CHAPITRE 7

PRODUIT TENSORIEL ET APPLICATIONS

28. Produit tensoriel

[(1)] Soient k un corps et V, W deux k-espaces vectoriels.

Notation 28.1. — Pour tout k-ev F, on note $\mathrm{Bil}(V, W; F)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires $V \times W \to F$.

De même, si U est un troisième k-ev, on note $\mathrm{Tril}(U, V, W; F)$ l'espace vectoriel des applications trilinéaires $U \times V \times W \to F$.

Plus généralement, pour des k-ev $V_1, \dots, V_p, F$, on note $\mathrm{Mult}^p(V_1, \dots, V_p; F)$ le k-ev des applications p-linéaires $V_1 \times \cdots \times V_p \to F$. Si $V_1 = \cdots = V_p$, on le notera simplement $\mathrm{Mult}^p(V, F)$.

Par ailleurs, on note $\mathrm{Hom}(V, F)$ le k-ev des applications linéaires $V \to F$ (aussi noté parfois $\mathscr{L}(V, F)$). En particulier, $\mathrm{Hom}(V, k)$ est l'espace dual V^*.

Remarquons que si $\beta : V \times W \to E$ (resp. $f : E \to F$) est une application bilinéaire (resp. linéaire), alors l'application composée $f \circ \beta : V \times W \to F$ est bilinéaire.

Définition 28.2. — Étant donné V, W, on cherche à construire un couple (E, β), où E est un k-ev et $\beta : V \times W \to E$ une application bilinéaire, vérifiant la **propriété universelle** suivante : pour toute application bilinéaire $b : V \times W \to F$, où F est un k-ev, il **existe une unique** application linéaire $f_b : E \to F$ telle que $f \circ \beta = b$. En d'autres termes, pour tout k-ev F, l'application linéaire

$$\mathrm{Hom}(E, F) \to \mathrm{Bil}(V, W; F), \qquad f \mapsto f \circ \beta$$

est **bijective** et l'application inverse est notée $b \mapsto f_b$.

Commençons par remarquer que, comme dans tout « problème universel » de ce type, si une solution (E, β) existe alors elle est unique **à isomorphisme unique près**, i.e. on a la proposition suivante.

Proposition 28.3. — *Soient (E, β) et (E', β') deux solutions du problème universel précédent.*

(i) *Il existe une* **unique** *application linéaire $f : E \to E'$ telle que $f \circ \beta = \beta'$.*

(ii) *De même, il existe une* **unique** *application linéaire $g : E' \to E$ telle que $g \circ \beta' = \beta$.*

(iii) *On a $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$. Par conséquent, f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.*

[(1)] Version du 2/12/2016.

Démonstration. — (i) et (ii) : D'après la propriété universelle de (E,β), il existe une unique application linéaire $f : E \to E'$ telle que $f \circ \beta = \beta'$. Et, d'après la propriété universelle de (E',β'), il existe une unique application linéaire $g : E' \to E$ telle que $g \circ \beta' = \beta$.

(iii) Alors on a $g \circ f \circ \beta = g \circ \beta' = \beta = \mathrm{id}_E \circ \beta$. Donc d'après l'unicité dans la propriété universelle de (E,β) on a $g \circ f = \mathrm{id}_E$. On obtient de même que $f \circ g = \mathrm{id}_{E'}$. □

Théorème 28.4. — (i) *Le problème universel précédent admet une solution, unique à isomorphe unique près, notée $V \otimes W$ et appelée le produit tensoriel de V et W.*

(ii) *Si V et W sont de dimension finie, on a* $\dim(V \otimes W) = \dim(V)\dim(W)$.

(iii) *On a un isomorphisme canonique $k \otimes V = V$.*

Démonstration. — Soit $(e_i)_{i\in I}$ (resp. $(e'_j)_{j\in J}$) une base de V (resp. de W). Pour tout couple $(i,j) \in I \times J$ introduisons un symbole $t(i,j)$ et soit E le k-ev de base $(t(i,j))_{(i,j)\in I\times J}$. On définit l'application $\beta : V \times W \to E$ en posant $\beta(e_i, e'_j) = t(i,j)$ et en l'étendant par bilinéarité, i.e. tout $v \in V$ (resp. $w \in W$) s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire

$$v = \sum_{i\in I} \lambda_i \, e_i, \qquad w = \sum_{j\in J} \mu_j \, e'_j$$

avec les λ_i dans k nuls sauf pour un nombre fini d'indices, et de même pour les μ_j, et l'on pose

$$\beta(v,w) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i \mu_j \, t(i,j).$$

Soit $b : V \times W \to F$ une application bilinéaire. Alors une application linéaire $f : E \to F$ telle que $f \circ \beta = b$ doit nécessairement vérifier $f(t(i,j)) = b(e_i, e'_j)$ pour tout $(i,j) \in I \times J$. Réciproquement, soit $f : E \to F$ l'application linéaire définie par les égalités précédentes (i.e. en se donnant les valeurs de f sur les éléments d'une base de E). Alors pour tous $v \in V$ et $w \in W$ comme plus haut, on a :

$$f(\beta(v,w)) = f\Big(\sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i\mu_j \, t(i,j)\Big) = \sum_{(i,j)\in I\times J} \lambda_i\mu_j \, b(e_i, e'_j) = b(v,w).$$

Ceci montre que le couple (E,β) vérifie la propriété universelle. On note alors $E = V \otimes W$ et pour tous $v \in V$ et $w \in W$, on note $v \otimes w$ l'élément $\beta(v,w)$ de $V \otimes W$.

(ii) Si V (resp. W) est de dimension finie $p = |I|$ (resp. $q = |J|$), alors comme le cardinal de $I \times J$ est pq, on obtient $\dim(V \otimes W) = |I \times J| = pq = \dim(V)\dim(W)$.

(iii) L'application $k \times V \to V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda v$ est bilinéaire donc induit une unique application linéaire $f : k \otimes V \to V$ telle que $f(\lambda \otimes v) = \lambda v$ pour tout $\lambda \in k$ et $v \in V$.

D'autre part, l'application $\beta : k \times V \to k \otimes V$, $(\lambda, v) \mapsto \lambda \otimes v$ est bilinéaire donc, en particulier, l'application $\tau : V \to k \otimes V$, $v \mapsto 1 \otimes v$ est linéaire. Elle vérifie $f \circ \tau = \mathrm{id}_V$.

De plus, tout élément x de $k \otimes V$ s'écrit comme une somme finie

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i 1 \otimes v_i$$

avec $\lambda_i \in k$ et $v_i \in V$. Par bilinéarité de β, on a $\lambda_i 1 \otimes v_i = \lambda_i(1 \otimes v_i) = 1 \otimes \lambda_i v_i$ pour tout i, d'où $x = 1 \otimes v$ avec $v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = f(x)$. Ceci montre que $\tau \circ f = \mathrm{id}_{k\otimes V}$. Par conséquent, f et τ sont des isomorphisme réciproques l'un de l'autre. □

***Terminologie 28.5* (Tenseurs décomposables)**. — Tout élément de $V \otimes W$ de la forme $v \otimes w$ est appelé un tenseur **décomposable**. Tout élément de $V \otimes W$ s'écrit comme une *somme finie* $v_1 \otimes w_1 + \cdots + v_N \otimes w_N$ de tenseurs décomposables. **Mais attention**, si V, W sont tous deux de dimension > 1, il existe des éléments de $V \otimes W$ qui ne sont pas décomposables ! On en verra (peut-être) des exemples plus loin.

Théorème 28.6. — *Le produit tensoriel $\otimes$ possède les propriétés suivantes :*

(1) *Il est* **associatif**, *i.e. pour tous k-ev U, V, W, il existe un unique isomorphisme*

$$f : (U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$$

tel que $f\big((u \otimes v) \otimes w\big) = u \otimes (v \otimes w)$ pour tout $u \in U$, $v \in V$, $w \in W$.

(2) *Il est* **commutatif**, *i.e. il existe un unique isomorphisme $g : U \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes U$ tel que $g(u \otimes v) = v \otimes u$ pour tout $u \in U$, $v \in V$.*

Pour faire la démonstration, il est utile de disposer du résultat suivant.

Lemme 28.7. — (i) *Soient V, W, F des k-ev. Les applications G et D qui à tout $b \in \mathrm{Bil}(U, V; F)$ associent respectivement les applications linéaires*

$$G(b) : U \to \mathrm{Hom}(V, F), \quad u \mapsto b(u, -), \qquad\qquad D(b) : V \to \mathrm{Hom}(U, F), \quad v \mapsto b(-, v)$$

i.e. $G(b)(u)(v) = b(u, v) = D(b)(v)(u)$ pour tout $u \in U$ et $v \in V$, sont des isomorphismes de k-espaces vectoriels. On a donc des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, F)) = \mathrm{Bil}(U, V; F) = \mathrm{Hom}(V, \mathrm{Hom}(U, F))$$

(ii) *Plus généralement, pour des k-ev $V_1, \ldots, V_p, F$, on a des isomorphismes canoniques :*

$$\begin{aligned} \mathrm{Mult}^p(V_1, \ldots, V_p; F) &= \mathrm{Hom}\left(V_p, \mathrm{Mult}^{p-1}(V_1, \ldots, V_{p-1}; F)\right) \\ &= \mathrm{Hom}\Big(V_p, \mathrm{Hom}\left(V_{p-1}, \mathrm{Mult}^{p-2}(V_1, \ldots, V_{p-2}; F)\right)\Big) = \cdots \end{aligned}$$

Démonstration. — Soit G' l'application qui à tout $f \in \mathrm{Hom}(U, \mathrm{Hom}(V, F))$ associe l'application bilinéaire

$$G'(f) : U \times V \to F, \quad (u, v) \mapsto f(u)(v).$$

Alors on a $G(G'(f))(u) = G'(f)(u, -) = f(u)$ donc $G \circ G' = \mathrm{id}$. De même, pour tout $b \in \mathrm{Bil}(U, V; F)$ on a $G'(G(b))(u, v) = G(b)(u)(v) = b(u, v)$, donc $G' \circ G = \mathrm{id}$. Ceci prouve que G et G' sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre. On obtient de même le second isomorphisme de (i), ainsi que la généralisation (ii). $\square$

Démonstration du théorème 28.6. — (1) Pour tout k-ev F, on a des isomorphismes canoniques

$$\mathrm{Hom}\big((U \otimes V) \otimes W, F\big) = \mathrm{Hom}\big(U \otimes V, \mathrm{Hom}(W, F)\big) = \mathrm{Hom}\Big(U, \mathrm{Hom}\big(V, \mathrm{Hom}(W, F)\big)\Big)$$

et

$$\mathrm{Hom}\big(U \otimes (V \otimes W), F\big) = \mathrm{Hom}\big(U, \mathrm{Hom}(V \otimes W, F)\big) = \mathrm{Hom}\Big(U, \mathrm{Hom}\big(V, \mathrm{Hom}(W, F)\big)\Big)$$

qui à toute application linéaire $f : (U \otimes V) \otimes W \to F$ (resp. $g : U \otimes (V \otimes W) \to F$) associe l'application trilinéaire T_f (resp. T_g) de $U \times V \times W$ vers F telle que

$$T_f(u, v, w) = f\big((u \otimes v) \otimes w\big), \qquad T_g(u, v, w) = g\big(u \otimes (v \otimes w)\big).$$

Ceci prouve le point (1). Le point (2) s'obtient en notant que l'on a un isomorphisme canonique $\mathrm{Bil}(U, V; F) = \mathrm{Bil}(V, U; F)$, obtenu en associant à tout application bilinéaire $b : U \times V \to F$ l'application bilinéaire $b' : V \times U \to F$ définie par $b'(v, u) = b(u, v)$. □

Notation 28.8. — Comme le produit tensoriel est associatif, on peut omettre les parenthèses, i.e. le produit tensoriel $(U \otimes V) \otimes W = U \otimes (V \otimes W)$ sera noté $U \otimes V \otimes W$.

En particulier, pour tout entier $p \geq 1$, on pose $T^p(V) = V^{\otimes p} = V \otimes \cdots \otimes V$ (p facteurs). Pour tous $p, q \in \mathbb{N}^*$ on a donc un isomorphisme canonique

$$T^p(V) \otimes T^q(V) \xrightarrow{\sim} T^{p+q}(V)$$

envoyant $(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \otimes (v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q)$ sur $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q$.

On pose aussi $T^0(V) = k$. Alors, tenant compte du point (iii) du théorème 28.4, on obtient pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ un isomorphisme canonique

$$(\star) \qquad T^p(V) \otimes T^q(V) \xrightarrow{\sim} T^{p+q}(V).$$

En fait, la démonstration du théorème 28.6 prouve le résultat suivant dans le cas où $n = 3$, et en procédant par récurrence on obtient le théorème ci-dessous.

***Théorème 28.9* (Propriété universelle de $V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$)**. — *Soient V_1, …, V_n des k-ev.*

(i) *L'application $\tau_n : V_1 \times \cdots \times V_n \to V_1 \otimes \cdots \otimes V_n$, $(v_1, \dots, v_n) \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$ est n-linéaire.*

(ii) *Pour tout k-ev F, on a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{Hom}(V_1 \otimes \cdots \otimes V_n, F) = \mathrm{Mult}^n(V_1, \dots, V_n; F), \qquad f \mapsto f \circ \tau_n$$

i.e. pour toute application n-linéaire $\alpha : V_1 \times \cdots \times V_n \to F$, il existe une unique application linéaire $f : V_1 \otimes \cdots \otimes V_n \to F$ telle que $f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) = \alpha(v_1, \dots, v_n)$ pour tous $v_1 \in V_1$, …, $v_n \in V_n$.

29. Algèbre tensorielle $T(V)$

Commençons par le « rappel » suivant.

***Rappel 29.1* (Sommes directes arbitraires)**. — Soit I un ensemble d'indices arbitraire, i.e. pas nécessairement fini. Pour tout $i \in I$, soit V_i un k-ev. Par définition, le **produit** des V_i, noté $\prod_{i \in I} V_i$ est l'espace vectoriel des familles $(v_i)_{i \in I}$, où $v_i \in V_i$ pour tout $i \in I$. Évidemment, la structure d'espace vectoriel est définie terme à terme, i.e. $\lambda(v_i) + (v'_i) = (\lambda v_i + v'_i)$.

La **somme directe** des V_i, notée $\bigoplus_{i \in I} V_i$, est le sev formé des familles $(v_i)_{i \in I}$, avec $v_i \in V_i$ et $v_i = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices. Si $\mathscr{B}_i = (e_i^\lambda)_{\lambda \in \Lambda_i}$ est une base de V_i, alors la réunion disjointe des $\mathscr{B}_i$, notée $\bigsqcup_{i \in I} \mathscr{B}_i$ est une base de $S = \bigoplus_{i \in I} V_i$, i.e. tout élément $x \in S$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i \in I} v_i = \sum_{i \in I} \sum_{\lambda \in \Lambda_i} \alpha_{i,\lambda}\, e_i^\lambda,$$

avec les $v_i \in V_i$ et $\alpha_{i,\lambda} \in k$ nuls sauf pour un nombre fini d'indices.

Par exemple, l'anneau de polynômes $k[X]$ est la somme directe des k-ev $V_n = kX^n$, tous de dimension 1, puisque tout polynôme P s'écrit de façon unique

$$P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$$

avec les $a_n \in k$ nuls sauf pour un nombre fini d'indices.

Bien sûr, si I est fini l'inclusion $\bigoplus_{i\in I} V_i \subset \prod_{i\in I} V_i$ est une égalité, mais si I est infini (et chaque V_i non nul) cette inclusion est stricte.

Signalons au passage la proposition suivante, qui se déduit de la démonstration du théorème 28.4.

Proposition 29.2. — *Le produit tensoriel commute aux sommes directes arbitraires, i.e. pour toute famille $(V_i)_{i\in I}$ de k-ev on a un isomorphisme canonique*

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} V_i\Big) \otimes W = \bigoplus_{i\in I} (V_i \otimes W).$$

***Définition 29.3* (k-ev gradués)**. — Soit V un k-espace vectoriel. On dit que V est $\mathbb{N}$-gradué s'il est la somme directe de sous-espaces vectoriels V_n, pour $n \in \mathbb{N}$, i.e. si

$$V = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} V_n.$$

Dans ce cas, V_n s'appelle la *composante homogène de degré n* de V. Tout élément non nul de V_n est appelé un élément homogène de degré n. Il résulte de la définition que tout $v \in V$ s'écrit de façon unique $v = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ avec $v_n \in V_n$ et $v_n = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices ; chaque v_n s'appelle la composante homogène de degré n de v.

On définit de même la notion de k-ev $\mathbb{Z}$-gradué. Par exemple,

$$k[X] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} kX^n, \qquad \text{resp.} \qquad k[X, X^{-1}] = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} kX^n$$

est $\mathbb{N}$-gradué (resp. $\mathbb{Z}$-gradué). Plus généralement,

$$A = k[X_1, \ldots, X_p] = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

est $\mathbb{N}$-gradué, où A_n désigne le k-ev des polynômes en $X_1, \ldots, X_p$ qui sont homogènes de degré total n.

***Définitions 29.4* (k-algèbres et k-algèbres graduées)**. — Soit A un k-ev. D'après la propriété universelle du produit tensoriel, se donner sur A une « multiplication » bilinéaire $m : A \times A \to A$ équivaut à se donner l'application linéaire $\mu : A \otimes A \to A$ telle que $\mu(a \otimes b) = m(a, b)$. Dire que m est associative, i.e. que $m(a, m(b, c)) = m(m(a, b), c)$ pour tous $a, b, c \in A$, équivaut à dire que

$$(*) \qquad \mu(a \otimes \mu(b \otimes c)) = \mu(\mu(a \otimes b) \otimes c)$$

pour tous $a, b, c \in A$. De plus, comme les deux membres de $(*)$ sont trilinéaires, i.e. linéaires en a, b et c, il suffit de vérifier cette égalité lorsque a, b, c parcourent chacun un système de générateurs (par exemple une base) de A.

Enfin, dire que A possède un élément unité 1 signifie que $\mu(1 \otimes a) = a = \mu(a \otimes 1)$ pour tout $a \in A$. Et, comme plus haut, il suffit de vérifier cette égalité lorsque a parcourt un système de générateurs (par exemple une base) de A.

Dans la suite, on ne considérera que des k-algèbres **associatives avec élément unité** et pour abréger on écrira souvent « k-algèbre » au lieu de « k-algèbre associative avec unité ».

Si de plus $A = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n$ est $\mathbb{N}$-graduée, on dit que la multiplication $\mu : A \otimes A \to A$ est **graduée** si pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ on a $\mu(A_p \otimes A_q) \subset A_{p+q}$. Noter que, d'après la proposition précédente, on a

$$A \otimes A = \bigoplus_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} A_p \otimes A_q.$$

Par conséquent, pour se donner sur A une structure de k-algèbre (associative avec unité) graduée, il suffit de définir un élément $1 \in A_0$ et pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ une application linéaire $\mu_{p,q} : A_p \otimes A_q \to A_{p+q}$, d'où une application linéaire $A \otimes A \to A$, et de vérifier que pour tous éléments homogènes a, b, c on a l'égalité d'associativité $(*)$ ainsi que l'égalité $\mu(1 \otimes a) = a = \mu(a \otimes 1)$.

Définition 29.5. — Soit V un k-ev. On définit son **algèbre tensorielle** $T(V)$ par :

$$T(V) = \bigoplus_{p\in\mathbb{N}} T^p(V) = k \oplus V \oplus V^{\otimes 2} \oplus V^{\otimes 3} \oplus \cdots$$

Les isomorphismes canoniques $T^p(V) \otimes T^q(V) \xrightarrow{\sim} T^{p+q}(V)$ définissent une multiplication bilinéaire graduée sur $T(V)$, pour laquelle l'élément $1 \in k = T^0(V)$ est élément neutre. De plus, cette multiplication est associative puisque pour tous $v_1, \dots, v_{p+q+r} \in V$ on a :

$$\begin{aligned}\Big((v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot (v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q})\Big) \cdot (v_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q+r}) &= v_1 \otimes \cdots \otimes v_{p+q+r} \\ &= (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) \cdot \Big((v_{p+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q}) \cdot (v_{p+q+1} \otimes \cdots \otimes v_{p+q+r})\Big).\end{aligned}$$

On identifie V à la partie homogène de degré un $T^1(V) = V$.

***Définition 29.6* (Idéaux bilatères et algèbres quotients)**

Soit A une k-algèbre associative avec unité et soit I un sev de A. On dit que :

(1) I est un idéal à gauche (resp. à droite) si pour tout $x \in I$, $a \in A$ on a : $ax \in I$ (resp. $xa \in I$).

(2) I est un idéal *bilatère* si c'est un idéal à gauche et à droite, i.e. si pour tout $x \in I$, $a, b \in A$ on a : $axb \in I$.

Soit I un idéal bilatère ; pour tout $a \in A$ notons $a + I$ l'image de a dans l'espace vectoriel quotient A/I. Alors A/I est muni d'une structure de k-algèbre définie par :

$$(a + I)(b + I) = ab + I. \tag{†}$$

Cette multiplication est bien définie car pour tout $x, y \in I$ on a

$$(a + x)(b + y) = ab + xb + ay + xy$$

et, puisque I est un idéal bilatère, chacun des termes xb, ay et xy appartient à I. Ceci montre que la classe $ab + I$ ne dépend que des classes $a + I$ et $b + I$ (et non du choix de a et b dans ces classes). Ayant ainsi vérifié que la multiplication (†) est bien définie, il est immédiat de voir qu'elle est associative et possède $1 + I$ comme élément neutre.

Pour tout morphisme de k-algèbres $\phi : A \to B$, son noyau $I = \operatorname{Ker}(\phi)$ est un idéal bilatère de A. On obtient alors que ϕ induit un morphisme d'algèbres $\overline{\phi} : A/I \to B$ défini par $\overline{\phi}(a + I) = \phi(a)$.

***Théorème 29.7* (Propriété universelle de $T(V)$).** — *La k-algèbre $T(V)$ possède la propriété universelle suivante : pour toute k-algèbre A et toute application linéaire $f : V \to A$, il existe un unique morphisme de k-algèbres associatives avec unité $\phi : T(V) \to A$ tel que $\phi(v) = f(v)$ pour tout $v \in V$.*

Si de plus A est engendrée comme k-algèbre par $f(V)$ alors ϕ est surjectif donc induit un isomorphisme de k-algèbres $\overline{\phi} : T(V)/I \xrightarrow{\sim} A$, où $I = \mathrm{Ker}(\phi)$.

Démonstration. — Pour tout $p \geq 1$, l'application $V^p \to A$, $(v_1, \dots, v_p) \mapsto f(v_1) \cdots f(v_p)$ est p-linéaire. Donc, d'après la propriété universelle du produit tensoriel 28.9, il existe une unique application linéaire $\phi_p : T^p(V) \to A$ telle que

$$\phi_p(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = f(v_1) \cdots f(v_p) \tag{$\heartsuit$}$$

pour tout $v_1, \dots, v_p \in V$. Soit $\phi_0 = T^0(V) = k \to A$ l'unique application linéaire telle que $\phi_0(1) = 1_A$. Comme $T(V)$ est la somme directe des $T^p(V)$, il existe une unique application linéaire $\phi : T(V) \to A$ telle que $\phi(x) = \phi_p(x)$ pour tout $x \in T^p(V)$. Montrons que ϕ est un morphisme d'algèbres. Déjà, on a $\phi(1) = 1_A$. Prouvons que $\phi(ab) = \phi(a)\phi(b)$ pour tout $a, b \in A$. Comme les deux membres sont linéaires en a et b, il suffit de le vérifier lorsque $a = v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ et $b = v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q$, auquel cas c'est clair :

$$\phi(ab) = \phi(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \otimes v'_1 \otimes \cdots \otimes v'_q) = f(v_1) \cdots f(v_p) f(v'_1) \cdots f(v'_q) = \phi(a)\phi(b).$$

Ceci prouve l'existence de ϕ. De plus, étant un morphisme de k-algèbres avec unité, ϕ doit nécessairement vérifier $\phi(1) = 1_A$ ainsi que ($\heartsuit$). Ceci prouve l'unicité, d'où la première assertion. Pour la seconde, rappelons que « A est engendrée comme k-algèbre par $f(V)$ » signifie que les produits $f(v_1) \cdots f(v_n)$ engendrent A comme k-espace vectoriel. Sous cette hypothèse, il est clair que ϕ est surjective, d'où la seconde assertion. □

Dans les sections suivantes, on aura besoin de la notion ci-dessous.

***Définition 29.8* (Idéaux gradués).** — Soient $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ une k-algèbre graduée et I un idéal bilatère de A. Pour tout n, on pose $I_n = I \cap A_n$. Les projections $\pi_n : A_n \to A_n/I_n$ induisent une application linéaire surjective

$$\pi : A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n \to \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (A_n/I_n)$$

dont le noyau est $I' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I_n$, qui est un idéal bilatère car pour tous $a \in A_p$, $b \in A_q$ et $x \in I_n$ on a $axb \in I \cap A_{p+n+q} = I_{p+n+q}$. Par conséquent, l'algèbre quotient A/I' est graduée, i.e. on a

$$A/I' = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} (A_n/I_n).$$

On dit que I est un **idéal gradué** si l'inclusion $I' \subset I$ est une égalité. Dans ce cas l'algèbre quotient A/I égale A/I' et est donc graduée.

Attention : un idéal bilatère de A n'est pas nécessairement gradué. Par exemple, prenons $A = k[X]$, graduée par $A_n = kX^n$, et soit I l'idéal engendré par $X - 1$; pour tout n on a $I \cap A_n = \{0\}$ donc $I' = \{0\}$, ce qui montre que I n'est pas un idéal gradué. La proposition suivante donne un critère pour que I soit gradué.

***Proposition 29.9* (Idéaux gradués et éléments homogènes)**

Soient $A = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$ une k-algèbre graduée et I un idéal bilatère de A. Pour tout n, posons $I_n = I \cap A_n$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) *I est gradué, i.e.* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} I_n = I$.
(ii) *Tout élément de I est somme d'éléments homogènes appartenant à I.*
(iii) *Pour tout $x \in I$, chaque composante homogène x_n de x appartient à I.*
(iv) *I est engendré comme idéal par des éléments homogènes.*

Démonstration. — La somme des I_n est directe et contenue dans I ; elle lui est égale ssi la condition (ii) ou (iii) est vérifiée. Ceci prouve l'équivalence de (i), (ii) et (iii).

Supposons que I soit engendré comme idéal par des éléments x_λ, où chaque x_λ est homogène de degré d_λ, pour λ variant dans un ensemble d'indices Λ. Ceci signifie que I est engendré comme k-ev par les éléments $ax_\lambda b$, pour $\lambda \in \Lambda$ et $a, b \in A$. Comme chaque a (resp. b) est somme de ses composantes homogènes a_p (resp. b_q) on obtient que I est engendré comme k-ev par les éléments homogènes $a_p x_\lambda b_q$, donc (ii) est vérifié.

Enfin, supposons (iii) vérifié et soit $(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ un système quelconque de générateurs de l'idéal I. Par hypothèse, chaque composante homogène $x_{\lambda,n}$ de x_λ appartient à I, donc I est *a fortiori* engendré par les éléments homogènes $x_{\lambda,n}$, pour $\lambda \in \Lambda$ et $n \in \mathbb{N}$. Ceci prouve l'équivalence des quatre conditions. □

30. Algèbre extérieure $\Lambda(V)$

Définition 30.1. — On pose $\Lambda(V) = T(V)/I$, où I est l'idéal bilatère engendré par les éléments homogènes $v \otimes v \in T^2(V)$, pour v parcourant V. C'est un idéal gradué, contenu dans $\bigoplus_{n\geq 2} T^n(V)$, i.e. tel que $I_n = I \cap T^n(V)$ est nul pour $n = 0, 1$. Posant $\Lambda^p(V) = T^p(V)/I_p$ on a donc

$$\Lambda(V) = k \oplus V \oplus \Lambda^2(V) \oplus \cdots$$

Pour $v_1, \ldots, v_p \in V$, on note $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ l'image de $v_1 \otimes \cdots \otimes v_p$ dans $\Lambda^p(V)$. Noter que l'application

$$\theta_p : V^p \to \Lambda^p(V), \qquad (v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$$

est p-linéaire, étant la composée de l'application p-linéaire $\tau_p : V^p \to T^p(V)$ et de l'application linéaire $\pi_p : T^p(V) \to \Lambda^p(V)$.

Proposition 30.2. — *Soient $v_1, \ldots, v_p \in V$.*
(1) *Pour toute permutation $\sigma \in S_p$, notant $\varepsilon(\sigma)$ sa signature, on a :*

$$v_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge v_{\sigma(p)} = \varepsilon(\sigma)\, v_1 \wedge \cdots \wedge v_p.$$

(2) *S'il existe $i < j$ tels que $v_i = v_j$ alors $v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = 0$.*
(3) *Par conséquent, l'application $\theta_p : (v_1, \ldots, v_p) \mapsto v_1 \wedge \cdots \wedge v_p$ est p-linéaire* **alternée***.*

Démonstration. — (1) Fixons $i \in \{1, \ldots, p-1\}$ et posons $u = v_1 \wedge \cdots \wedge v_{i-1}$ et $w = v_{i+2} \wedge \cdots \wedge v_p$. Pour tous $v, v' \in V$, on a :

$$0 = u \wedge (v+v') \wedge (v+v') \wedge w = u \wedge v \wedge v \wedge w + u \wedge v' \wedge v' \wedge w + u \wedge v \wedge v' \wedge w + u \wedge v' \wedge v' \wedge w$$

et comme $u \wedge v \wedge v \wedge w = 0 = u \wedge v' \wedge v' \wedge w$, on obtient que

$$u \wedge v' \wedge v' \wedge w = -u \wedge v \wedge v' \wedge w.$$

Ceci prouve (1) lorsque σ est la transposition $\tau_i = (i, i+1)$. Or on sait (exercice !) que S_p est engendré par ces transpositions, et l'assertion (1) en découle en faisant agir S_p à droite sur $\Lambda^p(V)$ par permutation des places.

Prouvons (2). D'après (1), on a

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_p = (-1)^{j-i-1} v_1 \wedge \cdots \wedge v_i \wedge v_j \wedge v_{i+2} \wedge \cdots \wedge v_p,$$

et le terme de droite est nul d'après l'hypothèse $v_j = v_i$. Enfin, (3) découle de (2). $\square$

Notation 30.3. — Pour tout k-ev F, on note $\mathrm{Alt}^p(V, F)$ l'espace vectoriel des applications p-linéaires alternées $V^p \to F$. Noter que comme l'application $\theta_p : V^p \to \Lambda^p(V)$ est p-linéaire alternée, alors $f \circ \theta_p \in \mathrm{Alt}^p(V, F)$ pour toute application linéaire $f : \Lambda^p(V) \to F$.

Théorème 30.4. — *Pour tout k-ev F, on a un isomorphisme canonique*

$$(\spadesuit) \qquad \mathrm{Hom}(\Lambda^p(V), F) = \mathrm{Alt}^p(V, F), \qquad g \mapsto g \circ \theta_p$$

i.e. pour toute application p-linéaire alternée $\alpha : V^p \to F$, il existe une unique application linéaire $g : \Lambda^p(V) \to F$ telle que $f(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \alpha(v_1, \ldots, v_p)$ pour tous $v_1, \ldots, v_p \in V$.

Démonstration. — Rappelons d'abord que θ_p est la composée de l'application p-linéaire $\tau_p : V^p \to T^p(V)$ et de la projection $\pi_p : T^p(V) \to \Lambda^p(V)$. D'après la propriété universelle du produit tensoriel 28.9, on a un isomorphisme canonique

$$(\diamondsuit) \qquad \mathrm{Hom}(T^p(V), F) = \mathrm{Mult}^p(V, F), \qquad f \mapsto f \circ \tau_p.$$

Comme $\Lambda^p(V) = T^p(V)/I_p$, alors le terme de gauche de $(\spadesuit)$ est formé des applications linéaires $f : T^p(V) \to F$ qui s'annulent sur I_p, i.e. qui se factorisent en $f = \overline{f} \circ \pi_p$, pour une application linéaire (unique puisque π_p est surjectif) $\overline{f} : \Lambda^p(V) \to F$.

Dans ce cas, l'application p-linéaire $f \circ \tau_p = \overline{f} \circ \theta_p$ est alternée, puisque θ_p l'est. Ceci montre que l'isomorphisme $(\diamondsuit)$ envoie $\mathrm{Hom}(\Lambda^p(V), F)$ dans $\mathrm{Alt}^p(V, F)$.

Réciproquement, soit $\alpha \in \mathrm{Alt}^p(V, F)$ et soit $f : T^p(V) \to F$ l'unique application linéaire telle que

$$f(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = \alpha(v_1, \ldots, v_p)$$

pour tous $v_1, \ldots, v_p$. Par définition, I_p est engendré comme k-espace vectoriel par les tenseurs

$$x \otimes v \otimes v \otimes y,$$

où $v \in V$ se trouve aux places i et $i + 1$, et $x \in T^{i-1}(V)$, $y \in T^{p-i-1}(V)$. Comme α est alternée, alors f s'annule sur tout tel tenseur, donc sur I_p. Par conséquent, f se factorise en $f = \overline{f} \circ \pi_p$ et l'on a $\alpha = \overline{f} \circ \theta_p$. Ceci prouve le théorème. $\square$

Théorème 30.5. — *Supposons* $\dim(V) = n$ *et soit* $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ *une base de* V*. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{I}_p(n) = \{(i_1, \ldots, i_p) \in \mathbb{N}^p \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n\}$ et pour tout $I = (i_1, \ldots, i_p)$ dans $\mathcal{I}_p(n)$, posons*

$$e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}.$$

Alors les e_I, pour $I \in \mathcal{I}_p(n)$, forment une base de $\Lambda^p(V)$. On a donc $\Lambda^p(V) = \{0\}$ si $p > n$ et $\dim \Lambda^p(V) = \binom{n}{p}$ *pour $p \leq n$. En particulier, $\Lambda^n(V)$ est de dimension* 1*, engendré par $e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$.*

Démonstration. — $T^p(V)$ est engendré par les tenseurs $e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_p}$ pour $1 \leq j_1, \ldots, j_p \leq n$ donc $\Lambda^p(V)$ est engendré par leurs images $e_J = e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_p}$. D'autre la proposition 30.2, si deux des indices sont égaux le p-vecteur e_J est nul, et si les indices sont tous distincts alors $e_J = \pm e_I$ où I est l'unique élément de $\mathcal{I}_p(n)$ obtenu en renumérotant les j_ℓ dans l'ordre croissant. Ceci montre que les e_I, pour $I \in \mathcal{I}_p(n)$, engendrent $\Lambda^p(V)$.

Montrons qu'ils sont linéairement indépendants. Soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Pour tout $F = (f_1, \dots, f_p) \in V^{*p}$, l'application

$$D_F : V^p \to k, \qquad (v_1, \dots, v_p) \mapsto \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}$$

est p-linéaire alternée donc, d'après la propriété universelle 30.4, il existe une unique forme linéaire $g_F : \Lambda^p(V) \to k$ telle que

$$g_F(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = D_F(v_1, \dots, v_p).$$

Pour tout $J = (j_1, \dots, j_p) \in \mathcal{I}_p(n)$, appliquons ceci au p-uplet $F_J = (e_{j_1}^*, \dots, e_{j_p}^*)$ et notons g_J la forme linéaire sur $\Lambda^p(V)$ correspondante. Pour tous $I, J \in \mathcal{I}_p(n)$, on voit facilement que la matrice

$$\begin{pmatrix} e_{j_1}^*(e_{i_1}) & \cdots & e_{j_1}^*(e_{i_p}) \\ \vdots & & \vdots \\ e_{j_p}^*(e_{i_1}) & \cdots & e_{j_p}^*(e_{i_p}) \end{pmatrix}$$

a au moins une ligne nulle si $J \neq I$ et est la matrice identité si $J = I$. Il en résulte que

$$(*) \qquad g_J(e_I) = \begin{cases} 1 & \text{si } J = I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci prouve que les e_I, pour $I \in \mathcal{I}_p(n)$, sont linéairement indépendants : en effet si l'on a une égalité $\sum_{I \in \mathcal{I}_p(n)} \lambda_I e_I = 0$ avec $\lambda_I \in k$, alors en appliquant g_J on trouve $\lambda_J = 0$. □

Proposition 30.6. — (i) *On a une application linéaire canonique* $\Lambda^p(V^*) \to \Lambda^p(V)^*$.

(ii) *Elle est bijective si V est de dimension finie, donc on a dans ce cas un isomorphisme canonique* $\Lambda^p(V^*) = \Lambda^p(V)^*$.

Démonstration. — Pour tout $F = (f_1, \dots, f_p) \in V^{*p}$, notons $g(F)$ la forme linéaire $\Lambda^p(V) \to k$ notée g_F dans la démonstration précédente, i.e. pour tout $v_1, \dots, v_p \in V$:

$$g(F)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}.$$

Il résulte des propriétés du déterminant que l'application $V^{*p} \to \Lambda^p(V)^*$, $F \mapsto g_F$ est p-linéaire alternée. Donc, d'après la propriété universelle 30.4, il existe une unique application linéaire

$$\phi : \Lambda^p(V^*) \to \Lambda^p(V)^*$$

telle que $\phi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p) = g(f_1, \dots, f_p)$ pour tous $f_1, \dots, f_p \in V^*$ et donc

$$(\dagger) \qquad \phi(f_1 \wedge \cdots \wedge f_p)(v_1 \wedge \cdots \wedge v_p) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & \cdots & f_1(v_p) \\ \vdots & & \vdots \\ f_p(v_1) & \cdots & f_p(v_p) \end{vmatrix}$$

pour tous $f_1, \dots, f_p \in V^*$ et $v_1, \dots, v_p \in V$. Ceci prouve (i).

(ii) Supposons V de dimension finie et soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Pour tous $I, J \in \mathcal{I}_p(n)$ notons $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_p}$ et $e_J^* = e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_p}^*$. Alors, les e_I (resp. e_J^*) forment une base $\mathscr{B}_p$ de $\Lambda^p(V)$ (resp. $\mathscr{C}_p$ de

$\Lambda^p(V^*)$). Notons également $\mathscr{B}_p^*$ la base de $\Lambda^p(V)^*$ duale de $\mathscr{B}_p$. D'après la définition (†), on a

$$\phi(e_J^*)(e_I) = \begin{cases} 1 & \text{si } J = I, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que ϕ envoie la base $\mathscr{C}_p$ de $\Lambda^p(V^*)$ sur la base $\mathscr{B}_p^*$ de $\Lambda^p(V)^*$. Par conséquent, ϕ est un isomorphisme. □

Remarque 30.7. — Soit V un k-ev de dimension finie. Rappelons qu'on a un isomorphisme canonique $V = V^{**}$. Combiné avec le théorème 30.4 et la proposition 30.6, ceci donne les isomorphismes canonique suivants :

$$\mathrm{Alt}^p(V^*, k) = \mathrm{Hom}(\Lambda^p(V^*), k) = \Lambda^p(V^*)^* = \Lambda^p(V^{**}) = \Lambda^p(V).$$

Ceci justifie la définition *ad hoc* $\Lambda^p(V) = \mathrm{Alt}^p(V^*, k)$ donnée dans le chapitre 6.

31. Le plongement $\mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) \subset \mathbb{P}^{rs+r+s}(k)$

Proposition 31.1. — *Soient V, W des k-espaces vectoriels.*

(i) *On a une application linéaire canonique $\phi : V^* \otimes W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ telle que, pour tous $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$:*

$$\phi(f \otimes w)(v) = f(v)w.$$

(ii) *Si V et W sont de dimension finie, ϕ est un isomorphisme.*

Démonstration. — (i) L'application $\theta : V^* \times W \to \mathrm{Hom}(V, W)$ définie par $\theta(f, w)(v) = f(v)w$ pour tous $f \in V^*$, $w \in W$ et $v \in V$ est bilinéaire. Donc il existe une unique application linéaire ϕ comme désiré.

(ii) Posons $q = \dim(V)$, $p = \dim(W)$ et soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_q)$ et $\mathscr{B}' = (w_1, \dots, w_p)$ des bases de V et W. Soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_q^*)$ la base duale de V^*. Alors les $e_j^* \otimes w_i$, pour $i = 1, \dots, p$ et $j = 1, \dots, q$ forment une base $\mathscr{C}$ de $V^* \otimes W$.

D'autre part, via le choix des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, $\mathrm{Hom}(V, W)$ s'identifie au k-ev $M_{p,q}(k)$ des matrices à p lignes et q colonnes. Les matrices élémentaires E_{ij} en forment une base. Rappelons que E_{ij} désigne la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice (i, j) qui vaut 1 ; elle correspond à l'application linéaire $u : V \to W$ telle que $u(e_j) = w_i$ et $u(e_\ell) = 0$ pour $\ell \neq j$. Or, pour $\ell = 1, \dots, q$ on a :

$$\phi(e_j^* \otimes w_i)(e_\ell) = e_j^*(e_\ell)w_i = \begin{cases} w_i & \text{si } j = \ell, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ceci montre que ϕ envoie la base $\mathscr{C}$ sur la base des E_{ij}. Par conséquent ϕ est un isomorphisme. □

Remarque 31.2. — Pour V, W arbitraires, on peut montrer que ϕ est injective et que son image est formée des applications linéaires $u : V \to W$ de rang fini. En particulier, ϕ est un isomorphisme si V ou W est de dimension finie. Mais pour V et W de dimension infinie, ϕ n'est pas surjective. Par exemple, si $W = V$ est de dimension infinie alors id_V n'est pas de rang fini donc n'appartient pas à l'image de ϕ.

***Définition 31.3* (Mineurs de taille r et matrices de rang 1)**

Soient p, q des entiers ≥ 2. Pour $A \in M_{pq}(k)$, on note a_{ij} son coefficient d'indice (i, j). On rappelle que le rang de A est le nombre maximum de colonnes de A qui sont linéairement indépendantes.

Soit r un entier tel que $0 < r \leq p, q$ et soit I (resp. J) un sous-ensemble de cardinal r de $\{1, \dots, p\}$ (resp. de $\{1, \dots, q\}$). Alors le **mineur** $\Delta_{I,J}(A)$ est le déterminant de la sous-matrice de taille r formée par les lignes L_i et colonnes C_j de A d'indices $i \in I$ et $j \in J$. On dit que $\Delta_{I,J}(A)$ est un **mineur de taille** r. Par exemple, si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ \ell & m & n & s \end{pmatrix}$$

alors

$$\Delta_{\{1,3\},\{2,4\}}(A) = \begin{vmatrix} b & d \\ m & s \end{vmatrix} = bs - dm.$$

On « rappelle » que A est de rang $< r$ si et seulement si tous les mineurs de A de taille r sont nuls.

Par conséquent, le sous-ensemble $\mathscr{C}_1(p, q)$ de $M_{p,q}(k)$ formé des matrices de rang ≤ 1 (i.e. la matrice nulle et les matrices de rang 1) est la « *sous-variété algébrique* » de $M_{p,q}(k)$ définie par les équations polynomiales homogènes de degré 2 :

$$0 = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} \end{vmatrix} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} - a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}$$

pour $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$ et $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$. C'est un *cône*, i.e. si A y appartient alors λA y appartient aussi pour tout $\lambda \in k$. On dit que $\mathscr{C}_1(p, q)$ privé du vecteur nul est un *cône épointé*.

Proposition 31.4. — *Soient V, W deux k-ev de dimension finie, posons $E = \operatorname{Hom}(V, W)$. Soit $\mathscr{C}_1$ le cône de E formé de 0 et des applications linéaires $u : V \to W$ de rang 1 et soit $\mathscr{C}_1^\times = \mathscr{C}_1 - \{0\}$.*

(i) *L'application $\psi : \mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W) \to \mathbb{P}(E)$, $([f], [w]) \mapsto [f \otimes w]$ est bien définie et injective.*

(ii) *L'image X de ψ est l'image dans $\mathbb{P}(E)$ de $\mathscr{C}_1^\times$, i.e.*

$$X = \psi\Big(\mathbb{P}(V^*) \times \mathbb{P}(W)\Big) = \{[u] \in \mathbb{P}(E) \mid u \in \mathscr{C}_1^\times\}.$$

(iii) *Identifions E à $M_{p,q}(k)$ via le choix de bases de V et W. Alors X est la sous-variété algébrique de $\mathbb{P}(M_{p,q}(k))$ définie par les équations polynomiales homogènes de degré 2 :*

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}$$

pour $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$ et $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$.

Démonstration. — (i) Si on remplace f et w par λv et μw, avec $\lambda, \mu \in k^\times$, alors $(\lambda f) \otimes (\mu w) = \lambda\mu(f \otimes w)$, donc ψ est bien définie. Notons u l'application linéaire $\phi(f \otimes w) : V \to W$, $v \mapsto f(v)w$. Alors $\operatorname{Im}(u) = kw$ et $\operatorname{Ker}(u)$ est l'hyperplan $\operatorname{Ker}(f)$ de V. Tous les mutiples λu avec $\lambda \in k^\times$ ont même image et même noyau, donc la donnée de $[u]$ détermine la droite kw de W ainsi que la droite kf de V^*. Ceci montre que ψ est injective.

(ii) On vient de voir que $\phi(f \otimes w)$ est de rang 1. Réciproquement, soit $u : V \to W$ de rang 1 et soit w un générateur de $\operatorname{Im}(u)$. Alors il existe une application $f : V \to k$ telle que $u(v) = f(v)w$ pour tout $v \in V$ et, comme u est linéaire, f l'est aussi, i.e. $f \in V^*$. On a donc $u = \phi(f \otimes w)$. Ceci montre que l'image X de ψ est l'image dans $\mathbb{P}(E)$ du cône épointé $\mathscr{C}_1^\times$. L'assertion (iii) en découle en tenant compte de la définition précédente. $\square$

Posons $r = q-1$ et $s = p-1$. Prenant des bases $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_q)$ et $\mathscr{C} = (w_1, \dots, w_p)$ de V et W, ainsi que la base duale $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \dots, e_q^*)$ de V^*, on peut identifier $\mathbb{P}(V^*)$ à $\mathbb{P}^r(k)$ et $\mathbb{P}(W)$ à $\mathbb{P}^s(k)$, i.e. le point de $\mathbb{P}^r(k)$ (resp. de $\mathbb{P}^s(k)$) de coordoonnées homogènes $[y_1 : \cdots : y_q]$ (resp. $[x_1 : \cdots : x_p]$) correspond à $[y_1 e_1^* + \cdots y_q e_q^*]$ (resp. $[x_1 w_1 + \cdots + x_p w_p]$).

On a vu que $\phi(e_j^* \otimes w_i)$ est la matrice élémentaire E_{ij} ; par conséquent

$$\phi\Big(\sum_{j=1}^{q} y_j e_j^* \otimes \sum_{i=1}^{p} x_i w_i\Big)$$

est la matrice $A \in M_{pq}(k)$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $x_i y_j$. Notons enfin que $M_{pq}(k)$ est de dimension $pq = rs + r + s + 1$. On obtient ainsi le :

Corollaire 31.5. — *L'application $\mathbb{P}^r(k) \times \mathbb{P}^s(k) \to \mathbb{P}^{rs+r+s}(k)$ qui associe à tout couple $\big([y_1 : \cdots : y_q], [x_1 : \cdots : x_p]\big)$ l'image dans $\mathbb{P}^{rs+r+s}(k)$ de la matrice*

$$\begin{pmatrix} x_1 y_1 & \cdots & x_1 y_q \\ \vdots & & \vdots \\ x_p y_1 & \cdots & x_p y_q \end{pmatrix}$$

est **injective**. *Son image est la sous-variété algébrique de*

$$\mathbb{P}^{rs+r+s}(k) = \{[A] = [a_{11} : \cdots : a_{pq}] \mid A \in M_{pq}(k),\ A \neq 0\}$$

définie par les équations homogènes de degré 2 : $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = a_{i_1 j_2} a_{i_2 j_1}$ pour $1 \leq i_1 < i_2 \leq p$ et $1 \leq j_1 < j_2 \leq q$.

Le cours a aussi comporté une section 32 sur l'algèbre symétrique $S(V)$ d'un k-espace vectoriel V. Cette section n'est pas au programme de l'examen. Elle sera peut-être rédigée dans une version ultérieure du polycopié.

FIN (à la date du 2/12/2016)