Examen du 17 décembre 2015 (3h) (noté sur 70)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Cet examen comporte 5 exercices ; on pourra admettre le résultat d'un exercice pour traiter un exercice ultérieur.

Dans tout le texte, k désigne un corps, supposé de caractéristique $\neq 2$ à partir de l'exercice 3, et $k = \mathbb{R}$ dans la dernière question 5.5.

***Exercice 1* (Questions de cours).** — (8 pts) Soient V un k-ev de dimension 3, I un point du plan projectif $\mathbb{P}(V)$ et $D_1, \ldots, D_4$ quatre droites projectives distinctes passant par I. Donner la définition du birapport $[D_1, \ldots, D_4]$. Plus précisément :

(1) Donner une définition de $[D_1, \ldots, D_4]$ ne faisant intervenir que des points de $\mathbb{P}(V)$.

(2) Soit V^* le dual de V. Pouvez-vous donner une autre définition de $[D_1, \ldots, D_4]$, faisant intervenir l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$? (On ne demande pas de démontrer l'équivalence entre les deux définitions.)

***Exercice 2* (Questions de cours).** — (8 pts) On identifie $\mathbb{P}^1(k)$ à $k \cup \{\infty\}$. Soient $\mathbf{D}$ une droite projective sur k, $p_1, \ldots, p_4$ quatre points distincts de $\mathbf{D}$ et $\lambda = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ leur birapport, qui appartient à $k^\times$.

(1) Exprimer en fonction de λ les birapports $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ et $[p_1, p_3, p_2, p_4]$.

(2) Pouvez-vous donner une démonstration de ces formules ?

Désormais, on suppose $\boxed{\mathrm{car}(k) \neq 2.}$

***Exercice 3*.** — (18 pts) Dans un plan projectif sur k, soient A, A', B, B' quatre points projectivement indépendants, i.e. tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés. Notons I, resp. J, resp. K, le point de concours des droites (AA') et (BB'), resp. (AB) et $(A'B')$, resp. (AB') et (BA').

(1) Démontrer que I, J, K ne sont pas alignés. *Indication* : considérer le repère projectif (A, A', B, B') et déterminer les coordonnées homogènes de I, J, K dans ce repère.

Soit E, resp. F, le point de concours de la droite (KJ) avec la droite (AA'), resp. (BB').

(2) Montrer que les points E, F, I sont deux à deux distincts.

(3) Faire une figure représentant A, A', B, B', les six droites les joignant, les points I, J, K, E, F et les droites (KJ), (KI) et (JI).

(4) En utilisant l'exercice 1 et en considérant les droites passant par K, montrer l'égalité des birapports $[A, A', I, E]$ et $[B', B, I, F]$. Montrer de façon analogue que $[A, A', I, E] = [B, B', I, F]$.

On note λ la valeur commune de ces birapports.

(5) Démontrer, en utilisant la question (2) et l'exercice 2, que $\lambda = -1$.

Désormais, soient V un k-ev de dimension 3, Q une forme quadratique *non dégénérée* sur V, ϕ sa forme polaire et $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ la conique projective définie par Q. Pour tout sous-ensemble $X \neq \varnothing$ de V, son orthogonal pour ϕ, noté $X^\perp$, est le sev suivant : $X^\perp = \{u \in V \mid \forall x \in X, \quad \phi(u, x) = 0\}$. Pour tout $v \in V - \{0\}$, on rappelle que la tangente à $\mathscr{V}(Q)$ au point $p = [v]$, notée $T_p\mathscr{V}(Q)$, est la droite projective $\mathbb{P}(v^\perp)$.

T.S.V.P →

Exercice 4. — (25 pts) Soient E un plan vectoriel de V et $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(V)$ la droite projective correspondante. On note Q_E la restriction de Q à E.

(1) Montrer que $\mathbf{D} \not\subset \mathscr{V}(Q)$. *Indication.* Raisonner par l'absurde : soit (e_0, e_1) une base de E, complétée en une base $\mathscr{B}$ de V. En considérant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$, montrer que si $Q_E = 0$ alors Q est dégénérée.

Soit (e_0, e_1) une base orthogonale de E telle que $Q(e_0) = 1$. Posons $\delta = Q(e_1)$.

(2) Écrire la matrice A de Q_E dans la base (e_0, e_1) et, pour $u = x_0e_0 + x_1e_1$ et $v = y_0e_0 + y_1e_1$ dans E, exprimer $\phi(u, v)$ en fonction des x_i et y_i.

(3) On suppose que Q_E est de rang 1. Montrer que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée d'un unique point p et que $\mathbf{D} = T_p\mathscr{V}(Q)$.

(4) On suppose que Q_E est de rang 2. Montrer que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée de deux points *distincts* p_1, p_2 (éventuellement à coordonnées dans l'extension quadratique $k' = k[T]/(T^2 + \delta)$ de k) et que $\mathbf{D}$ n'est pas tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en ces points.

Désormais, on suppose p_1, p_2 à coordonnées dans k ; soient $v_1, v_2 \in E$ tels que $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ et soit $q = [u]$ le point de concours des tangentes à $\mathscr{V}(Q)$ en p_1 et p_2.

Soient $[v], [w]$ deux points de $\mathbb{P}(V)$; on dit qu'ils sont **conjugués** si $\phi(v, w) = 0$. L'ensemble des points conjugués à $p = [v]$ est la droite $\mathbb{P}(v^\perp)$, appelée la **polaire** de p. Réciproquement, pour un plan vectoriel F de V, le **pôle** de la droite $\mathbb{P}(F)$ est le point $p = \mathbb{P}(F^\perp)$.

(5) Montrer que les points p_1 et q sont conjugués, de même que p_2 et q.

(6) En déduire que la droite projective $\mathbf{D} = (p_1p_2)$ est la polaire du point q.

(7) Écrire la matrice B de Q_E dans la base (v_1, v_2) et montrer que $\phi(v_1, v_2) \neq 0$.

(8) Soient $p_3 \neq p_4$ deux points distincts de $\mathbf{D} - \{p_1, p_2\}$. Quitte à multiplier v_2 par un scalaire, on peut supposer que $p_3 = [v_1 + v_2]$ et $p_4 = [v_1 + \lambda v_2]$ pour un certain $\lambda \in k^\times$. À quelle condition sur λ les points p_3 et p_4 sont-ils conjugués ?

(9) Montrer que p_3 et p_4 sont conjugués ssi le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ vaut -1.

Exercice 5. — (17 pts) Soient A, A', B, B' quatre points distincts de $\mathscr{V}(Q)$.

(1) Montrer que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. (Utiliser les questions 4.1 à 4.4.)

Notons I, resp. J, resp. K, le point de concours des droites (AA') et (BB'), resp. (AB) et $(A'B')$, resp. (AB') et (BA'). Soit E, resp. F, le point de concours de la droite (KJ) avec la droite (AA'), resp. (BB').

(2) Montrer que les points I et E sont conjugués. *Indication* : utiliser l'exercice 3 et appliquer un résultat de l'exercice 4 à la droite (AA'). Montrer de façon analogue que I et F sont conjugués.

(3) Montrer que la droite (KJ) est la polaire du point I. *Indication* : utiliser la question 3.2 puis procéder comme dans la question 4.6.

(4) On suppose que la droite (KJ) coupe $\mathscr{V}(Q)$ en deux points $P_1 \neq P_2$. En utilisant la question précédente et en appliquant un résultat de l'exercice 4 à la droite $(KJ) = (P_1P_2)$ montrer que la droite (IP_1) (resp. (IP_2)) est tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en P_1 (resp. en P_2).

On prend $V = \mathbb{R}^3$ et $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$. Soit U l'ouvert affine de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ défini par $Z \neq 0$, i.e. $U = \{[x, y, 1] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Soient B, B', A, A' les points de $\mathscr{C} = U \cap \mathscr{V}(Q)$ suivants : $B' = (-1, 0)$, $A' = (0, 1)$, $A = (-\alpha, \alpha)$, $B = (\alpha, -\alpha)$, où $\alpha = \sqrt{2}/2$.

(5) En supposant les coordonnées X, Y orthonormées, avec 2 cm comme unité de longueur, faire un dessin représentant $\mathscr{C}$, y placer les points A, A', B, B', puis tracer les six droites les joignant, indiquer le point I et sa polaire, puis tracer (approximativement) les deux tangentes à $\mathscr{C}$ issues de I. (La figure tient dans un carré de côté 8 cm centré en $O = (0, 0)$.)

FIN