Corrigé de l'examen du 17 décembre 2015 (3h) (noté sur 70)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Cet examen comporte 5 exercices ; on pourra admettre le résultat d'un exercice pour traiter un exercice ultérieur.

Dans tout le texte, k désigne un corps, supposé de caractéristique $\neq 2$ à partir de l'exercice 3, et $k = \mathbb{R}$ dans la dernière question 5.5.

***Exercice 1* (Questions de cours).** — (8 pts) Soient V un k-ev de dimension 3, I un point du plan projectif $\mathbb{P}(V)$ et $D_1, \dots, D_4$ quatre droites projectives distinctes passant par I. Donner la définition du birapport $[D_1, \dots, D_4]$. Plus précisément :

(1) Donner une définition de $[D_1, \dots, D_4]$ ne faisant intervenir que des points de $\mathbb{P}(V)$.

Solution : Soit $\mathbf{D}$ une droite de $\mathbb{P}(V)$ ne passant pas par I ; elle coupe les D_i en quatre points p_i deux à deux distincts. Le birapport $[p_1, \dots, p_4]$ est indépendant du choix de $\mathbf{D}$ et est appelé le birapport des quatre droites concourantes $D_1, \dots, D_4$.

(2) Soit V^* le dual de V. Pouvez-vous donner une autre définition de $[D_1, \dots, D_4]$, faisant intervenir l'espace projectif $\mathbb{P}(V^*)$? (On ne demande pas de démontrer l'équivalence entre les deux définitions.)

Solution : Les droites (resp. points) de $\mathbb{P}(V)$ correspondent aux points (resp. droites) de $\mathbb{P}(V^*)$. Dans cette correspondance, les droites D_i correspondent à des points $\delta_1, \dots, \delta_4$ de la droite Δ de $\mathbb{P}(V^*)$ duale du point I. Alors $[D_1, \dots, D_4]$ est le birapport des points $\delta_1, \dots, \delta_4$ de Δ.

***Exercice 2* (Questions de cours).** — (8 pts) On identifie $\mathbb{P}^1(k)$ à $k \cup \{\infty\}$. Soient $\mathbf{D}$ une droite projective sur k, $p_1, \dots, p_4$ quatre points distincts de $\mathbf{D}$ et $\lambda = [p_1, p_2, p_3, p_4]$ leur birapport, qui appartient à $k^\times$.

(1) Exprimer en fonction de λ les birapports $[p_2, p_1, p_3, p_4]$ et $[p_1, p_3, p_2, p_4]$.

Solution : $[p_2, p_1, p_3, p_4] = 1/\lambda$ et $[p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - \lambda$

(2) Pouvez-vous donner une démonstration de ces formules ?

Solution : Soit g l'unique homographie $\mathbf{D} \to \mathbb{P}^1(k)$ qui envoie (p_1, p_2, p_3) sur $(\infty, 0, 1)$, alors $g(p_4) = \lambda$. Soit σ (resp. τ) l'homographie de $\mathbb{P}^1(k)$ définie par $\lambda \mapsto 1/\lambda$ (resp. $\lambda \mapsto 1 - \lambda$). Alors g envoie (p_2, p_1, p_3, p_4) sur $(0, \infty, 1, \lambda)$ donc $\sigma \circ g$ envoie (p_1, p_2, p_3, p_4) sur $(\infty, 0, 1, 1/\lambda)$, d'où $[p_2, p_1, p_3, p_4] = 1/\lambda$.

De même, g envoie (p_1, p_3, p_2, p_4) sur $(\infty, 1, 0, \lambda)$ donc $\tau \circ g$ envoie (p_1, p_2, p_3, p_4) sur $(\infty, 0, 1, 1 - \lambda)$, d'où $[p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - \lambda$.

Désormais, on suppose $\boxed{\mathrm{car}(k) \neq 2.}$

***Exercice 3*.** — (18 pts) Dans un plan projectif sur k, soient A, A', B, B' quatre points projectivement indépendants, i.e. tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés. Notons I, resp. J, resp. K, le point de concours des droites (AA') et (BB'), resp. (AB) et $(A'B')$, resp. (AB') et (BA').

(1) Démontrer que I, J, K ne sont pas alignés. *Indication* : considérer le repère projectif (A, A', B, B') et déterminer les coordonnées homogènes de I, J, K dans ce repère.

Solution : Dans le repère indiqué, nos points ont les coordonnées homogènes suivantes :

$$A = [1, 0, 0], \qquad A' = [0, 1, 0], \qquad B = [0, 0, 1], \qquad B' = [1, 1, 1].$$

Il existe un triplet (α, β, γ), unique à homothétie près, tel que la droite (AA') ait pour équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$. Comme elle passe par A (resp. A'), on obtient $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$) donc une équation de (AA') est $z = 0$. On obtient de même qu'une équation de (BB') est $x = y$. Donc $I = [1, 1, 0]$. On obtient de même que (AB) et $(A'B')$ ont pour équation $y = 0$ et $x = z$, d'où $J = [1, 0, 1]$. Et de même, $K = [0, 1, 1]$. Comme le déterminant $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ vaut $2 \neq 0$, on en déduit que les points I, J, K ne sont pas alignés.

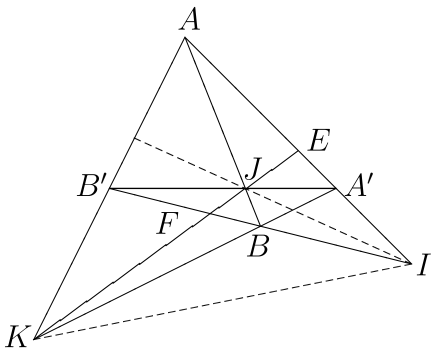
Soit E, resp. F, le point de concours de la droite (KJ) avec la droite (AA'), resp. (BB').

(2) Montrer que les points E, F, I sont deux à deux distincts.

Solution : E et F sont distincts de I puisque K, J, I sont non alignés. Si on avait $E = F$, ce point appartiendrait à $(AA') \cap (BB')$ donc serait égal à I, contradiction.

(3) Faire une figure représentant A, A', B, B', les six droites les joignant, les points I, J, K, E, F et les droites (KJ), (KI) et (JI).

Solution :



(4) En utilisant l'exercice 1 et en considérant les droites passant par K, montrer l'égalité des birapports $[A, A', I, E]$ et $[B', B, I, F]$. Montrer de façon analogue que $[A, A', I, E] = [B, B', I, F]$.

Solution : Notons $\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_4$ les droites (KA), (KA'), (KI) et (KJ) respectivement. En considérant la sécante (AI) (resp. $(B'I)$) on obtient, d'après l'exercice 1, les égalités $[A, A', I, E] = [\mathbf{D}_1, \ldots, \mathbf{D}_4] = [B', B, I, F]$.

De même, notant $\Delta_1, \ldots, \Delta_4$ les droites (JA), (JA'), (JI) et (JK) respectivement, et en considérant les mêmes sécantes, on obtient les égalités $[A, A', I, E] = [\Delta_1, \ldots, \Delta_4] = [B, B', I, F]$.

On note λ la valeur commune de ces birapports, i.e. $\lambda = [A, A', I, E] = [B, B', I, F] = [B, B', I, F]$.

(5) Démontrer, en utilisant la question (2) et l'exercice 2, que $\lambda = -1$.

Solution : D'après l'exercice 2, on a $\lambda = [B, B', I, F] = [B, B', I, F] = 1/\lambda$ donc $\lambda = \pm 1$. De plus, d'après la question (2) on a $F \neq I$ donc $\lambda \neq 1$. Donc $\lambda = -1$.

Désormais, soient V un k-ev de dimension 3, Q une forme quadratique *non dégénérée* sur V, ϕ sa forme polaire et $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ la conique projective définie par Q. Pour tout sous-ensemble $X \neq \varnothing$ de V, son orthogonal pour ϕ, noté $X^\perp$, est le sev suivant : $X^\perp = \{u \in V \mid \forall x \in X, \quad \phi(u,x) = 0\}$. Pour tout $v \in V - \{0\}$, on rappelle que la tangente à $\mathscr{V}(Q)$ au point $p = [v]$, notée $T_p\mathscr{V}(Q)$, est la droite projective $\mathbb{P}(v^\perp)$.

Exercice 4. — (25 pts) Soient E un plan vectoriel de V et $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(V)$ la droite projective correspondante. On note Q_E la restriction de Q à E.

(1) Montrer que $\mathbf{D} \not\subset \mathscr{V}(Q)$. *Indication.* Raisonner par l'absurde : soit (e_0, e_1) une base de E, complétée en une base $\mathscr{B}$ de V. En considérant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$, montrer que si $Q_E = 0$ alors Q est dégénérée.

Solution : Si $Q_E = 0$ alors $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ serait de la forme suivante : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$ donc serait de rang ≤ 2 (car les colonnes 1 et 2 sont liées), contredisant le fait que Q est non dégénérée.

Soit (e_0, e_1) une base orthogonale de E telle que $Q(e_0) = 1$. Posons $\delta = Q(e_1)$.

(2) Écrire la matrice A de Q_E dans la base (e_0, e_1) et, pour $u = x_0e_0 + x_1e_1$ et $v = y_0e_0 + y_1e_1$ dans E, exprimer $\phi(u,v)$ en fonction des x_i et y_i.

Solution : On a $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$. Par conséquent, on a $\phi(u,v) = x_0y_0 + \delta\, x_1y_1$.

(3) On suppose que Q_E est de rang 1. Montrer que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée d'un unique point p et que $\mathbf{D} = T_p\mathscr{V}(Q)$.

Solution : Q_E est de rang 1 ssi $\delta = 0$, i.e. ssi $Q_E(x_0, x_1) = x_0^2$. Dans ce cas, $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est le point p de $\mathbf{D}$ défini par l'équation $x_0^2 = 0$, i.e. le point $p = [e_1]$. La tangente $T_p\mathscr{V}(Q)$ est $\mathbb{P}(e_1^\perp)$; or le plan $e_1^\perp$ contient e_0 et e_1, donc égale E, d'où $T_p\mathscr{V}(Q) = \mathbf{D}$.

(4) On suppose que Q_E est de rang 2. Montrer que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée de deux points *distincts* p_1, p_2 (éventuellement à coordonnées dans l'extension quadratique $k' = k[T]/(T^2 + \delta)$ de k) et que $\mathbf{D}$ n'est pas tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en ces points.

Solution : Q_E est de rang 2 ssi $\delta \neq 0$. Dans ce cas, $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée des points $[x_0e_0 + x_1e_1]$ tels que $x_0^2 + \delta x_1^2 = 0$. Soit α une racine carrée de $-\delta$ dans k (ou dans k' si $-\delta$ n'est pas un carré dans k) ; alors $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée des deux points $[\alpha, 1]$ et $[-\alpha, 1]$. Comme $\phi(e_1, \pm\alpha e_0 + e_1) = \delta \neq 0$, on voit que la tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en ces points ne contient pas e_1 donc est distincte de $\mathbf{D}$.

Désormais, on suppose p_1, p_2 à coordonnées dans k ; soient $v_1, v_2 \in E$ tels que $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ et soit $q = [u]$ le point de concours des tangentes à $\mathscr{V}(Q)$ en p_1 et p_2.

Soient $[v], [w]$ deux points de $\mathbb{P}(V)$; on dit qu'ils sont **conjugués** si $\phi(v,w) = 0$. L'ensemble des points conjugués à $p = [v]$ est la droite $\mathbb{P}(v^\perp)$, appelée la **polaire** de p. Réciproquement, pour un plan vectoriel F de V, le **pôle** de la droite $\mathbb{P}(F)$ est le point $p = \mathbb{P}(F^\perp)$.

(5) Montrer que les points p_1 et q sont conjugués, de même que p_2 et q.

Solution : Comme $I = [u]$ appartient à $T_{p_1}\mathscr{V}(Q) = \mathbb{P}(v_1^\perp)$ alors u et v_1 sont orthogonaux, donc q et p_1 sont conjugués. De même, p_2 et q sont conjugués.

(6) En déduire que la droite projective $\mathbf{D} = (p_1p_2)$ est la polaire du point q.

Solution : Comme $p_1 \neq p_2$ alors (v_1, v_2) est une base de E. Comme v_1 et v_2 sont orthogonaux à u, on en déduit $E = u^\perp$ et donc $\mathbf{D} = (p_1p_2)$ est la polaire de q.

(7) Écrire la matrice B de Q_E dans la base (v_1, v_2) et montrer que $\phi(v_1, v_2) \neq 0$.

Solution : On a $B = \begin{pmatrix} 0 & \phi(v_1,v_2) \\ \phi(v_1,v_2) & 0 \end{pmatrix}$ et comme Q_E est non dégénérée, on a $\phi(v_1, v_2) \neq 0$.

(8) Soient $p_3 \neq p_4$ deux points distincts de $\mathbf{D} - \{p_1, p_2\}$. Quitte à multiplier v_2 par un scalaire, on peut supposer que $p_3 = [v_1 + v_2]$ et $p_4 = [v_1 + \lambda v_2]$ pour un certain $\lambda \in k^\times$. À quelle condition sur λ les points p_3 et p_4 sont-ils conjugués ?

Solution : Ils sont conjugués ssi $0 = \phi(v_1 + v_2, v_1 + \lambda v_2) = (1 + \lambda)\phi(v_1, v_2)$. Comme $\phi(v_1, v_2) \neq 0$, ceci est le cas ssi $\lambda = -1$.

(9) Montrer que p_3 et p_4 sont conjugués ssi le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ vaut -1.

Solution : Soit g l'unique homographie $(p_1p_2) \to \mathbb{P}^1(k)$ envoyant p_1 sur $\infty = [1, 0]$, p_2 sur $0 = [0, 1]$ et p_3 sur $1 = [1, 1]$. Alors g envoie $p_4 = [v_1 + \lambda v_2]$ sur λ, donc $\lambda = [p_1, p_2, p_3, p_4]$. D'après la question précédente, on obtient que p_3 et p_4 sont conjugués ssi ce birapport vaut -1.

Exercice 5. — (17 pts) Soient A, A', B, B' quatre points distincts de $\mathscr{V}(Q)$.

(1) Montrer que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. (Utiliser les questions 4.1 à 4.4.)

Solution : D'après les questions 4.1 à 4.4, toute droite $\mathbf{D}$ coupe $\mathscr{V}(Q)$ en au plus deux points, donc trois de ces points de $\mathscr{V}(Q)$ ne peuvent jamais être sur une même droite.

Notons I, resp. J, resp. K, le point de concours des droites (AA') et (BB'), resp. (AB) et $(A'B')$, resp. (AB') et (BA'). Soit E, resp. F, le point de concours de la droite (KJ) avec la droite (AA'), resp. (BB').

(2) Montrer que les points I et E sont conjugués. *Indication* : utiliser l'exercice 3 et appliquer un résultat de l'exercice 4 à la droite (AA'). Montrer de façon analogue que I et F sont conjugués.

Solution : D'après les questions 3.4 et 3.5, on a $[A, A', I, E] = -1 = [B', B, I, F]$. Donc, d'après la question 4.9 appliqué à la droite (AA'), qui rencontre $\mathscr{V}(Q)$ en les deux points distincts A et A', les points I et E sont conjugués. De même, d'après la question 4.9 appliqué à la droite (BB'), qui rencontre $\mathscr{V}(Q)$ en les deux points distincts B et B', les points I et F sont conjugués.

(3) Montrer que la droite (KJ) est la polaire du point I. *Indication* : utiliser la question 3.2 puis procéder comme dans la question 4.6.

Solution : D'après la question 3.2, E, F sont distincts donc $(KJ) = (EF)$. Comme E, F sont conjugués à I, on obtient que la droite $(EF) = (KJ)$ est la polaire de I (cf. la solution de la question 4.6).

(4) On suppose que la droite (KJ) coupe $\mathscr{V}(Q)$ en deux points $P_1 \neq P_2$. En utilisant la question précédente et en appliquant un résultat de l'exercice 4 à la droite $(KJ) = (P_1P_2)$ montrer que la droite (IP_1) (resp. (IP_2)) est tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en P_1 (resp. en P_2).

Solution : D'après la question 4.6, $(KJ) = (P_1P_2)$ est la polaire du point d'intersection q des tangentes T_1 et T_2 à $\mathscr{V}(Q)$, i.e. q est le pôle de (KJ) et les droites (qP_1) et (qP_2) sont les tangentes à $\mathscr{V}(Q)$ en P_1 et P_2. Or d'après la question précédente le pôle de (KJ) est I. Donc $I = q$ et la droite (IP_1) (resp. (IP_2)) est tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en P_1 (resp. en P_2).

On prend $V = \mathbb{R}^3$ et $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 - Z^2$. Soit U l'ouvert affine de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ défini par $Z \neq 0$, i.e. $U = \{[x, y, 1] \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$. Soient B, B', A, A' les points de $\mathscr{C} = U \cap \mathscr{V}(Q)$ suivants : $B' = (-1, 0)$, $A' = (0, 1)$, $A = (-\alpha, \alpha)$, $B = (\alpha, -\alpha)$, où $\alpha = \sqrt{2}/2$.

(5) En supposant les coordonnées X, Y orthonormées, avec 2 cm comme unité de longueur, faire un dessin représentant $\mathscr{C}$, y placer les points A, A', B, B', puis tracer les six droites les joignant, indiquer le point I et sa polaire, puis tracer (approximativement) les deux tangentes à $\mathscr{C}$ issues de I. (La figure tient dans un carré de côté 8 cm centré en $O = (0,0)$.)

Solution : La polaire de I est la droite (KJ). Le point P_1 est indiqué, faute de place, par un $\bullet$. Les tangentes sont indiquées en pointillé :