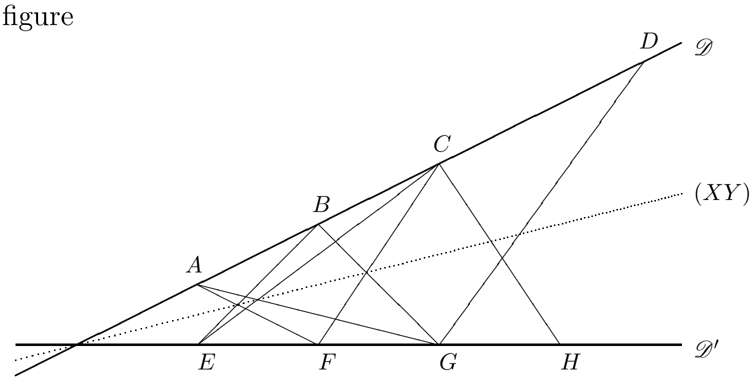
Corrigé de l'examen 2ème session du 20 mai 2016 (3h)

Exercice 1. — (44 pts) Soient k un corps et V un k-ev de dimension 3. Dans le plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et A, B, C, D (resp. E, F, G, H) quatre points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours O de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On définit X (resp. Y, resp. Z, resp. T) comme le point de concours de (AF) et (BE) (resp. (BG) et (CF), resp. (CH) et (DG), resp. (AG) et (CE)).

(1) Faire une figure



(2) Pouvez-vous citer un théorème du cours assurant que X, Y, T sont alignés ?

Solution : D'après le théorème de Pappus, X, Y, T sont alignés.

Le but des deux questions suivantes est de *démontrer* que X, Y, T sont alignés.[1] Soit $e_1 \in V$ tel que $[e_1] = O$ et soient $e_2, e_3 \in V$ tel que $\mathscr{D} = \mathbb{P}(E)$ et $\mathscr{D}' = \mathbb{P}(F)$ où E (resp. F) est le plan engendré par e_1 et e_2 (resp. e_1 et e_3).

(3) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de V. Notant $[x, y, z]$ les coordonnées homogènes relativement à cette base, montrer qu'il existe $a, b, c, e, f, g \in k$, avec a, b, c (resp. e, f, g) deux-à-deux distincts, tels que

$$A = [a, 1, 0], \qquad B = [b, 1, 0], \qquad C = [c, 1, 0],$$
$$E = [e, 0, 1], \qquad F = [f, 0, 1], \qquad G = [g, 0, 1].$$

Solution : On a $e_3 \notin E$ car $\mathscr{D}' \neq \mathscr{D}$, donc (e_1, e_2, e_3) est une base de V. Comme $A \in \mathscr{D}$ et $A \neq O$, on a $A = [\lambda e_1 + \mu e_2]$ avec $\mu \neq 0$, donc $A = [a e_1 + e_2]$, où $a = \lambda/\mu$. On obtient de même que B, C, D, E, F, G, H ont la forme indiquée, et comme A, B, C, D (resp. E, F, G, H) sont deux-à-deux distincts, alors a, b, c, d (resp. e, f, g, h) le sont.

(4) Montrer que $x = ay + fz$ est une équation de la droite (AF). Écrire de même les équations des droites $(BE), (BG), (CF), (AG), (CE)$ puis déterminer les coordonnées homogènes des points X, Y, T.

Solution : A et F vérifient tous deux l'équation $x = ay + fz$, donc celle-ci est une équation de (AF). On obtient de même les autres équations :

$$(AF) : x = ay + fz \qquad (BE) : x = by + ez$$
$$(BG) : x = by + gz \qquad (CF) : x = cy + fz$$
$$(AG) : x = ay + gz \qquad (CE) : x = cy + ez$$

On en déduit que les coordonnées homogènes de X vérifient $x = ay + fz = by + ez$, d'où $(b - a)y = (f - e)z$; on peut donc prendre $y = f - e$ et $z = b - a$, alors

$$x = ay + fz = a(f - e) + f(b - a) = bf - ae.$$

[1] Par une démonstration différente de celle donnée en cours.

Par conséquent, $X = [bf - ae, f - e, b - a]$. On obtient de même $Y = [cg - bf, g - f, c - b]$ et $T = [cg - ae, g - e, c - a]$.

(5) (Question de cours) À quelle condition des points $P_i = [x_i, y_i, z_i]$ pour $i = 1, 2, 3$ sont -ils alignés ?

Solution : Ces trois points sont alignés ssi les trois vecteurs $\begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{pmatrix}$ sont liés, i.e. ssi le déterminant $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ est nul.

(6) Montrer que X, Y, T sont alignés.

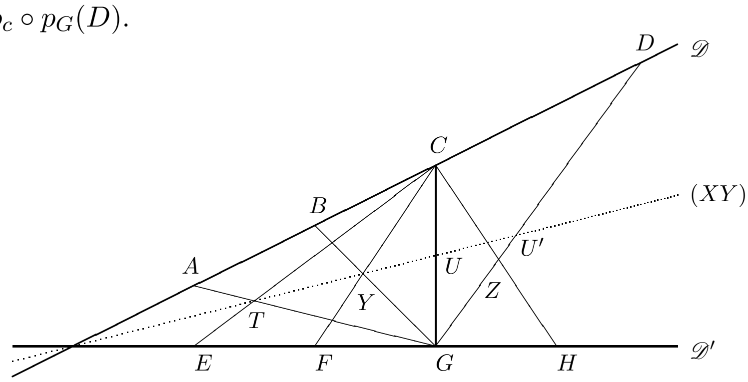
Solution : On a écrit plus haut $X = [u]$, $Y = [v]$ et $T = [w]$ avec $w = u + v$. Donc u, v, w sont liés et X, Y, T alignés. C'est le théorème de Pappus.

On rappelle que pour $I \in \mathbb{P}(V)$ et Δ, Δ' deux droites projectives de $\mathbb{P}(V)$ ne passant pas par I, la *projection de Δ sur Δ' de centre I*, notée p_I, est l'application qui à tout $P \in \Delta$ associe le point de concours de Δ' avec (IP) ; c'est une *homographie* de Δ sur Δ'. On note p_G (resp. p_C) la projection de centre G (resp. C) de $\mathscr{D}$ (resp. (XY)) sur (XY) (resp. $\mathscr{D}'$).

(7) Représenter sur une figure les images de A, B, C par p_G, puis déterminer les images de A, B, C par $p_C \circ p_G$.

Solution : D'abord, on a $p_G(B) = Y$. D'après la question précédente, T appartient à $(AG) \cap (XY)$ donc $T = p_G(A)$. Posons $U = p_G(C)$ (resp. $U' = p_G(D)$) ; c'est le point de concours de $(XY) = (TY)$ et de (GC) (resp. (GD)).

Comme $T \in (CE)$, on a $p_C(T) = E$, et de même $p_C(Y) = F$ et $p_C(U) = G$. Enfin, posons $H' = p_C(U') = p_c \circ p_G(D)$.



(8) On suppose $Z \in (XY)$. Montrer l'égalité des birappports $[A, B, C, D]$ et $[E, F, G, H]$.

Solution : Supposons $Z \in (XY)$. Alors, comme $Z \in (DG)$ on a $Z = U'$ et donc $H' = p_C(Z) = H$. Comme l'homographie $f = p_C \circ p_G$ préserve le birapport, on a $[E, F, G, H] = [A, B, C, D]$.

(9) Réciproquement, on suppose $[A, B, C, D] = [E, F, G, H]$. Montrer que $p_G(D) = Z$.

Solution : Comme f préserve le birapport, on a toujours $[A, B, C, D] = [E, F, G, H']$. Si ceci égale $[E, F, G, H]$ alors $H' = H$, car l'unique homographie de $\mathscr{D}'$ qui fixe E, F et G est l'identité. Mais si $H' = H$, alors $U' = p_G(D)$ est le point de concours de (DG) et (CH), d'où $U' = Z$ et donc $Z \in (XY)$.

Exercice 2. — (36 pts) Soit k un corps. On note $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(k^4)$. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ on définit $x \wedge y$ comme l'élément de k^6 dont les coordonnées sont les mineurs 2×2 de la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$, notés D_{ij} et pris dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire $x\wedge y = \begin{pmatrix} D_{1,2}(x,y) \\ D_{1,3}(x,y) \\ D_{1,4}(x,y) \\ D_{2,3}(x,y) \\ D_{2,4}(x,y) \\ D_{3,4}(x,y) \end{pmatrix}$, où $D_{i,j}(x,y) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = x_iy_j - x_jy_i$ pour $1 \le i < j \le 4$. Si x, y sont linéairement indépendants, alors $x \wedge y$ est non nul et l'on note $[x\wedge y]$ son image dans $\mathbb{P}(k^6)$. Soit

$$U = \big\{ \big([x],[y]\big) \in \mathbb{P}(k^4)\times\mathbb{P}(k^4) \mid [x] \neq [y] \big\}$$

et soit $\pi : U \to \boldsymbol{\mathcal{D}}$ l'application qui à $([x],[y]) \in U$ associe la droite projective $\mathscr{D} = \mathbb{P}(kx+ky)$.

(1) Montrer que l'application $\phi : U \to \mathbb{P}(k^6)$, $([x],[y]) \mapsto [x\wedge y]$ est bien définie (i.e. que $[x\wedge y]$ ne dépend que de $[x]$ et $[y]$).

Solution : Si l'on remplace x (resp. y) par un multiple non nul λx (resp. μy) alors, par bilinéarité du déterminant, chaque coordonnée de $x\wedge y$ est multipliée par $\lambda\mu$, donc $[x\wedge y]$ est inchangé.

(2) Montrer que ϕ se factorise en une application $\psi : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}(k^6)$. Indication : noter que $x\wedge x = 0$ et $y\wedge x = -x\wedge y$ et se ramener à montrer que si $kx+ky = kx+ku$ alors $[x\wedge y] = [x\wedge u]$.

Solution : Il est clair que pour tout i, j on a $D_{i,j}(x,x) = 0$ et $D_{i,j}(y,x) = -D_{i,j}(x,y)$. Considérons d'abord $([x],[y])$ et $([x],[u])$ dans U tels que $kx+ku = kx+ky$. Alors $u = \lambda y + \mu x$ avec $\lambda \neq 0$ et les propriétés du déterminant entraînent que, pour tout i, j, on a

$$D_{i,j}(x,u) = \lambda D_{i,j}(x,y) + \mu D_{i,j}(x,x) = \lambda D_{i,j}(x,y)$$

d'où $[x\wedge u] = [x\wedge y]$.

Soient maintenant $([x],[y])$ et $([x'],[y'])$ dans U tels que x, y d'une part, et x', y' d'autre part, engendrent le même plan E. Distinguons deux cas :

(a) Si $[y'] \neq [x]$, alors $kx+ky' = E$, et d'après ce qui précède on a

$$[x\wedge y] = [x\wedge y'] = [x'\wedge y'].$$

(b) Si $[y'] = [x]$, alors on a $x' = \lambda y + \mu x$ avec $\lambda \neq 0$ et l'on obtient comme plus haut que $[x'\wedge y'] = [x\wedge y]$.

Il en résulte que ϕ se factorise en une application $\psi : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}(k^6)$, définie par $\psi(\mathscr{D}) = [x\wedge y]$ pour toute base (x,y) de E, où $\mathscr{D} = \mathbb{P}(E)$.

(3) Soit $([x],[y]) \in U$ et $z \in \mathbb{P}(k^4)$. En considérant la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$, montrer que la droite projective (xy) est donnée par quatre équations linéaires $a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + a_{i3}z_3 + a_{i4}z_4 = 0$ pour $i = 1,\dots,4$, où l'on exprimera les coefficients a_{ij} en fonction des coordonnées de $\psi((xy))$.

+ Question bonus, hors-barème : Montrer qu'au moins deux de ces équations sont non nulles et linéairement indépendantes, donc définissent deux plans projectifs dont (xy) est l'intersection.

Solution : z appartient à (xy) ssi cette matrice est de de rang 2, i.e. ssi ses quatre mineurs 3×3 (obtenus en choisissant 3 lignes) sont nuls. On obtient que $z \in (xy)$ ssi l'on a :

$$\begin{cases} z_3D_{12}(x,y) - z_2D_{13}(x,y) + z_1D_{23}(x,y) = \Delta_{1,2,3} = 0 \\ z_4D_{12}(x,y) - z_2D_{14}(x,y) + z_1D_{24}(x,y) = \Delta_{1,2,4} = 0 \\ z_4D_{13}(x,y) - z_3D_{14}(x,y) + z_1D_{34}(x,y) = \Delta_{1,3,4} = 0 \\ z_4D_{23}(x,y) - z_3D_{24}(x,y) + z_2D_{34}(x,y) = \Delta_{2,3,4} = 0 \end{cases}$$

Chacune de ces équations est soit nulle (i.e. $0 = 0$) soit l'équation d'un plan projectif, et le système précédent signifie que la droite (xy) est l'intersection de ces plans. Comme c'est une droite, il doit y avoir au moins deux équations non nulles et linéairement indépendantes. Explicitement, comme x, y ne sont pas liés, les mineurs $D_{i,j}(x,y)$ ne sont pas tous nuls ; supposons par exemple $D_{12}(x,y) = \alpha \neq 0$. Alors les deux premières équations sont non nulles et linéairement indépendantes, car elles s'écrivent

$$\alpha\, z_3 = z_2 D_{13}(x,y) - z_1 D_{23}(x,y), \qquad \alpha\, z_4 = z_2 D_{14}(x,y) - z_1 D_{24}(x,y).$$

(4) Déduire de la question précédente que l'application $\psi : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}(k^6)$ est injective.

Solution : Comme ces équations ne dépendent (à multiplication par un scalaire non nul près) que des coordonnées homogènes de $\psi((xy)$, on en déduit que ψ est injective.

On note $(z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34})$ les coordonnées sur k^6, de sorte que pour $x, y \in k^4$ la coordonnée z_{ij} de $x \wedge y$ est $D_{ij}(x,y)$. On note Q la forme quadratique $z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23}$ sur k^6 et $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ la quadrique projective de $\mathbb{P}(k^6)$ associée.

(5) Montrer par un calcul direct que $\psi(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ est contenu dans $\mathscr{C}$.

Solution : On a

$$\begin{aligned}
(x_1y_2 - x_2y_1)(x_3y_4 - x_4y_3) &= x_1x_3y_2y_4 - x_1x_4y_2y_3 - x_2x_3y_1y_4 + x_2x_4y_1y_3\\
-(x_1y_3 - x_3y_1)(x_2y_4 - x_4y_2) &= -x_1x_3y_2y_4 + x_1x_2y_3y_4 + x_3x_4y_1y_2 - x_2x_4y_1y_3\\
(x_1y_4 - x_4y_1)(x_2y_3 - x_3y_2) &= x_1x_4y_2y_3 - x_1x_2y_3y_4 - x_3x_4y_1y_2 + x_2x_3y_1y_4
\end{aligned}$$

et en faisant la somme on obtient $Q(x \wedge y) = 0$.

(6) Soit $p = [z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34}] \in \mathscr{C}$. Supposons $z_{12} = 1$. Montrer alors que $p = [x \wedge y]$ pour $[x] = [1, 0, t, u]$ et $[y] = [0, 1, v, w]$, pour des scalaires t, u, v, w que l'on exprimera en fonction des z_{ij}.

Solution : Comme $z_{12} = 1$, le fait que $p \in \mathscr{C}$ se traduit par l'égalité $z_{34} = z_{13}z_{24} - z_{14}z_{23}$. Montrons que sous cette condition on peut trouver des vecteurs $x = {}^t(1, 0, t, u)$ et $y = {}^t(0, 1, v, w)$ tels que

$$(*) \qquad x \wedge y = \begin{pmatrix} 1 \\ z_{13} \\ z_{14} \\ z_{23}, \\ z_{24} \\ z_{13}z_{24} - z_{14}z_{23} \end{pmatrix}.$$

Considérant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ t & v \\ u & w \end{pmatrix}$ on obtient que $x \wedge y = \begin{pmatrix} 1 \\ v \\ w \\ -t \\ -u \\ tw - uv \end{pmatrix}$ et l'on voit que $(*)$ entraine $v = z_{13}$, $w = z_{14}$, $t = -z_{23}$, et $u = -z_{24}$. On a alors

$$tw - uv = -z_{23}z_{14} + z_{24}z_{13} = z_{34}$$

comme désiré. (Pour tout $z \in \mathscr{C}$, il existe au moins un couple (i,j) tel que $z_{ij} \neq 0$, et on peut montrer par un calcul analogue que $p \in \mathrm{Im}(\psi)$. La conclusion est que $\psi(\boldsymbol{\mathcal{D}}) = \mathscr{C}$.)

Exercice 3. — (40 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur (i.e. il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U \subset C$) et stable par l'application $x \mapsto -x$. Comme l'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto tx$ est continue, alors pour tout $x \in C$, l'ensemble $I(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid tx \in C\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur.

(1) Soit $x \neq 0$ dans C. Montrer que $I(x)$ est un intervalle fermé borné $[-\beta(x), \beta(x)]$, avec $\beta(x) > 0$ et $\beta(-x) = \beta(x)$.

Solution : Posons $r = \|x\| > 0$. Comme C est compact il est contenu dans une boule fermée $\overline{B}(0, R)$ et donc $tx \notin C$ pour $\|t\| > R/r$. Par conséquent, $I(x)$ est borné.

Comme $I(x)$ contient 0 dans son intérieur, on en déduit que $I(x)$ admet une borne inférieure $-\alpha(x) < 0$ et une borne supérieure $\beta(x) > 0$, et comme $I(x)$ est fermé on a $-\alpha(x), \beta(x) \in I(x)$. Il est clair que $\alpha(x) = \beta(-x)$ et comme de plus C est stable par $y \mapsto -y$, on a $\alpha(x) = \beta(x)$.

Enfin, comme C est convexe et $0, \pm\beta(x)x \in C$, on a $\pm t\beta x \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$ et donc $I(x) = [-\beta(x), \beta(x)]$.

(2) On pose $N(0) = 0$ et $N(x) = 1/\beta(x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, i.e. qu'on a les trois propriétés suivantes : (a) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (b) $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$, (c) $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Solution : (a) est immédiat car $\beta(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Prouvons (b). Si $y = \lambda x$ avec $\lambda \neq 0$, alors C contient $\pm\beta(y)y = \pm\beta(y)\lambda x$ donc $\beta(x) \geq |\lambda|\, \beta(y)$. Et comme $x = \lambda^{-1}y$ on a de même $\beta(y) \geq |\lambda|^{-1}\beta(x)$, d'où l'égalité $\beta(y) = |\lambda|^{-1}\beta(x)$ et donc $N(y) = |\lambda|\beta(x)$.

Prouvons (c). Soient $x, y \in C$, tous deux $\neq 0$. On veut montrer que

$$(*) \qquad \frac{1}{\beta(x+y)} \leq \frac{1}{\beta(x)} + \frac{1}{\beta(y)} = \frac{\beta(y) + \beta(x)}{\beta(x)\beta(y)}.$$

Or ceci est bien vérifié car $t = \dfrac{\beta(y)}{\beta(y) + \beta(x)}$ appartient à $]0, 1[$ et comme C est convexe, il contient

$$t\beta(x)x + (1-t)\beta(y)y = \frac{\beta(x)\beta(y)}{\beta(y) + \beta(x)}(x + y),$$

d'où $\beta(x + y) \geq \dfrac{\beta(x)\beta(y)}{\beta(y) + \beta(x)}$ et donc $(*)$.

(3) Si A, B sont deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$, on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est convexe.

Solution : Soient $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ et $t \in [0, 1]$. Alors $a_t = a + t(a' - a)$ et $b_t = b + t(b' - b)$ appartiennent à A et B, respectivement, et comme

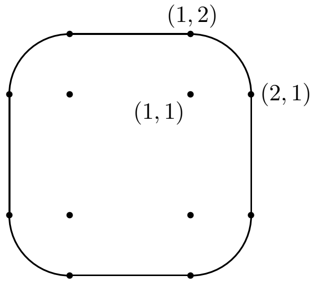
$$t(a + b) + (1-t)(a' + b') = (ta + (1-t)a') + (tb + (1-t)b') = a_t + b_t$$

on obtient que $A + B$ est convexe.

Pour le reste de l'exercice, on prend $n = 2$, A le carré fermé $[-1, 1] \times [-1, 1]$ et B le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

(4) Faire une figure représentant $A + B$.

Solution : $A + B$ est la réunion des translatés $a + B$, pour $a \in A$. On obtient ainsi la figure suivante :



Donc $A + B$ est la réunion du rectangle « horizontal » $[-2, 2] \times [-1, 1]$, du rectangle « vertical » $[-1, 1] \times [-2, 2]$ et de quatre quarts de disque de rayon 1 centrés en les points $(1, 1)$, $(-1, 1)$, $(-1, -1)$ et $(1, -1)$. En particulier, on voit que $A + B$ est stable par les symétries $(x, y) \mapsto (-x, y)$ et $(x, y) \mapsto (x, -y)$.

(5) Montrer que $C = A + B$ contient 0 dans son intérieur et que C est compact.

Solution : C contient B donc le disque ouvert $B(0,1)$, donc 0 est un point intérieur de C.

D'autre part, l'application $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to x+y$ est continue, et comme $A \times B$ est un compact de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ alors $f(A \times B) = C$ est un compact de $\mathbb{R}^2$.

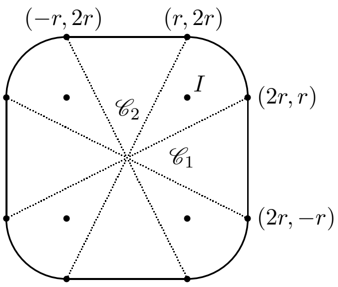
Autre démonstration. Soit $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $A+B$. Comme A est compact, on peut en extraire une sous-suite $(a_{\phi(n)} + b_{\phi(n)})$, où $a_{\phi(n)}$ converge vers une limite $a \in A$. Puis, comme B est compact, on peut extraire de la suite $(b_{\phi(n)})$ une suite convergente, i.e. il existe $\theta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante telle que, posant $\psi(n) = \phi(\theta(n))$, la suite $(b_{\psi(n)})$ converge vers une limite $b \in B$. Alors la suite $(a_{\psi(n)} + b_{\psi(n)})$ converge vers $a + b \in C$ et ceci montre que C est compact.

(6) Soit N la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par C. Pour tout $r > 0$, faire une figure représentant

$$S_N(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x,y) = r\}.$$

En utilisant cette figure, exprimer $r = N(x,y)$ en fonction de x ou y lorsque (x,y) appartient à l'intersection de $S_N(r)$ et du cône $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$) défini par $|y| \le |x|/2$ (resp. par $|y| \ge 2|x|$).

Solution : La figure précédente montrait la « boule unité » $B_N(1)$ de N ; en utilisant l'homothétie de rapport r, on obtient que la boule $B_N(r)$ est donné par la figure ci-dessous, et que la « sphère » $S_N(r)$ en est la frontière :



On voit alors que si $(x,y) \in S_N(r)$ appartient au cône $\mathscr{C}_1$, on a $|x| = 2r$, d'où $r = |x|/2$. De même, si $(x,y) \in S_N(r) \cap \mathscr{C}_2$, on a $|y| = 2r$, d'où $r = |y|/2$.

(7) On suppose $\frac{1}{2}|x| \le |y| \le 2|x|$ et, pour simplifier, $x, y > 0$. En utilisant la figure précédente, montrer que $N(x,y) = r$ ssi (x,y) appartient au cercle de centre I et de rayon r, pour un point I que l'on déterminera. En utilisant que $r \le \min(x,y)$, exprimer r en fonction de x et y.

Solution : Soient (x,y) tel que $0 < \frac{x}{2} \le y \le 2x$. D'après la figure précédente, on voit que $p = (x,y)$ appartient à $S_N(r)$ ssi il appartient au disque cercle de rayon r et de centre $I = (r,r)$. Dans ce cas, on a $r \le \min(x,y)$ et $r^2 = (x-r)^2 + (y-r)^2 = 2r^2 - 2r(x+y) + x^2 + y^2$ d'où

$$r^2 - 2r(x+y) + x^2 + y^2 = 0.$$

Le discriminant réduit de ce trinôme en r est $\Delta' = (x+y)^2 - (x^2+y^2) = 2xy$, donc les solutions sont $r = x + y \pm \sqrt{2xy}$. Comme on a $r \le \min(x,y) < x+y$, on a donc :

$$r = x + y - \sqrt{2xy}.$$

Remarques. (1) En procédant de même pour les autres quarts de cercle, ou en utilisant que $S_N(r)$ est stable par les symétries $(x,y) \mapsto (-x,y)$ et $(x,y) \mapsto (x,-y)$, d'où $N(-x,y) = N(x,y) = N(x,-y)$, on obtient que si $x \neq 0$ et $1/2 \le |y/x| \le 2$, alors

$$N(x,y) = |x| + |y| - \sqrt{2|xy|}.$$

(2) Lorsque $|y|$ égale $|x|/2$ (resp. $2|x|$) on obtient $N(x,y) = |x|/2$ (resp. $|y|/2$), ce qui coïncide avec le résultat obtenu dans ce cas à la question précédente.