Examen partiel du 7 novembre 2016 (2h) (noté sur 30)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Dans chaque exercice on pourra admettre le résultat d'une question pour traiter les questions suivantes. Le résultat énoncé dans la question 1.10 est utilisé dans la question 8 de l'exercice 2. Le sujet est volontairement long et le barème donné est indicatif. Les notes > 30 seront comptées comme 30.

Exercice 1. — (environ 20 pts) Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, Q une forme quadratique sur V de signature $(2,1)$, i.e. sa matrice dans une certaine base $\mathscr{B}_0$ est $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, et ϕ la forme polaire de Q. Pour toute autre base $\mathscr{B}$, notant $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = {}^tPA_0P$, on a donc $\mathrm{dét}(A) = -\,\mathrm{dét}(P)^2 < 0$. On considère la conique projective $\mathscr{V}(Q) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(v) = 0\}$.

Soit $f \in V^* - \{0\}$ et $H = \mathrm{Ker}(f)$. Comme ϕ est non dégénérée, il existe un unique $e_3 \in V$ tel que $f(v) = \phi(e_3, v)$ pour tout $v \in V$; on a donc

$$H = \{v \in V \mid \phi(e_3, v) = 0\} = (\mathbb{R}e_3)^\perp.$$

On note D_∞ la droite projective $\mathbb{P}(H)$ et l'on identifie l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ au plan affine $\mathscr{H}$ de V d'équation $1 = f(v) = \phi(e_3, v)$. Le but de l'exercice est de déterminer la nature de la conique affine $\mathscr{C}_U = \mathscr{V}(Q) \cap U$ (ellipse, parabole ou hyperbole).

I) On suppose d'abord que $Q(e_3) \neq 0$; alors, quitte à remplacer e_3 par $|Q(e_3)|^{-1/2}e_3$ on peut supposer que $Q(e_3) = \pm 1$. On pose $\varepsilon = Q(e_3)$.

(1) (3 pts) En citant des résultats du cours, montrer successivement les résultats suivants :

(a) On a $V = H \oplus \mathbb{R}e_3$.

(b) Il existe une base orthogonale (e_1, e_2) de H telle $Q(e_i) = \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i = \pm 1$ pour $i = 1, 2$.

(c) En utilisant que Q est de signature $(2,1)$ montrer que, quitte à échanger les indices $1, 2$, on peut supposer que $Q(e_2) = 1$ et $Q(e_1) = -Q(e_3) = -\varepsilon$.

(2) (1 pt) Écrire d'une part $Q(Ze_3 + Xe_1 + Ye_2)$, et d'autre part l'équation de D_∞, en fonction de X, Y, Z.

(3) (2 pts) On a alors $\mathscr{H} = \varepsilon e_3 + H = \{\varepsilon e_3 + Xe_1 + Ye_2 \mid (X,Y) \in \mathbb{R}^2\}$. Écrire alors l'équation de $\mathscr{C}_U$ et déterminer sa nature en fonction de ε.

II) On suppose maintenant que $Q(e_3) = 0$.

(4) (3 pts) Montrer successivement les résultats suivants :

(a) Il existe $e_2 \in V$ tel que $\phi(e_2, e_3) = 1$ et $Q(e_2) = 0$.

(b) Posant $E = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$, on a $V = E \oplus E^\perp$ et $\dim(E^\perp) = 1$

(c) Soit e_1 un générateur de $E^\perp$ tel que $Q(e_1) = \pm 1$. Alors on a $Q(e_1) = 1$ et $H = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)$.

(5) (1 pt) Écrire d'une part $Q(Ze_2 + Xe_1 + Ye_3)$, et d'autre part l'équation de D_∞, en fonction de X, Y, Z.

(6) (1 pt) On a alors $\mathscr{H} = e_2 + H = \{e_2 + Xe_1 + Ye_3 \mid (X,Y) \in \mathbb{R}^2\}$. Écrire alors l'équation de $\mathscr{C}_U$ et déterminer sa nature.

III) Points à l'infini de $\mathscr{V}(Q)$. On s'intéresse maintenant à $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$.

(7) (2 pts) Montrer que $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ consiste en :

(a) deux points distincts à coordonnées dans $\mathbb{C} - \mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{R}$) si $\mathscr{C}_U$ est une ellipse (resp. une hyperbole).

(b) un point double (à coordonnées dans $\mathbb{R}$) si $\mathscr{C}_U$ est une parabole.

IV) Le discriminant. Soient (u_1, u_2) une base quelconque de H et $u_3 \in V$ tel que $\phi(e_3, u_3) = 1$. Alors (u_1, u_2, u_3) est une base de V et pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ on a :

$$Q(xu_1 + yu_2 + zu_3) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2a'xz + 2c'yz + b'z^2$$

pour certains $a, b, c, a', b', c' \in \mathbb{R}$. D'autre part, on a $\mathscr{H} = \{(x, y, 1) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. On pose $\boxed{\delta = ac - b^2.}$

(8) (2 pts) Écrire la matrice A de Q dans la base (u_1, u_2, u_3) et montrer que a, b, c ne sont pas tous les trois nuls.

(9) (3 pts) En utilisant les coordonnées (x, y, z), écrire l'équation de D_∞ puis décrire $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$. Si $a \neq 0$ montrer que $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ est formé des points $[r : 1 : 0]$ et $[s : 1 : 0]$ où r, s sont les racines (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) de l'équation $at^2 + 2bt + c = 0$. Décrire également $\mathscr{V}(Q) \cap D_\infty$ lorsque $a = 0$.

(10) (2 pts) Déduire de tout ce qui précède que $\mathscr{C}_U$ est une ellipse (resp. hyperbole, resp. parabole) si et seulement si $\delta = ac - b^2$ est > 0 (resp. < 0, resp. $= 0$).

Exercice 2. — (environ 18 pts) Soient $\mathscr{P}$ un plan affine réel et $p_1, \dots, p_6$ six points distincts, dont trois ne sont jamais alignés, tels que les côtés « opposés » $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ soient parallèles pour $i = 1, 2, 3$. [(1)] Prenant (p_1, p_2, p_6) comme repère affine, on obtient des coordonnées (x, y) telles que $p_1 = (0, 0)$, $p_2 = (1, 0)$ et $p_6 = (0, 1)$. On écrit :

$$p_3 = (1 + a, b), \qquad p_5 = (c, 1 + d), \qquad p_4 = (1 + a, 1 + d),$$

pour certains réels a, b, c, d. **Noter que** la condition que trois p_i ne sont jamais alignés entraîne, en particulier, que $a, b, c, d, 1 + a$ et $1 + d$ sont non nuls, et que $1 + a \neq c$ et $1 + d \neq b$. Alors $(p_3 p_4)$ (resp. $(p_4 p_5)$) est parallèle à $(p_6 p_1)$ (resp. à $(p_1 p_2)$).

(1) (0,5 pt) Écrire la relation entre a, b, c, d qui signifie que $(p_5 p_6)$ est parallèle à $(p_2 p_3)$.

Soient $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma' \in \mathbb{R}$. On pose $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma xy + \alpha' x + \beta' y + \gamma'$ et l'on considère la conique affine $\mathscr{C}$ d'équation $f(x, y) = 0$.

(2) (1,5 pts) On suppose que $\mathscr{C}$ passe par les points p_1, p_2, p_6. Déterminer alors γ' et exprimer α' et β' en fonction de α et β.

(3) (3 pts) On suppose que $\mathscr{C}$ passe par p_1, p_2, p_6, p_3, p_4. Exprimer γ en fonction de β grâce à l'équation $f(p_4) - f(p_3) = 0$, puis α en fonction de β grâce à l'équation $f(p_4) = 0$.

(4) (2 pts) On suppose les conditions précédentes vérifiées. On considère $\mathscr{P}$ comme l'ouvert affine $z = 1$ du plan projectif $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[x : y : z] \mid (x, y, z) \neq (0, 0, 0)\}$. En citant des résultats du cours, expliquer pourquoi $\mathscr{C}$ passe aussi par le point p_5.

On suppose désormais que l'hexagone $(p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ est **convexe** : ceci signifie que pour tout i les p_j avec $j \neq i, i+1$ sont tous situés dans un même demi-plan ouvert délimité par la droite $(p_i p_{i+1})$. En particulier,

- pour $i = 6$, ceci donne $c > 0$ et $1 + a > 0$.
- pour $i = 1$, ceci donne $b > 0$ et $1 + d > 0$.
- pour $i = 3$, ceci donne $a > 0$ et $1 + a > c$.
- pour $i = 4$, ceci donne $d > 0$ et $1 + d > b$.

[(1)] Les indices étant pris modulo 6, i.e. $p_7 = p_1$.

(On peut montrer que, réciproquement, ces conditions entraînent que $(p_6, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$ est convexe.) On prend alors $\gamma = -(a+c)(b+d) < 0$.

(5) (2 pts) En utilisant la question 3 puis la question 1, exprimer β et α en fonction de a, b, c, d puis montrer que $\alpha = (1+d)(b+d)$.

(6) (1 pt) Exprimer alors $\Delta = 4\alpha\beta - \gamma^2$ en fonction de a, b, c, d et montrer que Δ est du même signe que $4(1+a)(1+d) - (a+c)(b+d)$.

(7) (3 pts) En utilisant les conditions de convexité énoncées avant la question 5, ainsi que la question 1, montrer que :

(a) Si $b \leq d$ alors $4(1+a)(1+d) > 4c(1+d) > (a+c)(b+d)$.

(b) Si $b \geq d$ alors $4(1+a)(1+d) > 4b(1+a) > (a+c)(b+d)$.

Conclure que $\Delta > 0$.

(8) (1 pt) En utilisant la question 1.10, montrer que $\mathscr{C}$ est une ellipse.

(9) (2 pts) Donner un exemple de six points distincts $p_1, \ldots, p_6$ sur une parabole, tels que les côtés « opposés » $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ soient parallèles. **Indication** : sur la parabole $\mathscr{C}$ d'équation $y = x^2$ prendre les points $p_1 = (-1, 1)$, $p_2 = (1, 1)$, $p_3 = (-2, 4)$, $p_6 = (2, 4)$ puis déterminer p_4 et p_5 par la condition que $(p_3 p_4)$ (resp. $(p_4 p_5)$) soit parallèle à $(p_6 p_1)$ (resp. $(p_1 p_2)$).

(10) (2 pts) Donner un exemple de six points distincts $p_1, \ldots, p_6$ sur une hyperbole, tels que les côtés « opposés » $(p_i p_{i+1})$ et $(p_{i+3} p_{i+4})$ soient parallèles. **Indication** : sur l'hyperbole $\mathscr{C}$ d'équation $xy = 1$ prendre les points $p_1 = (1/2, 2)$, $p_3 = (2, 1/2)$, $p_4 = (-1/2, -2)$, $p_6 = (-2, -1/2)$ et choisir p_2 puis p_5 de façon appropriée.