Corrigé de l'examen partiel du 7 novembre 2016 (2h) (noté sur 30)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Dans chaque exercice on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes. Le résultat énoncé dans la question 1.10 est utilisé dans la question 8 de l'exercice 2. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. — (environ 20 pts) Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, Q une forme quadratique sur V de signature $(2,1)$, i.e. sa matrice dans une certaine base $\mathscr{B}_0$ est $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et ϕ la forme polaire de Q. Pour toute autre base $\mathscr{B}$, notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = {}^tPA_0P$, on a donc $\mathrm{dét}(A) = -\,\mathrm{dét}(P)^2 < 0$. On considère la conique projective $\mathscr{V}(Q) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(v) = 0\}$.

Soit $f \in V^* - \{0\}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$. Comme ϕ est non dégénérée, il existe un unique $e_3 \in V$ tel que $f(v) = \phi(e_3, v)$ pour tout $v \in V$; on a donc

$$H = \{v \in V \mid \phi(e_3, v) = 0\} = (\mathbb{R}e_3)^\perp.$$

On note D_∞ la droite projective $\mathbb{P}(H)$ et l'on identifie l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ au plan affine $\mathscr{H}$ de V d'équation $1 = f(v) = \phi(e_3, v)$. Le but de l'exercice est de déterminer la nature de la conique affine $\mathscr{C}_U = \mathscr{V}(Q) \cap U$ (ellipse, parabole ou hyperbole).

I) On suppose d'abord que $Q(e_3) \neq 0$; alors, quitte à remplacer e_3 par $|Q(e_3)|^{-1/2}e_3$ on peut supposer que $Q(e_3) = \pm 1$. On pose $\varepsilon = Q(e_3)$.

(1) (3 pts) En citant des résultats du cours, montrer successivement les résultats suivants :

(a) On a $V = H \oplus \mathbb{R}e_3$.

(b) Il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de H telle $Q(e_i) = \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ pour $i = 1, 2$.

(c) En utilisant que Q est de signature $(2,1)$ montrer que, quitte à échanger les indices $1, 2$, on peut supposer que $Q(e_2) = 1$ et $Q(e_1) = -Q(e_3) = -\varepsilon$.

<u>Solution</u> : Comme $\phi(e_3, e_3) = Q(e_3) \neq 0$, la restriction de Q à $\mathbb{R}e_3$ est non dégénérée donc V est la somme directe de $\mathbb{R}e_3$ et de son orthogonal H. Soit (e_1, e_2) une base orthogonale de H. Comme Q est non dégénérée on a $Q(e_i) \neq 0$ donc, quitte à remplacer chaque e_i par $|Q(e_i)|^{-1/2}e_i$ on peut supposer que $Q(e_i) = \varepsilon_i = \pm 1$. Enfin, comme Q est de signature $(2,1)$, l'un au moins des ε_i vaut 1 et l'autre vaut $-Q(e_3) = -\varepsilon$. Donc, quitte à échanger les indices 1 et 2, on peut supposer que $Q(e_2) = 1$ et $Q(e_1) = -Q(e_3) = -\varepsilon$.

(2) (1 pt) Écrire d'une part $Q(Ze_3 + Xe_1 + Ye_2)$, et d'autre part l'équation de D_∞, en fonction de X, Y, Z.

<u>Solution</u> : D'une part, $Q(Ze_3 + Xe_1 + Ye_2) = \varepsilon Z^2 - \varepsilon X^2 + Y^2$. D'autre part, D_∞ est donnée par l'équation $Z = 0$.

(3) (2 pts) On a alors $\mathscr{H} = \varepsilon e_3 + H = \{\varepsilon e_3 + Xe_1 + Ye_2 \mid (X, Y) \in \mathbb{R}^2\}$. Écrire alors l'équation de $\mathscr{C}_U$ et déterminer sa nature en fonction de ε.

<u>Solution</u> : On a $Q(\varepsilon e_3 + Xe_1 + Ye_2) = \varepsilon - \varepsilon X^2 + Y^2$ donc l'équation de $\mathscr{C}_U$ est $X^2 - \varepsilon Y^2 = 1$. C'est une ellipse si $\varepsilon = -1$ et une hyperbole si $\varepsilon = 1$.

II) On suppose maintenant que $Q(e_3) = 0$.

(4) (3 pts) Montrer successivement les résultats suivants :

(a) Il existe $e_2 \in V$ tel que $\phi(e_2, e_3) = 1$ et $Q(e_2) = 0$.

(b) Posant $E = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, on a $V = E \oplus E^\perp$ et $\dim(E^\perp) = 1$

(c) Soit e_1 un générateur de $E^\perp$ tel que $Q(e_1) = \pm 1$. Alors on a $Q(e_1) = 1$ et $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

Solution : Comme ϕ est non dégénérée il existe $v \in V$ tel que $\lambda = \phi(v, e_3)$ soit $\neq 0$. Remplaçant v par $\lambda^{-1}v$, on se ramène au cas où $\phi(v, e_3) = 1$. Soit $c = Q(v)$. Si $c = 0$ on peut prendre $e_2 = v$. Sinon, comme

$$Q(v - \mu e_3) = Q(v) - 2\mu\phi(v, e_3) = c - 2\mu,$$

alors $e_2 = v - (c/2)e_3$ vérifie $Q(e_2) = 0$ et $\phi(e_2, e_3) = 1$. Alors e_2 n'est pas colinéaire à e_3, donc (e_2, e_3) forme une base de E et la matrice de Q_E dans cette base est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de déterminant -1. Donc Q_E est non dégénérée. Donc, d'après le cours, on a $V = E \oplus E^\perp$, $\dim(E^\perp) = 1$ et $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée. Soit alors e_1 un générateur de $E^\perp$ tel que $Q(e_1) = \eta = \pm 1$. Alors (e_1, e_2, e_3) est une base de V et la matrice de Q dans cette base est

$$A = \begin{pmatrix} \eta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme dét$(A) < 0$ on en déduit que $\eta = 1$. Enfin, e_1, e_3 sont linéairement indépendants et appartiennent au plan $H = (\mathbb{R}e_3)^\perp$, donc $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

(5) (1 pt) Écrire d'une part $Q(Ze_2 + Xe_1 + Ye_3)$, et d'autre part l'équation de D_∞, en fonction de X, Y, Z.

Solution : D'une part, $Q(Ze_2 + Xe_1 + Ye_3) = X^2 + 2ZY$. D'autre part, D_∞ est donnée par l'équation $Z = 0$.

(6) (1 pt) On a alors $\mathscr{H} = e_2 + H = \{e_2 + Xe_1 + Ye_3 \mid (X, Y) \in \mathbb{R}^2\}$. Écrire alors l'équation de $\mathscr{C}_U$ et déterminer sa nature.

Solution : On a $Q(e_2 + Xe_1 + Ye_3) = X^2 + 2Y$ donc l'équation de $\mathscr{C}_U$ est $2Y = -X^2$: c'est une parabole.

III) Points à l'infini de $\mathscr{V}(Q)$. On s'intéresse maintenant à $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$.

(7) (2 pts) Montrer que $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ consiste en :

(a) deux points distincts à coordonnées dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) si $\mathscr{C}_U$ est une ellipse (resp. une hyperbole).

(b) un point double (à coordonnées dans $\mathbb{R}$) si $\mathscr{C}_U$ est une parabole.

Solution : Si $Q(e_3) = \varepsilon$, alors $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[X : Y : 0]$ tels que $X^2 - \varepsilon Y^2 = 0$. Si $\varepsilon = -1$ (resp. 1) il s'agit des deux points $[i : 1 : 0]$ et $[-i : 1 : 0]$ (resp. $[1 : 1 : 0]$ et $[-1 : 1 : 0]$).

D'autre part, si $Q(e_3) = 0$ alors $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[Xe_1 + Ye_3]$ tels que $X^2 = 0$, i.e. on a le point double $[0 : 0 : 1]$.

IV) Le discriminant. Soient (u_1, u_2) une base quelconque de H et $u_3 \in V$ tel que $\phi(e_3, u_3) = 1$. Alors (u_1, u_2, u_3) est une base de V et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$Q(xu_1 + yu_2 + zu_3) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2a'xz + 2c'yz + b'z^2$$

pour certains $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a $\mathscr{H} = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On pose $\delta = ac - b^2$.

(8) (2 pts) Écrire la matrice A de Q dans la base (u_1, u_2, u_3) et montrer que a, b, c ne sont pas tous les trois nuls.

Solution : On a $A = \begin{pmatrix} a & b & a' \\ b & c & c' \\ a' & c' & b' \end{pmatrix}$. Comme A est inversible alors a, b, c ne sont pas tous les trois nuls (car sinon A serait de rang ≤ 2).

(9) (3 pts) En utilisant les coordonnées (x, y, z), écrire l'équation de D_∞ puis décrire $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$. Si $a \neq 0$ montrer que $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[r : 1 : 0]$ et $[s : 1 : 0]$ où r, s sont les racines (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de l'équation $at^2 + 2bt + c = 0$. Décrire également $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ lorsque $a = 0$.

Solution : D'abord, D_∞ est donnée par l'équation $z = 0$. Alors $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[x : y : 0]$ tels que $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$. Si $a \neq 0$, alors $y \neq 0$ et l'équation équivaut à ce que $t = x/y$ soit racine de l'équation $at^2 + 2bt + c = 0$. Si $-\delta = b^2 - ac$ est > 0 (resp. $= 0$, resp. < 0) alors il y a deux racines réelles distinctes, resp. une racine réelle double, resp. deux racines complexes conjuguées non réelles.

Enfin, si $a = 0$ alors $\delta = -b^2$ et l'équation s'écrit $y(2bx + cy) = 0$. Alors $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[1 : 0 : 0]$ et $[c : -2b : 0]$, qui sont distincts si et seulement si $b \neq 0$ i.e. $\delta < 0$; sinon on a le point double $[1 : 0 : 0]$ d'équation $y^2 = 0$.

(10) (2 pts) Déduire de tout ce qui précède que $\mathscr{C}_U$ est une ellipse (resp. hyperbole, resp. parabole) si et seulement si $\delta = ac - b^2$ est > 0 (resp. < 0, resp. $= 0$).

Solution : D'après la partie III, $\mathscr{C}_U$ est une ellipse (resp. hyperbole, resp. parabole) si et seulement si $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé de deux points complexes non réels (resp. deux points réels, resp. un point double), et d'après la question précédente ceci est le cas si et seulement si δ est > 0 (resp. < 0, resp. $= 0$).

Exercice 2. — (environ 18 pts) Soient $\mathscr{P}$ un plan affine réel et $p_1, \ldots, p_6$ six points distincts, dont trois ne sont jamais alignés, tels que les côtés « opposés » $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ soient parallèles pour $i = 1, 2, 3$. (1) Prenant (p_1, p_2, p_6) comme repère affine, on obtient des coordonnées (x, y) telles que $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$ et $p_6 = (0, 1)$. On écrit :

$$p_3 = (1 + a, b), \qquad p_5 = (c, 1 + d), \qquad p_4 = (1 + a, 1 + d),$$

pour certains réels a, b, c, d. **Noter que** la condition que trois p_i ne sont jamais alignés entraîne, en particulier, que $a, b, c, d, 1 + a$ et $1 + d$ sont non nuls, et que $1 + a \neq c$ et $1 + d \neq b$. Alors $(p_3 p_4)$ (resp. $(p_4 p_5)$) est parallèle à $(p_6 p_1)$ (resp. à $(p_1 p_2)$).

(1) (0,5 pt) Écrire la relation entre a, b, c, d qui signifie que $(p_5 p_6)$ est parallèle à $(p_2 p_3)$.

Solution : Les vecteurs $\overrightarrow{p_6 p_5} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{p_2 p_3} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont liés si et seulement si $ad = bc$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$. On pose $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \alpha' x + \beta' y + \gamma'$ et l'on considère la conique affine $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$.

(1) Les indices étant pris modulo 6, i.e. $p_7 = p_1$.

(2) (1,5 pts) On suppose que $\mathscr{C}$ passe par les points p_1, p_2, p_6. Déterminer alors γ' et exprimer α' et β' en fonction de α et β.

Solution : $\mathscr{C}$ passe par $p_1 = (0,0)$ ssi $\gamma' = 0$. Alors $\mathscr{C}$ passe par $p_2 = (1,0)$ (resp. par $p_6 = (0,1)$) ssi $\alpha' = -\alpha$ (resp. $\beta' = -\beta$). Dans ce cas l'équation s'écrit

$$0 = \alpha(x^2 - x) + \beta(y^2 - y) + \gamma xy = \alpha x(x-1) + \beta y(y-1) + \gamma xy.$$

(3) (3 pts) On suppose que $\mathscr{C}$ passe par p_1, p_2, p_6, p_3, p_4. Exprimer γ en fonction de β grâce à l'équation $f(p_4) - f(p_3) = 0$, puis exprimer α en fonction de β grâce à l'équation $f(p_4) = 0$.

Solution : $f(p_4) - f(p_3)$ est égal à

$$\beta\big((1+d)^2 - (1+d) - b^2 + b\big) + \gamma(1+a)(1+d-b) = (1+d-b)(\beta(b+d) + \gamma(1+a)).$$

Comme $1 + d \neq b$ et $1 + a \neq 0$, l'équation $f(p_4) = f(p_3)$ donne $(1+a)\gamma + \beta(b+d) = 0$ puis

$$(*) \qquad \gamma = \frac{-\beta}{1+a}(b+d).$$

Alors $f(p_4)$ égale

$$\alpha a(1+a) + \beta d(1+d) + \gamma(1+a)(1+d) = \alpha a(1+a) - \beta(1+d)b.$$

Comme $a(1+a) \neq 0$, l'équation $f(p_4) = 0$ donne

$$(**) \qquad \alpha = \frac{\beta}{a(1+a)} b(1+d).$$

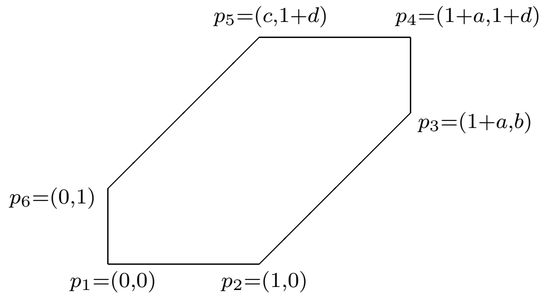
(4) (3 pts) On suppose les conditions précédentes vérifiées. On considère $\mathscr{P}$ comme l'ouvert affine $z = 1$ du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x : y : z] \mid (x,y,z) \neq (0,0,0)\}$. En citant des résultats du cours, expliquer pourquoi $\mathscr{C}$ passe aussi par le point p_5.

Solution : Notons $D_\infty = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - \mathscr{P}$ la droite à l'infini. (Elle est donnée par $z = 0$.) Pour $i = 1, 2, 3$, les droites affines $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ sont parallèles, donc le point de concours P_i des droites projectives correspondantes est sur D_∞. Donc P_1, P_2, P_3 sont alignés. Donc d'après la réciproque du théorème de Pascal, le sixième point p_5 appartient à l'unique conique projective $\mathscr{V}(Q)$ passant par p_6, p_1, p_2, p_3, p_4 ; il appartient donc à $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{V}(Q)$.

On suppose désormais que l'hexagone $(p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ est **convexe** : ceci signifie que pour tout i les p_j avec $j \neq i, i+1$ sont tous situés dans un même demi-plan ouvert délimité par la droite $(p_i p_{i+1})$. En particulier,

- pour $i = 6$, ceci donne $c > 0$ et $1 + a > 0$.
- pour $i = 1$, ceci donne $b > 0$ et $1 + d > 0$.
- pour $i = 3$, ceci donne $a > 0$ et $1 + a > c$.
- pour $i = 4$, ceci donne $d > 0$ et $1 + d > b$.

Remarque. Ces conditions entraînent que $(p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ est convexe. En effet, la droite $(p_2 p_3)$ (resp. $(p_5 p_6)$) a pour équation $b(x-1) = ay$ (resp. $c(y-1) = dx$) et les conditions précédentes entraînent que p_1, p_6, p_5, p_4 sont contenus dans le demi-plan d'équation $b(x-1) < ay$, et p_1, p_2, p_3, p_4 dans le demi-plan d'équation $c(y-1) < dx$. On a donc une figure comme ci-dessous :



On prend alors $\gamma = -(a+c)(b+d) < 0$.

(5) (2 pts) En utilisant la question 3 puis la question 1, exprimer β et α en fonction de a, b, c, d puis montrer que $\alpha = (1+d)(b+d)$.

Solution : D'après la question 3 on obtient $\beta = (1+a)(a+c)$ puis $\alpha = \dfrac{b}{a}(a+c)(1+d)$. Et comme $bc = ad$, on a $b(a+c)/a = b+d$ d'où $\alpha = (1+d)(b+d)$.

(6) (1 pt) Exprimer alors $\Delta = 4\alpha\beta - \gamma^2$ en fonction de a, b, c, d et montrer que Δ est du même signe que $4(1+a)(1+d) - (a+c)(b+d)$.

Solution : D'après la question précédente, on a

$$\Delta = (a+c)(b+d)\Big(4(1+a)(1+d) - (a+c)(b+d)\Big)$$

et comme $(a+c)(b+d) > 0$ ceci est du même signe que $4(1+a)(1+d) - (a+c)(b+d)$.

(7) (3 pts) En utilisant les conditions de convexité énoncées avant la question 5, ainsi que la question 1, montrer que :

(a) Si $b \le d$ alors $4(1+a)(1+d) > 4c(1+d) > (a+c)(b+d)$.
(b) Si $b \ge d$ alors $4(1+a)(1+d) > 4b(1+a) > (a+c)(b+d)$.

Conclure que $\Delta > 0$.

Solution : Comme $1+a > c$ et $1+d > 0$ (resp. $1+d > b$ et $1+a > 0$) alors $4(1+a)(1+d)$ est strictement supérieur à $4c(1+d)$ et à $4b(1+a)$, i.e. on obtient la 1ère inégalité de chaque ligne.

Supposons $b \le d$. Comme $a, c > 0$ on obtient $(a+c)(b+d) \le 2(a+c)d$ et comme $ad = bc$ on obtient

$$(a+c)(b+d) \le 2(a+c)d = 2c(b+d) \le 4cd < 4c(1+d).$$

De même, si $b \ge d$ on a

$$(a+c)(b+d) \le 2b(a+c) = 2a(b+d) \le 4ab \le 4b(1+a).$$

Tenant compte de la question précédente, on obtient dans les deux cas que $\Delta > 0$.

(8) (1 pt) En utilisant la question 1.10, montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse.

Solution : Avec les notations de 1.10, on a $\Delta = 4\delta > 0$, donc $\mathscr{C}$ est une ellipse.

(9) (2 pts) Donner un exemple de six points distincts $p_1, \dots, p_6$ sur une parabole, tels que les côtés « opposés » $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ soient parallèles. **Indication** : sur la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ prendre les points $p_1 = (-1, 1)$, $p_2 = (1, 1)$, $p_3 = (-2, 4)$, $p_6 = (2, 4)$ puis déterminer p_4 et p_5 par la condition que $(p_3 p_4)$ (resp. $(p_4 p_5)$) soit parallèle à $(p_6 p_1)$ (resp. $(p_1 p_2)$).

Solution : On a $\overrightarrow{p_1p_6} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et la droite affine $p_3 + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \{(t-2, 4+t) \mid t \in \mathbb{R}\}$ coupe $\mathscr{C}$ en les points tels que

$$0 = (t-2)^2 - (4+t) = t^2 - 5t = t(t-5)$$

donc $p_4 = (3, 9)$. Puis $p_5 = (-3, 9)$ puisque (p_4p_5) est horizontale comme (p_1p_2). Et $\overrightarrow{p_6p_5} = \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ est bien colinéaire à $\overrightarrow{p_2p_3} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$, comme il se doit d'après le théorème de Pascal.

(10) (2 pts) Donner un exemple de six points distincts $p_1, \ldots, p_6$ sur une hyperbole, tels que les côtés « opposés » (p_ip_{i+1}) et $(p_{i+3}p_{i+4})$ soient parallèles. **Indication** : sur l'hyperbole $\mathscr{C}$ d'équation $xy = 1$ prendre les points $p_1 = (1/2, 2)$, $p_3 = (2, 1/2)$, $p_4 = (-1/2, -2)$, $p_6 = (-2, -1/2)$ et choisir p_2 puis p_5 de façon appropriée.

Solution : $\mathscr{C}$ est invariant par la symétrie centrale $\tau : (x, y) \mapsto (-x, -y)$ et l'on a $\tau(p_1) = p_4$ et $\tau(p_3) = p_6$. Donc, pour tout point $p_2 = (x, 1/x)$ avec $x > 0$ distinct de $1/2$ et 2, prenant $p_5 = \tau(p_3)$ on obtient $\overrightarrow{p_{i+3}p_{i+4}} = -\overrightarrow{p_ip_{i+1}}$ pour $i = 1, 2, 3$, donc les paires de côtés opposés sont parallèles.
