Examen du 18 décembre 2014 (3h) (noté sur 70)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Cet examen comporte 5 exercices. L'exercice 2 est utilisé dans l'exercice 4 (question 3 et suivantes). À part cela, les exercices sont indépendants. Le total des points fait 84 et les notes > 70 seront ramenées à 70.

Exercice 1. — (20 pts) Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine euclidien. Pour $u, v \in E$, leur produit scalaire est noté $u \cdot v$, la norme euclidienne de u est $\|u\| = \sqrt{u \cdot u}$, et pour $P, Q \in \mathscr{E}$ on pose $PQ = \|\overrightarrow{PQ}\|$.

Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathscr{E}$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. On définit $L : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$ par $L(M) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \, A_i M^2$ et pour tout $k \in \mathbb{R}$, on pose $\mathscr{L}_k = \{M \in \mathscr{E} \mid L(M) = k\}$.

(1) Pour $A, P, Q \in \mathscr{E}$, exprimer $AP^2 - AQ^2$ comme le produit scalaire de deux vecteurs.

On pose $s = \sum_{i=1}^n \lambda_i$. Pour les questions 2 à 5, on suppose $s \neq 0$; alors, quitte à changer chaque λ_i en $-\lambda_i$, on peut supposer que $s > 0$.

(2) $(s > 0)$ Montrer qu'il existe $G \in \mathscr{E}$ tel que $L(M) - L(G) = s\, GM^2$ pour tout $M \in \mathscr{E}$.

(3) $(s > 0)$ Décrire l'image $L(\mathscr{E}) \subset \mathbb{R}$ en fonction de G, puis en déduire l'unicité de G.

(4) $(s > 0)$ Donner la nature géométrique de l'ensemble $\mathscr{L}_k$ en fonction de G et k.

(5) $(s > 0)$ Lorsque $n = 2$, exprimer $L(G)$ en fonction de λ_1, λ_2 et $(A_1A_2)^2$.

Dans les questions 6 à 8 on suppose que $s = 0$.

(6) $(s = 0)$ Montrer qu'il existe un unique vecteur $v \in E$ tel que pour tout $M, P \in \mathscr{E}$, on ait $L(M) - L(P) = 2v \cdot \overrightarrow{PM}$.

(7) $(s = 0)$ Décrire l'image $L(\mathscr{E}) \subset \mathbb{R}$, selon la valeur de v.

(8) $(s = 0)$ On suppose $\|v\| = 1$ et l'on fixe un point $I \in \mathscr{E}$ tel que $L(I) = 0$. Pour tout $k \in \mathbb{R}$, décrire géométriquement l'ensemble $\mathscr{L}_k$.

(9) Soient $A \neq B$ dans $\mathscr{E}$ et $q \in \,]0, 1]$. Décrire géométriquement, selon la valeur de q, l'ensemble $\mathscr{L} = \{M \in \mathscr{E} \mid \dfrac{AM}{BM} = q\}$.

On suppose que $\dim(\mathscr{E}) = 2$. Soit (ABC) un triangle dans $\mathscr{E}$, rectangle en A. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.

(10) Montrer que l'ensemble $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{E} \mid \dfrac{AM}{BM} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{b}{a}\}$ est un cercle, dont on précisera le rayon r. Donner également les coordonnées du centre I dans le repère $(B, \vec{i}, \vec{j})$, où $(\vec{i}, \vec{j})$ est une base orthonormée de E telle que $\overrightarrow{BA} = c\ \overrightarrow{i}$

Exercice 2. — (7 pts) Soit $\mathbb{K}$ un corps. Pour $i = 1, \dots, 4$, soient $q_i = [x_i, y_i]$ des éléments de $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. On suppose q_1, q_2, q_3 deux à deux distincts.

(1) Exprimer le birapport $[q_1, q_2, q_3, q_4] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$ en fonction des x_i et y_i.

(2) Vérifier la formule en donnant successivement à q_4 les valeurs q_1, q_2 et q_3.

Exercice 3. — (19 pts) Soient $\mathscr{P}$ un plan affine réel, (B, C, A) un repère affine, (x, y, z) les coordonnées barycentriques dans ce repère, G l'isobarycentre des points B, C, A.

(1) Écrire les coordonnées barycentriques de B, C, A et G, puis du milieu I de G et A.

Soit $\mathscr{C}$ la conique affine donnée par l'équation en coordonnées barycentriques suivante :
$(*)$ $2xy - xz - yz = 0$.

(2) Vérifier que B, C, A et G appartiennent à $\mathscr{C}$.

(3) Exprimer les coordonnées affines dans le repère $\mathscr{R} = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ en fonction de x, y, z.

(4) En utilisant l'égalité $z = 1 - x - y$, écrire l'équation $F(u, v) = 0$ de $\mathscr{C}$ dans les coordonnées affines (u, v) trouvées, puis calculer les dérivées partielles $\partial_u F$ et $\partial_v F$.

(5) Déterminer l'unique point Ω en lequel les deux dérivées partielles s'annulent. On admet que Ω est le **centre** de la conique $\mathscr{C}$.

(6) Écrire les coordonnées barycentriques de Ω et identifier géométriquement le point Ω.

On munit $\mathscr{P}$ d'une structure euclidienne et l'on suppose que le triangle BCA est isocèle en A, i.e. que $AB = AC$. Soit alors $\mathbf{R}_G = (G, \vec{i}, \vec{j})$ un repère **orthonormé** centré en G et tel que $\overrightarrow{GA} = 2a\,\vec{i}$ pour un certain réel $a > 0$.

Il existe alors un réel $b \neq 0$ tel que B et C aient pour coordonnées $(-a, b)$ et $(-a, -b)$ dans $\mathbf{R}_G$ (on ne demande pas de démontrer ceci).

(7) Écrire les coordonnées dans $\mathbf{R}_G$ du centre Ω de la conique $\mathscr{C}$.

On note (X, Y) les coordonnées dans le repère orthonormé $\mathbf{R}_\Omega = (\Omega, \vec{i}, \vec{j})$. Comme Ω est le centre de $\mathscr{C}$, il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que l'équation de $\mathscr{C}$ soit $\boxed{\alpha X^2 + \beta XY + \gamma Y^2 = 1}$ (on ne demande pas de démontrer ceci).

(8) Écrire les coordoonnées dans $\mathbf{R}_\Omega$ des points A, B, C et G puis, en utilisant que $\mathscr{C}$ passe par ces points, déterminer les réels α, β, γ.

(9) Déterminer la nature géométrique de $\mathscr{C}$ et préciser ses sommets et, s'il y a lieu, ses asymptotes.

Exercice 4. — (20 pts) Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 3, $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de V, (x, y, z) les coordonnées sur V et $[x, y, z]$ les coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$ correspondant à $\mathscr{B}$. Soit P_i l'image de e_i dans $\mathbb{P}(V)$, pour $i = 1, 2, 3$ et soit P_4 l'image de $e_1 + e_2 + e_3$.

On note E le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E) = (P_1 P_2)$ la droite projective correspondante. Soit $M = [a, b, c]$ un point variable de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, distinct des P_i et n'appartenant à aucune des droites $(P_i P_j)$ pour $1 \leq i < j \leq 3$.

(1) Pour $i = 1, \dots, 4$, donner une équation $f_i \in V^*$ de la droite (MP_i).

(2) Pour $i = 1, \dots, 4$, déterminer le point d'intersection q_i de (MP_i) avec $\mathbf{D}$.

(3) Calculer explicitement le birapport des points q_1, q_2, q_3, q_4 de $\mathbf{D}$.

(4) Soit $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Traduire en une équation $\boxed{\gamma\, ab + \beta\, ca + \alpha\, bc = 0}$ l'égalité $[\lambda, \mu] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$, en exprimant les scalaires α, β, γ en fonction de λ et μ.

Soit Q la forme quadratique sur V définie par $\boxed{Q(x, y, z) = \gamma\, xy + \beta\, zx + \alpha\, yz.}$

(5) Vérifier que $P_1, \dots, P_4$ appartiennent à la conique projective $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$.

(6) Écrire la matrice A de Q dans la base $\mathscr{B}$, puis déterminer les points $[\lambda, \mu]$ pour lesquels Q est dégénérée.

(7) Dans chaque cas où Q est dégénérée, exprimer en fonction de $P_1, \ldots, P_4$ les droites qui forment la conique $\mathscr{V}(Q)$.

On note $\mathscr{D}_\infty$ la droite projective d'équation $x + y + z = 0$ et l'on identifie $\mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$ au plan affine $\mathscr{P}$ de V d'équation $z = 1 - x - y$.

(8) On suppose que $[\lambda, \mu] = [-1, 1]$. Écrire le polynôme $F(x, y) = Q(x, y, 1 - x - y)$.

(9) Calculer les dérivées partielles $\partial_x F$ et $\partial_y F$, puis déterminer l'unique point $\Omega = (x_0, y_0, z_0)$ de $\mathscr{P}$ (i.e. $z_0 = 1 - x_0 - y_0$) vérifiant $(\partial_x F)(x_0, y_0) = 0 = (\partial_y F)(x_0, y_0)$.

On admet que Ω est le **centre** de la conique affine $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{V}(Q)$ et l'on rappelle que la forme quadratique Q provient, depuis la question (4), de l'égalité $[q_1, q_2, q_3, q_4] = [-1, 1]$.

(10) On identifie $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ à $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ via $[s, 1] = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. Pouvez-vous dire, en justifiant brièvement votre réponse, quels sont les centres Ω' et Ω'' des coniques de $\mathscr{P}$ correspondants aux birapports 2 et 1/2 ?

Exercice 5. — (18 pts) Soient $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique $\neq 2$, V un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique non dégénérée sur V et ϕ sa forme polaire. Si E est un sous-espace vectoriel de V, $E^\perp$ désigne son orthogonal pour ϕ et l'on note Q_E (resp. $Q_{E^\perp}$) la restriction de Q à E (resp. $E^\perp$).

(1) Si $\dim(E) = d$, quelle est la dimension de $E^\perp$? Et que peut-on dire de $(E^\perp)^\perp$?

(2) Montrer que le noyau $N(Q_E)$ est égal à $E \cap E^\perp$.

(3) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes : (a) Q_E est non dégénérée ; (b) $V = E \oplus E^\perp$. De plus, sous ces conditions, montrer que $Q_{E^\perp}$ est non dégénérée.

Un sous-espace vectoriel F de V est dit **anisotrope** s'il ne contient aucun vecteur isotrope non nul.

(4) Supposons V *non* anisotrope et soit u un vecteur isotrope non nul. Montrer qu'il existe un vecteur isotrope v tel que $\phi(u, v) = 1$.

(5) Soit P le plan vectoriel engendré par u et v. Montrer que Q_P est non dégénérée. On dira que P est un plan **hyperbolique** et que (u, v) en est une base hyperbolique.

(6) Montrer que V est somme directe orthogonale de plans hyperboliques $P = P_1, \ldots, P_r$ (pour un entier $r \geq 0$) et d'un sous-espace anisotrope (éventuellement nul) F (on pourra procéder par récurrence sur $\dim(V)$).

(7) Soit F un sev de V de dimension 2. Montrer que F est un plan hyperbolique si et seulement si il possède une base orthogonale (e_1, e_2) telle que $Q(e_1) = 1 = -Q(e_2)$. (Pour une base hyperbolique (u, v), chercher e_1, e_2 sous la forme $u + tv$ et $u - tv$, et pour une base (e_1, e_2) chercher u, v sous la forme $e_1 + e_2$ et $t(e_1 - e_2)$, avec $t \in \mathbb{K}$.)

On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si F est un sev de V, on rappelle que Q_F est dite *définie positive* si pour tout $x \in F - \{0\}$ on a $Q_F(x) > 0$.

(8) Supposons que V soit somme directe orthogonale de r plans hyperboliques $P_1, \ldots, P_r$ et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive. Déterminer alors, en le justifiant, la signature (p, q) de Q.

(9) Réciproquement, si Q est de signature (p, q), avec $p \geq q > 0$, montrer que V est la somme directe orthogonale de r plans hyperboliques et d'un sous-espace F de dimension f tel que ϕ_F soit définie positive, pour des entiers $r > 0$ et $f \geq 0$ que l'on exprimera en fonction de p et q.

FIN