CHAPITRE 3

DUALITÉ PROJECTIVE ET CONSÉQUENCES

[(1)] **Erratum au chap. 1 :** supprimer la 1ère phrase de la section 7. Les théorèmes de Pappus et Desargues et leurs duaux ont été traités en cours comme illustration de la dualité projective et **sont au programme de l'examen**.

Dans tout ce chapitre, k désigne un corps et V un k-ev de dimension finie.

15. Définitions

***Rappels 15.1* (sur la dualité).** — Soit V un k-espace vectoriel de dimension finie.

(1) Si F est un sev de V^*, son *orthogonal dans* V est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On rappelle que :

(i) $\boxed{\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F).}$

(ii) Si $(f_1, \dots, f_r)$ est une famille génératrice de F (par exemple une base), alors $F^0 = \{v \in V \mid f_i(v) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \operatorname{Ker}(f_i)$.

(2) De même, si W est un sev de V, son *orthogonal dans* V^* est :

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in W\}.$$

On a :

(i) $\boxed{\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W).}$

(ii) Si $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille génératrice de W (par exemple une base), alors $W^0 = \{f \in V^* \mid f(v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\}$.

(3) Avec les notations précédentes, on a $\boxed{W = W^{00} \text{ et } F = F^{00}.}$

(4) Le dual de l'espace quotient V/W s'identifie à W^0, i.e. on a : $\boxed{(V/W)^* = W^0.}$

(5) L'orthogonalité « *renverse les inclusions et échange les sommes et les intersections* », c.-à-d., si $E \subset F$ et $E_1, \dots E_r$ sont des sev de V ou de V^*, alors $F^0 \subset E^0$ et l'on a :

$$(E_1 + \cdots + E_r)^0 = E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0 \qquad \text{et} \qquad (E_1 \cap \cdots \cap E_r)^0 = E_1^0 + \cdots + E_r^0.$$

[(1)] Version du 4 octobre 2016.

Démonstration. — Pour (1)–(4), voir par exemple [Po, §§1.3, 1.7, 3.5]. Prouvons (5).

D'abord, l'inclusion $F^0 \subset E^0$ est évidente. Posons $W = E_1 + \cdots + E_n$. Comme $E_i \subset W$, alors W^0 est contenu dans chaque E_i^0 donc dans leur intersection.

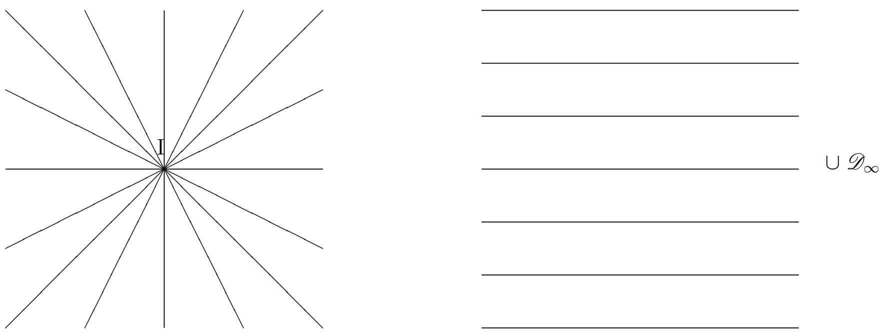
Réciproquement, si un élément y appartient à $E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0$ alors il est orthogonal à toute somme $x_1 + \cdots + x_n$, où $x_i \in E_i$, donc $y \in W^0$. Ceci prouve la 1ère égalité. La 2ème se déduit de la 1ère appliquée aux E_i^0, en utilisant (3). □

Dans la suite, on suppose que $\dim(V) = n+1$ est ≥ 3, i.e. que $\dim \mathbb{P}(V) = n$ est ≥ 2.

***Définition 15.2* (Pinceaux d'hyperplans).** — Soit $\Delta = \mathbb{P}(F)$ une droite de $\mathbb{P}(V^*)$, i.e. F est un sev de V^* de dimension 2. Soit $W = F^0$, c'est un sev de V de codimension 2. Pour tout $[f] \in \Delta$, $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ contenant $\mathbb{P}(W)$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(H)$ est un tel hyperplan, soit $f \in V^*$ une équation de H (i.e. $\mathrm{Ker}(f) = H$) ; comme $W \subset H$ alors $kf = H^0$ est contenu dans $W^0 = F$.

Donc les hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ contenant $\mathbb{P}(W)$ sont exactement les $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$, pour $[f]$ décrivant Δ (noter que $\mathrm{Ker}(\lambda f) = \mathrm{Ker}(f)$ pour tout $\lambda \in k^\times$). L'ensemble de ces hyperplans s'appelle le *pinceau d'hyperplans* (2) associé à Δ ou encore le *pinceau d'hyperplans de centre* $\mathbb{P}(W)$. Si $\mathbb{P}(H)$ et $\mathbb{P}(H')$ sont deux éléments distincts du pinceau, leur intersection est $\mathbb{P}(W)$ (car $H \cap H' = W$).

Exemple 15.3. — Si $\mathbf{P}$ est un plan projectif et I un point de $\mathbf{P}$, alors le pinceau de droites de centre I est l'ensemble des droites projectives passant par I. Remarquons que si l'on choisit l'une de ces droites comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbf{P} - \mathscr{D}_\infty$, les autres droites du pinceau sont parallèles, cf. la figure de droite ci-dessous :



Notations 15.4. — (1) Notons $\mathscr{S}(V)$ l'ensemble des sev E de V. Plus précisément, pour $r = 0, 1, \ldots, n+1$, notons $\mathscr{S}_r(V)$ l'ensemble des sev de V de dimension r.

(2) Pour l'énoncé de la dualité projective (cf. ci-dessous), il est commode de s'autoriser à considérer $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$ comme un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$, et de décréter qu'il est de dimension -1.

(3) Alors, pour $d = -1, 0, \ldots, n-1, n$, notons $\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V))$ l'ensemble des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ de dimension d, i.e.

$$\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V)) = \{\mathbb{P}(E) \mid E \in \mathscr{S}_{d+1}(V)\}.$$

et notons $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V))$ l'ensemble de tous les sous-espaces projectifs $\mathbb{P}(E)$, pour $E \in \mathscr{S}(V)$. Remarquons que $\mathscr{S}_0(\mathbb{P}(V))$ n'est autre que l'ensemble des *points* de $\mathbb{P}(V)$, que $\mathscr{S}_1(\mathbb{P}(V))$

(2) On dit aussi « faisceau d'hyperplans », mais nous préférons la terminologie « *pinceau* », qui est celle utilisée en géométrie algébrique.

est l'ensemble des *droites* de $\mathbb{P}(V)$ et que $\mathscr{S}_{n-1}(\mathbb{P}(V))$ est l'ensemble des *hyperplans* de $\mathbb{P}(V)$.

Lemme 15.5. — *L'application $E \mapsto E^0$ est une* bijection *de $\mathscr{S}(V)$ sur $\mathscr{S}(V^*)$. Plus précisément, pour tout $r = 0, 1, \ldots, n+1$, c'est une bijection de $\mathscr{S}_r(V)$ sur $\mathscr{S}_{n+1-r}(V^*)$.*

Démonstration. — Ceci découle des rappels précédents. □

Définition et proposition 15.6 **(Dualité projective)**. — *On suppose que* $\dim \mathbb{P}(V) = n$ *est* ≥ 2.

(i) *L'application $\mathbb{P}(E) \mapsto \mathbb{P}(E^0)$ est une* **bijection** *de $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V))$ sur $\mathscr{S}(\mathbb{P}(V^*))$, qui envoie $\mathscr{S}_d(\mathbb{P}(V))$ sur $\mathscr{S}_{n-d-1}\mathbb{P}(V^*)$ pour tout tout $d = -1, 0, \ldots, n-1, n$.*

(i bis) *En particulier, pour tout $f \in V^* - \{0\}$ le point $[f]$ de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond à l'hyperplan $\mathbb{P}(H)$, où $H = \mathrm{Ker}(f)$. Et toute droite $\Delta = \mathbb{P}(F)$ de $\mathbb{P}(V^*)$ correspond au pinceau d'hyperplans de centre $\mathbb{P}(W)$, où $W = F^0$.*

(ii) *Cette bijection renverse les inclusions : $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(F^0) \subset \mathbb{P}(E^0)$.*

(iii) *Elle* échange les notions d'intersection et de sous-espace engendré*, i.e. si $E_1, \ldots, E_r$ sont des sev de V, elle échange, d'une part, $\mathbb{P}(E_1) \cap \cdots \mathbb{P}(E_r)$ et $\mathbb{P}(E_1^0 + \cdots + E_r^0)$ et, d'autre part, $\mathbb{P}(E_1 + \cdots + E_r)$ et $\mathbb{P}(E_1^0 \cap \cdots \cap E_r^0)$.*

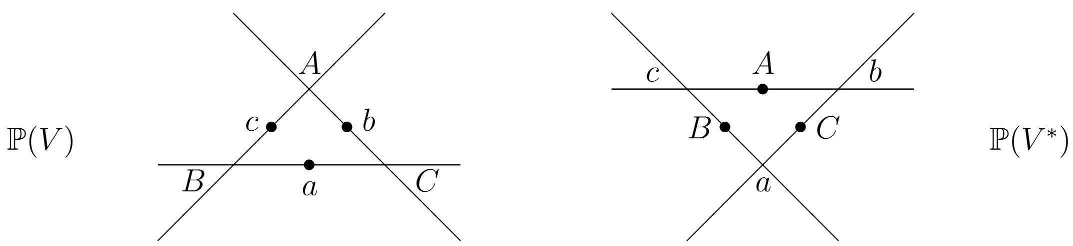
(iii bis) *En particulier, pour tout entier $r \geq 3$, des points distincts $[f_1], \ldots [f_r]$ de $\mathbb{P}(V^*)$ sont alignés ssi, posant $H_i = \mathrm{Ker}(f_i)$, les hyperplans $\mathbb{P}(H_i)$ de $\mathbb{P}(V)$ contiennent un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de dimension $n-2$.*

(iii ter) *En particulier, si $n = 2$, les $[f_i]$ comme ci-dessus sont alignés ssi les droites $D_i = \mathbb{P}(H_i)$ sont concourantes.*

Démonstration. — Les assertions (i)–(iii) découlent aussitôt du lemme précédent. Prouvons (iii bis). Si les $[f_i]$ engendrent une droite $\Delta = \mathbb{P}(F)$ alors les $\mathbb{P}(H_i)$ appartiennent au pinceau de centre $\mathbb{P}(W)$, où $W = F^0$. Réciproquement, si les $\mathbb{P}(H_i)$ contiennent un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de dimension $n-2$, alors les f_i appartiennent tous au plan $F = W^0$, donc les $[f_i]$ appartiennent à la droite $\Delta = \mathbb{P}(F)$. Enfin, (iii ter) est un cas particulier, car dans ce cas $\mathbb{P}(W)$ est un point I du plan projectif $\mathbb{P}(V)$. □

Terminologie 15.7. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Si $\mathbf{D}$ est une droite de $\mathbb{P}(V)$ et d le point correspondant de $\mathbb{P}(V^*)$, on dit que d est « le point dual de la droite $\mathbf{D}$ ». De même, si p est un point de $\mathbb{P}(V)$ et Δ la droite correspondante de $\mathbb{P}(V^*)$, on dit que Δ est « la droite duale du point p ».

Exemple 15.8. — Si ABC est un triangle dans $\mathbb{P}(V)$ (i.e. si les points A, B, C de $\mathbb{P}(V)$ sont non alignés), on notera $a \in \mathbb{P}(V^*)$ le point « dual » de la droite (BC), et b (resp. c) le point « dual » de la droite (CA) (resp. (AB)). Alors, comme (BC) et (CA) se coupent en C, la droite (ab) est duale du point C, et de même (bc) est duale de A et (ca) de B.



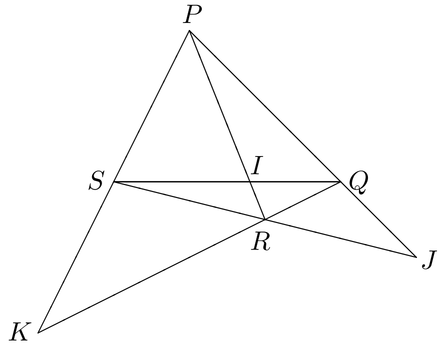
Donc un triangle est une configuration « autoduale ».

Ce qui suit sur les quadrangles et quadrilatères complets n'a pas été traité en cours et peut être omis.

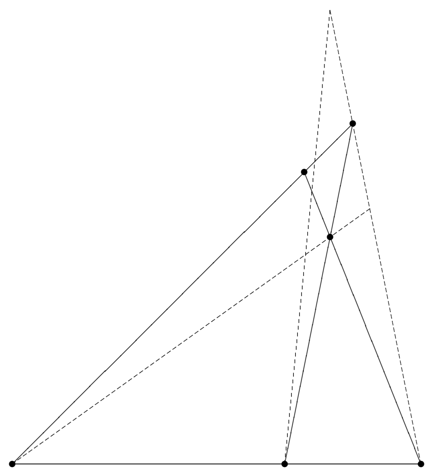
Exemples 15.9. — Soit $\mathbf{P}$ un plan projectif.

(1) Un *quadrangle complet* dans $\mathbf{P}$ est la donnée de quatre points P, Q, R, S formant un repère projectif (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés), appelés les *sommets*, et des $\binom{4}{2} = 6$ droites qui les joignent, appelées les *côtés* (cf. la figure suivante).

Deux côtés qui ne se coupent pas en un sommet sont dits *opposés* ; les trois paires de côtés opposés se coupent en trois points supplémentaires I, J, K, appelés les points *diagonaux*.



(2) La configuration duale est appelée un *quadrilatère complet* : c'est la donnée de quatre droites distinctes dont trois ne sont jamais concourantes, appelées les *côtés* du quadrilatère ; elles se coupent deux à deux en $\binom{4}{2} = 6$ points distincts, appelés les *sommets*. Deux sommets sont dits *opposés* si la droite qui les joint n'est pas un côté, elle est alors appelée une *diagonale*. On obtient ainsi trois diagonales (en pointillés sur le dessin ci-dessous).



Remarque : si la caractéristique de k est $\neq 2$, il résulte du lemme ci-dessous que les trois points diagonaux d'un quadrangle complet ne sont pas alignés et, dualement, que les trois diagonales d'un quadrilatère complet ne sont pas concourantes.

Lemme 15.10. — *Soit (P, Q, R, S) un quadrangle complet du plan projectif $\mathbf{P}$. On suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 2$. Alors les points diagonaux I, J, K ne sont pas alignés.* [3]

Démonstration. — Les points P, Q, R, S définissent un repère projectif dans lequel leurs coordonnées homogènes sont $[1, 0, 0]$, $[0, 1, 0]$, $[0, 0, 1]$ et $[1, 1, 1]$. Alors la droite (PQ) (resp. (RS)) a pour équation $z = 0$ (resp. $x = y$), donc $K = [1, 1, 0]$. On obtient de même que $J = [0, 1, 1]$ et $I = [1, 0, 1]$. Comme $\mathrm{car}(k) \neq 2$, on a dét $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$ donc I, J, K ne sont pas alignés. □

[3] A fortiori, ils sont deux à deux distincts.

16. Le théorème de Céva comme dual du théorème de Ménélaüs

Soient A, B, C trois points non alignés d'un plan affine $\mathscr{P}$. Ils définissent un repère affine $\mathscr{R} = (A, B, C)$ de $\mathscr{P}$, d'où des coordonnées barycentriques (λ, μ, ν) pour lesquelles on a $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ et $C = (0, 0, 1)$. Soient $A' = (0, a, a')$ un point de la droite (BC), $B' = (b', 0, b)$ un point de la droite (CA) et $C' = (c, c', 0)$ un point de la droite (AB). (On a $a + a' = 1 = b + b' = c + c'$ puisqu'il s'agit de coordonnées barycentriques.)

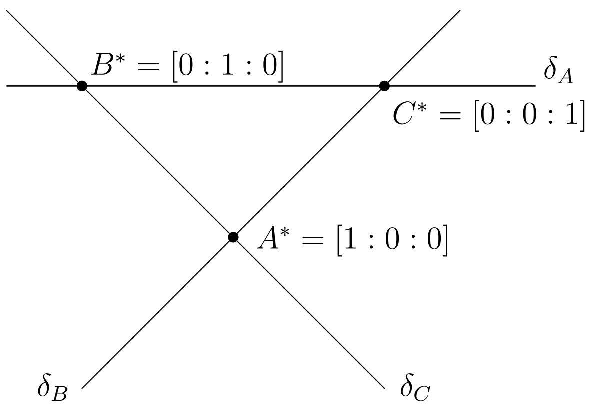
Théorème 16.1. — *Le théorème de Céva se déduit par dualité projective du théorème de Ménélaüs (et réciproquement).*

Démonstration. — Soit $V = \widehat{\mathscr{P}}$ le plongement vectoriel de $\mathscr{P}$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P}) = \mathbb{P}(V)$ le complété projectif de $\mathscr{P}$. Alors les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes (dans $\mathscr{P}$) ou parallèles si et seulement si les droites projectives correspondantes, notons-les α, β et γ, sont concourantes (dans $\mathbb{P}(V)$). Par dualité, ceci équivaut à dire que les points correspondants p, q, r de $\mathbb{P}(V^*)$ sont alignés. Déterminons ces points.

Notant O le vecteur nul de $V = \widehat{\mathscr{P}}$, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ forment, dans cet ordre, une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de V. Notons $\mathscr{B}^* = (f_1, f_2, f_3)$ la base duale de V^*, alors un élément arbitraire f de V^* s'écrit de façon unique $f = xf_1 + yf_2 + zf_3$, avec $x, y, z \in k$, et l'on a :

$$f(\overrightarrow{OA}) = x, \qquad f(\overrightarrow{OB}) = y, \qquad f(\overrightarrow{OC}) = z.$$

Par conséquent, l'orthogonal de la droite vectorielle engendré par $\overrightarrow{OA}$ est le plan de V^* donné par l'équation $x = 0$, et donc la droite de $\mathbb{P}(V^*)$ « duale » du point A de $\mathbb{P}(V)$ est la droite projective δ_A d'équation $x = 0$. De même, la droite δ_B « duale » de B (resp. δ_C « duale » de C) a pour équation $y = 0$ (resp. $z = 0$). Les droites δ_A et δ_B se coupent au point $C^* = [0 : 0 : 1]$ de $\mathbb{P}(V^*)$, qui est le point dual de la droite (AB). De même, δ_B et δ_C se coupent au point $A^* = [1 : 0 : 0]$, et δ_C et δ_A au point $B^* = [0 : 1 : 0]$. Donc la configuration « duale » du triangle (ABC) est le triangle suivant dans $\mathbb{P}(V^*)$:



Considérons maintenant les droites projectives $\alpha = (AA)'$, $\beta = (BB')$ et $\gamma = (CC')$ et les points « duaux » p, q, r dans $\mathbb{P}(V^*)$. La droite projective α correspond au plan vectoriel P_α engendré par $\overrightarrow{OA} = e_1$ et $\overrightarrow{OA'} = ae_2 + a'e_3$, donc une forme linéaire $f = xf_1 + yf_2 + zf_3$ s'y annule ssi $x = 0$ et $ya + za' = 0$, donc P_α est défini par la forme linéaire $f_\alpha = -a'f_2 + af_3$, donc le point p dual de α est $p = [0 : -a' : a]$.

De même, la droite projective β correspond au plan vectoriel P_β engendré par $\overrightarrow{OB} = e_2$ et $\overrightarrow{OB'} = b'e_1 + be_3$, qui est défini par la forme linéaire $f_\beta = bf_1 - b'f_3$, donc le point q dual de β est $q = [b : 0 : -b']$. Et, de même, γ correspond au plan vectoriel P_γ engendré par $\overrightarrow{OC} = e_3$ et $\overrightarrow{OC'} = ce_1 + c'e_2$, donc le point r dual de γ est $r = [-c' : c : 0]$.

Par dualité, on a déjà dit que les droites projectives α, β, γ sont concourantes ssi les points p, q, r de $\mathbb{P}(V^*)$ sont alignés, ce qui équivaut à dire que les vecteurs $(0, -a', a)$, $(b, 0, -b')$ et $(-c', c, 0)$ de V^* engendrant un plan vectoriel, i.e. que le déterminant

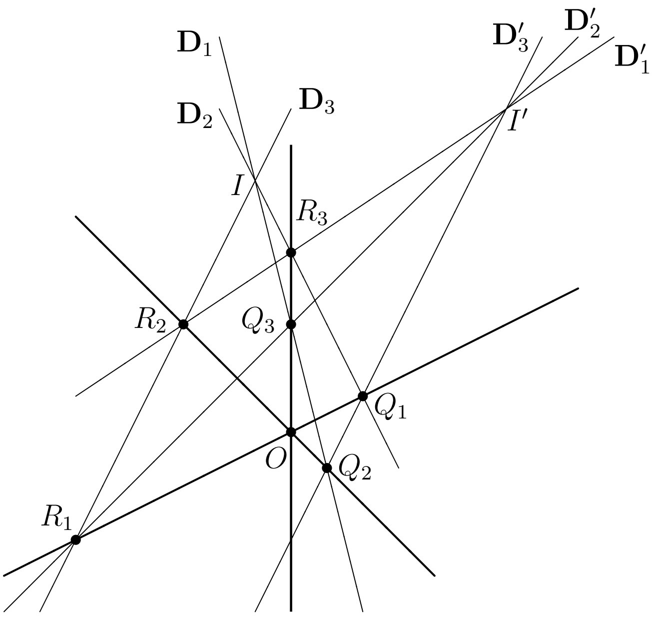
$$\begin{vmatrix} 0 & b & -c' \\ -a' & 0 & c \\ a & -b' & 0 \end{vmatrix}$$

est nul (ceci était la démonstration du th. de Ménélaüs). Or ce déterminant vaut $abc - a'b'c'$. On obtient ainsi que le théorème de Céva est le « dual projectif » du théorème de Ménélaüs (et réciproquement). $\square$

17. Dualité et théorèmes de Pappus et de Desargues

On renvoie maintenant aux différentres versions des théorèmes de Pappus et Desargues données dans les sections 7 et 14. En dualisant le théorème de Pappus projectif (14.1), on obtient un nouveau théorème, le théorème « de Pappus dual » :

***Théorème 17.1* (de Pappus dual).** — *Dans un plan projectif, soient I, I' deux points distincts et $\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2, \mathbf{D}_3$ (resp. $\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2, \mathbf{D}'_3$) trois droites distinctes passant par I (resp. I') et distinctes de la droite (II'). Notons Q_1 (resp. R_1) le point de concours de $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}'_3$ (resp. $\mathbf{D}'_2$ et $\mathbf{D}_3$) et définissons de même Q_2, R_2, Q_3 et R_3. Alors les droites (Q_1R_1), (Q_2R_2) et (Q_3R_3) sont concourantes.*



Par contre, on va voir que le théorème de Desargues est « auto-dual ». Même si cela ne fournit pas un nouveau théorème, cette « autodualité » du théorème de Desargues est intéressante. Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Commençons par rappeler les hypothèses du théorème de Desargues.

On suppose que A, B, C (resp. A', B', C') sont non alignés et que :

$A \neq A'$ donnent la droite (AA')	$(BC) \neq (B'C')$ se coupent en un point A_1
$B \neq B'$ donnent la droite (BB')	$(CA) \neq (C'A')$ se coupent en un point B_1
$C \neq C'$ donnent la droite (CC')	$(AB) \neq (A'B')$ se coupent en un point C_1
$(AA'), (BB'), (CC')$ distinctes	A_1, B_1, C_1 **distincts**

Que A_1, B_1, C_1 soient distincts ne fait pas partie des hypothèses initiales, mais en découle. En effet, si on avait par exemple $A_1 = B_1$ alors les droites (AC) et (BC), distinctes car A, B, C non alignés, auraient en commun les points $M = A_1 = B_1$ et C, donc nécessairement $M = C$, et de même $M = C'$, d'où $C = C'$, contradiction.

Notons $a \in \mathbb{P}(V^*)$ le point « dual » de la droite (BC), et b (resp. c) le point « dual » de la droite (CA) (resp. (AB)), et définissons de même a', b', c'.

Alors, comme (BC) et (CA) se coupent en C, la droite (ab) est duale du point C, et de même (bc) est duale de A et (ca) de B. De même, $(a'b')$, $(b'c')$ et $(c'a')$ sont duales, respectivement, des points C', A' et B'.

Comme $C \neq C'$, alors (ab) et $(a'b')$ sont distinctes donc se coupent en un point c_1 qui est dual de la droite (CC'). De même, (bc) et $(b'c')$ se coupent au point a_1 dual de (AA'), et (ca) et $(c'a')$ se coupent au point b_1 dual de (BB')

De plus, comme c est dual de (AB) et c' de $(A'B')$, alors la droite (cc') est duale du point $C_1 = (AB) \cap (A'B')$, et de même (bb') est duale de B_1 et (aa') de A_1. On voit donc que les hypothèses sont « auto-duales », i.e. qu'elles équivalent aux hypothèses analogues sur les objets duaux :

a, b, c (resp. a', b', c') sont non alignés et :

$(bc) \neq (b'c')$ se coupent en un point a_1	$a \neq a'$ donnent la droite (aa')
$(ca) \neq (c'a')$ se coupent en un point b_1	$b \neq b'$ donnent la droite (bb')
$(ab) \neq (a'b')$ se coupent en un point c_1	$c \neq c'$ donnent la droite (cc')
a_1, b_1, c_1 distincts	$(aa'), (bb'), (cc')$ distinctes

On peut maintenant énoncer (et démontrer !) le théorème de Desargues sous la forme suivante : [4]

***Théorème 17.2* (de Desargues projectif).** — *On se place sous les hypothèses auto-duales précédentes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) A_1, B_1, C_1 *sont alignés sur une droite* $\mathbf{D} \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) $(AA'), (BB'), (CC')$ *sont concourantes en un point* $O \in \mathbb{P}(V)$.

(iii) $(aa'), (bb'), (cc')$ *sont concourantes au point* $d \in \mathbb{P}(V^*)$ *dual de la droite* $\mathbf{D}$.

(iv) a_1, b_1, c_1 *sont alignés sur la droite* Ω *de* $\mathbb{P}(V^*)$ *duale du point* O.

De plus, si ces conditions sont vérifiées, on est dans l'une des situations suivantes :

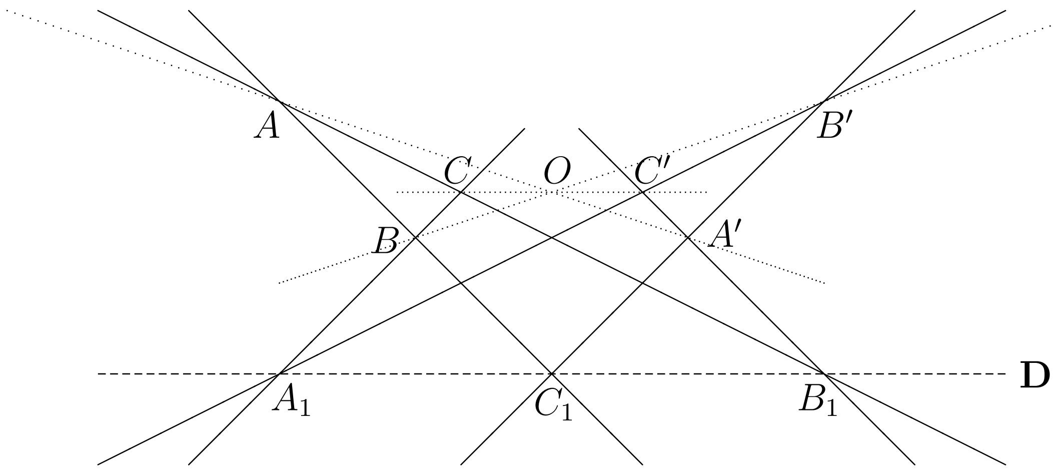
a) **Cas non dégénéré :** *aucune des* 6 *droites* $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$ *ne contient* O *; de façon équivalente,* $\mathbf{D}$ *ne contient aucun des* 6 *points* C, A, B, C', A', B'. *Dans ce cas, avec les* 4 *droites* $(AA'), (BB'), (CC'), \mathbf{D}$ *et les* 4 *points* A_1, B_1, C_1, O *on*

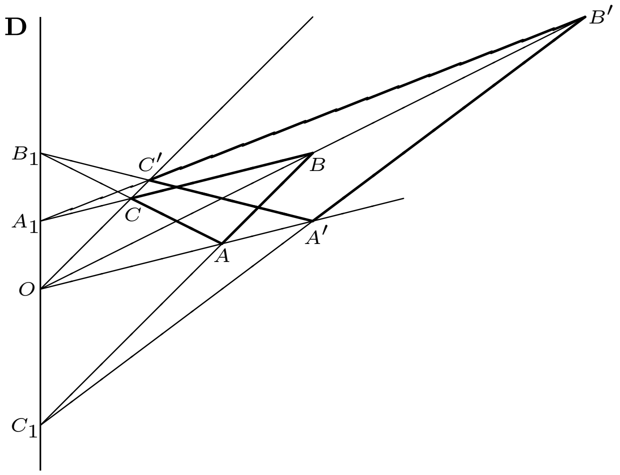
[4] La démonstration par « expédition de $\mathbf{D}$ à l'infini » donnée section 14 avait une hypothèse supplémentaire, assurant que $\mathbf{D}$ ne contient aucun des points A, B, C, A', B', C', ce qui excluait les cas « dégénérés » du théorème. Par ailleurs, dans le chap. 1, p.25, ligne 2 de la démo de 7.2 : remplacer λ par μ.

obtient dix points et dix droites deux à deux distincts. Le point O peut appartenir ou pas à la droite $\mathbf{D}$ *: voir les deux figures ci-dessous.*

b) **Cas dégénéré :** *O est égal à l'un des points A, B, C, A', B', C', disons A. Alors on a trois égalités de points : $A = O$, $B' = C_1$ et $C' = B_1$, et trois égalités de droites : $(BB') = (AB)$, $(CC') = (AC)$ et $\mathbf{D} = (B'C')$. Si $O \notin \mathbf{D}$, on obtient ainsi 7 points et 7 droites deux à deux distincts. Si $O \in \mathbf{D}$, on obtient deux égalités de points (resp. de droites) en plus, par exemple $A = B'$ et $C = A_1$ (resp. $(A'A) = (A'B')$ et $(C'C) = \mathbf{D}$), d'où seulement 5 points et 5 droites.*

Avant de commencer la démonstration, donnons deux figures correspondant au cas « non dégénéré » ; dans la première on a $O \notin \mathbf{D}$ et dans la seconde $O \in \mathbf{D}$:





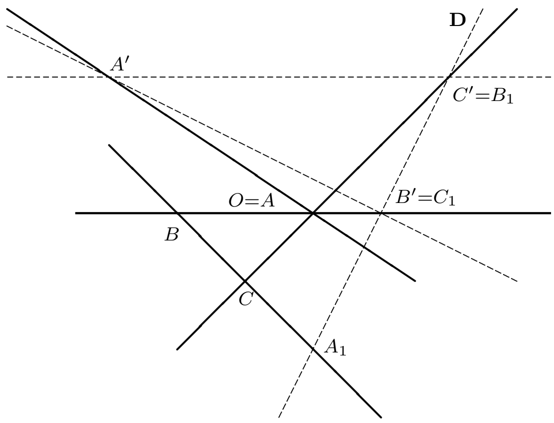
Démonstration. — Par dualité, on a les équivalences (i) $\Leftrightarrow$ (iii) et (ii) $\Leftrightarrow$ (iv). De plus, si l'on a montré l'implication $\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ et si (i) est vérifié alors (iii) l'est aussi et donc, par l'implication précédente appliquée dans $\mathbb{P}(V^*)$, (iv) est vérifié et donc (ii) est vérifié. Donc il suffit d'établir que (ii) $\Rightarrow$ (i), en tenant compte des cas dégénérés.

Supposons donc $(AA'), (BB'), (CC')$ concourantes en un point O. Alors, dans $\mathbb{P}(V^*)$, les points a_1, b_1, c_1 appartiennent à la droite Ω duale de O. Distinguons les cas suivants.

(1) O appartient à une des 6 droites $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$, par exemple à (AB). Si O était distinct de A et de B, alors la droite (AB) serait égale à $(OA) = (A'A)$ et à $(OB) = (B'B)$ donc on aurait $(A'A) = (B'B)$ contrairement à l'hypothèse. Ceci montre que $O = A$ ou B. Supposons par exemple $O = A$.

Alors, $(BB') = (AB)$ et $(CC') = (AC)$. De plus, comme $B' \in (AB) \cap (A'B')$ on a $B' = C_1$ et de même, comme $C' \in (AC) \cap (A'C')$, on a $C' = B_1$. Par conséquent, on a $(C_1B_1) = (B'C')$ et cette droite contient évidemment le point $A_1 = (B'C') \cap (BC)$. Ceci montre déjà que dans ce cas A_1, B_1, C_1 sont alignés sur la droite $\mathbf{D} = (B'C')$.

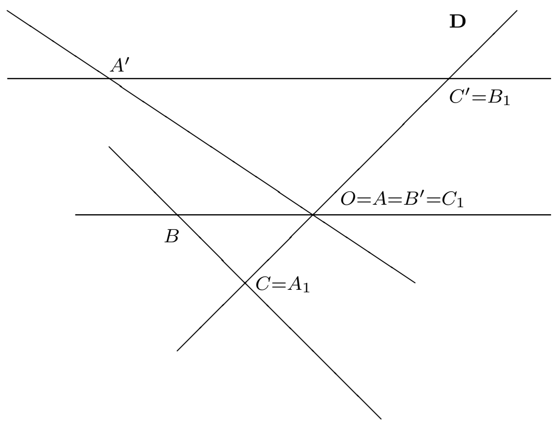
De plus, on a la configuration suivante, où les 4 droites en gras (resp. les 3 en pointillés) sont deux à deux distinctes :



En effet, $(A'A)$ est distincte de (BAB') (resp. (CAC')) car sinon on aurait $(A'A) = (BB')$ (resp. $(A'A) = (CC')$), et elle est distincte de (BC) car A, B, C sont non alignés.

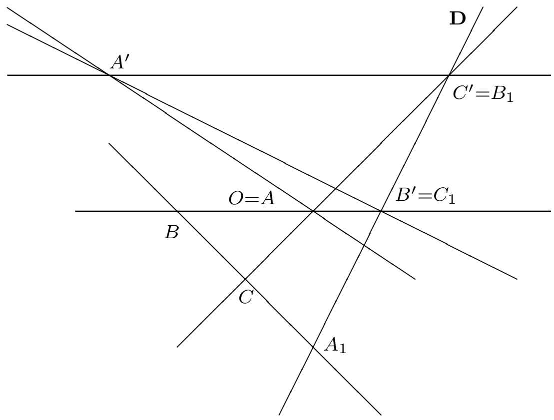
De plus, $\mathbf{D} = (B'C')$ est distincte de (BC) par hypothèse, et elle est distincte de $(A'A)$ et $(A'B')$ car A', B', C' sont non alignés. Donc les seules égalités de droites possibles sont l'égalité de $\mathbf{D}$ avec (CAC') ou (BAB'), et l'égalité de $(A'A)$ avec $(A'B')$ ou $(A'C')$.

Si $\mathbf{D} = (CC')$ alors B' appartient à $(CC') \cap (BB')$ donc $B' = O = A$, et C appartient à (BC) et à $(CC') = (B'C')$ donc $C = A_1$. On obtient donc la configuration suivante de 5 points et 5 droites :



De même, si $\mathbf{D} = (BB')$ on obtient une configuration analogue avec cette fois $O = A = C' = B_1$ et $B = A_1$. Dans ces deux cas, $O = A$ appartient à $\mathbf{D}$. Réciproquement, si $O \in \mathbf{D}$ et si O est distinct de C' (resp. de B'), alors $\mathbf{D}$ et (CC') (resp. (BB')) ont en commun les points distincts O et C' (resp. O et B') donc $\mathbf{D} = (CC')$ (resp. $\mathbf{D} = (BB')$) et l'on est dans le cas juste étudié.

Au contraire, si $O = A$ n'appartient pas à $\mathbf{D}$ alors $\mathbf{D}$ est distincte de (CAC') et (BAB'), et $(A'A) \neq (A'B')$ car sinon on aurait $B' \in (B'B) \cap (A'A)$ d'où $B' = O = A$; de même, $(A'A) \neq (A'C')$. On obtient donc une configuration de 7 points et 7 droites deux à deux distincts :



Ceci achève l'analyse du cas où l'une des 6 droites $(AB), (BC), (CA), (A'B'), (B'C'), (C'A')$ contient O.

(2) Considérons maintenant le cas où aucune de ces 6 droites ne contient O. Alors, par dualité, la droite Ω de $\mathbb{P}(V^*)$ ne contient aucun des points c, a, b, c', a', b'.

Dans ce cas, on peut appliquer la démonstration donnée au chap. 3, i.e. prenons Ω comme droite à l'infini dans $\mathbb{P}(V^*)$. Alors les 6 points a, b, c, a', b', c' sont dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V^*) - \Omega$ et les droites (ab) et $(a'b')$ sont parallèles, ainsi que (bc) et $(b'c')$ et (ca) et $(c'a')$. Ceci implique que les 6 points a, b, c, a', b', c' sont distincts : en effet, si on avait par exemple $a = b'$, alors les droites parallèles (ab) et $(a'b')$ seraient égales, et l'on aurait $(aa') = (aa')$ contrairement à l'hypothèse. On est donc sous les hypothèses du théorème de Desargues affine 7.2. Par conséquent, les droites (aa'), (bb') et (cc') sont concourantes en un point d et donc, par dualité, les points A_1, B_1, C_1 de $\mathbb{P}(V)$ appartiennent à la droite $\mathbf{D}$ duale de d. Ceci termine déjà la preuve de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i).

De plus, la démonstration du théorème 7.2 montre que les droites $(aa'), (bb'), (cc')$ sont soit concourantes en un point $d \in \mathscr{P}$ qui est distinct des six points,(5) soit parallèles, et en ce cas elles ne sont parallèles à aucune des droites (ab), (bc), (ca), donc coupent la droite à l'infini Ω en un point d qui est distinct de a_1, b_1, c_1. On obtient donc que les dix points $a, b, c, a', b', c', a_1, b_1, c_1, d$ de $\mathbb{P}(V^*)$ sont distincts, et donc les dix droites correspondantes de $\mathbb{P}(V)$ sont distinctes.

Comme ceci est exclusif du cas dégénéré traité en (1), on obtient ainsi, en tenant compte de la dualité, les deux situations a) et b) du théorème. $\square$

(5) car $\overrightarrow{aa'} = (1-\lambda)\overrightarrow{ad}$, etc.