Examen 2ème session du 20 mai 2016 (3h)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Cet examen comporte 3 exercices indépendants et est noté sur 100. (Les notes > 100 seront ramenées à 100.)

Exercice 1. — (44 pts) Soient k un corps et V un k-ev de dimension 3. Dans le plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et A, B, C, D (resp. E, F, G, H) quatre points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours O de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On définit X (resp. Y, resp. Z, resp. T) comme le point de concours de (AF) et (BE) (resp. (BG) et (CF), resp. (CH) et (DG), resp. (AG) et (CE)).

(1) Faire une figure

(2) Pouvez-vous citer un théorème du cours assurant que X, Y, T sont alignés ?

Le but des deux questions suivantes est de *démontrer* que X, Y, T sont alignés.[1] Soit $e_1 \in V$ tel que $[e_1] = O$ et soient $e_2, e_3 \in V$ tel que $\mathscr{D} = \mathbb{P}(E)$ et $\mathscr{D}' = \mathbb{P}(F)$ où E (resp. F) est le plan engendré par e_1 et e_2 (resp. e_1 et e_3).

(3) Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de V. Notant $[x, y, z]$ les coordonnées homogènes relativement à cette base, montrer qu'il existe $a, b, c, e, f, g \in k$, avec a, b, c (resp. e, f, g) deux-à-deux distincts, tels que

$$A = [a, 1, 0], \qquad B = [b, 1, 0], \qquad C = [c, 1, 0],$$
$$E = [e, 0, 1], \qquad F = [f, 0, 1], \qquad G = [g, 0, 1].$$

(4) Montrer que $x = ay + fz$ est une équation de la droite (AF). Écrire de même les équations des droites $(BE), (BG), (CF), (AG), (CE)$ puis déterminer les coordonnées homogènes des points X, Y, T.

(5) (Question de cours) À quelle condition des points $P_i = [x_i, y_i, z_i]$ pour $i = 1, 2, 3$ sont -ils alignés ?

(6) Montrer que X, Y, T sont alignés.

On rappelle que pour $I \in \mathbb{P}(V)$ et Δ, Δ' deux droites projectives de $\mathbb{P}(V)$ ne passant pas par I, la *projection de* Δ *sur* Δ' *de centre* I, notée p_I, est l'application qui à tout $P \in \Delta$ associe le point de concours de Δ' avec (IP) ; c'est une *homographie* de Δ sur Δ'. On note p_G (resp. p_C) la projection de centre G (resp. C) de $\mathscr{D}$ (resp. (XY)) sur (XY) (resp. $\mathscr{D}'$).

(7) Représenter sur une figure les images de A, B, C par p_G, puis déterminer les images de A, B, C par $p_C \circ p_G$.

(8) On suppose $Z \in (XY)$. Montrer l'égalité des birappports $[A, B, C, D]$ et $[E, F, G, H]$.

(9) Réciproquement, on suppose $[A, B, C, D] = [E, F, G, H]$. Montrer que $p_G(D) = Z$.

Exercice 2. — (36 pts) Soit k un corps. On note $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ l'ensemble des droites projectives de $\mathbb{P}(k^4)$. Pour $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ on définit $x \wedge y$ comme l'élément de k^6 dont les coordonnées sont les mineurs 2×2 de la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{pmatrix}$, notés D_{ij} et pris dans l'ordre lexicographique, c'est-à-dire $x \wedge y = \begin{pmatrix} D_{1,2}(x,y) \\ D_{1,3}(x,y) \\ D_{1,4}(x,y) \\ D_{2,3}(x,y) \\ D_{2,4}(x,y) \\ D_{3,4}(x,y) \end{pmatrix}$,

où $D_{i,j}(x, y) = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix} = x_i y_j - x_j y_i$ pour $1 \leq i < j \leq 4$. Si x, y sont linéairement indépendants, alors $x \wedge y$ est non nul et l'on note $[x \wedge y]$ son image dans $\mathbb{P}(k^6)$. Soit

$$U = \big\{ \big([x], [y]\big) \in \mathbb{P}(k^4) \times \mathbb{P}(k^4) \mid [x] \neq [y] \big\}$$

et soit $\pi : U \to \boldsymbol{\mathcal{D}}$ l'application qui à $([x], [y]) \in U$ associe la droite projective $\mathscr{D} = \mathbb{P}(kx + ky)$.

(1) Montrer que l'application $\phi : U \to \mathbb{P}(k^6)$, $([x], [y]) \mapsto [x \wedge y]$ est bien définie (i.e. que $[x \wedge y]$ ne dépend que de $[x]$ et $[y]$).

(2) Montrer que ϕ se factorise en une application $\psi : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}(k^6)$. Indication : noter que $x \wedge x = 0$ et $y \wedge x = -x \wedge y$ et se ramener à montrer que si $kx + ky = kx + ky'$ alors $[x \wedge y] = [x \wedge y']$.

[1] Par une démonstration différente de celle donnée en cours.

(3) Soit $([x],[y]) \in U$ et $z \in \mathbb{P}(k^4)$. En considérant la matrice $\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 \end{pmatrix}$, montrer que la droite projective (xy) est donnée par quatre équations linéaires $a_{i1}z_1 + a_{i2}z_2 + a_{i3}z_3 + a_{i4}z_4 = 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$, où l'on exprimera les coefficients a_{ij} en fonction des coordonnées de $\psi((xy))$.

(4) Déduire de la question précédente que l'application $\psi : \boldsymbol{\mathcal{D}} \to \mathbb{P}(k^6)$ est injective.

On note $(z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34})$ les coordonnées sur k^6, de sorte que pour $x, y \in k^4$ la coordonnée z_{ij} de $x \wedge y$ est $D_{ij}(x,y)$. On note Q la forme quadratique $z_{12}z_{34} - z_{13}z_{24} + z_{14}z_{23}$ sur k^6 et $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ la quadrique projective de $\mathbb{P}(k^6)$ associée.

(5) Montrer par un calcul direct que $\psi(\boldsymbol{\mathcal{D}})$ est contenu dans $\mathscr{C}$.

(6) Soit $p = [z_{12}, z_{13}, z_{14}, z_{23}, z_{24}, z_{34}] \in \mathscr{C}$. Supposons $z_{12} = 1$. Montrer alors que $p = [x \wedge y]$ pour $[x] = [1, 0, t, u]$ et $[y] = [0, 1, v, w]$, pour des scalaires t, u, v, w que l'on exprimera en fonction des z_{ij}.

(7) (question bonus, hors-barème) Montrer qu'au moins deux des équations de la question (3) sont non nulles et linéairement indépendantes, donc définissent deux plans projectifs dont (xy) est l'intersection.

Exercice 3. — (40 pts) On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soit C un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ contenant 0 dans son intérieur (i.e. il existe un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ tel que $0 \in U \subset C$) et stable par l'application $x \mapsto -x$. Comme l'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(t,x) \mapsto tx$ est continue, alors pour tout $x \in C$, l'ensemble $I(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid tx \in C\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$ contenant 0 dans son intérieur.

(1) Soit $x \neq 0$ dans C. Montrer que $I(x)$ est un intervalle fermé borné $[-\beta(x), \beta(x)]$, avec $\beta(x) > 0$ et $\beta(-x) = \beta(x)$.

(2) On pose $N(0) = 0$ et $N(x) = 1/\beta(x)$ pour $x \neq 0$. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^n$, i.e. qu'on a les trois propriétés suivantes : (a) $N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, (b) $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$, (c) $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) Si A, B sont deux parties convexes de $\mathbb{R}^n$, on pose $A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$. Montrer que $A + B$ est convexe.

Pour le reste de l'exercice, on prend $n = 2$, A le carré fermé $[-1,1] \times [-1,1]$ et B le disque fermé de centre 0 et de rayon 1.

(4) Faire une figure représentant $A + B$.

(5) Montrer que $C = A + B$ contient 0 dans son intérieur et que C est compact.

(6) Soit N la norme sur $\mathbb{R}^2$ définie par C. Pour tout $r > 0$, faire une figure représentant

$$S_N(r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid N(x,y) = r\}.$$

En utilisant cette figure, exprimer $r = N(x,y)$ en fonction de x ou y lorsque (x,y) appartient à l'intersection de $S_N(r)$ et du cône $\mathscr{C}_1$ (resp. $\mathscr{C}_2$) défini par $|y| \leq |x|/2$ (resp. par $|y| \geq 2|x|$).

(7) On suppose $\dfrac{1}{2}|x| \leq |y| \leq 2|x|$ et, pour simplifier, $x, y > 0$. En utilisant la figure précédente, montrer que $N(x,y) = r$ ssi (x,y) appartient au cercle de centre I et de rayon r, pour un point I que l'on déterminera. En utilisant que $r \leq \min(x,y)$, exprimer r en fonction de x et y.

FIN