Examen du 15 décembre 2016 (3h) (noté sur 70)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Les quatre exercices sont indépendants. Dans chacun on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes. Le sujet est volontairement long et le total des points est > 70 : les notes > 70 seront comptées comme 70. Le barème donné est indicatif et pourra être modifié légèrement.

On fixe un corps k de caractéristique $\neq 2$. Pour tout k-espace vectoriel (en abrégé : k-ev) V on note $\mathbb{P}(V)$ l'espace projectif associé.

***Exercice 1* (Plans hyperboliques)**. — (environ 18 pts) Soient V un k-ev de dimension finie n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire. Si E est un sous-espace vectoriel (en abrégé : sev) de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal pour ϕ et l'on note Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) la restriction de Q à E (resp. $E^\perp$).

(1) (2 pts) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

(2) (2 pts) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

(3) (3 pts) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Un sev F de V est dit **anisotrope** s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul.

(4) (2 pts) Supposons V *non* anisotrope et soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

(5) (1 pt) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan **hyperbolique** et que (u, v) en est une base hyperbolique.

(6) (2 pts) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 0$) et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F. (On pourra procéder par récurrence sur $\dim(V)$.)

(7) (2 pts) Soit E un sev de V de dimension 2. Montrer que E est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$. (Pour une base hyperbolique (u, v), chercher e_1, e_2 sous la forme $u + tv$ et $u - tv$, et pour une base (e_1, e_2) chercher u, v sous la forme $e_1 + e_2$ et $t(e_1 - e_2)$, avec $t \in k$.)

On suppose que $k = \mathbb{R}$. Si F est un sev de V, on rappelle que Q_F est dite *définie positive* si pour tout $x \in F - \{0\}$ on a $Q_F(x) > 0$.

(8) (2 pts) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors, en le justifiant, la signature (p, q) de Q.

(9) (2 pts) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

***Exercice 2* (Conique de Steiner)**. — (environ 40 pts) Cet exercice comporte deux parties. À l'exception de la dernière question, la partie II est indépendante de la partie I. Soit V un k-ev de dimension 3.

I) Dans $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathbf{D}_1 \neq \mathbf{D}_2$ deux droites projectives, sécantes en un point C'. Soient $A \in \mathbf{D}_1$ et $B \in \mathbf{D}_2$, tous deux distincts de C', et soit C un point hors de $\mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2 \cup (AB)$.

Comme A, B, C, C' forment un repère projectif, il existe des coordonnées (x, y, z) sur V telles que ces points aient pour coordonnées homogènes :

$$A = [1 : 0 : 0], \qquad B = [0 : 1 : 0], \qquad C = [0 : 0 : 1], \qquad C' = [1 : 1 : -1].$$

(On ne demande pas de démontrer ceci.) Soient $\lambda, \mu, \nu, \alpha, \beta, \gamma \in k$, Q la forme quadratique sur V suivante :

$$Q(x, y, z) = \lambda x^2 + \mu y^2 + \nu z^2 + \alpha yz + \beta zx + \gamma xy$$

et $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ la conique projective correspondante.

(1) (1 pt) Écrire à quelles conditions $\mathscr{C}$ passe par A, B, C. Désormais on suppose ces conditions vérifiées.

(2) (2 pts) Déterminer, en le justifiant brièvement, l'équation des droites projectives $\mathbf{D}_1 = (C'A)$ et $\mathbf{D}_2 = (C'B)$.

(3) (4 pts) Écrire les dérivées partielles $\partial_x Q, \partial_y Q, \partial_z Q$ puis déterminer les formes linéaires $d_p Q$ pour $p = A$ et $p = B$.(1) Puis écrire les conditions sur α, β, γ pour que la tangente à $\mathscr{C}$ en A, resp. B, soit $\mathbf{D}_1$, resp. $\mathbf{D}_2$.

On suppose ces conditions vérifiées pour le reste de la partie I, et l'on prend $\alpha = 1$.

(4) (2 pts) Écrire la matrice de Q dans la base $\mathscr{B}$ de V correspondant aux coordonnées (x, y, z) et montrer que Q est non dégénérée.

(5) (3 pts) En utilisant la question (3), écrire l'équation de la tangente $\mathbf{D}_3$ à $\mathscr{C}$ en C, puis déterminer les points d'intersection B' et A' de $\mathbf{D}_3$ avec $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$ respectivement. (Donc $A \in (B'C')$, $B \in (C'A')$ et $C \in (A'B')$.)

(6) (3 pts) Déterminer l'équation des droites (AA'), (BB') et (CC') et montrer qu'elles sont concourantes en un point I qu'on précisera.

(7) (3 pts) Déterminer le point de concours P, resp. Q, resp. R, des droites (BC) et $(B'C')$, resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (AB) et $(A'B')$. Montrer que P, Q, R sont alignés.

(8) (2 pts) Faire une figure représentant, dans un plan affine, les points et droites précédents, en précisant si des points se trouvent à l'infini. s

II) Réciproquement, on se donne dans $\mathbb{P}(V)$ trois points non alignés A', B', C' et des points $A \in \mathbf{D}_1 = (B'C')$, $B \in \mathbf{D}_2 = (C'A')$ et $C \in \mathbf{D}_3 = (A'B')$, tous distincts de A', B', C'. On suppose les droites (AA'), (BB') et (CC') concourantes en un point I.

Dans les questions (9) **à** (11)**, on utilise provisoirement** des coordonnées homogènes $[u : v : w]$ telles que $A' = [1 : 0 : 0]$, $B' = [0 : 1 : 0]$ et $C' = [0 : 0 : 1]$; on a alors $A = [0 : a : 1]$, $B = [1 : 0 : b]$ et $C = [c : 1 : 0]$ pour certains $a, b, c \in k^\times$.

(9) (2 pts) Donner, en le justifiant, la condition sur a, b, c pour que A, B, C soient alignés.

(10) (3 pts) Écrire les équations des droites (AA'), (BB') et (CC'), puis la condition sur a, b, c pour que ces droites soient concourantes en I. Donner également les coordonnées homogènes $[u : v : w]$ de I.

(11) (4 pts) En utilisant les questions précédentes, montrer que A, B, C, I forment un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.

Il existe donc des coordonnées (x, y, z) sur V telles que ces points aient pour coordonnées homogènes :

$$A = [1 : 0 : 0], \qquad B = [0 : 1 : 0], \qquad C = [0 : 0 : 1], \qquad I = [1 : 1 : 1].$$

(1)Pour $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{C}$, on rappelle que $d_p Q$ est la forme linéaire $(x, y, z) \mapsto (\partial_x Q)(p)x + (\partial_y Q)(p)y + (\partial_z Q)(p)z$ et que si $d_p Q \neq 0$ alors $\mathbb{P}(\mathrm{Ker}(d_p Q))$ est la tangente à $\mathscr{C}$ en p.

(12) (3 pts) Déterminer, en le justifiant brièvement, l'équation des droites (AI), (BI) et (CI), puis montrer que $A' = [a : 1 : 1]$, $B' = [1 : b : 1]$ et $C' = [1 : 1 : c]$ pour certains $a, b, c \in k$.

(13) (3 pts) En utilisant que A, B', C' sont alignés, montrer que $bc = 1$. Montrer de même que $ac = 1 = ab$.

(14) (2 pts) Montrer que $a^2 = 1$ puis que $a = -1 = b = c$.

(15) (3 pts) En utilisant les résultats de la partie I, montrer qu'il existe une unique conique $\mathscr{C}$ tangente à $\mathbf{D}_1$ en A, à $\mathbf{D}_2$ en B et à $\mathbf{D}_3$ en C.

***Exercice 3* (Birapport sur un pinceau de coniques).** — (environ 13 pts) Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soit (A, B, C, I) un repère projectif. Dans des coordonnées homogènes $[x : y : z]$ appropriées, on a

$$A = [1 : 0 : 0], \qquad B = [0 : 1 : 0], \qquad C = [0 : 0 : 1], \qquad I = [1 : 1 : 1].$$

À tout point $\omega = (\alpha, \beta, \gamma)$ de k^3 on associe la forme quadratique Q_ω sur V suivante :

$$Q_\omega(x, y, z) = \alpha yz + \beta zx + \gamma xy$$

et l'on note $\mathscr{C}_\omega = \mathscr{V}(Q_\omega)$ la conique projective de $\mathbb{P}(V)$ correspondante. On pose

$$\Delta = \{[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \mathbb{P}^2(k) \mid \mathscr{C}_\omega \text{ contient } A, B, C, I\}.$$

(1) (4 pts) Montrer que $\Delta = \mathbb{P}(H)$ pour un certain plan H de k^3 dont on donnera une équation. Montrer que la projection $\pi : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha, \beta)$ est un isomorphisme de H sur k^2, et expliciter son inverse θ.

Pour tout $\mu \in k - \{0, 1\}$, on note $\mathbf{D}_\mu$ la droite projective de $\mathbb{P}(V)$ d'équation $z = \mu y$. Noter qu'elle passe par A mais pas par B, C ou I. Pour le moment, on fixe μ.

(2) (2 pts) Pour tout $[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \Delta$, montrer que l'équation de $\mathbf{D}_\mu \cap \mathscr{C}_\omega$ est $yL(x, y) = 0$ pour une certaine forme linéaire L (dépendant de μ et ω) que l'on explicitera.

(3) (3 pts) Pour $[\omega] = [\alpha : \beta : \gamma] \in \Delta$, on note $\phi([\omega])$ le point $[x : y : \mu y]$ de $\mathbf{D}_\mu$ défini par $L(x, y) = 0$. En tenant compte de l'équation obtenue à la question (1), écrire

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

pour une matrice $A \in M_2(k)$ (unique à homothétie près) que l'on précisera. Montrer que A est inversible.

Remarque. D'après la question (1), l'application $[\alpha : \beta : \gamma] \mapsto [\alpha : \beta]$ est une homographie de Δ sur $\mathbb{P}^1(k)$, dont l'inverse est $p \mapsto [\theta(p)]$. De même, les applications $[x : y : \mu y] \mapsto [x : y]$ et $[x : y] \mapsto [x : y : \mu y]$ sont des homographies inverses l'une de l'autre.

(4) (2 pts) En utilisant la question (3) et la remarque précédente, montrer que l'application $\mathbb{P}^1(k) \to \mathbf{D}_\mu$ envoyant $p = [\alpha : \beta]$ sur $\phi([\theta(p)])$ est une homographie.

(5) (2 pts) Pour quatre points distincts $\delta_1, \dots, \delta_4 \in \Delta$, on note $[\delta_1, \dots, \delta_4]$ le birapport des points $q_i = \phi(\delta_i)$ de $\mathbf{D}_\mu$. Montrer que ce birapport ne dépend pas du choix de μ, mais seulement de $\delta_1, \dots, \delta_4$.

***Exercice 4* (La sous-variété $\mathrm{Gr}_2(k^5) \subset \mathbb{P}(\Lambda^2(k^5))$).** — (environ 14 pts) Soit V un k-ev de dimension $n \geq 2$. On rappelle qu'il existe une unique application bilinéaire $V^* \times \Lambda^2(V) \to V$, $(f, z) \mapsto f \dashv z$, telle que pour tous $f \in V^*$ et $u, v \in V$ on ait :

$$(*) \qquad f \dashv (u \wedge v) = f(u)v - f(v)u.$$

(1) (3 pts) Soit $z \in \Lambda^2(V)$ un 2-vecteur *pur*. Soit (e_1, e_2) une base du sev F de V associé à z, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de V et soit $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de V^*. Calculer $e_i^* \dashv z$, pour $i = 1, \ldots, n$, puis en déduire que $\boxed{(f \dashv z) \wedge z = 0}$ pour tout $f \in V^*$.

Désormais, on prend $n = 5$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_5)$ une base de V et $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_5^*)$ la base duale de V^*. Pour $d = 2$ ou 3, on note $\mathscr{P}_d(5)$ l'ensemble des sous-ensembles de $\{1, \ldots, 5\}$ de cardinal d. À tout $I \in \mathscr{P}_d(5)$, on associe l'élément $e_I = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_d}$ de $\Lambda^d(V)$, où $i_1 < \cdots < i_d$ désignent les éléments de I rangés par ordre croissant. Alors tout $z \in \Lambda^2(V)$ s'écrit de façon unique

$$(\heartsuit) \qquad z = \sum_{I \in \mathscr{P}_2(5)} a_I \, e_I = \sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_{\{i,j\}} \, e_i \wedge e_j$$

avec $a_{\{i,j\}} \in k$ et, d'après $(*)$, pour tout $h \in \{1, \ldots, 5\}$ on a :

$$(\clubsuit) \qquad e_h^* \dashv z = \sum_{i \neq h} a_{\{h,i\}} \varepsilon(h,i) \, e_i,$$

où $\varepsilon(h,i) = 1$ si $h < i$ et $\varepsilon(h,i) = -1$ si $h > i$. D'autre part, pour tout $J \in \mathscr{P}_3(5)$ et tout $i \in J$, on a :

$$(\spadesuit) \qquad e_i \wedge e_{J - \{i\}} = \varepsilon(J,i) e_J,$$

où $\varepsilon(J,i) = (-1)^{N(J,i)}$, avec $N(J,i) = |\{j \in J \mid j > i\}|$.

(2) (1 pt) Quelle est la dimension de $\Lambda^2(V)$?

(3) (3 pts) Fixons quatre éléments $h < j < p < q$ dans $\{1, \ldots, 5\}$. On écrit a_{hj} au lieu de $a_{\{h,j\}}$, etc. En utilisant la question (1) et les égalités $(\heartsuit, \clubsuit)$ et $(\spadesuit)$ pour $J = \{j, p, q\}$, montrer que l'on a :

$$\pm a_{hj} a_{pq} \pm a_{hp} a_{jq} \pm a_{hq} a_{jp} = 0$$

pour des signes $\pm$ que l'on précisera.

(4) (2 pts) Écrire explicitement les équations quadratiques $Q_1, \ldots, Q_5$ ainsi obtenues.

On rappelle que la grassmannienne $\mathrm{Gr}_2(V)$ est la sous-variété de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ définie par ces équations, i.e.

$$\mathrm{Gr}_2(V) = \Big\{ \Big[\sum_{1 \leq i < j \leq 5} a_{ij} \, e_i \wedge e_j \Big] \in \mathbb{P}(\Lambda^2(V)) \,\Big|\, Q_s(a_{12}, \ldots, a_{45}) = 0 \text{ pour } s = 1, \ldots, 5 \Big\}.$$

Soit $\mathbb{P}(E)$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(\Lambda^2(V))$ de dimension 4 défini par les cinq équations :

$$a_{12} = 0 = a_{13} = a_{35} = a_{45}, \qquad a_{24} = a_{14} - a_{25}.$$

On munit $\mathbb{P}(E)$ des coordonnées homogènes $[a_{14} : a_{34} : a_{15} : a_{23} : a_{25}]$ (dans cet ordre).

(5) (2 pts) Écrire, en fonction des coordonnées homogènes $[a_{14} : a_{34} : a_{15} : a_{23} : a_{25}]$ les équations de $\mathbb{P}(E) \cap \mathrm{Gr}_2(V)$.

(6) (3 pts) Soit $\mathbb{P}(F)$ le sous-espace projectif de $\mathbb{P}(E)$ de dimension 3 défini par l'équation $a_{14} - a_{34} + a_{23} - a_{25} = 0$. Montrer que $\mathbb{P}(F) \cap \mathrm{Gr}_2(V)$ est formé de trois points simples que l'on déterminera, et du point double $p = [0 : 0 : 1 : 0 : 0]$. **Indication** : distinguer les cas selon que $a_{23} a_{34} \neq 0$, ou $a_{23} = 0 \neq a_{34}$, ou $a_{23} \neq 0 = a_{34}$, ou $a_{23} = 0 = a_{34}$, et utiliser ensuite l'équation de $\mathbb{P}(F)$.

FIN