CHAPITRE 6

PUISSANCES EXTÉRIEURES ET GRASSMANNIENNES

26. Puissances extérieures

[1] Soient k un corps et V, F deux k-espaces vectoriels.

Rappel 26.1. — On rappelle que pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathrm{Applic}(X, F)$ des applications $X \to F$ est muni d'une structure d'espace vectoriel : pour $f, g : X \to F$ et $\lambda \in k$, on définit $\lambda f + g$ comme l'application $x \mapsto \lambda f(x) + g(x)$.

Il faut vérifier les axiomes d'espace vectoriel, i.e. vérifier certaines égalités telles que, par exemple, $\lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$. Il s'agit d'égalités entre applications $X \to F$, donc il suffit de vérifier que les deux membres prennent la même valeur en tout point $x \in X$. Ainsi, dans l'exemple précédent, il faut vérifier que $(\lambda(f+g))(x) = \lambda(f(x)+g(x))$ est égal à $(\lambda f + \lambda g)(x) = \lambda f(x) + \lambda g(x)$; or ceci résulte des propriétés d'espace vectoriel de F, et il en est de même pour toutes les autres vérifications.

Pour tout entier $p \geq 1$, on note V^p le k-espace vectoriel formé des p-uplets $(v_1, \dots, v_p)$ d'éléments de V.

Définitions 26.2. — Soit f une application $V^p \to F$.

(1) On dit que f est **multilinéaire** ou, plus précisément, p-**linéaire**, si elle est linéaire par rapport à chacune des variables (les autres variables étant fixées), c.-à-d. si pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $\lambda \in k$ et $v_1, \dots, v_p, v'_i \in V$ on a :

$$(\star) \quad f(v_1, \dots, v_{i-1}, \lambda v_i + v'_i, v_{i+1}, \dots, v_p) = \\ \lambda f(v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_p) + f(v_1, \dots, v_{i-1}, v'_i, v_{i+1}, \dots, v_p).$$

(2) Si de plus f vérifie $f(v_1, \dots, v_p) = 0$ lorsque les v_i ne sont pas tous distincts (i.e. lorsqu'il existe $i < j$ tels que $v_i = v_j$), on dit que f est **alternée**. Ceci entraîne que f est **antisymétrique**, i.e. que pour tout $i < j$ on a :

$$(*) \qquad f(v_1, \dots, v_j, \dots, v_i, \dots, v_p) = -f(v_1, \dots, v_i, \dots, v_j, \dots, v_p)$$

(i.e. f change de signe quand on échange la place de deux vecteurs). En effet, fixant les vecteurs v_ℓ pour $\ell \neq i, j$, posons $g(x, y) = f(v_1, \dots, x, \dots, y, \dots, v_p)$, où x (resp. y) est à la i-ème place (resp. la j-ème), alors comme f est alternée g l'est aussi, d'où

$$0 = g(x + y, x + y) = g(x, x) + g(y, y) + g(x, y) + g(y, x) = g(x, y) + g(y, x).$$

[1] Version du 16/11/2016.

Ceci prouve $(*)$. Comme le groupe symétrique S_p est engendré par les transpositions (ij), on en déduit que pour tout $\sigma \in S_p$ on a

$$f(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma),$$

où $\varepsilon : S_p \to \{\pm 1\}$ est la signature.

(3) On note $\mathrm{Alt}^p(V, F)$ l'espace vectoriel des applications p-linéaires alternées $V^p \to F$. Lorsque $F = k$ on le note simplement $\mathrm{Alt}^p(V)$; ses éléments sont appelés des **formes** p-linéaires alternées sur V.

Définition 26.3. — Pour tout p-uplet $(v_1, \dots, v_p)$ de V^p on note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ l'élément de $\mathrm{Alt}^p(V^*)$ défini comme suit : pour tout $(f_1, \dots, f_p) \in V^{*p}$,

$$(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p)(f_1, \dots, f_p) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}$$

(où les $|\ \ |$ désignent le déterminant de la matrice). Il résulte des propriétés du déterminant que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ est bien une forme p-linéaire alternée sur V^*. D'autre part, on a la proposition suivante :

Proposition 26.4. — *L'application $f : V^p \to \mathrm{Alt}^p(V^*)$, $(v_1, \dots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ est p-linéaire alternée.*

Démonstration. — Il est clair que s'il existe $i < j$ tels que $v_i = v_j$ alors le déterminant ci-dessus est nul pour tout $(f_1, \dots, f_p)$, puisque les colonnes C_i et C_j de la matrice sont identiques. De même, pour montrer l'égalité $(\star)$, qui est ici une égalité entre applications $V^{*p} \to k$, il suffit de vérifier que les deux membres prennent la même valeur sur tout $(f_1, \dots, f_p)$. Mais ceci résulte à nouveau des propriétés du déterminant. □

Désormais, on suppose que $\dim(V) = n$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*.

Définition 26.5. — Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ on pose $\Lambda^p(V) = \mathrm{Alt}^p(V^*)$ et l'on dit que c'est la **puissance extérieure** p-ième de V.[(2)] En particulier, on a $\Lambda^1(V) = V^{**} = V$. On pose aussi $\Lambda^0(V) = k$.

Notation 26.6. — On note $\mathcal{I}_p = \mathcal{I}_p(n)$ l'ensemble des p-uplets d'entiers $(i_1, \dots, i_p)$ tels que $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$. Pour tout élément $I = (i_1, \dots, i_p)$ de $\mathcal{I}_p$, on pose

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$$

et l'on note e_I^* le p-uplet $(e_{i_1}^*, \dots, e_{i_p}^*)$.

Lemme 26.7. — *Pour tous $I = (i_1, \dots, i_p)$ et $J = (j_1, \dots, j_p)$ dans $\mathcal{I}_p$ on a*

$$e_I(e_J^*) = (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})(e_{j_1}^*, \dots, e_{j_p}^*) = \begin{cases} 1 & \text{si } I = J, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier, les e_I pour $I \in \mathcal{I}_p$ sont linéairement indépendants.

(2) Attention, cette définition n'est valable que si $\dim(V) < \infty$, ce qu'on a supposé ici. Pour V de dimension infinie, il faut définir $\Lambda^p(V)$ de façon différente.

Démonstration. — On a

$$e_I(e_J^*) = \begin{vmatrix} e_{j_1}^*(e_{i_1}) & \cdots & e_{j_1}^*(e_{i_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j_p}^*(e_{i_1}) & \cdots & e_{j_p}^*(e_{i_p}) \end{vmatrix}$$

donc la 1ère ligne est nulle sauf si j_1 est égal à l'un des i_ℓ, disons i_{ℓ_1}. De même, la 2ème ligne est nulle sauf si j_2 est égal à l'un des i_ℓ, disons i_{ℓ_2}, etc. Donc ce déterminant est nul sauf si $\{j_1, \ldots, j_p\} = \{i_1, \ldots, i_p\}$, et comme ces deux ensembles sont numérotés par ordre croissant, ceci est le cas ssi $j_\ell = i_\ell$ pour tout $\ell = 1, \ldots, p$. Dans ce cas, la matrice est la matrice identité et son déterminant vaut 1. Ceci prouve la première assertion.

Prouvons la seconde. Supposons qu'on ait $\sum_{I\in\mathcal{I}_p} \lambda_I e_I = 0$, avec $\lambda_I \in k$, et soit $J \in \mathcal{I}_p$; prenant la valeur en e_J^* on obtient $\lambda_J = 0$. Ceci prouve que les e_I pour $I \in \mathcal{I}_p$ sont linéairement indépendants. □

Corollaire 26.8. — *Soient $v_1, \ldots, v_p \in V$. Alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ est non nul si et seulement si $(v_1, \ldots, v_p)$ est une famille libre.*

Démonstration. — Si la famille est liée, on peut exprimer l'un des vecteurs comme combinaison linéaire des autres, disons par exemple $v_1 = \sum_{i=2}^p \lambda_i v_i$. Alors, d'après la proposition 26.4 on a

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = \sum_{i=1}^p \lambda_i v_i \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$$

(chaque terme de la somme est nul puisqu'il contient deux fois le même vecteur).

Réciproquement, si la famille est libre on peut la compléter en une base $(v_1, \ldots, v_n)$ de V et alors il résulte du lemme précédent que $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ est non nul. □

Théorème 26.9. — *Les vecteurs e_I, pour $I \in \mathcal{I}_p$, forment une base de $\Lambda^p(V)$. En particulier, on a $\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}$ pour $p = 0, \ldots, n$, et $\Lambda^p(V) = \{0\}$ pour $p > n$.*

Démonstration. — Fixons $\theta \in \Lambda^p(V)$. Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ un p-uplet arbitraire d'éléments de V^* ; pour tout $i = 1, \ldots, p$ on a

$$(\dagger) \qquad f_i = \sum_{j=1}^n f_i(e_j) e_j^*.$$

Comme θ est p-linéaire et alternée, on obtient

$$\theta(f_1, \ldots, f_p) = \sum_{(\ell_1,\ldots,\ell_p)\in\mathcal{I}'_p} \theta(e_{\ell_1}^*, \ldots, e_{\ell_p}^*)\, f_1(e_{\ell_1}) \cdots f_p(e_{\ell_p})$$

où $\mathcal{I}'_p$ désigne l'ensemble des p-uplets $L = (\ell_1, \ldots, \ell_p)$ d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ qui sont deux à deux distincts. De plus, pour un tel p-uplet L, notant $r_1 < \cdots < r_p$ les ℓ_i numérotés par ordre croissant, il existe une unique permutation $\sigma \in S_p$ telle que $\ell_j = r_{\sigma(j)}$ pour $j = 1, \ldots, p$ et l'on a donc

$$\theta(e_{\ell_1}^*, \ldots, e_{\ell_p}^*) = \varepsilon(\sigma)\theta(e_{r_1}^*, \ldots, e_{r_p}^*).$$

On obtient donc que

$$\theta(f_1, \ldots, f_p) = \sum_{(r_1,\ldots,r_p)\in\mathcal{I}_p} \theta(e_{r_1}^*, \ldots, e_{r_p}^*) \left(\sum_{\sigma\in S_p} \varepsilon(\sigma)\, f_1(e_{r_{\sigma(1)}}) \cdots f_p(e_{r_{\sigma(p)}}) \right).$$

Or le terme entre parenthèses est le déterminant de la matrice $\big(f_i(e_{r_j})\big)_{1\le i,j\le p}$, c'est-à-dire $(e_{r_1}\wedge\cdots\wedge e_{r_p})(f_1,\dots,f_p)$. L'égalité précédente signifie donc que

$$\theta = \sum_{(r_1,\dots,r_p)\in\mathcal{I}_p} \theta(e^*_{r_1},\dots,e^*_{r_p})\, e_{r_1}\wedge\cdots\wedge e_{r_p},$$

et les e_I, pour $I\in\mathcal{I}_p$, engendrent donc $\Lambda^p(V)$. Comme ils sont linéairement indépendants d'après le lemme précédent, ils en forment une base. □

Remarque 26.10 **(importante)**. — D'après (†), la matrice $A = A(f_1,\dots,f_p)$ exprimant $f_1,\dots,f_p$ dans la base $\mathscr{B}^*$ est la matrice à n lignes et p colonnes suivante :

$$A = \begin{pmatrix} f_1(e_1) & \cdots & f_p(e_1)\\ \vdots & & \vdots\\ f_1(e_n) & \cdots & f_p(e_n). \end{pmatrix}$$

Pour tout $I = (i_1,\dots,i_p)$ dans $\mathcal{I}_p$, on peut considérer la matrice carrée A_I formée des lignes de A d'indices $i_1,\dots,i_p$; son déterminant s'appelle le **mineur** de A associée à I et se note $\Delta_I(f_1,\dots,f_n)$. On a vu dans dans la démonstration ci-dessus que

$$(e_{i_1}\wedge\cdots\wedge e_{i_p})(f_1,\dots,f_n) = \Delta_I(f_1,\dots,f_n).$$

En particulier, pour $p=n$ on a $e_1\wedge\cdots\wedge e_n = \text{dét}_{\mathscr{B}^*}$, i.e.

$$(e_1\wedge\cdots\wedge e_n)(f_1,\dots,f_n) = \text{dét}_{\mathscr{B}^*}(f_1,\dots,f_n)$$

pour tout $(f_1,\dots,f_n)\in V^{*n}$, et l'on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 26.11. — *$\Lambda^n(V)$ est de dimension 1, engendré par $e_1\wedge\cdots\wedge e_n = \text{dét}_{\mathscr{B}^*}$. De plus, pour toute base $\mathscr{C} = (v_1,\dots,v_n)$ de V, notant $P = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ on a*

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_n = \text{dét}(P)\, e_1\wedge\cdots\wedge e_n.$$

Démonstration. — On a vu plus haut la première assertion ; prouvons la seconde. Comme $e_1\wedge\cdots\wedge e_n$ engendre $\Lambda^n(V)$, il existe $\alpha\in k$ tel que

$$v_1\wedge\cdots\wedge v_n = \alpha\, e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

et, prenant la valeur sur $(e_1^*,\dots,e_n^*)$, on voit que $\alpha = (v_1\wedge\cdots\wedge v_n)(e_1^*,\dots,e_n^*)$. Pour tout $j=1,\dots,n$, on a

$$v_j = \sum_{i=1}^n e_i^*(v_j)e_i$$

donc P est la matrice

$$\begin{pmatrix} e_1^*(v_1) & \cdots & e_1^*(v_n)\\ \vdots & & \vdots\\ e_n^*(v_1) & \cdots & e_n^*(v_n) \end{pmatrix}$$

et par définition on a $(v_1\wedge\cdots\wedge v_n)(e_1^*,\dots,e_n^*) = \text{dét}(P)$. Ceci prouve le corollaire. □

Remarque 26.12 **(importante)**. — Soit E un sev de V. Alors on a une application naturelle $\pi : V^*\to E^*$, qui à tout $f\in V^*$ associe la restriction de f à E, notée ici f^E . Par conséquent, toute forme p-linéaire alternée $\theta : E^{*p}\to k$ donne la forme p-linéaire alternée

$$\theta\circ\pi^p : V^{*p}\to k, \qquad (f_1,\dots,f_p)\mapsto \theta(f_1^E,\dots,f_p^E).$$

Plus concrètement, si $(e_1, \dots, e_d)$ est une base de E et si $\theta = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ avec $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq d$, alors $\theta \circ \pi^p$ est la forme p-linéaire alternée

$$V^{*p} \to k, \qquad (f_1, \dots, f_p) \mapsto (e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p})(f_1^E, \dots, f_p^E) = \begin{vmatrix} f_1(e_{i_1}) & \cdots & f_1(e_{i_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(e_{i_1}) & \cdots & f_p(e_{i_p}) \end{vmatrix}$$

égale à $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ considéré comme élément de $\Lambda^p(V)$. On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 26.13. — *Soit E un sev de V, de dimension d. Alors pour tout $p = 1, \dots, d$, l'application $\Lambda^p(E) \to \Lambda^p(V)$ est injective. En particulier, si $p = d$ alors $\Lambda^d(E)$ est une droite vectorielle de $\Lambda^d(V)$.*

Démonstration. — Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E ; complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V. Posons $\mathcal{I}_p(d) = \{(i_1, \dots, i_p) \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq d\}$. Alors $\mathcal{I}_p(d)$ est un sous-ensemble de $\mathcal{I}_p(n)$ et, d'après la remarque précédente, $\Lambda^p(E)$ s'identifie au sous-espace de $\Lambda^p(V)$ engendré par les e_I pour $I \in \mathcal{I}_p(d)$. □

***Définition 26.14* (Grassmanniennes).** — L'ensemble des sous-espaces vectoriels E de V de dimension d est noté $\mathrm{Gr}_d(V)$ et appelé la **grassmannienne** des d-plans dans V.(3)

D'après la proposition précédente, si $\dim(E) = d$ alors $\Lambda^d(E)$ est une droite vectorielle de $\Lambda^d(V)$ donc on peut considérer l'application $\mathrm{Gr}_d(V) \to \mathbb{P}(\Lambda^d V)$ qui à tout sev E de dimension d associe le point de $\mathbb{P}(\Lambda^d(V))$ donné par la droite $\Lambda^d((E))$, i.e. le point $\mathbb{P}(\Lambda^d(E))$.

Théorème 26.15. — *L'application $\mathrm{Gr}_d(V) \to \mathbb{P}(\Lambda^d V)$, $E \mapsto \mathbb{P}(\Lambda^d(E))$ est injective.*

Pour la démonstration, on a besoin du lemme suivant.

Lemme 26.16. — *Soient $v_1, \dots, v_d \in V$. Alors l'application $\theta : V \to \Lambda^{d+1}(V)$, $v \mapsto v \wedge v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ ne dépend que du vecteur $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d \in \Lambda^d(V)$.*

Démonstration. — Soit $v_0 \in V$. Pour tout $(f_0, \dots, f_d) \in V^{*d+1}$, $\theta(v_0)(f_0, \dots, f_d)$ égale :

$$\begin{vmatrix} f_0(v_0) & f_0(v_1) & \cdots & f_0(v_d) \\ f_1(v_0) & f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_d) \\ \vdots & \vdots & & \dots \\ f_d(v_0) & f_d(v_1) & \cdots & f_d(v_d) \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(v_0)\,(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)(f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_d),$$

où l'égalité ci-dessus est obtenue en développant par rapport à la 1ère colonne. Ceci montre que θ ne dépend que de $v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$. □

Démonstration du théorème. — Soit $(e_1, \dots, e_d)$ une base de E, complétons-la en une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V. On va montrer que E est le noyau de l'application $\theta : V \to \Lambda^{d+1}(V)$ définie par $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d$; ceci prouvera le théorème (car si on remplace θ par un multiple $\lambda\theta$ avec $\lambda \in k^\times$, le noyau est inchangé).

Soit $v \in V$, écrivons $v = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$ avec $a_i \in k$. Comme l'application $V^{d+1} \to \Lambda^{d+1}(V)$, $(v_0, \dots, v_d) \mapsto v_0 \wedge \cdots \wedge v_d$ est alternée (donc antisymétrique), on obtient que $\theta(e_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, d$ et que

$$\forall i \in \{d+1, \dots, n\}, \qquad \theta(e_i) = e_i \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_d = (-1)^d e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \wedge e_i.$$

(3) Pour $d = 1$, on obtient l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$.

On a donc
$$\theta(v) = \sum_{i=d+1}^{n} (-1)^d a_i \, e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \wedge e_i.$$
Comme les éléments $e_1 \wedge \cdots \wedge e_d \wedge e_i$, pour $i > d$ sont linéairement indépendants dans $\Lambda^{d+1}(V)$, d'après le lemme 26.7, on en déduit que $v \in \operatorname{Ker}(\theta)$ si et seulement $a_i = 0$ pour $i > d$, i.e. ssi $v \in F$. Ceci prouve le théorème. □

***Définition 26.17* (*p*-vecteurs purs).** — Soit $z \in \Lambda^p(V)$ non nul. On dit que z est un p-vecteur **pur** s'il existe $v_1, \dots, v_p$ dans V tels que $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$. Noter qu'alors λz est pur pour tout $\lambda \in k^\times$, puisque $\lambda z = (\lambda v_1) \wedge \cdots \wedge v_p$.

Si $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ alors $(v_1, \dots, v_p)$ est une famille libre, d'après le corollaire 26.8, donc est une base du sev E qu'elle engendre, et l'on a $\Lambda^p(E) = kz$ donc E est entièrement déterminé par z, d'après le théorème 26.15.

On voit ainsi que l'image de $\mathrm{Gr}_p(V)$ dans $\mathbb{P}(\Lambda^p(V))$ est formée des classes $[z]$, où $z \in \Lambda^p(V)$ est un p-vecteur pur.

***Exemples 26.18*.** — Si $d = 1$ alors dans $\Lambda^1(V) = V$ tout vecteur non nul est pur. On verra plus bas qu'il en est de même dans $\Lambda^{n-1}(V)$. Par contre, ce n'est pas le cas si $2 \leq d \leq n-2$ (d'où $n \geq 4$). En effet, prenons $n = 4$ et soit $(e_1, \dots, e_4)$ une base de V. Alors les 2-vecteurs $e_1 \wedge e_2$ et
$$e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 = e_1 \wedge (e_2 + e_3 + e_4)$$
sont purs. Par contre, on verra plus bas (27.9) que le 2-vecteur $w = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas pur.

27. Grassmanniennes

On conserve les notations précédentes ; en particulier $\dim(V) = n$. On a déjà vu que $\mathrm{Gr}_1(V) = \mathbb{P}(V)$. D'autre part, se donner un hyperplan H de V équivaut à se donner son orthogonal $H^0 \subset V^*$, qui est une droite vectorielle de V^*. Donc $\mathrm{Gr}_{n-1}(V)$ s'identifie à $\mathbb{P}(V^*)$.

Le but de cette section est de montrer que pour $n \geq 4$ et $2 \leq d \leq n-2$, la grassmannienne $\mathrm{Gr}_d(V)$ est une sous-variété algébrique de $\mathbb{P}(\Lambda^d V)$ définie par l'annulation de certains polynômes homogènes de degré 2, i.e. c'est une intersection de quadriques. [(4)]

Dans le lemme 26.16, pour tout $v_0 \in V$ on a défini l'élément $v_0 \wedge z$ de $\Lambda^{d+1}(V)$ lorsque z est un d-vecteur pur et montré que pour tout $(f_0, \dots, f_d) \in V^{*(d+1)}$ on a
$$(\spadesuit) \qquad (v_0 \wedge z) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i f_i(v_0) \, z(f_0, \dots, \widehat{f_i}, \dots, f_d),$$
où $z(f_0, \dots, \widehat{f_i}, \dots, f_d)$ désigne $z(f_0, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_d)$. En fait, cette définition est valable pour tout $z \in \Lambda^d(V)$, i.e. on a la proposition suivante.

***Proposition 27.1* (Le produit $V \times \Lambda^d(V) \to \Lambda^{d+1}(V)$).** — *Pour tout $v_0 \in V$ et $z \in \Lambda^d(V)$, l'application $v_0 \wedge z : V^{*(d+1)} \to k$ définie par la formule ci-dessus est $(d+1)$-linéaire et alternée ; c'est donc un élément de $\mathrm{Alt}^{d+1}(V^*) = \Lambda^{d+1}(V)$.*

---
(4) On verra dans un chapitre ultérieur que $\mathrm{Gr}_{n-1}(V) = \mathbb{P}(\Lambda^{n-1} V)$.

Démonstration. — On vérifie facilement qu'elle est $(d+1)$-linéaire ; montrons qu'elle est alternée. Supposons qu'il existe $i < j$ tels que $f_i = f_j = g$. Alors pour $\ell \neq i, j$, chaque terme $f_\ell(v_0)z(f_0, \dots, \widehat{f_\ell}, \dots, f_d)$ est nul ; reste la somme

$$(-1)^i g(v_0)z(f_0, \dots, \widehat{f_i}, \dots, g, \dots, f_d) + (-1)^j g(v_0)z(f_0, \dots, g, \dots, \widehat{f_j}, \dots, f_d)$$

où g est à la place i dans le 2ème terme et à la place $j-1$ dans le 1er terme (car la place $i < j$ a été supprimée). Comme z est alternée, donc antisymétrique, on a

$$z(f_0, \dots, \widehat{f_i}, \dots, g, \dots, f_d) = (-1)^{j-i+1} z(f_0, \dots, g, \dots, \widehat{f_j}, \dots, f_d)$$

et donc la somme ci-dessus est nulle. Ceci prouve que $v_0 \wedge z$ est bien une forme $(d+1)$-linéaire alternée sur V^*, i.e. un élément de $\Lambda^{d+1}(V)$. □

Lemme 27.2. — *Soit $z \in \Lambda^d(V)$ non nul.*

(i) *Il existe un plus petit sous-espace vectoriel F de V tel que $z \in \Lambda^d(F)$, on le note S_z.*
(ii) *On a $\dim(S_z) \geq d$.*
(iii) *z est pur ssi $\dim(S_z) = d$; dans ce cas on a $\Lambda^d(S_z) = kz$.*

Démonstration. — Soit F un sev de V tel que $z \in \Lambda^d(F)$ et de dimension minimale pour cette propriété. Soit E un autre sev de V tel que $z \in \Lambda^d(E)$. Posons $m = \dim(F)$, $r = \dim(E \cap F)$ et $p = \dim(E)$. Soit $(e_0, \dots, e_{r-1})$ une base de $F \cap E$; complétons-la en une base $(e_{r-m}, \dots, e_{-1}, e_0, \dots, e_{r-1})$ de F et en une base $(e_0, \dots, e_{p-1})$ de E. Alors $(e_{r-m}, \dots, e_{p-1})$ est une base de $F+E$; complétons-la en une base $(e_{r-m}, \dots, e_s)$ de V, où $s = n+r-m-1$. Notons

$$\mathcal{I} = \{(i_1, \dots, i_d) \mid r-m \leq i_1 < \cdots < i_d \leq s\}.$$

Alors, pour $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathcal{I}$, les vecteurs

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$$

forment une base de $\Lambda^d(V)$. Comme $z \in \Lambda^d(F)$ (resp. $z \in \Lambda^d(E)$) alors z s'écrit comme combinaison linéaire des e_I avec $i_d \leq r-1$ (resp. avec $i_1 \geq 0$ et $i_d \leq p-1$). Par unicité de l'écriture dans la base, on en déduit que z s'écrit comme combinaison linéaire des e_I avec $i_1 \geq 0$ et $i_d \leq r-1$, i.e. z appartient à $\Lambda^d(F \cap E)$. Par minimalité de F on a donc $F = F \cap E$, i.e. $F \subset E$. Ceci prouve que F est le plus petit sev de V tel que $z \in \Lambda^d(F)$, d'où (i).

Prouvons (ii) : $\Lambda^d(S_z)$ est non nul puisqu'il contient z, donc $d \leq \dim(S_z)$ d'après le théorème 26.9.

Prouvons (iii). Si $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ alors, posant $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_d)$, on a $z \in \Lambda^d(E) = kz$ d'où $S_z \subset E$ par définition de S_z, et donc $S_z = E$ puisque $\dim(S_z) \geq d = \dim(E)$.

Réciproquement, si $\dim(S_z) = d$, soit $(v_1, \dots, v_d)$ une base de S_z, alors tout élément non nul de $\Lambda^d(S_z) = k(v_1 \wedge \cdots \wedge v_d)$ est pur, donc z est pur. □

Il reste maintenant à comprendre le sous-espace S_z. Pour cela, on introduit les définitions suivantes.

***Définitions 27.3* (Les contractions $V^{*(d-1)} \times \Lambda^d(V) \to V$ et $V^* \times \Lambda^d(V) \to \Lambda^{d-1}(V)$)**
Pour tout $z \in \Lambda^d(V) = \mathrm{Alt}^d(V^*)$, on définit les applications $\mu_z : V^{*(d-1)} \to V^{**} = V$ et $\nu_z : V^* \to \mathrm{Alt}^{d-1}(V^*) = \Lambda^{d-1}(V)$ de la façon suivante.

a) Pour tout $(f_1, \dots, f_{d-1}) \in V^{*(d-1)}$, on note $\mu_z(f_1, \dots, f_{d-1})$ l'application

$$V^* \to k, \qquad f \mapsto z(f_1, \dots, f_{d-1}, f).$$

C'est une forme linéaire sur V^*, i.e. un élément de $V^{**} = V$. De plus, $\mu_z : V^{*(d-1)} \to V$ est $(d-1)$-linéaire alternée ; par conséquent, pour toute base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, l'image de μ_z :

$$\operatorname{Im}(\mu_z) = \operatorname{Vect}\big\{\mu_z(f_1, \dots, f_{d-1}) \mid (f_1, \dots, f_{d-1}) \in V^{*(d-1)}\big\}$$

est engendrée par les $\mu_z(e^*_{h_1}, \dots, e^*_{h_{d-1}})$ pour $1 \leq h_1 < \cdots < h_{d-1} \leq n$, où $\mathscr{B}^* = (e^*_1, \dots, e^*_n)$ désigne la base duale de $\mathscr{B}$.

b) De même, pour tout $f \in V^*$, on note $\nu_z(f)$ l'application

$$V^{*(d-1)} \to k, \qquad (f_1, \dots, f_{d-1}) \mapsto z(f, f_1, \dots, f_{d-1}).$$

Elle est $(d-1)$-linéaire et alternée, i.e. c'est un élément de $\Lambda^{d-1}(V)$.

Notation 27.4. — Pour tout entier $p \leq n$, on identifie chaque p-uplet $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{I}_p(n)$ au sous-ensemble $\{i_1, \dots, i_p\}$ de $\{1, \dots, n\}$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on pose $N(I, i) = \#\{j \in I \mid j > i\}$ et $\varepsilon(I, i) = (-1)^{N(I,i)}$.

Lemme 27.5. — *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e^*_1, \dots, e^*_n)$ la base duale de V^*. Pour tous $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathcal{I}_d(n)$ et $H = (h_1, \dots, h_{d-1}) \in \mathcal{I}_{d-1}(n)$ on pose $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ et $e^*_H = (e^*_{h_1}, \dots, e^*_{h_{d-1}})$. Alors on a :*

$$\mu_{e_I}(e^*_H) = \begin{cases} \varepsilon(I, i)\, e_i = \varepsilon(H, i)\, e_i & \textit{si } H = I - \{i\} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. — Pour tout $f \in V^*$ on a :

$$\mu_{e_I}(e^*_H)(f) = \begin{vmatrix} e^*_{h_1}(e_{i_1}) & \cdots & e^*_{h_1}(e_{i_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ e^*_{h_{d-1}}(e_{i_1}) & \cdots & e^*_{h_{d-1}}(e_{i_p}) \\ f(e_{i_1}) & \cdots & f(e_{i_p}) \end{vmatrix}.$$

La 1ère ligne est nulle sauf si h_1 est égal à l'un des i_ℓ, disons i_{ℓ_1}. De même, la 2ème ligne est nulle sauf si h_2 est égal à l'un des i_ℓ, disons i_{ℓ_2}, et ainsi de suite jusqu'à la ligne $d-1$. On obtient ainsi que ce déterminant est identiquement nul sauf si H est un sous-ensemble de I, i.e. si on a $H = I - \{i_\ell\}$ pour un certain indice $\ell \in \{1, \dots, d\}$. Dans ce cas, comme $h_1 < \cdots < h_{d-1}$, on a nécessairement $h_j = i_j$ pour $j = 1, \dots, \ell - 1$ et $h_j = i_{j+1}$ pour $j = \ell, \dots, d-1$, et donc $\mu_{e_I}(e^*_H)(f)$ est égal à

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \cdots & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \cdots & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathbf{0} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & 0 & 1 \\ f(e_{i_1}) & f(e_{i_2}) & \cdots & \mathbf{f(e_{i_\ell})} & \cdots & \cdots & f(e_{i_d}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 \\ \mathbf{f(e_{i_\ell})} & \cdots & \cdots & f(e_{i_d}) \end{vmatrix}$$

où l'égalité ci-dessus est obtenue en développant par rapport à la 1ère ligne, puis la 2ème, etc. jusqu'à la $(\ell-1)$-ième. En développant le petit déterminant par rapport à sa 1ère colonne, on voit qu'il vaut $(-1)^{d-\ell}f(e_{i_\ell})$, d'où

$$\mu_{e_I}(e^*_{I-\{i_\ell\}}) = (-1)^{d-\ell}e_{i_\ell} = \varepsilon(I, i_\ell)e_{i_\ell},$$

d'où la formule voulue. □

Proposition 27.6. — *Pour tout $z \in \Lambda^d(V)$ non nul, on a $S_z = \mathrm{Im}(\mu_z)$.*

Démonstration. — Notons N l'image de μ_z. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base arbitraire de S_z, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V et notons $\mathscr{B}^* = (e^*_1, \dots, e^*_n)$ la base duale de V^*. Posons $\mathcal{I}_d(n) = \{(i_1, \dots, i_d) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_d \le n\}$ et définissons de même le sous-ensemble $\mathcal{I}_d(r)$. Comme $z \in \Lambda^d(S_z)$, on peut écrire de façon unique

$$z = \sum_{I\in\mathcal{I}_d(r)} a_I e_I$$

avec les $a_i \in k$ non tous nuls. D'après le lemme précédent, pour tout $H \in \mathcal{I}_{d-1}(n)$ et tout $I \in \mathcal{I}_d(r)$, le vecteur $\mu_{e_I}(e^*_H)$ est nul ou égal à $\pm e_i$ avec $1 \le i \le r$, donc appartient à S_z. Donc

$$\mu_z(e^*_H) = \sum_{I\in\mathcal{I}_d(r)} a_I e_I(e^*_H)$$

appartient à S_z pour tout $H \in \mathcal{I}_{d-1}(n)$, d'où $N \subset S_z$. Posons $\dim(N) = q \le r$. On peut donc choisir la base $(e_1, \dots, e_r)$ de S_z de telle sorte que $(e_1, \dots, e_q)$ soit une base de N.

Montrons qu'en fait $N = S_z$, i.e. $q = r$. Supposons $q \le r-1$, alors e^*_r s'annule sur N donc pour tous $f_1, \dots, f_{d-1} \in V^*$ on a :

$$\begin{aligned} 0 = \mu_z(f_1, \dots, f_{d-1})(e^*_r) = z(f_1, \dots, f_{d-1}, e^*_r) &= (-1)^{d-1}z(e^*_r, f_1, \dots, f_{d-1}) \\ &= (-1)^{d-1}\nu_z(e^*_r)(f_1, \dots, f_{d-1}). \end{aligned}$$

Par conséquent, l'élément $\nu_z(e^*_r) \in \Lambda^{d-1}(V)$ est nul. Donc on a :

$$(\dagger) \qquad 0 = \nu_z(e^*_r) = \sum_{I\in\mathcal{I}_d(r)} a_I \nu_{e_I}(e^*_r).$$

D'autre part, pour tout $I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathcal{I}_d(r)$ et $f_2, \dots, f_d \in V^*$, on a

$$\nu_{e_I}(e^*_r)(f_2, \dots, f_d) = \begin{vmatrix} e^*_r(e_{i_1}) & \cdots & e^*_r(e_{i_d}) \\ f_2(e_{i_1}) & \cdots & f_2(e_{i_d}) \\ \vdots & & \vdots \\ f_d(e_{i_1}) & \cdots & f_d(e_{i_d}) \end{vmatrix}$$

et comme $1 \le i_1 < \cdots < i_d \le r$, la 1ère ligne est nulle sauf si $i_d = r$, dans ce cas le déterminant ci-dessus vaut $(-1)^{d+1}e_{I-\{r\}}(f_2, \dots, f_d)$. Ceci montre que

$$\nu_{e_I}(e^*_r) = \begin{cases} (-1)^{d+1}e_{I-\{r\}} & \text{si } r \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Reportant ceci dans $(\dagger)$, on obtient

$$0 = \sum_{J\in\mathcal{I}_{d-1}(r-1)} a_{J\cup\{r\}} e_J$$

et comme les vecteurs $e_J \in \Lambda^{d-1}(V)$ pour $J \in \mathcal{I}_{d-1}(r-1)$ sont linéairement indépendants, ceci entraîne que $a_I = 0$ pour tout $I \in \mathcal{I}_d(r)$ tel que $i_d = r$. Mais alors z appartient à $\Lambda^d(E)$ où $E = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_{r-1})$ et donc $S_z \subset E$, ce qui n'est pas le cas. Cette contradiction montre que $q = r$, i.e. que $S_z = N = \mathrm{Im}(\mu_z)$. □

On peut maintenant démontrer le :

Théorème 27.7. — *Soit $z \in \Lambda^d(V)$ non nul, soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Alors :*

(i) *z est pur si et seulement si l'on a $v \wedge z = 0$ pour tout $v \in S_z$.*

(ii) *Pour qu'il en soit ainsi, il faut et suffit que*

$$\mu_z(e_{h_1}^*, \dots, e_{h_{d-1}}^*) \wedge z = 0 \qquad (\clubsuit)$$

pour tout $1 \leq h_1 < \cdots < h_{d-1} \leq n$.

Démonstration. — Les deux conditions sont équivalentes, puisque les $\mu_z(e_{h_1}^*, \dots, e_{h_{d-1}}^*)$ engendrent S_z d'après la proposition précédente. Prouvons donc (i).

Si z est pur, disons $z = v_1 \wedge \cdots \wedge v_d$ alors $S_z = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_d)$ et comme $v_i \wedge z = 0$ pour tout $i = 1, \dots, d$, la condition est bien vérifiée.

Réciproquement, supposons la condition vérifiée et montrons que $\dim(S_z) = d$. Supposons $\dim(S_z) = q > d$ et soit $(e_1, \dots, e_q)$ une base de S_z. On peut écrire

$$z = \sum_{I \in \mathcal{I}_d(q)} a_I e_I$$

avec les $a_I \in k$ non tous nuls. Soit $I_0 \in \mathcal{I}_d(q)$ tel que $a_{I_0} \neq 0$. Comme $|I| = d < q$, il existe $j \in \{1, \dots, q\}$ tel que $j \notin I_0$. Comme $e_j \in S_z$ et $e_j \wedge e_I = 0$ si $j \in I$, on a :

$$0 = e_j \wedge z = \sum_{I \in \mathcal{I}_d(q)} a_I \, e_j \wedge e_I = \sum_{\substack{I \in \mathcal{I}_d(q) \\ j \notin I}} \pm a_I \, e_{I \cup \{j\}}.$$

Comme les $e_{I \cup \{j\}} \in \Lambda^{d+1}(V)$, pour les $I \in \mathcal{I}_d(q)$ tels que $j \notin I$, sont linéairement indépendants, il en résulte que $a_I = 0$ pour chaque tel I, en particulier $a_{I_0} = 0$, ce qui est une contradiction. Ceci montre que $\dim(S_z) = d$, et donc z est pur d'après le lemme 27.2. □

Explicitons les conditions ($\clubsuit$) et montrons que ce sont des équations quadratiques en les coefficients de z dans la base $(e_I)_{I \in \mathcal{I}_d(n)}$. Écrivons

$$z = \sum_{I \in \mathcal{I}_d(n)} a_I e_I.$$

Alors, d'après le lemme 27.5, pour tout $H \in \mathcal{I}_{d-1}(n)$ on a

$$\mu_z(e_H^*) = \sum_{i \notin H} a_{H \cup \{i\}} \varepsilon(H, i) \, e_i.$$

Fixons maintenant $J \in \mathcal{I}_{d+1}(n)$ et déterminons le coefficient sur e_J de $\mu_z(e_H^*) \wedge z$. Pour tout $I \in \mathcal{I}_d(n)$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $e_i \wedge e_I = 0$ si $i \in I$ tandis que si $i \notin I$ alors, posant $n(I, i) = \#\{j \in I \mid j < i\} = d - N(I, i)$, on a

$$e_i \wedge e_I = (-1)^{n(I,i)} e_{I \cup \{i\}} = (-1)^d \varepsilon(I, i) e_{I \cup \{i\}}.$$

Ceci est un multiple de e_J si et seulement si $J = I \cup \{i\}$; dans ce cas on a $\varepsilon(I,i) = \varepsilon(J,i)$. Il en résulte que e_J apparaît dans $\mu_z(e_H^*) \wedge z$ pour chaque $I \in \mathcal{I}_d(n)$ tel que $I = J - \{i\}$ avec $i \notin H$, donc le coefficient de e_J dans $\mu_z(e_H^*) \wedge z$ est

$$(-1)^d \sum_{i \in J-H} \varepsilon(H,i)\varepsilon(J,i)\, a_{H\cup\{i\}} a_{J-\{i\}}.$$

Comme les e_J, pour $J \in \mathcal{I}_{d+1}(n)$, sont linéairement indépendants dans $\Lambda^{d+1}(V)$, la nullité de $\mu_z(e_H^*) \wedge z$ équivaut donc aux équations quadratiques :

$$(H \diamondsuit J) \qquad \sum_{i \in J-H} \varepsilon(H,i)\varepsilon(J,i)\, a_{H\cup\{i\}} a_{J-\{i\}} = 0,$$

pour tout $H \in \mathcal{I}_{d-1}(n)$ et $J \in \mathcal{I}_{d+1}(n)$.

Détaillons ceci lorsque $d = 2$. Dans ce cas, on a $H = \{h\}$ et $J = \{j, k, \ell\}$ avec $j < k < \ell$. Si $h \in J$, par exemple si $h = \ell$, on obtient l'équation triviale $a_{hj}a_{hk} - a_{hk}a_{hj} = 0$. Il suffit donc de se limiter au cas où $H \cap J = \varnothing$. Supposons par exemple $h < j < k < \ell$, alors on obtient l'équation

$$-a_{hj}a_{k\ell} + a_{hk}a_{j\ell} - a_{h\ell}a_{jk} = 0.$$

On vérifie que dans les trois autres cas (i.e. $j < h < k$ ou $k < h < \ell$ ou $\ell < h$) on obtient, au signe près, la même équation. On obtient ainsi le :

***Corollaire 27.8* (La grassmanienne $\mathrm{Gr}_2(k^n)$ pour $n \geq 4$).** — *Pour $d = 2$ et $n \geq 4$, la grassmannienne des 2-plans dans k^n est la sous-variété algébrique de $\mathbb{P}(\Lambda^2(k^n))$ définie par les $\binom{n}{4}$ équations suivantes : pour tout $h < j < k < \ell$ dans $\{1, \dots, n\}$, on a*

$$a_{hj}a_{k\ell} - a_{hk}a_{j\ell} + a_{h\ell}a_{jk} = 0.$$

En particulier, lorsque $n = 4$, $\mathrm{Gr}_2(k^4)$ est la quadrique de $\mathbb{P}(k^6)$ définie par l'équation

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0.$$

Exemple 27.9. — Soit $(e_1, \dots, e_4)$ la base canonique de k^4. Le 2-vecteur $w = e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas pur ; en effet, dans ce cas on a $a_{12} = 1 = a_{34}$ et $a_{pq} = 0$ pour les autres valeurs de (p, q), donc l'équation précédente n'est pas vérifiée. D'autre part, d'après le lemme 27.5, on a

$$\mu_w(e_1^*) = e_2, \qquad \mu_w(e_2^*) = -e_1, \qquad \mu_w(e_3^*) = e_4, \qquad \mu_w(e_4^*) = -e_3$$

donc, d'après la proposition 27.2, on a $S_w = k^4$.