Corrigé du contrôle du 19 novembre 2015 (1h30) (noté sur 30)

Aucun document n'est autorisé. L'utilisation de tout appareil électronique est interdite. Les téléphones portables doivent être éteints et rangés. Ce contrôle comporte 2 exercices indépendants.

Exercice 1. — Soit $V = \mathbb{C}^2$ et soit $G = \mathrm{PGL}(V)$ le groupe des homographies de $\mathbb{P}(V)$. Soit h un élément de G *distinct de l'identité* et soit g un élément de $\mathrm{GL}(V)$ dont l'image $\overline{g}$ dans G égale h. Pour tout $v \in V - \{0\}$ on note $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$.

(1) À quelle condition un élément $[v]$ de $\mathbb{P}(V)$ est-il un point fixe de h ?

Solution : On a $h([v]) = [g(v)]$ donc $[v]$ est un point fixe de h ssi v est un vecteur propre de g.

(2) Montrer que l'ensemble $\mathrm{Fix}(h)$ des points fixes de h est de cardinal 1 ou 2, en précisant sous quelle hypothèse sur g ce cardinal vaut 1 ou 2. Donner un exemple de g pour lequel $|\mathrm{Fix}(h)| = 1$.

Solution : Comme $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, g a au moins une valeur propre, donc $\mathrm{Fix}(h)$ est non vide. Comme $\dim(V) = 2$ et comme g n'est pas une homothétie, chaque espace propre est de dimension 1. Donc h a deux points fixes si g est diagonalisable, et un seul dans le cas contraire, i.e. si g est semblable à une matrice de Jordan $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

(3) On suppose que $|\mathrm{Fix}(h)| = 1$. Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ une base de V telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est triangulaire supérieure. Écrire une telle matrice A et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Puis, pour tout $a \in \mathbb{C}$, calculer $A^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$.

Solution : On peut supposer que $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^\times$, i.e. $A = \lambda \mathrm{id} + E_{12}$, où E_{12} désigne la matrice élémentaire dont tous les coefficients sont nuls sauf celui d'indice $(1, 2)$ qui vaut 1. Comme $E_{12}^2 = 0$, il résulte de la formule de binôme (applicable car id commute avec E_{12}) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$A^n = \lambda^n \mathrm{id} + n\lambda^{n-1} E_{12} = \lambda^n \begin{pmatrix} 1 & n\lambda^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc

$$A^n \begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda^n \begin{pmatrix} a + n\lambda^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} = n\lambda^n \begin{pmatrix} (a/n) + \lambda^{-1} \\ 1/n \end{pmatrix}$$

et donc $h^n([ae_1 + e_2]) = [(a/n) + \lambda^{-1}, 1/n]$.

Remarque. On peut munir $\mathbb{P}(V)$ d'une topologie (quotient de celle de $V - \{0\}$) ; pour cette topologie, la suite ci-dessus converge vers le point $[\lambda^{-1}, 0] = [1, 0]$ qui est l'unique point fixe de h.

Désormais, on suppose que $|\mathrm{Fix}(h)| = 2$ et que $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ est une base de V telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ est diagonale, de coefficients diagonaux μ_1 et μ_2.

(4) Montrer que le rapport μ_1/μ_2 ne dépend que de h. On le notera $\rho(h)$.

Solution : On a $A = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$ et si g' est un autre élément de $\mathrm{GL}(V)$ dont l'image dans G est h alors g' égale λg pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ donc les coefficients diagonaux de sa matrice A' sont $\mu_1' = \lambda\mu_1$ et $\mu_2' = \lambda\mu_2$ donc $\mu_1'/\mu_2' = \mu_1/\mu_2$.

(5) Montrer que h est une involution (distincte de l'identité) si et seulement si $\rho(h) = -1$.

Solution : h est une involution (distincte de l'identité) si et seulement si A^2 est une homothétie. Comme $A^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}$, ceci est le cas ssi $\mu_1 = \pm\mu_2$, et comme $\mu_1 = \mu_2$ est exclu car g n'est pas une homothétie, ceci équivaut à $\mu_1 = -\mu_2$, i.e. à $\rho(h) = -1$.

(6) On pose $p_1 = [e_1]$ et $p_2 = [e_2]$. Pour tout $q \in \mathbb{P}(V)$ distinct de p_1 et p_2, montrer que le birapport $[p_1, p_2, q, h(q)]$ est le point $[\rho(h), 1]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.

Solution : Écrivons $q = [v]$, avec $v = ae_1 + be_2$. Comme q est distinct de p_1 et p_2, alors $ab \neq 0$. On a $h(q) = [g(v)] = [a\mu_1 e_1 + b\mu_2 e_2]$ et donc, par définition du birapport :

$$[p_1, p_2, q, h(q)] = \left[\frac{\begin{vmatrix} a\mu_1 & 0 \\ b\mu_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & a\mu_1 \\ 0 & b\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}} \right] = \left[\frac{a\mu_1}{a}, \frac{b\mu_2}{b} \right] = [\mu_1, \mu_2] = [\rho(h), 1].$$

Exercice 2. — On note ∞ le point $[1, 0]$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et l'on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) - \{\infty\}$ par la bijection $z \mapsto [z, 1]$. Soit $G = \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ le groupe des homographies de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et soit $G_\infty = \{h \in G \mid h(\infty) = \infty\}$.

(1) Démontrer, en refaisant une démonstration du cours, que G_∞ s'identifie au groupe des bijections affines de $\mathbb{C}$.

Solution : Soit $h \in G$ et soit $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ un élément de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ dont l'image $\overline{g}$ dans G égale h. Alors h fixe $\infty = [1, 0]$ si et seulement si $c = 0$. Dans ce cas, $ad \neq 0$ et donc, en remplaçant g par $d^{-1}g$, on se ramène au cas où $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, avec $a \neq 0$.

Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $h(z) = h([z, 1]) = [az + b, 1] = az + b$, i.e. la restriction de h à $\mathbb{C}$ est la bijection affine $z \mapsto az + b$, et toute telle bijection est ainsi obtenue.

(2) Démontrer que G est engendré par G_∞ et par l'homographie $\tau : z \mapsto 1/z$.

Solution : Soit $h \in G - G_\infty$. Alors h est l'image dans G d'un élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ tel que $c \neq 0$ et donc, en remplaçant g par $c^{-1}g$, on se ramène au cas où

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ 1 & d \end{pmatrix}, \qquad \text{avec } 0 \neq \delta = \mathrm{dét}(g) = ad - b.$$

Alors h est l'homographie qui envoie z sur $\dfrac{az + b}{z + d} = \dfrac{a(z + d) - \delta}{z + d} = \dfrac{-\delta}{z + d} + a$, donc c'est la composée des applications $z \mapsto z + d$, τ, et $z \mapsto -\delta z + a$, où la première et la troisième appartiennent à G_∞.

Dans la suite, on identifie $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne $\|z\| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ si $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

(3) Montrer que les éléments de G_∞ sont des bijections affines de $\mathbb{R}^2$ dont on précisera la nature géométrique. En déduire, en le justifiant brièvement, que G_∞ agit transitivement sur l'ensemble des droites (resp. des cercles de rayon non nul) de $\mathbb{R}^2$.

Solution : Si $\alpha = re^{i\theta}$ avec $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ et si $\beta = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors l'application $z \mapsto \alpha z + \beta$ est la composée de la similitude directe de centre $O = (0,0)$, d'angle θ et de rapport r, et de la translation de vecteur (a, b). On voit ainsi que G_∞ est le sous-groupe de $\mathrm{GA}(\mathbb{R}^2)$ formé des similitudes directes. En particulier, chaque $g \in G_\infty$ transforme toute droite (resp. tout cercle) de $\mathbb{R}^2$ en une droite (resp. en un cercle).

De plus, toute droite (resp. tout cercle de rayon > 0) peut être amenée par translation sur une droite passant par 0 (resp. sur un cercle centré en 0), puis par une rotation (resp. une homothétie de rapport > 0) sur la droite réelle (resp. sur le cercle unité). Ceci montre que G_∞ agit transitivement sur l'ensemble des droites (resp. des cercles de rayon non nul) de $\mathbb{R}^2$.

(4) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$, d'équation $ax+by+c = 0$, avec $(a, b) \neq (0, 0)$. Montrer qu'il existe $\beta \in \mathbb{C}^\times$, que l'on précisera, tel que $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \beta z + \overline{\beta z} + c = 0\}$. Réciproquement, montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par une telle équation est une droite de $\mathbb{R}^2$ que l'on déterminera.

Solution : On cherche $\beta = u + iv$, avec $u, v \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$, tel que pour tout $z = x + iy$ on ait $\beta z + \overline{\beta z} = 2\mathrm{Re}(\beta z) = 2(ux - vy) = ax + by$. Ceci équivaut à $u = a/2$ et $v = -b/2$.

Réciproquement, si $\beta = u + iv \neq 0$ est donné, alors l'équation $\beta z + \overline{\beta z} + c = 0$, avec $z = x + iy$ et $x, y, c \in \mathbb{R}$, est équivalente à $2ux - 2vy + c = 0$.

Soit $\mathscr{S} = \{(A, c, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{C} \mid \beta\overline{\beta} - Ac > 0\}$.

(5) Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathscr{C}$ le cercle de centre p et de rayon r. Montrer qu'il existe $(A, c, \beta) \in \mathscr{S}$, que l'on précisera, tels que $\mathscr{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid Az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0\}$. Réciproquement, montrer que tout sous-ensemble de $\mathbb{C}$ défini par une telle équation, avec $(A, c, \beta) \in \mathscr{S}$, est un cercle que l'on déterminera.

Solution : Posons $z_0 = x_0 + iy_0$. L'équation de $\mathscr{C}$ est $r^2 = |z - z_0|^2 = (z - z_0)(\overline{z} - \overline{z_0})$, c.-à-d.

$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + z_0\overline{z_0} - r^2 = 0$$

qui est de la forme voulue avec $A = 1$, $\beta = -\overline{z_0}$ et $c = z_0\overline{z_0} - r^2$, et l'on a bien $\beta\overline{\beta} - Ac = r^2 > 0$.

Réciproquement, pour tout $(A, \beta, c) \in \mathscr{S}$, posons $r = (\sqrt{\beta\overline{\beta} - Ac})/A$, et $z_0 = -\overline{\beta}/A$. Alors $c/A = (\beta\overline{\beta}/A^2) - r^2$ et l'équation $Az\overline{z} + \beta z + \overline{\beta z} + c = 0$ équivaut à l'équation

$$z\overline{z} - \overline{z_0}z - z_0\overline{z} + \frac{\beta\overline{\beta}}{A^2} - r^2 = 0$$

qui est celle du cercle de centre z_0 et de rayon r.

(6) Soit D une droite de $\mathbb{R}^2$, soit τ l'homographie $z \mapsto 1/z$ de $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ et soit $E = \tau(D \cup \{\infty\})$. Montrer que si $0 \in D$ alors $E \cap \mathbb{C}$ est une droite de $\mathbb{R}^2$ contenant 0, et si $0 \notin D$ alors $E \cap \mathbb{C}$ est un cercle de $\mathbb{R}^2$ de rayon non nul et contenant 0.

Solution : L'équation de D est de la forme $\beta z + \overline{\beta z} + c = 0$ avec $\beta \in \mathbb{C}^\times$ et $c \in \mathbb{R}$. Supposons d'abord $0 \in D$, i.e. $c = 0$, et notons $D^\times = D - \{0\}$. Alors $E = \{0, \infty\} \cup \tau(D^\times)$ et comme $\tau(D^\times) \subset \mathbb{C}^\times$ et $\tau^2 = \mathrm{id}$ on a :

$$\tau(D^\times) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \tau(z) \in D^\times\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \frac{\beta}{z} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{z}} = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \beta\overline{z} + \overline{\beta}z = 0\}.$$

Ceci montre que $E \cap \mathbb{C}$ est la droite d'équation $\beta\overline{z} + \overline{\beta}z = 0$.

Supposons maintenant $0 \notin D$, i.e. $c \neq 0$. Alors $E = \{0\} \cup \tau(D)$ et comme $\tau(D) \subset \mathbb{C}^\times$ et $\tau^2 = \mathrm{id}$ on a :

$$\tau(D) = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \tau(z) \in D\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \frac{\beta}{z} + \frac{\overline{\beta}}{\overline{z}} + c = 0\} = \{z \in \mathbb{C}^\times \mid \beta\overline{z} + \overline{\beta}z + cz\overline{z} = 0\}$$

et comme $\beta\overline{\beta} - c \cdot 0 = \beta\overline{\beta} > 0$, ceci est l'équation d'un cercle $\mathscr{C}$ de rayon non nul, passant par 0. Comme $0 = \tau(\infty)$, on obtient bien que $E \cap \mathbb{C}$ est le cercle $\mathscr{C}$.

(7) Soient $z_1, \ldots, z_4 \in \mathbb{C}$ deux à deux distincts. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Le birapport $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ est réel.

(b) $z_1, \ldots, z_4$, considérés comme points de $\mathbb{R}^2$, sont cocycliques ou alignés.

Indications. Pour (a) $\Rightarrow$ (b), remplacer $z_1, \ldots, z_4$ par $\infty, 0, 1$ et un certain réel x, puis utiliser les questions (2), (3) et (6). Pour (b) $\Rightarrow$ (a), utiliser les questions (6) et (3) pour placer les quatre points dans $\mathbb{R}$ puis utiliser la formule explicite du birapport.

Solution : Posons $x = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Comme $[\infty, 0, 1, x] = x$, il existe $h \in G$ envoyant $(z_1, \ldots, z_4)$ sur $(\infty, 0, 1, x)$. Si x est réel, les quatre points précédents appartiennent à $E' = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ et donc $z_1, \ldots, z_4$ appartiennent à $h^{-1}(E') \cap \mathbb{C}$. Or il résulte des questions (2), (3) et (6) que $h^{-1}(E') \cap \mathbb{C}$ est contenu dans une droite ou un cercle de $\mathbb{R}^2$, donc (b) est vérifié.

Réciproquement, supposons (b) vérifié. D'abord, si $z_1, \ldots, z_4$ appartiennent à une droite D, on peut transformer D en la droite réelle $\mathbb{R}$ par un élément de G_∞. Supposons donc que $z_1, \ldots, z_4$ appartiennent à un cercle $\mathscr{C}_0$.

Considérons par exemple la droite $D = i + \mathbb{R}$ et soit t la translation de vecteur $-i$. D'après la question (6), τ transforme D en un cercle épointé $\mathscr{C}^*$ passant par 0 et privé de 0. Il existe un élément $g \in G_\infty$ envoyant $\mathscr{C}_0$ sur $\mathscr{C}^*$ et tel que $g(z_i) \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, 4$ (composer si nécessaire avec une rotation de centre le centre de $\mathscr{C}^*$), alors $t \circ \tau \circ g$ envoie $\mathscr{C}_0$ dans $\mathbb{R}$.

Dans les deux cas, on a trouvé une homographie h envoyant $z_1, \ldots, z_4$ sur quatre réels $x_1, \ldots, x_4$ (deux à deux distincts) et donc $[z_1, \ldots, z_4] = [x_1, \ldots, x_4]$. Enfin, d'après la formule explicite du birapport, ceci est un réel : c'est le quotient de $(x_4 - x_2)/(x_3 - x_2)$ par $(x_4 - x_1)/(x_3 - x_1)$.