $D \subset W \Leftrightarrow \phi(D) \subset \phi(W)$. Il en résulte que

$$\overline{\phi}\big(\mathbb{P}(W)\big) = \{\overline{\phi}(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \{\phi(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \mathbb{P}(\phi(W)).$$

[16] Lorsque $V = k^2$, on verra que c'est le groupe des « homographies » $x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Ceci prouve (iii), et (iv) en découle. □

Définition 12.8. — Soient X, Y deux ensembles munis d'une action d'un groupe G. Une application $f : X \to Y$ est dite G-équivariante si $f(gx) = gf(x)$ pour tout $x \in X$ et $g \in G$.

Théorème 12.9 **(L'action de** $\mathrm{PGL}(V)$ **sur les repères projectifs)**
Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Posons $G = \mathrm{PGL}(V)$ et notons $\mathscr{R}_0$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

(i) *Pour chaque $\mathscr{R} \in \mathrm{RP}(V)$, il existe un* unique *$h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ tel que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$.*

(ii) *Ceci donne une bijection G-équivariante $\mathrm{RP}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Par conséquent, l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$ est libre et transitive.*

Démonstration. — Notons $\mathscr{B}_0 = (e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de k^{n+1} et $\mathscr{R}_0 = (p_0, \dots, p_{n+1})$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

Soit $\mathscr{R} = (q_0, \dots, q_{n+1}) \in \mathrm{RP}(V)$. Pour $i = 0, \dots, n+1$, choisissons un vecteur $v_i \in V$ tel que $[v_i] = q_i$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V et v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n$ avec $\lambda_i \neq 0$ pour tout i.

Notons g l'élément de $\mathrm{Isom}(k^{n+1}, V)$ défini par $g(e_i) = \lambda_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$, il vérifie alors $g(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$.

Pour $h \in \mathrm{Isom}(k^{n+1}, V)$ arbitraire, la condition $h([e_i]) = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ équivaut à : il existe $\mu_0, \dots, \mu_n \in k^\times$ tels que $h(e_i) = \mu_i v_i$ pour $i = 0, \dots, n$. Sous ces conditions, $h(e_0 + \cdots + e_n) = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n$ est colinéaire à v_{n+1} ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mu_i = \lambda\lambda_i$ pour $i = 0, \dots, n$, c.-à-d. ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $h = \lambda g$, et cette condition équivaut à ce que h et g aient pour image $\overline{g}$ dans $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Ceci montre que $\overline{g}$ est l'unique élément de $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ tel que $\overline{g}(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n+1$. Ceci prouve (i).

On obtient donc une bijection $\beta : \mathrm{RP}(V) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$. Elle est G-équivariante car si $\beta(\mathscr{R}) = h$, i.e. $\mathscr{R} = h(\mathscr{R}_0)$, et si $\mathscr{R}' = g(\mathscr{R})$ avec $g \in G$, alors $\mathscr{R}' = gh(\mathscr{R}_0)$ et donc $\beta(\mathscr{R}') = gh$.

De plus, l'action de G sur $\Gamma = \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ est libre et transitive (car pour tout $h_0 \in \Gamma$, l'application $g \mapsto gh_0$ admet pour inverse l'application $h \mapsto hh_0^{-1}$), donc il en est de même de l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$. Ceci prouve (ii). □

Corollaire 12.10. — *Se donner un repère projectif $\mathscr{R}$ de $\mathbb{P}(V)$ est « la même chose » que se donner un système de coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — Se donner un système de coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$ est la même chose que se donner une homographie entre $\mathbb{P}^n(k)$ et $\mathbb{P}(V)$. Donc le corollaire découle du théorème précédent. □

Corollaire 12.11. — *Soient $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ deux espaces projectifs de même dimension n.*

(i) *Étant donnés des repères projectifs $\mathscr{R}$ et $\mathscr{R}'$ de $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$, il existe une* unique *homographie $h : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ telle que $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$.*

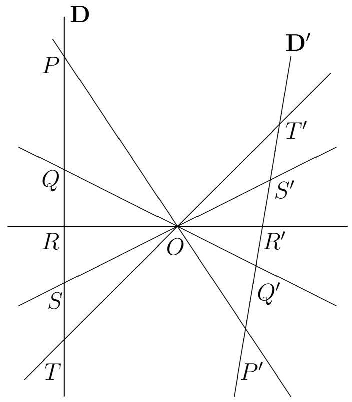
(ii) *En particulier, si p_0, p_1, p_2 (resp. q_0, q_1, q_2) sont des points deux à deux distincts d'une droite projective $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$), il existe une* unique *homographie $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ telle que $h(p_i) = q_i$ pour $i = 0, 1, 2$.*

Démonstration. — Le point (i) découle de la démonstration du théorème précédent Et lorsque $n = 1$, un repère projectif d'une droite $\mathbf{D}$ n'est autre qu'un triplet de points deux à deux distincts, d'où le point (ii). $\square$

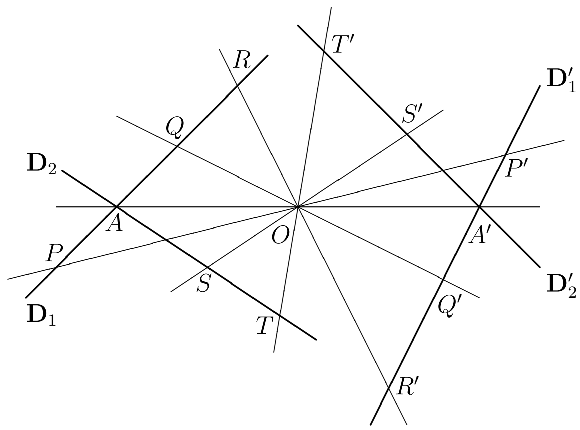
13. Perspectivités et projections centrales

13.1. Figures en perspective. — Dans ce paragraphe et le suivant on va essayer de présenter les points de vue de Desargues et de Poncelet[17], en suivant l'excellente présentation de Coxeter [Co, Chap. 1]. Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$.

(1) On dit que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont *en perspective depuis un point* O si l'application qui à tout point $P \in \mathbf{D}$ associe le point d'intersection P' de (OP) avec $\mathbf{D}'$ est bien définie (i.e. si $O \notin \mathbf{D}$) et est une bijection de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$, la réciproque étant l'application (bien définie si $O \notin \mathbf{D}'$) qui à tout $P' \in \mathbf{D}'$ associe le point $P = (OP') \cap \mathbf{D}$. On voit ainsi que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont « en perspective » depuis n'importe quel point O hors de $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}'$:



(2) Soient A, A' deux points distincts et soit $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ (resp. $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$) un couple de droites distinctes, sécantes en A (resp. en A'). Si elles sont en perspective depuis un point O (i.e. si $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}'_1$ sont en perspective depuis O, ainsi que $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}'_2$), alors le point de concours $A = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ correspond par cette bijection au point de concours $A' = \mathbf{D}'_1 \cap \mathbf{D}'_2$ et donc AOA' sont alignés. Réciproquement, pour tout point O de (AA') distinct de A et A', les couples de droites $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ et $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$ sont en perspective depuis O :

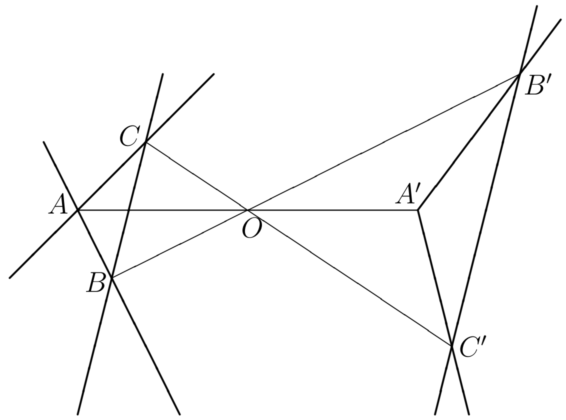


[17] Girard Desargues (1591-1661) mathématicien et architecte français. Jean-Victor Poncelet, mathématicien (et capitaine d'artillerie, puis général) français, 1788-1867.

Terminologie. — Si $\mathbf{V}$ est un espace projectif de dimension n et N un entier $\geq n+1$, on dit que N points $p_1, \dots, p_N$ de $\mathbf{V}$ sont *en position générale* si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants.

(3) Soient A, B, C, A', B', C' six points de $\mathbf{P}$ en position générale (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés). Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont alors deux à deux distinctes. Si les trois paires de droites $\big((AB), (A'B')\big)$, $\big((AC), (A'C')\big)$ et $\big((BC), (B'C')\big)$ sont en perspective depuis un point O alors, d'après (2) ci-dessus, O appartient à (AA'), (BB') et (CC'), donc $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en O.

Réciproquement, on peut montrer que si $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes, leur point de concours O n'appartient à aucune des droites $(AB), (AC), (CA), (A'B')$, etc. et donc (AB) resp. (BC) resp. CA est en perspective depuis O avec $(A'B')$ resp. $(B'C')$ resp. $(C'A')$:



Dans ce cas, au lieu de dire que « les deux triplets de droites $\big((AB), (BC), (CA)\big)$ et $\big((A'B'), (B'C'), (C'A')\big)$ sont en perspective », on dira plus brièvement que : « les deux triangles (ABC) et $(A'B'C')$ » sont en perspective. La condition précédente se récrit donc :

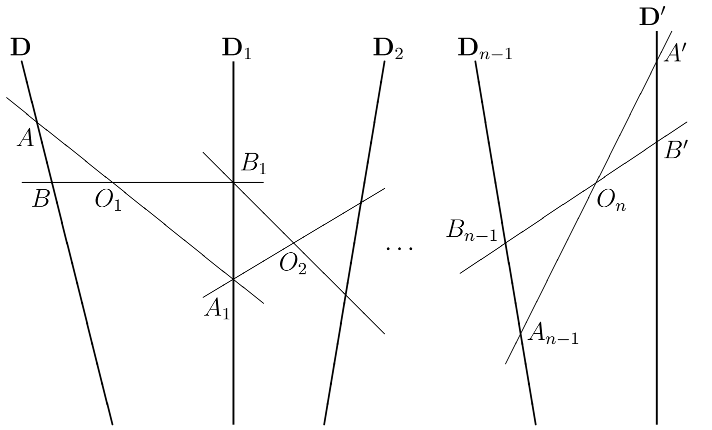
> *Pour A, B, C, A', B', C' en position générale, les triangles (ABC) et $(A'B'C')$ sont en perspective ssi les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.*

13.2. Perspectivités et projectivités. — Dans le paragraphe précédent, on s'est intéressé à la situation où des figures données sont « en perspective », i.e. dans une certaine position l'une par rapport à l'autre.

Changeons légèrement de point de vue : fixons un point O, deux droites $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ ne passant pas par O, et considérons *l'application bijective* $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ qui à tout $P \in \mathbf{D}$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$. (Noter que le point de concours E de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ vérifie $E' = E$.) On dira provisoirement que cette application est une *perspectivité*. [18]

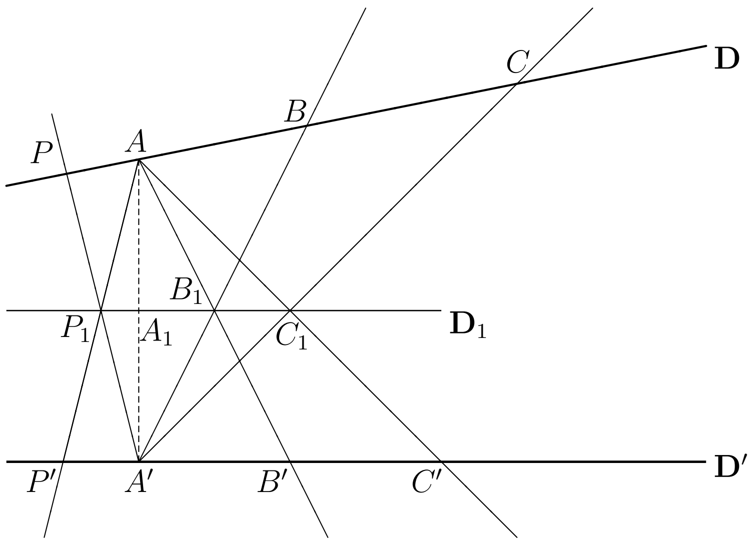
D'autre part, Poncelet s'est intéressé à des applications a priori plus générales que les perspectivités, à savoir les composées de perspectivités : si deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont reliées par une suite de perspectivités $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \to \mathbf{D}_1 \to \cdots \to \mathbf{D}_n = \mathbf{D}'$, l'application $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$, $P \mapsto P'$ ainsi obtenue est appelée une *projectivité* de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$:

[18] « perspectivity » dans [Co, 1.6 et 4.22].



Tout ceci pose un certain nombre de questions. Une projectivité de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$ est-elle une homographie ? Obtient-on ainsi toutes les homographies de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$? Si oui, est-ce que les perspectivités sont des homographies particulières ?

Remarque. — On verra au paragraphe suivant que toute projectivité est une homographie. La construction ci-dessous montrera alors que toute homographie est une projectivité : Pour deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ et trois points distincts A, B, C (resp. A', B', C') sur $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$), on peut construire une projectivité entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$, composée de seulement deux perspectivités, qui envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement :



En effet, notons B_1 (resp. C_1) le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$ (resp. (AC') et $(A'C)$), puis notons A_1 le point d'intersection de (AA') avec la droite $\mathbf{D}_1 = (B_1C_1)$. Alors la perspectivité de centre A' transforme A, B, C en A_1, B_1, C_1, puis ceux-ci sont transformés en A', B', C' par la perspectivité de centre A.

13.3. Projections centrales et perspectivités. — Revenons sur les perspectivités dans le plan projectif $\mathbf{P}$: la donnée d'un point O et d'une droite $\mathbf{D}'$ ne contenant pas O définit une application $\mathbf{P} - \{O\} \to \mathbf{D}'$, qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$.[19] Ceci se généralise comme suit.

[19]Noter que cette application n'est pas définie au point O.

***Définition 13.1* (Projections centrales).** — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soient E et F deux sev de V non nuls et supplémentaires (i.e. $V = E \oplus F$) et soit π la projection de V sur F de noyau E. Elle induit une application

$$\overline{\pi} : \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$$

définie comme suit : pour tout $v \in V - E$, $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)]$. Ceci est bien défini, car comme $v \notin E$ on a $\pi(v) \neq 0$. On dit que $\overline{\pi}$ est la projection sur $\mathbb{P}(F)$ *de centre* $\mathbb{P}(E)$.[20]

Proposition 13.2. — *Conservons les notations précédentes. Pour tout supplémentaire F' de E,*[21] *la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est une* homographie *de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$.*

Démonstration. — En effet, notons $\pi' : F' \to F$ la restriction de π à F' ; elle est injective (car $F' \cap E = \{0\}$) donc c'est un *isomorphisme* de F' sur F (puisque $\dim(F') = \dim(F)$). De plus, pour tout $v \in \mathbb{P}(F')$ on a : $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [\pi'(v)]$. Ceci montre que la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est l'homographie de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$ définie par l'isomorphisme $\pi' : F' \xrightarrow{\sim} F$. $\square$

Proposition 13.3. — *Soient H un hyperplan de V, O un point de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et p la projection sur $\mathbb{P}(H)$ de centre O.*

(i) *p est l'application qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours de la droite (OP) et de $\mathbb{P}(H)$.*

(ii) *Les points fixes de p sont les points de $\mathbb{P}(H)$.*

(iii) *Pour tout point P distinct de O et hors de $\mathbb{P}(H)$, les droites $(Pp(P))$ concourent en O.*

Démonstration. — Écrivons $O = [v_0]$ et notons π la projection $V \to H$ de noyau kv_0. Soit $P = [v]$ un point distinct de O, alors v s'écrit de façon unique $v = x + \mu v_0$, avec $\mu \in k$ et $x \in H - \{0\}$, et l'on a $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [x]$.

D'autre part, $W = \mathrm{Vect}(v_0, v)$ est de dimension 2 et non contenu dans H, donc $W \cap H$ est une droite vectorielle Δ. Comme la droite projective (OP) égale $\mathbb{P}(W)$, alors $(OP) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. Enfin, $x = v - \mu v_0$ est un élément non nul de $H \cap W$, donc $\Delta = kx$. Ceci prouve (i).

Un point $P \neq O$ est fixe ssi la droite (OP) coupe $\mathbb{P}(H)$ en P, c.-à-d. ssi $P \in \mathbb{P}(H)$. Ceci prouve (ii). Enfin, (iii) résulte de (i). $\square$

***Définition 13.4* (Perspectivités).** — Soient $O \in \mathbb{P}(V)$ et $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ deux hyperplans projectifs ne contenant pas O. On dira que l'homographie $\mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ induite par la projection sur $\mathbf{H}'$ de centre O est une *perspectivité*.[22] Ceci généralise la définition donnée au §13.2. lorsque $\dim \mathbb{P}(V) = 2$.

Remarque 13.5. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$, comme au §13.2. On vient de voir que toute perspectivité est une homographie, donc toute projectivité (= composée de perspectivités) est une homographie. De plus, d'après la Remarque du §13.2, toute homographie $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une projectivité, composée de seulement deux perspectivités. Celles-ci sont caractérisées par la proposition suivante.

[20] Noter que $\overline{\pi}$ n'est pas définie en les points de $\mathbb{P}(E)$.

[21] C.-à-d. pour tout sev F' de V de même dimension que F et tel que $F' \cap E = \{0\}$.

[22] On dit aussi *homologie*, mais nous préférons conserver la terminologie « perspectivité ».

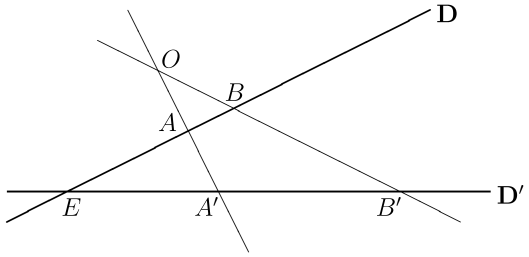
Proposition 13.6. — *Dans un plan projectif* $\mathbf{P}$*, soient* $\mathbf{D}, \mathbf{D}'$ *deux droites distinctes,* E *leur point de concours et* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *une homographie. Alors :*

(i) h *est une perspectivité ssi* $h(E) = E$.

(ii) *Dans ce cas, si* $A \neq B$ *sont des points de* $\mathbf{D}$ *distincts de* E*, le centre de perspectivité est le point de concours des droites* $(Ah(A))$ *et* $(Bh(B))$.

Démonstration. — On a vu en §13.2 que si h est une perspectivité de centre O alors $h(E) = E$ et pour tout $P \in \mathbf{D}$, d'image $P' \in \mathbf{D}'$, les points O, P, P' sont alignés.

Réciproquement, supposons $h(E) = E$ et soient $A \neq B$ des points de $\mathbf{D}$ distincts de E, et A', B' leurs images par h. Notons O le point de concours des droites (AA') et (BB') :



Alors la perspectivité de centre O laisse fixe E et envoie A, B sur A', B', donc coïncide avec h d'après le corollaire 12.11. □

Revenons à un espace projectif $\mathbf{V} = \mathbb{P}(V)$ de dimension n. Soient H, H' deux hyperplans de V distincts. Alors $H_1 = H \cap H'$ est un hyperplan de H. Notons $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}_1$ les sous-espaces projectifs de V correspondants. Si $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ est une perspectivité de centre O, elle laisse fixe tout point de $\mathbf{H}_1$. Réciproquement, ceci caractérise les perspectivités de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}'$:

Proposition 13.7. — *Soient* $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ *deux hyperplans distincts de* $\mathbf{V}$*, soit* $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \cap \mathbf{H}'$ *et soit* $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *une homographie. Alors :*

(i) h *est une perspectivité ssi* h *est l'identité sur* $\mathbf{H}_1$ (*i.e.* $h(P) = P$ *pour tout* $P \in \mathbf{H}_1$).

(ii) *Dans ce cas, pour tout point* A *de* $\mathbf{H} - \mathbf{H}_1$*, les droites* $(Ah(A))$ *sont concourantes en un point* O *qui est le centre de perspectivité.*

Démonstration. — Soit g l'isomorphisme $H \xrightarrow{\sim} H'$ (unique à homothétie près) tel que $\overline{g} = h$. Supposons que h est l'identité sur $\mathbf{H}_1$. Ceci entraîne qu'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $g(v) = \lambda v$ pour tout $v \in H_1$ et, quitte à remplacer g par $\lambda^{-1}g$, on peut supposer que $\lambda = 1$.

Fixons un vecteur $e \in H - H_1$ et posons $v_0 = g(e) - e$. On a $v_0 \notin H'$ car sinon on aurait $e \in H'$ et comme $H = H_1 \oplus ke$ on aurait $H \subset H'$, ce qui n'est pas le cas. (De même, $v_0 \notin H$.) On a donc $V = H' \oplus kv_0$, notons alors π la projection sur H' de noyau kv_0.

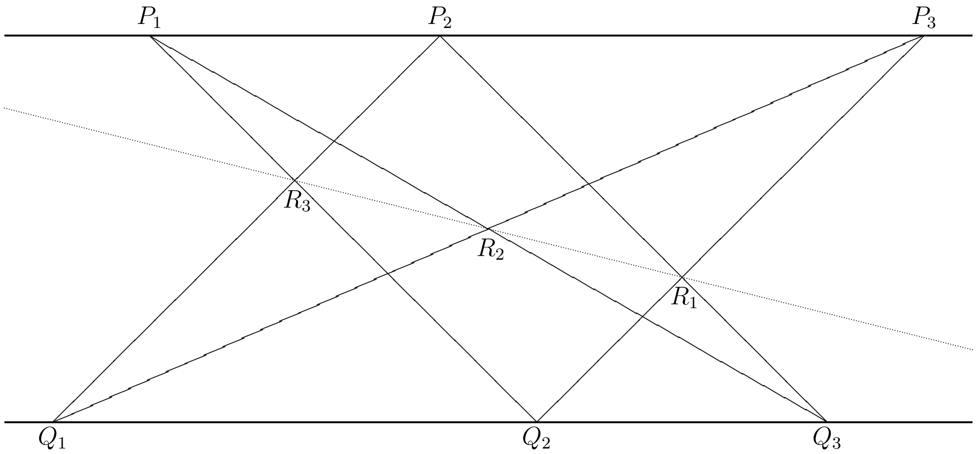
Soit $v \in H$, écrivons $v = x + \mu e$ avec $x \in H_1$ et $\mu \in k$, alors on a $v = x + \mu g(e) + \mu v_0$ donc $g(v) = x + \mu g(e)$ égale $\pi(v)$. Ceci montre que h est la projection sur $\mathbb{P}(H')$ de centre $O = [v_0]$. Ceci prouve (i), et alors (ii) découle de la Prop. 13.3. □

14. Théorèmes de Pappus et de Desargues

Cette section sera traitée en cours après la dualité projective du Chap. 3.

Du théorème de Pappus affine 7.1 donné dans le chap. 1, on déduit le :

***Théorème 14.1* (de Pappus « projectif »).** — *Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On note R_3 le point de concours des droites (P_1Q_2) et (P_2Q_1) et l'on définit de même R_2 et R_1, cf. la figure ci-dessous :*



Alors les points R_1, R_2, R_3 sont alignés.

Démonstration. — On a bien sûr envie de poser $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$ et d'appliquer la théorème 7.1 dans le plan affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$. Pour cela, il faut s'assurer que les points P_i et Q_j sont dans U, i.e. ne sont pas sur la droite (R_1R_2). Ceci « se voit » sur la figure ci-dessus, et on peut le démontrer comme suit :

(i) Les points R_i sont deux à deux distincts. En effet, si on avait par exemple $R_1 = R_2 = S$, les points $P_3SQ_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

(ii) Aucun P_i ou Q_j n'appartient à la droite (R_1R_2). En effet, vis-à-vis de (R_1R_2), les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 d'une part, et P_3, Q_3 d'autre part, jouent le même rôle, donc il suffit de le vérifier pour P_1 et P_3. Si on avait $P_1 \in (R_1R_2)$, les points $P_1R_1R_2Q_3P_2$ seraient alignés, d'où $Q_3 \in \mathscr{D}$, contradiction. Et si on avait $P_3 \in (R_1R_2)$, les points $P_3R_1R_2Q_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

Prenons alors la droite (R_1R_2) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (P_3Q_2) et (P_2Q_3), d'une part, et (P_1Q_3) et (P_3Q_1) d'autre part, ne se coupent pas donc sont parallèles. D'après le théorème de Pappus affine, les droites affines (P_2Q_1) et (P_1Q_2) sont donc parallèles, donc dans $\mathbb{P}(V)$ leur point d'intersection R_3 appartient à la droite $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$. Ceci montre que R_1, R_2, R_3 sont alignés. □

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

***Corollaire 14.2* (Version affine de Pappus projectif).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que les droites (P_2Q_3) et (P_3Q_2), resp. (P_1Q_3) et (P_3Q_1), se coupent en un point R_1, resp. R_2. Alors :*

a) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) se coupent en un point R_3 de la droite (R_1R_2),*

b) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) sont parallèles à la droite (R_1R_2).*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$. Soit R_3 le point de concours des droites projectives (P_1Q_2) et (P_2Q_1). D'après le théorème précédent il appartient à la droite projective (R_1R_2), d'où (a) si $R_3 \in \mathscr{P}$. Au contraire, si $R_3 \in \mathscr{D}_\infty$ alors c'est le point à l'infini de chacune des droites affines (R_1R_2), (P_1Q_2) et (P_2Q_1), donc ces trois droites sont parallèles. □

De même, du théorème de Desargues affine 7.2 donné dans le chap. 1, on déduit le :

***Théorème 14.3* (de Desargues projectif).** — *Dans un plan projectif, considérons six points distincts* A, B, C, A', B', C'. *On suppose :*

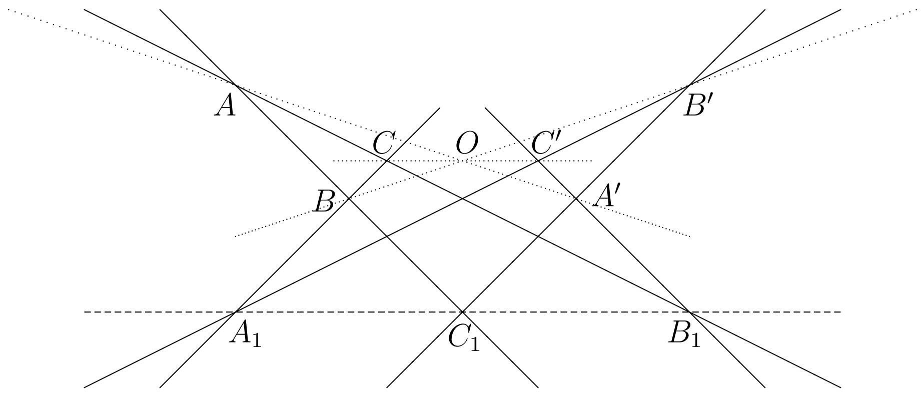
a) A, B, C *(resp.* A', B', C'*) sont* non alignés.

b) *Les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *sont deux à deux* distinctes.

Notons C_1*, resp.* B_1*, resp.* A_1*, l'unique point d'intersection des droites* (AB) *et* $(A'B')$*, resp.* (AC) *et* $(A'C')$*, resp.* (BC) *et* $(B'C')$ *et faisons de plus l'hypothèse :*

c) $\{A_1, B_1, C_1\} \cap \{A, B, C, A', B', C'\} = \varnothing$. [23]

Alors A_1, B_1, C_1 *sont alignés si et seulement si les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *sont concourantes en un point* O.



Démonstration. — (1) Remarquons d'abord que les points A_1, B_1, C_1 sont bien définis, car les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. En effet, comme $(AA') \neq (BB')$, les points $ABA'B'$ ne sont pas alignés donc (AB) et $(A'B')$ se coupent en un unique point C_1, et de même pour B_1 et A_1.

(2) Remarquons de plus que A_1, B_1, C_1 sont deux à deux distincts. En effet, supposons par exemple que $A_1 = C_1$ et notons provisoirement M ce point. Comme $B \neq B'$ alors M ne peut être simultanément égal à B et à B'. Supposons par exemple $M \neq B$. Alors la droite $(BM) = (BC_1) = (BA_1)$ contient A (car ABC_1 sont alignés) et aussi C (car BCA_1 sont alignés). Donc A, B, C sont alignés, contradiction. Ceci montre que A_1, B_1, C_1 sont bien deux à deux distincts.

(3) Montrons que la droite (B_1C_1) ne contient aucun des points A, B, C, A', B', C'. En effet, si $A \in (B_1C_1)$ alors, comme par c) A est distinct de B_1 et C_1, la droite $(AC_1) = (AB_1)$ égale (AB) et (AC), donc A, B, C sont alignés, contradiction. Et si $B \in (B_1C_1)$, alors (B_1C_1) égale (BC_1) donc contient A, contredisant ce qui précède. On montre de même que (B_1C_1) ne peut contenir ni C, ni A', B', C'.

(4) Démontrons maintenant l'équivalence annoncée.

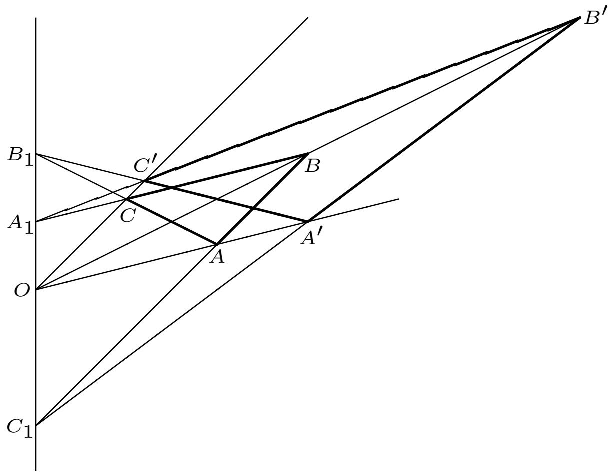
(i) Supposons A_1, B_1, C_1 alignés et prenons cette droite comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de

[23] Cette hypothèse est généralement omise dans la littérature ; si elle n'est pas vérifiée le théorème reste vrai mais la figure obtenue est différente, voir le chap. 3.

même que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles, donc les droites projectives correspondantes sont concourantes.

(ii) Réciproquement, supposons les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') concourantes. Prenons la droite (B_1C_1) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi (AC) et $(A'C')$ (car B_1 et C_1 sont sur la droite à l'infini) et les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, donc les droites projectives correspondantes se coupent sur la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, donc $A_1 \in \mathscr{D}_\infty = (B_1C_1)$ et donc A_1, B_1, C_1 sont alignés. $\square$

Remarque. — Dans la figure précédente, le point O n'appartient pas à la droite $(A_1B_1C_1)$, mais il peut y appartenir, comme sur la figure suivante :



Exercice 14.4. — Essayer de démontrer le corollaire 9.10 de [Po, Partie I] = Exercice 6.7.3.1 (page 64) de [Ti].

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.3.3 et Chap. II), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Co] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry (revised reprint of the 2nd edition, Springer-Verlag, 1994), Chap. 1 et 4-6.

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. VII.

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.5-2.8), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2014-2015 (II §12.3), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. I, §B.

[Ti] Claude Tisseron, Géométries affine, projective et euclidienne, Hermann, 1988.