Semaine 3 : Espaces projectifs, plongement projectif d'un espace affine, théorèmes de Pappus et de Desargues

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (§I.3.3 et Chap. II), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

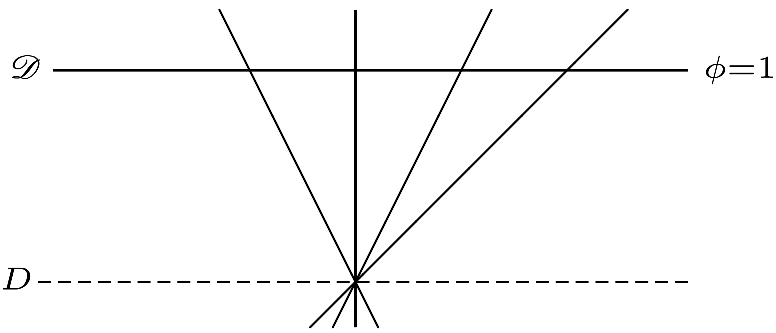
[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§1.7 et §§2.1-2.4), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[LF] Jaqueline Lelong-Ferrand, Les fondements de la géométrie (P.U.F., 1985), §§IV.10 et V.11

7. Plongement projectif d'une droite ou d'un plan affine

7.1. Droites projectives. — Soit $\mathscr{D}$ une droite affine, de direction D et soit $V = \widehat{\mathscr{D}}$, c'est un k-espace vectoriel de dimension 2 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{D} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On peut le voir de plusieurs façons.

(a) Sur le dessin ci-dessous, on voit que, à l'exception de D, toute droite vectorielle de V coupe $\mathscr{D}$ en un unique point. On peut donc identifier $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ à l'ensemble des points de $\mathscr{D}$, auxquels on rajoute un point, noté ∞, qui correspond à la droite D et qu'on appelle le « point à l'infini ». Donc, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathscr{D} \cup \{\infty\}$.



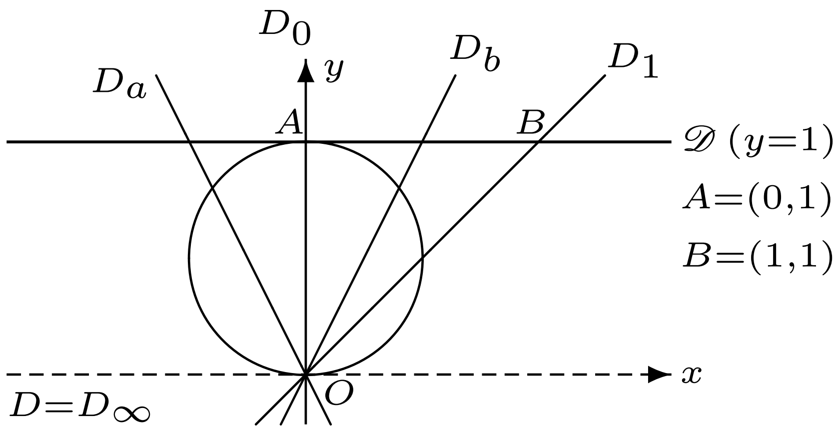
(b) Choisissons des coordonnées (x, y) sur V telles que $\mathscr{D}$ (resp. D) soit donnée par l'équation $y = 1$ (resp. $y = 0$).[(1)] Alors les droites vectorielles de V sont :

(i) Pour $\lambda \in k$, la droite D_λ d'équation $x = \lambda y$ (engendrée par $e_2 + \lambda e_1$), qui coupe $\mathscr{D}$ en le point $(\lambda, 1)$.

(ii) La droite $D = ke_1$, d'équation $y = 0$.

Dans la figure suivante, pour $k = \mathbb{R}$ on a représenté les droites D_0 et D_1, ainsi que D_a et D_b, où $a = -1/2 = -b$. De plus, lorsque $k = \mathbb{R}$, on voit que lorsque λ tend vers $\pm\infty$, la droite D_λ « tend » vers la droite $D_\infty = D$. Bien qu'on n'ait pas encore défini de topologie sur $\mathbb{P}(V)$, on peut comprendre l'assertion précédente en remarquant que chaque droite D_λ recoupe le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[OA]$ en un unique point $P_\lambda \neq O$, tandis que $D = D_\infty$ est tangente à $\mathscr{C}$ en O, et que, pour la topologie usuelle de $\mathbb{R}^2$, le point P_λ tend vers O quand λ tend vers $\pm\infty$. Donc, on peut identifier $\mathbb{P}(\mathbb{R}^2)$ au cercle $\mathscr{C}$ (on reviendra sur ceci plus tard).

(1) Pour cela, on choisit une forme linéaire ψ non colinéaire à notre ϕ, alors (ψ, ϕ) est une base de V^*, duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de V et donc les formes linéaires « coordonnées dans cette base » sont (ψ, ϕ).



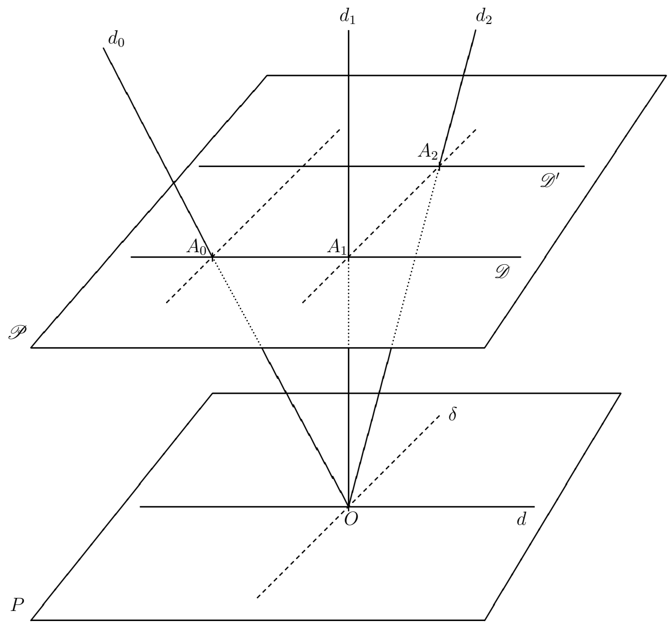
Revenant à un corps quelconque k, soit V un k-espace vectoriel de dimension 2.

Définition 7.1. — (a) On note $\mathbb{P}(V)$ l'ensemble des droites vectorielles de V, et l'on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une *droite projective.*

(b) Lorsque $V = \widehat{\mathscr{D}}$ pour une droite affine $\mathscr{D}$, on note $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{D}})$ et l'on dit que c'est le « plongement projectif » de $\mathscr{D}$.

L'intérêt de cette notion de « droite projective » va apparaître dans un instant, avec l'introduction du « plan projectif ».

7.2. Le plan projectif. — Soit $\mathscr{P}$ un plan affine, de direction P et soit $V = \widehat{\mathscr{P}}$, c'est un k-espace vectoriel de dimension 3 qui contient comme hyperplan affine $\mathscr{P} = \{v \in V \mid \phi(v) = 1\}$. Notons $\mathbb{P}(V) = \widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un *plan projectif*, et que c'est le « plongement projectif » de $\mathscr{P}$.



Ainsi, comme ensemble, $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est la réunion des points de $\mathscr{P}$, qui correspondent aux droites vectorielles de $\widehat{\mathscr{P}}$ non contenues dans P, et des points de $\mathbb{P}(P)$, qui correspondent aux droites vectorielles de P.[(2)]

[(2)] C'est pour cette raison que, dans la figure précédente, on a noté par des lettres minuscules les droites vectorielles d_0, d_1, d_2, d, δ : elles correspondent à des « points » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

Les points de $\mathbb{P}(P)$ forment ce qu'on appelle la « droite (projective) à l'infini », qu'on notera $\mathscr{D}_\infty$. Dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$, chaque droite affine $\mathscr{D}$ est « complétée » en lui adjoignant son « point à l'infini », qui est le point de $\mathbb{P}(P)$ correspondant à la direction de $\mathscr{D}$; on obtient ainsi la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$.(3) De plus, deux droites parallèles ont le même point à l'infini : par exemple, dans la figure, $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ont d pour point à l'infini, tandis que la droite (A_1A_2) et sa parallèle passant par A_0 ont toutes deux δ comme point à l'infini. On voit ainsi que :

(i) Dans $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2$ deux droites affines distinctes, alors dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_1)$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}_2)$ se coupent en un unique point x, et x appartient à $\mathscr{P}$ (resp. à la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$) si et seulement si $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont concourantes (resp. parallèles). (Ceci suffit déjà à justifier l'étude des espaces projectifs et de la « géométrie projective ».)

(ii) De plus, pour toute droite affine $\mathscr{D}$ de $\mathscr{P}$, la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ coupe $\mathscr{D}_\infty$ en un unique point, qui est le point à l'infini de $\mathscr{D}$. Donc, en appelant « **droites** » de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ les droites $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ ainsi que la droite $\mathscr{D}_\infty$, on obtient que :

« dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ deux droites distinctes se coupent en un unique point »,

ce qui est une situation « plus agréable » que dans le plan affine. De plus, on verra plus bas que, en fait, $\mathscr{D}_\infty$ ne joue pas un rôle particulier et peut être remplacée par n'importe quelle droite de $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$.

Remarque 7.2. — Lorsque $k = \mathbb{R}$ le plan projectif réel $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$ est muni d'une structure de variété C^∞ compacte mais attention, il ne s'identifie *pas* à la sphère $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. On peut essayer de se le représenter comme la demi-sphère supérieure : $S^2_+ = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z \geq 0\}$ en identifiant deux à deux les points diamétralement opposés $(x, y, 0)$ et $(-x, -y, 0)$. En effet, chaque droite vectorielle non contenue dans le plan horizontal $z = 0$ coupe la demi-sphère en un unique point, pour lequel $z > 0$; ceci fournit une bijection entre le plan affine donné par $z = 1$ et $S^2_{z>0} = \{(x, y, z) \in S^2 \mid z > 0\}$. D'autre part, chaque droite vectorielle horizontale coupe le cercle horizontal $S^1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ en deux points diamétralement opposés, qu'il faut donc identifier. On peut montrer que $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est une surface compacte *non orientable* (i.e. elle a une seule face au lieu de deux, comme un ruban de Möbius) et donc n'est pas homéomorphe à une surface contenue dans $\mathbb{R}^3$. Mais ceci n'empêche pas de faire de la géométrie projective !

8. Espaces projectifs, coordonnées homogènes, ouverts affines

8.1. Espaces projectifs et coordonnées homogènes. — On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n + 1$.

Définition 8.1. — L'espace projectif de V, noté $\mathbb{P}(V)$, est l'ensemble des droites vectorielles de V. On dit que c'est un espace projectif *de dimension* $n = \dim(V) - 1$.(4) Si $V = k^{n+1}$, on le note aussi $\mathbb{P}^n(k)$.

En particulier, si $\dim(V) = 1$ alors $\mathbb{P}(V)$ est un point. Si $\dim(V) = 2$ (resp. 3), on dit que $\mathbb{P}(V)$ est une droite projective (resp. un plan projectif).

Notation 8.2. — Considérons sur $V - \{0\}$ la relation d'équivalence définie par $v \sim v'$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $v' = \lambda v$. Comme toute droite D est définie par un vecteur non nul v et que deux vecteurs non nuls v, v' définissent la même droite ssi $v \sim v'$, on voit que $\mathbb{P}(V)$ s'identifie à *l'ensemble quotient* $(V - \{0\})/\sim$, qu'on note $(V - \{0\})/k^\times$.

Pour tout $v \in V - \{0\}$, on notera $[v]$ son image dans $\mathbb{P}(V)$, i.e. le point de $\mathbb{P}(V)$ défini par la droite kv.

(3) En effet, le sev de $\widehat{\mathscr{P}}$ engendré par $\mathscr{D}$ s'identifie à $\widehat{\mathscr{D}}$ et l'on retrouve la construction du §1.

(4) Par convention, $\mathbb{P}(\{0\}) = \varnothing$.

***Définition 8.3* (Sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$).** — Soit W un sev non nul de V. Alors $\mathbb{P}(W)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{P}(V)$ (en effet, les droites vectorielles de V contenues dans W sont exactement les droites vectorielles de W). On dira que c'est un *sous-espace projectif* de $\mathbb{P}(V)$, *de dimension* $\dim(W) - 1$. [5] En particulier, si $\dim(W) = 2$ on dit que $\mathbb{P}(W)$ est une *droite projective* dans $\mathbb{P}(V)$.

Rappelons le lemme suivant, dont on se servira de façon répétée.

Lemme 8.4. — *Soient H un hyperplan de V et W un sev de V non contenu dans H. Alors on a* $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$.

Démonstration. — En effet, on a : $\boxed{\dim(W \cap H) = \dim(W) + \dim(H) - \dim(W + H).}$ (†) Comme $\dim(H) = \dim(V) - 1$ et comme l'inclusion $H \subset H + W$ est *stricte* (car $W \not\subset H$), on a $\dim(W + H) \geq \dim(V)$ et donc $W + H = V$. Reportant ceci dans (†), on obtient $\dim(W \cap H) = \dim(W) - 1$. □

On a vu au §7.2 que, si $\mathscr{P}$ est un plan affine, alors le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P}) = \mathbb{P}(\widehat{\mathscr{P}})$ a la propriété suivante : deux droites projectives distinctes se coupent en un unique point. On va voir que ceci est vrai dans tout plan projectif. Plus généralement, on a la :

Proposition 8.5. — *Soient E, F deux sev non nuls de V. Posons $p = \dim \mathbb{P}(E)$ et $q = \dim \mathbb{P}(F)$.*

(i) *On a $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E \cap F)$; ceci est non vide ssi $E \cap F \neq \{0\}$.*

(ii) *Si $p + q \geq n = \dim \mathbb{P}(V)$ alors $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est non vide et est de dimension $\geq p + q - n$.*

(iii) *Par ailleurs, on a : $\mathbb{P}(E) \subseteq \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E \subset F$ et donc : $\mathbb{P}(E) = \mathbb{P}(F) \Leftrightarrow E = F$.*

(iv) *Si H est un hyperplan de V et si $\mathbf{D}$ est une droite projective non contenue dans $\mathbb{P}(H)$, alors $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H)$ est formé d'un seul point.*

Démonstration. — $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est formé des droites vectorielles de V contenues dans E et dans F, i.e. contenues dans $E \cap F$. La 1ère assertion de (i) en découle, et la 2ème est claire.

(ii) On sait que $\dim(E \cap F) + \dim(E + F) = \dim(E) + \dim(F) = p + 1 + q + 1 = p + q + 2$, et comme $\dim(E + F) \leq \dim(V) = n + 1$ on a donc :

$$\dim(E \cap F) \geq p + q + 2 - (n + 1) = p + q + 1 - n.$$

Sous l'hypothèse $p + q \geq n$, ceci est ≥ 1, donc $E \cap F$ est non nul, de dimension $\geq p + q - n + 1$, donc $\mathbb{P}(E) \cap \mathbb{P}(F)$ est de dimension $\geq p + q - n$.

(iii) Il est clair que si $E \subset F$ alors $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$. Réciproquement, si $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(F)$, alors pour tout v non nul dans E, la droite kv est contenue dans F, d'où $v \in F$ et donc $E \subset F$. Ceci prouve la 1ère assertion de (iii), et la 2ème en découle.

(iv) On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ pour un certain plan vectoriel W de V (uniquement déterminé, d'après (iii)), non contenu dans H. Alors $\Delta = W \cap H$ est une droite vectorielle de H et donc $\mathbf{D} \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point δ de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. □

Corollaire 8.6. — (i) *Dans un plan projectif, deux droites projectives distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ se coupent en un unique point.*

(ii) *Dans un espace projectif* $\mathbb{P}(V)$ de dimension 3 (*i.e.* $\dim(V) = 4$), *soient $\mathbf{P}$ un plan projectif et $\mathbf{D}$ une droite projective non contenue dans $\mathbf{P}$. Alors $\mathbf{P}$ et $\mathbf{D}$ se coupent en un unique point.*

[5] Si $W = \{0\}$, alors $\mathbb{P}(W)$ est l'ensemble vide $\varnothing$, auquel on peut attribuer la dimension -1.

Pour faire de la géométrie dans le plan projectif (cf. la section 9 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues), on aura besoin de la notion de « *droite projective engendrée par deux points distincts* » et de celle de « *points alignés* » dans $\mathbb{P}(V)$. Pour cela, on a besoin de la :

Définition 8.7 **(Sous-espace projectif engendré, points alignés)**
Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{P}(V)$. Notons δ_x la droite vectorielle de V correspondant à un élément x de X, et soit E le sev de V engendré par les δ_x. En d'autres termes, si $X = \{p_1, \dots, p_N\}$ et si $p_i = [v_i]$, alors $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_N)$. Alors :

(i) $\mathbb{P}(E)$ est le *plus petit* sous-espace projectif de V contenant X. On dit que c'est le sous-espace projectif *engendré* par X.

(ii) Si X est formé de deux points distincts p_1, p_2, alors $\dim(E) = 2$ et l'on dit que $\mathbb{P}(E)$ est la *droite projective engendrée* par p_1 et p_2. On la note (p_1p_2).

(iii) Soient $N \geq 2$ et $p_1, \dots, p_N$ des points de $\mathbb{P}(V)$, pas tous égaux. On dit qu'ils sont *alignés* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent est une droite projective.

Démonstration. — Il n'y a que la première phrase de (i) à démontrer. Mais c'est clair, car si X est contenu dans un sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ alors W contient les δ_x donc contient E, d'où $\mathbb{P}(E) \subset \mathbb{P}(W)$. □

Définition 8.8 **(Coordonnées homogènes)**. — Munissons V d'une base $(e_0, \dots, e_n)$, notée $\mathscr{B}$. Alors chaque point de $\mathbb{P}(V)$, correspondant à une droite vectorielle D, peut être paramétré par ses « *coordonnées homogènes* » $[x_0, x_1, \dots, x_n]$: ce sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ d'un élément non nul v de D. Noter que comme $v \neq 0$, les x_i ne sont pas tous nuls. Bien sûr, pour tout $\lambda \in k^\times$, v et λv engendrent la même droite, donc les coordonnées homogènes ne sont définies qu'à la multiplication près par un scalaire non nul, i.e. $[x_0, x_1, \dots, x_n]$ et $[\lambda x_0, \lambda x_1, \dots, \lambda x_n]$ représentent le même point.

On va voir que malgré cette « non unicité » (qui au prime abord peut sembler gênante), les coordonnées homogènes sont un outil très utile.

En particulier, si $V = k^{n+1}$, les coordonnées homogènes dans $\mathbb{P}^n(k) = \mathbb{P}(k^{n+1})$ ne sont autres que les classes d'équivalence de $(n+1)$-uplets $(x_0, \dots, x_n) \in k^{n+1} - \{(0, \dots, 0)\}$, où $(x_0, \dots, x_n) \sim (x'_0, \dots, x'_n)$ ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $x'_i = \lambda x_i$ pour tout i, et la classe d'équivalence de $(x_0, \dots, x_n)$ est notée $[x_0, \dots, x_n]$.

8.2. Ouverts affines.

— On appellera plus bas « ouverts affines » de $\mathbb{P}(V)$ certains espaces affines, analogues de l'espace affine $\mathscr{E}$ plongé dans $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$. Pour justifier la terminologie « ouverts », commençons par la définition suivante.

Remarque 8.9. — Pour tout polynôme **homogène** $F \in k[X_0, \dots, X_n]$, disons de degré d, on peut définir son « lieu des zéros » dans $\mathbb{P}^n(k)$ par :

$$\mathscr{V}(F) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid F(x_0, \dots, x_n) = 0\}.$$

Ceci est bien défini, car puisque F est homogène de degré d, on a $F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n)$ pour tout $\lambda \in k^\times$, donc si F s'annule sur *un* représentant $(x_0, \dots, x_n)$ de $[x_0, \dots, x_n]$ il s'annule sur *tout* représentant.

Plus généralement, pour tout ensemble $\{F_1, \dots, F_N\}$ de polynômes homogènes (où F_i est, disons, de degré d_i), on pose :

$$\mathscr{V}(F_1, \dots, F_N) = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(k) \mid \forall i = 1, \dots, N, \quad F_i(x_0, \dots, x_n) = 0\} = \bigcap_{i=1}^{N} \mathscr{V}(F_i).$$

On appellera ces sous-ensembles des *fermés algébriques* de $\mathbb{P}^n(k)$. [6]

La remarque précédente est valable, indépendamment d'un choix de coordonnées, pour toute *forme linéaire* f sur V. Plus précisément :

Définition 8.10 **(Hyperplans de $\mathbb{P}(V)$).** — (i) Pour toute $f \in V^*$ non nulle, son lieu des zéros $\mathscr{V}(f) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid f(v) = 0\}$ est appelé un **hyperplan** de $\mathbb{P}(V)$. Notant H l'hyperplan $\mathrm{Ker}(f) \subset V$, on voit que $\mathscr{V}(f)$ n'est autre que l'ensemble des droites vectorielles contenues dans H, c.-à-d. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(H) \subset \mathbb{P}(V)$.

(ii) Plus généralement, pour $f_1, \dots, f_r \in V^*$, le lieu des zéros $\mathscr{V}(f_1, \dots, f_r)$ est bien défini et s'identifie au sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$, où $W = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}(f_i)$. [7]

Rappels 8.11 **(sur la dualité).** — (1) Si F est un sev de V^*, son orthogonal dans V est :

$$F^0 = \{v \in V \mid f(v) = 0 \text{ pour tout } f \in F\}.$$

On rappelle que : (i) $\boxed{\dim(F^0) = \dim(V) - \dim(F)}$ et : (ii) si $(f_1, \dots, f_r)$ est une famille génératrice de F (par exemple une base), alors $F^0 = \{v \in V \mid f_i(v) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\} = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}(f_i)$.

(2) De même, si W est un sev de V, son orthogonal dans V^* est :

$$W^0 = \{f \in V^* \mid f(x) = 0 \text{ pour tout } x \in W\}.$$

On a : (i) $\boxed{\dim(W^0) = \dim(V) - \dim(W)}$ et : (ii) si $(v_1, \dots, v_r)$ est une famille génératrice de W (par exemple une base), alors $W^0 = \{f \in V^* \mid f(v_i) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, r\}$. De plus, on a $\boxed{W = W^{00} \text{ et } F = F^{00}.}$

(3) Enfin, le dual de l'espace quotient V/W s'identifie à W^0, i.e. on a : $\boxed{(V/W)^* = W^0.}$

Remarque 8.12. — Soit H un hyperplan de V. Alors son orthogonal $H^0 = \{f \in V^* \mid f(H) = 0\}$ est de dimension 1. Si l'on fixe un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$, alors il est facile de voir (cf. ci-dessous) que « l'ouvert » $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ (complémentaire dans $\mathbb{P}(V)$ du fermé $\mathbb{P}(H)$) s'identifie à l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$ et est par suite muni d'une structure d'espace affine de direction H.

Mais ceci n'est pas tout-à-fait suffisant pour nos besoin, car dans la section 9 sur les théorèmes de Pappus et de Desargues, on aura dans le plan projectif $\mathbb{P}(V)$ un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ qui sera une droite $\mathscr{D}_\infty = (pq)$ pour des points $p \neq q$ bien choisis, et l'on aura besoin de considérer le « plan affine » $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$ *sans fixer* une forme linéaire f telle que $\mathscr{D}_\infty = \mathbb{P}(\mathrm{Ker}(f))$. Pour cette raison, il nous faut soit définir la structure affine de $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ de façon indépendante de f, soit expliquer soigneusement comment les choix pour f et λf (où $\lambda \in k^\times$) donnent des espaces affines canoniquement isomorphes. En fait, on va faire les deux !

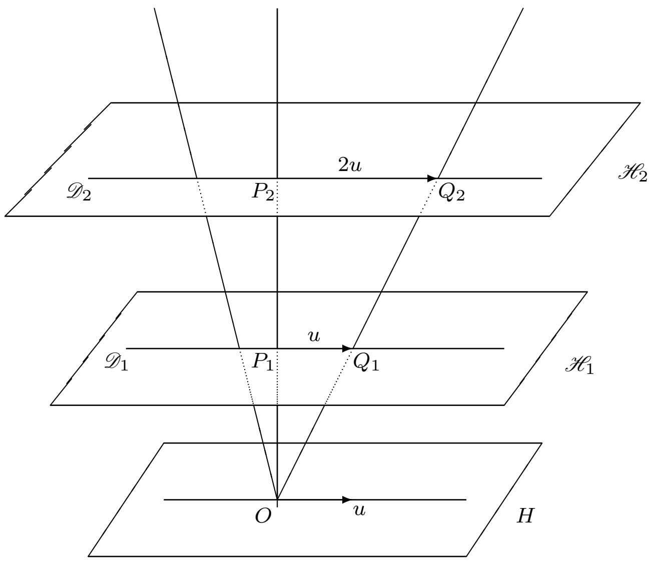
Définition et proposition 8.13 **(Les « ouverts » affines $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$)**
Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0, i.e. une forme linéaire f telle que $\mathrm{Ker}(f) = H$ *et, pour tout $\lambda \in k^\times$ considérons l'hyperplan affine $\mathscr{H}_\lambda = \{x \in V \mid f(x) = \lambda\}$.*

---

[6] On peut vérifier (nous n'en aurons pas besoin) que les $\mathscr{V}(F)$ forment les fermés d'une certaine topologie sur $\mathbb{P}^n(k)$, appelée la topologie de Zariski. De plus, si k est le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ alors $\mathbb{K}^{n+1}$ est muni d'une topologie canonique, ainsi que le quotient $\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = (\mathbb{K}^{n+1} - \{0\})/\mathbb{K}^\times$, et comme les fonctions polynomiales (homogènes) $F = \mathbb{K}^{n+1} \to \mathbb{K}$ sont *continues*, on obtient que les $\mathscr{V}(F_1, \dots, F_N)$ sont aussi des fermés pour cette topologie.
[7] On rappelle que si $W = \{0\}$ alors $\mathbb{P}(W) = \varnothing$.

(i) *L'application* $\mathscr{H}_\lambda \to U$, $x \mapsto [x]$ *est une bijection. Via cette bijection* U *est muni d'une structure d'espace affine de direction* H, *définie par* $[x] +_\lambda u = [x + \lambda u]$.

(ii) *Toutes ces structures d'espace affine sont isomorphes : plus précisément, l'homothétie* $v \mapsto \lambda v$ *dans* V *induit une bijection de* $\mathscr{H}_1$ *sur* $\mathscr{H}_\lambda$ *et un isomorphisme entre les espaces affines* $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ *et* $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$ *(cf. la figure ci-dessous).*



Démonstration. — (i) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = \lambda$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = \lambda f(w)^{-1} w$ vérifie $f(v) = \lambda$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu\lambda$, donc $f(v') = \lambda \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_\lambda$ sur U. De plus, l'action de H sur $\mathscr{H}_\lambda$ définie par

$$\mathscr{H}_\lambda \times H \to \mathscr{H}_\lambda, \quad (x, u) \mapsto x +_\lambda u = x + \lambda u,$$

fait de $\mathscr{H}_\lambda$ un espace affine de direction H, que l'on désignera par $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$. Via la bijection précédente, ceci munit U d'une structure d'espace affine de direction H.

(ii) L'homothétie de V de rapport λ est bijective. Elle induit une bijection h de $\mathscr{H}_1$ sur $\mathscr{H}_\lambda$. De plus, pour tout $x \in \mathscr{H}_1$ et $u \in H$, on a :

$$h(x +_1 u) = h(x + u) = \lambda(x + u) = \lambda x + \lambda u = h(x) +_\lambda u.$$

Ceci montre que, considérée comme application de $(\mathscr{H}_1, H, +_1)$ dans $(\mathscr{H}_\lambda, H, +_\lambda)$, h est une application *affine*, de partie linéaire l'homothétie vectorielle $h_\lambda : H \to H$. Comme h est bijective, c'est donc un isomorphisme entre ces deux espaces affines. □

Pour récrire la proposition précédente de façon plus « canonique » (i.e. sans choisir un générateur f de H^0), on aura besoin du lemme suivant. (Ce paragaphe peut être omis en 1ère lecture.)

Lemme 8.14. — *Soit* H *un hyperplan de* V *et soit* $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ *l'espace vectoriel des applications linéaires de* V/H *dans* H.[8] *Alors :*

(i) *Le choix d'un générateur* f *de* $H^0 = (V/H)^*$ *définit un isomorphisme d'espaces vectoriels* $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$.

(ii) *Plus précisément, pour tout* $u \in H$ *et* $v \in V$, *on a :* $\boxed{\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u}$ *(où* $\overline{v}$ *désigne l'image de* v *dans* V/H*).*

[8] On le note aussi $\mathscr{L}(V/H, H)$, mais nous préférons la notation « Hom » pour « homomorphismes ».

Démonstration. — (i) En effet, V/H étant de dimension 1, si l'on en fixe un générateur e alors $E = \mathrm{Hom}(ke, H)$ s'identifie à H via l'isomorphisme $\theta \mapsto \theta(e)$. Or, le choix d'un générateur f de $H^0 = (V/H)^*$ définit un générateur e de V/H, à savoir l'unique élément e tel que $f(e) = 1$.

(ii) Fixons f et e comme ci-dessus. Pour tout $u \in H$ on a, par définition, $\phi_f(u)(\mu e) = \mu u$ pour tout $\mu \in k$. D'autre part, pour $v \in V$, posons $\overline{v} = \mu_v e$. Alors $\mu_v = f(\overline{v}) = f(v)$ et donc $\phi_f(u)(\overline{v}) = f(v)u$. [9] □

***Retour 8.15* (sur l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$).** — Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Soit $E = \mathrm{Hom}(V/H, H)$ et, pour tout $f \in H^0 - \{0\}$, soit $\mathscr{H}_f = \{x \in V \mid f(x) = 1\}$.

(i) U est un espace affine de direction E (et donc de dimension $n = \dim(V) - 1$).

(ii) Pour tout $f \in H^0 - \{0\}$ la bijection $\mathscr{H}_f \to U$, $x \mapsto [x]$ est une application *affine*, de partie linéaire l'isomorphisme $\phi_f : H \xrightarrow{\sim} E$ du lemme 8.14. C'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E).

Démonstration. — (i) D'abord, pour tout $v \in V$, notons $\overline{v}$ son image dans V/H. On définit alors l'action de E sur U comme suit. Pour tout $\theta \in E$ et $[v] \in U$, on pose :

$$(*) \qquad [v] + \theta = [\, v + \theta(\overline{v})\,].$$

Vérifions que ceci est bien défini. D'une part, comme $\theta(\overline{v}) \in H$, le vecteur $v + \theta(\overline{v})$ n'appartient pas à H, car sinon on aurait $v \in H$, contradiction. D'autre part, si $v' = \lambda v$ est un autre représentant de $[v]$, on a $\theta(\overline{v'}) = \theta(\lambda\overline{v}) = \lambda\theta(\overline{v})$ et donc $v' + \theta(\overline{v'}) = \lambda(v + \theta(\overline{v}))$. Ceci montre que $(*)$ définit bien une application $U \times E \to U$, $([v], \theta) \mapsto [v] + \theta$.

Si $\theta = 0$ (l'application nulle), on a bien $[v] + 0 = [v]$. Et pour tout $\theta, \theta' \in E$, $([v] + \theta) + \theta' = [v + \theta(\overline{v})] + \theta'$ désigne la droite engendrée par le vecteur

$$v + \theta(\overline{v}) + \theta'(v + \theta(\overline{v})) = v + \theta(\overline{v}) + \theta'(\overline{v}) = v + (\theta + \theta')(\overline{v}).$$

Ceci montre que $([v] + \theta) + \theta' = [v] + (\theta + \theta')$, donc $(*)$ définit bien une *action* de E sur U. Il reste à montrer que cette action est simplement transitive, et l'on va démontrer ceci en même temps que le point (ii).

(ii) Tout $[v] \in U$ admet un *unique* représentant v tel que $f(v) = 1$. En effet, si w est un représentant quelconque, alors $v = f(w)^{-1}w$ vérifie $f(v) = 1$, et pour tout représentant $v' = \mu v$ on a $f(v') = \mu$, donc $f(v') = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$. On a donc une bijection $p_f : x \mapsto [x]$ de $\mathscr{H}_f$ sur U.

Soient $x \in U$ et $u \in H$. D'après le lemme 8.14, on a $\phi_f(u)(x) = f(x)u = u$ et l'on a donc les égalités :

$$(**) \qquad p_f(x + u) = [x + u] = [\, x + \phi_f(u)(x)\,] = [x] + \phi_f(u) = p_f(x) + \phi_f(u).$$

Ceci montre que, via la bijection p_f, l'action $+$ de E sur U correspond à l'action naturelle de H sur $\mathscr{H}_f$. Comme celle-ci est simplement transitive, on en déduit qu'il en est de même de l'action $+$. Ceci achève de prouver que (U, E) est un espace affine. Mais alors, $(**)$ nous dit que la bijection $p : \mathscr{H}_f \to U$ est affine, de partie linéaire ϕ_f ; c'est donc un *isomorphisme* entre les espaces affines $(\mathscr{H}_f, H)$ et (U, E). □

***Remarque 8.16*.** — Tout ce qui précède devient très simple si on l'écrit en coordonnées homogènes. Soit H un hyperplan de V. On peut trouver des coordonnées homogènes $[x_0, \ldots, x_n]$ telles que H soit donné par l'annulation d'une des coordonnées, disons par l'équation $x_0 = 0$. En effet, soit f_0 une forme linéaire telle que $\mathrm{Ker}(f_0) = H$; complétons-la en une base $(f_0, \ldots, f_n)$ de V^*. C'est la base duale d'une unique base $\mathscr{B} = (e_0, \ldots, e_n)$ de V et, notant $(x_0, \ldots, x_n)$ les coordonnées dans cette base et $[x_0, \ldots, x_n]$ les coordonnées homogènes correspondantes sur $\mathbb{P}(V)$, chaque forme linéaire coordonnée $e_i^* = x_i$ n'est autre

[9] Tout ceci devient plus clair si l'on connaît les produits tensoriels (cf. le cours 4M002) : $\mathrm{Hom}(V/H, H)$ s'identifie au produit tensoriel $(V/H)^* \otimes H = H^0 \otimes H$, et comme $\dim(H^0) = 1$ tout élément est de la forme $f \otimes u$, avec $f \in H^0$ et $u \in H$. Pour tout $\lambda \in k^\times$, $\lambda f \otimes u = f \otimes \lambda u$ correspond à l'application $v \mapsto \lambda f(v)u$, qui est $\phi_{\lambda f}(u)$ aussi bien que $\phi_f(\lambda u)$. (Comparer avec 8.13 et la figure qui le suit.)

que f_i et donc H est bien donné par l'équation $x_0 = 0$. Alors l'ouvert $U_0 = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ s'identifie à l'hyperplan affine

$$\mathscr{H} = \{[1, x_1, \dots, x_n] \in \mathbb{P}(V)\} = e_0 + H.$$

Soit H un hyperplan de V. Il résulte de ce qui précède que $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ est muni d'une structure affine ; en particulier, on peut parler de ses sous-espaces affines. Ils sont décrits explicitement par la proposition suivante.

Proposition 8.17 **(Sous-espaces affines de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$).** — *Soient H un hyperplan de V et $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$. Alors on a ce qui suit :*

(i) *Pour tout sev W de V non contenu dans H, de dimension $d+1$, $\mathbb{P}(W) \cap U$ est un sous-espace affine $\mathscr{W}$ de U de dimension d et de direction $W \cap H$, et l'on a $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$.*

(ii) *Soit $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de U, de dimension d, et soit W le sev de V engendré par les droites kv, pour tout $[v] \in \mathscr{W}$. Alors W est de dimension $d+1$, n'est pas contenu dans H et $W \cap H$ est la direction de $\mathscr{W}$. Le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de $\mathbb{P}(V)$ est de dimension d et l'on a $\mathbb{P}(W) \cap U = \mathscr{W}$.*

(iii) *Donc les applications $\mathscr{W} \mapsto \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et $\mathbb{P}(W) \mapsto \mathbb{P}(W) \cap U$ sont des* bijections réciproques *entre l'ensemble des sous-espaces affines de U et celui des sous-espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$ non contenus dans $\mathbb{P}(H)$. Ces bijections préservent la dimension.*

Démonstration. — Pour la démonstration, identifions $\mathscr{H}$ à U, via la bijection $x \mapsto [x]$.

(i) Soit W un sev de V non contenu dans H. Alors f induit, par restriction, une forme linéaire sur W, non nulle (car $W \not\subset \mathrm{Ker}(f)$) qu'on notera f_W. Alors on a les identifications suivantes :

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{v \in W \mid f_W(v) = 1\}$$

qui montrent que $\mathscr{W} = \mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W)$ est un espace affine de direction $\mathrm{Ker}(f_W) = W \cap H$, donc de dimension $\dim(W) - 1$.

De plus, montrons que le sev $W' = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$ de W égale W. Fixons $v_0 \in \mathscr{W}$. Alors pour tout $w \in W \cap H$ le point $v_0 + w$ appartient à $\mathscr{W}$, donc $w \in W'$. Ceci montre que W' contient l'hyperplan vectoriel $\mathrm{Ker}(f_W)$ de W ; comme il contient de plus v_0 qui n'appartient pas à $\mathrm{Ker}(f_W)$ (puisque $f_W(v_0) = 1$), on a donc $W' = W$. Ceci prouve (i).

(ii) Soient $\mathscr{W}$ un sous-espace affine de dimension d de $\mathscr{H}$, on peut l'écrire $v_0 + F$ où F est un sev de dimension d de H. Posant $W = \mathrm{Vect}(\mathscr{W})$, on a donc $W = kv_0 + F$ et, comme $v_0 \notin H$ (puisque $f(v_0) = 1$), cette somme est directe : $W = kv_0 \oplus F$ et l'on a $W \cap H = F$.

Il reste à montrer que $\mathbb{P}(W) \cap \mathscr{H} = \mathscr{W}$. Comme plus haut, on a les identifications

$$\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = \{v \in V \mid f(v) = 1 \text{ et } v \in W\} = \{w \in W \mid f(w) = 1\}.$$

Or, écrivant $w = \lambda v_0 + u$, avec $u \in F = W \cap H$, on a $f(w) = \lambda$ donc $f(w) = 1 \Leftrightarrow w \in v_0 + F$. Ceci montre que $\mathscr{H} \cap \mathbb{P}(W) = v_0 + F = \mathscr{W}$, ce qui achève la démonstration de (ii).

Enfin, (iii) découle aussitôt de (i) et (ii) car pour tout $\mathscr{W}$ on a $\mathscr{W} = U \cap \mathbb{P}(\mathrm{Vect}(\mathscr{W}))$ et pour tout W on a $W = \mathrm{Vect}(\mathbb{P}(W) \cap U)$. □

8.3. Passage de l'affine au projectif, et inversement. — On a vu au §7 qu'une motivation pour « compléter » le plan affine $\mathscr{P}$ en le plan projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ est que si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont deux droites parallèles de $\mathscr{P}$, alors les droites projectives $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D})$ et $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}')$ se coupent en un unique point de la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Ceci permettra de reformuler en projectif certains théorèmes affines de façon à ce qu'une conclusion (ou hypothèse) que des droites affines sont « concourantes ou parallèles » puisse être remplacée par l'assertion que les droites projectives correspondantes sont concourantes. Mais il y a bien plus que cela : en étendant au cas projectif un énoncé affine, puis en se plaçant dans des ouverts affines différents de celui de départ, on peut obtenir de nouveaux théorèmes affines (voir les théorèmes de Pappus et de Desargues dans la section suivante).

Pour passer de l'affine au projectif et réciproquement, on aura besoin de l'énoncé suivant, que l'on peut paraphraser en disant que les bijections de la Prop. 8.17 « *préservent l'alignement des points* » (en un sens rendu précis par la proposition ci-dessous).

Proposition 8.18. — *Soient $p_1, \dots, p_N$, avec $N \geq 3$, des points deux à deux distincts de $\mathbb{P}(V)$ (où $\dim(V) \geq 2$).*

(i) *On suppose que les p_i sont alignés au sens de la définition* 8.7*, i.e. que le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent soit une droite projective (i.e. $\dim(W) = 2$). Alors, pour* **tout** *hyperplan H de V tel que les p_i ne soient pas tous dans $\mathbb{P}(H)$ (i.e. tel $W \not\subset H$) on a ce qui suit : $W \cap H$ est une droite vectorielle D et, notant U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$, on est dans l'une des deux situations suivantes :*

(a) *tous les p_i sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$.*

(b) *tous les p_i sauf un sont dans U et appartiennent à une droite affine $\mathscr{D}$, et le dernier, disons p_N, est dans « l'hyperplan à l'infini » $\mathbb{P}(H)$ et correspond à la droite vectorielle D qui est la direction de $\mathscr{D}$.*

(ii) *Réciproquement, s'il existe* **un** *hyperplan H de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b) ci-dessus, alors le sev W de V engendré par $\mathscr{D}$ est de dimension* 2 *et les p_i appartiennent à la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$.*

Démonstration. — (i) Posant $p_i = [v_i]$, soit W le sev de V engendré par les droites kv_i. Supposons $\dim(W) = 2$. Soit H un hyperplan de V ne contenant pas H, alors $W \cap H$ est une droite vectorielle D. D'après la Prop. 8.17, $U \cap \mathbb{P}(W)$ est une droite affine $\mathscr{D}$ de direction D. De plus, $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(D) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à la droite D. Comme les p_i sont deux à deux distincts, au plus l'un d'entre eux peut être égal à d, et l'on est donc dans l'une des situations (a) ou (b).

(ii) Réciproquement, soit H un hyperplan de V tel qu'on soit dans la situation (a) ou (b). D'après la Prop. 8.17, il existe un unique plan vectoriel W de V, non contenu dans H, tel que $\mathscr{D} = U \cap \mathbb{P}(W)$.(10). De plus, la direction de $\mathscr{D}$ est la droite vectorielle $D = W \cap H$. On a donc $\mathbb{P}(W) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \{d\}$, où d est le point de $\mathbb{P}(H)$ qui correspond à D. Donc, dans chacun des cas (a) et (b), les p_i sont contenus dans la droite projective $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{D}) = \mathbb{P}(W)$. □

Exercice 8.19. — Soient $p_1, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$. On suppose :

(i) $\dim(V) \geq 3$ et $N \geq 5$.

(ii) Les p_i sont *coplanaires*, i.e. le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ qu'ils engendrent est un plan projectif,

(iii) Trois quelconques des p_i ne sont jamais alignés (i.e. pour i, j, k deux à deux distincts, les points p_i, p_j, p_k ne sont pas alignés).

Montrer que pour tout hyperplan H ne contenant pas W, tous les p_i sauf au plus deux sont dans l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et y engendrent un plan affine $\mathscr{P}$. Décrire les trois situations possibles selon le nombre de p_i contenus dans $\mathbb{P}(H)$.

(10) Explicitement, comme $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ sont distincts et contenus dans $\mathscr{D}$, alors $W = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$.

9. Théorèmes de Thalès, de Pappus et de Desargues

9.1. Théorème de Thalès. — Commençons par rappeler le théorème de Thalès[11], que nous aurions pu énoncer et démontrer en semaine 1, comme application des notions de projection et d'homothétie. Revenons d'ailleurs sur les notions de projection et symétrie. D'abord, on doit améliorer la définition 3.12 de la semaine 1 comme suit.

***Définition et proposition 9.1* (Projections et symétries)**
Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine, F, G deux sev de E qui sont supplémentaires, et $\mathscr{F}$ un sous-espace affine de $\mathscr{E}$ de direction F.

(i) *Pour tout $M \in \mathscr{E}$, il existe un unique point $p(M) \in \mathscr{F}$ tel que $\overrightarrow{Mp(M)} \in G$. L'application $p : M \mapsto p(M)$ est* affine*, de partie linéaire la projection π de E sur F de noyau G. On dit que p est la* projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{F}$ parallèlement à G.[12]

(ii) *Supposons* $\mathrm{car}(k) \neq 2$. *Alors, pour tout $M \in \mathscr{E}$, on pose $s(M) = M + 2\overrightarrow{Mp(M)}$. L'application $s : M \mapsto s(M)$ est* affine*, de partie linéaire la symétrie par rapport à F parallèlement à G. On dit que s est la* symétrie par rapport à $\mathscr{F}$ parallèlement à G.

Démonstration. — (i) Comme $F \oplus G = E$, les sous-espaces affines $\mathscr{F}$ et $M + G$ se coupent en un unique point, qu'on note $p(M)$. Pour tout point P, le vecteur $\overrightarrow{MP}$ s'écrit de façon unique $\overrightarrow{MP} = u + v$ avec $u \in F$ et $v \in G$, et l'on a $u = \pi(\overrightarrow{MP})$. On a :

$$P = p(M) + \overrightarrow{p(M)M} + \overrightarrow{MP} = p(M) + \overrightarrow{p(M)M} + u + v$$

et comme $\overrightarrow{p(M)M} \in G$ alors $v' = \overrightarrow{p(M)M} + v$ appartient à G. D'autre part, le point $P' = p(M) + u$ appartient à $\mathscr{F}$. Alors l'égalité $P = P' + v'$ entraîne que $P' = p(P)$, d'où $p(P) = p(M) + u = p(M) + \pi(\overrightarrow{MP})$. Ceci montre que p est affine, de partie linéaire π.

La démonstration de (ii) est laissée au lecteur. (On n'en a pas besoin pour le moment.) □

***Notation 9.2*.** — Soient u, v deux vecteurs non nuls d'un k-espace vectoriel V. S'ils sont colinéaires, il existe un unique $\lambda \in k^\times$ tel que $u = \lambda v$. Dans ce cas, on désigne par $\dfrac{u}{v}$ le scalaire λ.

***Théorème 9.3* (de Thalès).** — *Soit $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine de dimension ≥ 2, soient H un hyperplan de E, $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes dont les directions D et D' ne sont pas contenues dans H, et $\mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \mathscr{H}_3$ trois hyperplans de $\mathscr{E}$ de direction H, deux à deux distincts. Alors :*

(i) *$\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) coupe chaque $\mathscr{H}_i$ en un unique point A_i (resp. B_i).*

(ii) *On a $\dfrac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}}$. De plus, A_3 et A_1 étant fixés, ce scalaire détermine A_2, i.e. si un point M de $\mathscr{D}$ vérifie $\dfrac{\overrightarrow{A_3M}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}}$ alors $M = A_2$.*

(iii) *Si de plus $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont concourantes en un point O, le scalaire précédent est aussi égal à $\dfrac{\overrightarrow{A_2B_2}}{\overrightarrow{A_1B_1}}$*

---

[11] Mathématicien grec qui vécut d'environ -624 à -547 de notre ère.

[12] Ceci améliore grandement la définition 3.12 de la semaine 1, car on n'a pas besoin de fixer un sea $\mathscr{G}$ de direction G, il suffit de la direction G !

Démonstration. — (i) Comme $D \not\subset H$ alors $E = D \oplus H$ donc $\mathscr{D}$ coupe chaque $\mathscr{H}_i$ en un unique point A_i, et de même pour $\mathscr{D}'$.

(ii) Soit p la projection de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{D}'$ parallèlement à H. Comme $\overrightarrow{A_iB_i} \in H$, alors $p(A_i) = B_i$ pour $i = 1, 2, 3$. Posons $\overrightarrow{A_3A_2} = \lambda\overrightarrow{A_3A_1}$. Alors on a

$$\overrightarrow{B_3B_2} = \overrightarrow{p(A_3)p(A_2)} = \pi(\overrightarrow{A_3A_2}) = \lambda\pi(\overrightarrow{A_3A_1}) = \lambda\overrightarrow{p(A_3)p(A_1)} = \lambda\overrightarrow{B_3B_1}.$$

Ceci prouve la première assertion de (ii). De plus, si un point $M \in \mathscr{D}$ vérifie $\dfrac{\overrightarrow{A_3M}}{\overrightarrow{A_3A_1}} = \dfrac{\overrightarrow{B_3B_2}}{\overrightarrow{B_3B_1}} = \lambda$ alors on a $\overrightarrow{A_3M} = \lambda\overrightarrow{A_3A_1} = \overrightarrow{A_3A_2}$ et donc $M = A_2$.

(iii) Dans ce cas, on peut appliquer ce qui précède en prenant $A_3 = O = B_3$. Alors l'homothétie de centre O et de rapport λ envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2, donc on a $\overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$, ce qui prouve (iii). $\square$

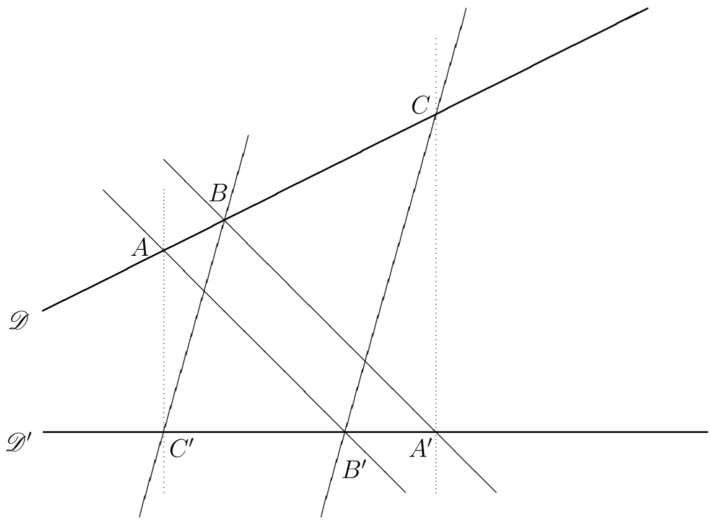
Si $\dim(\mathscr{E}) = 2$, l'assertion (iii) admet la réciproque suivante :

***Théorème 9.4* (réciproque de Thalès dans le plan).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soit $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes, sécantes en un point O. Soient A_1, A_2 (resp. B_1, B_2) deux points de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$), distincts de O. Si $\dfrac{\overrightarrow{OA_2}}{\overrightarrow{OA_1}} = \dfrac{\overrightarrow{OB_2}}{\overrightarrow{OB_1}}$ alors les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont parallèles.*

Démonstration. — Notons λ le scalaire considéré plus haut. Alors l'homothétie de centre O et de rapport λ envoie A_1 sur A_2 et B_1 sur B_2, donc on a $\overrightarrow{A_2B_2} = \lambda\overrightarrow{A_1B_1}$. Par conséquent, les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) sont parallèles. $\square$

9.2. Théorème de Pappus. —

***Théorème 9.5* (de Pappus).** — [13] *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et A, B, C (resp. A', B', C') trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que (AB') est parallèle à (BA') et que (BC') est parallèle à (CB'). Alors (AC') est parallèle à (CA').*



[13] Mathématicien grec du IVème siècle (dates approximatives : 290-350).

Démonstration. — Notons P la direction de $\mathscr{P}$. Distinguons deux cas, selon que $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles ou concourantes.

(1) Si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles, les hypothèses entraînent que $(ABA'B')$ et $(CBC'B')$ sont des parallélogrammes, d'où $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{B'A'}$ et $\overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{CB'}$. Alors on a :

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC'} = \overrightarrow{B'A'} + \overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{CA'}$$

et donc (AC') et (CA') sont parallèles.

(2) Supposons $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ concourantes en un point O, qu'on prend comme origine de $\mathscr{P}$. Prenant une base (e_1, e_2) de P où e_1 (resp. e_2) est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$), nos points ont les coordonnées suivantes : $A(a,0)$, $B(b,0)$, $C(c,0)$, $A'(0,a')$, $B'(0,b')$, $C'(0,c')$, où a,b,c sont distincts et non nuls, et de même pour a',b',c'. Par hypothèse, les vecteurs $\overrightarrow{AB'} = (-a,b')$ et $\overrightarrow{BA'} = (-b,a')$ d'une part, et $\overrightarrow{BC'} = (-b,c')$ et $\overrightarrow{CB'} = (-c,b')$ d'autre part, sont non nuls et liés, donc il existe $\lambda, \mu \in k^\times$ tels que

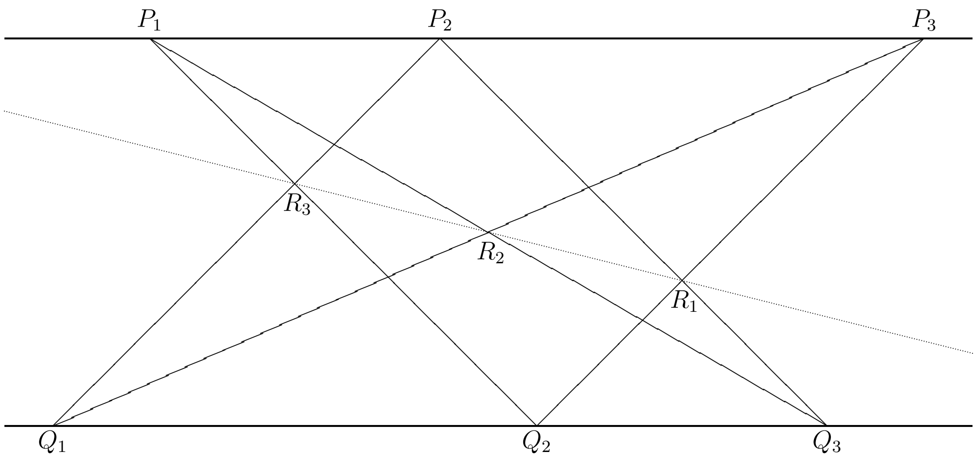
$$\begin{cases} b' = \lambda a' \\ a = \lambda b \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} c' = \mu b' \\ b = \mu c \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} c' = \mu\lambda a' \\ a = \lambda\mu c \end{cases}$$

Comme $\mu\lambda = \lambda\mu$,[14] on obtient que : $\overrightarrow{AC'} = (-a,c') = \lambda\mu(-c,a') = \lambda\mu\overrightarrow{CA'}$, et donc (AC') est parallèle à (CA').

□

Du théorème précédent on déduit le :

***Théorème 9.6* (de Pappus « projectif »).** — *Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{D}$, $\mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts du point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On note R_3 le point de concours des droites (P_1Q_2) et (P_2Q_1) et l'on définit de même R_2 et R_1, cf. la figure ci-dessous :*



Alors les points R_1, R_2, R_3 sont alignés.

Démonstration. — On a bien sûr envie de poser $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$ et d'appliquer la théorème 9.5 dans le plan affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$. Pour cela, il faut s'assurer que les points P_i et Q_j sont dans U, i.e. ne sont pas sur la droite (R_1R_2). Ceci « se voit » sur la figure ci-dessus, et on peut le démontrer comme suit :

[14] On fait cette remarque car on peut définir la notion d'espaces vectoriels et d'espaces affines sur un corps k éventuellement non commutatif, et alors la validité du théorème de Pappus est équivalente à la commutativité de k. Le lecteur intéressé pourra consulter [LF, §IV.11].

(i) Les points R_i sont deux à deux distincts. En effet, si on avait par exemple $R_1 = R_2 = S$, les points $P_3SQ_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.
(ii) Aucun P_i ou Q_j n'appartient à la droite (R_1R_2). En effet, vis-à-vis de (R_1R_2), les points P_1, P_2, Q_1, Q_2 d'une part, et P_3, Q_3 d'autre part, jouent le même rôle, donc il suffit de le vérifier pour P_1 et P_3. Si on avait $P_1 \in (R_1R_2)$, les points $P_1R_1R_2Q_3P_2$ seraient alignés, d'où $Q_3 \in \mathscr{D}$, contradiction. Et si on avait $P_3 \in (R_1R_2)$, les points $P_3R_1R_2Q_1Q_2$ seraient alignés, d'où $P_3 \in \mathscr{D}'$, contradiction.

Prenons alors la droite (R_1R_2) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (P_3Q_2) et (P_2Q_3), d'une part, et (P_1Q_3) et (P_3Q_1) d'autre part, ne se coupent pas donc sont parallèles. D'après le théorème de Pappus affine, les droites affines (P_2Q_1) et (P_1Q_2) sont donc parallèles, donc dans $\mathbb{P}(V)$ leur point d'intersection R_3 appartient à la droite $\mathscr{D}_\infty = (R_1R_2)$. Ceci montre que R_1, R_2, R_3 sont alignés. $\square$

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

***Corollaire 9.7* (Version affine de Pappus projectif).** — *Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soient $\mathscr{D}, \mathscr{D}'$ deux droites distinctes et P_1, P_2, P_3 (resp. Q_1, Q_2, Q_3) trois points distincts situés sur $\mathscr{D}$ (resp. $\mathscr{D}'$) et distincts de l'éventuel point de concours de $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$. On suppose que les droites (P_2Q_3) et (P_3Q_2), resp. (P_1Q_3) et (P_3Q_1), se coupent en un point R_1, resp. R_2. Alors :*

a) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) se coupent en un point R_3 de la droite (R_1R_2),*
b) *ou bien (P_1Q_2) et (P_2Q_1) sont parallèles à la droite (R_1R_2).*

Démonstration. — Plaçons-nous dans le plongement vectoriel $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{P})$ de $\mathscr{P}$. Soit R_3 le point de concours des droites projectives (P_1Q_2) et (P_2Q_1). D'après le théorème précédent il appartient à la droite projective (R_1R_2), d'où (a) si $R_3 \in \mathscr{P}$. Au contraire, si $R_3 \in \mathscr{D}_\infty$ alors c'est le point à l'infini de chacune des droites affines (R_1R_2), (P_1Q_2) et (P_2Q_1), donc ces trois droites sont parallèles. $\square$

9.3. Théorème de Desargues. — [15]

***Théorème 9.8* (de Desargues affine).** — *Dans un plan affine, soient A, B, C, A', B', C' six points distincts, avec A, B, C (resp. A', B', C')* non alignés. *On suppose que :*

a) *les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux distinctes,*
b) *les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que les droites (AC) et $(A'C')$.*

Alors les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles si et seulement si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles.

Démonstration. — L'hypothèse (b) entraîne qu'il existe $\lambda, \mu \in k^\times$ tels que $\overrightarrow{A'B'} = \lambda\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = \lambda\overrightarrow{AC}$. On a donc

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{A'C'} - \overrightarrow{A'B'} = \mu\overrightarrow{AC} - \lambda\overrightarrow{AB},$$

et comme $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ sont linéairement indépendants, $\overrightarrow{B'C'}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$ si et seulement si $\mu = \lambda$. On a donc :

$$(BC) \text{ et } (B'C') \text{ parallèles} \Longleftrightarrow \lambda = \mu. \tag{1}$$

D'autre part, remarquons que les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, car sinon $ABA'B'$ seraient alignés et l'on aurait $(AA') = (BB')$, contrairement à l'hypothèse (a). De même, $(AC) \neq (A'C')$. Alors on a les équivalences suivantes : $\lambda = 1 \Leftrightarrow ABB'A'$ est un

[15] Girard Desargues (1591-1661) mathématicien et architecte français, contemporain de Fermat (1601-1665) et de Descartes (1596-1650). Par ailleurs, il eut pour élève vers 1640 le jeune Blaise Pascal (1623-1662).

parallélogramme $\Leftrightarrow$ (AA') est parallèle à (BB'), et de même : $\mu = 1 \Leftrightarrow ACC'A'$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ (AA') est parallèle à (CC'). Par conséquent, on a :

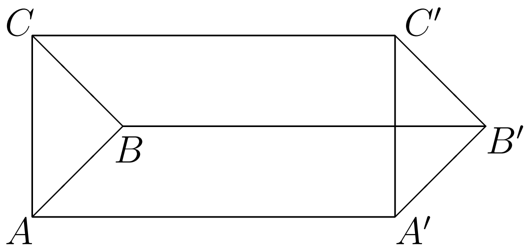
(2) $$\lambda = 1 = \mu \Longleftrightarrow (AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont parallèles.}$$

Et si $\lambda \neq 1$, alors les droites (AA') et (BB') se coupent en un point O, et d'après le théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{OA'} = \lambda\overrightarrow{OA}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AO} = (1-\lambda)^{-1}\overrightarrow{AA'}.}$ De même, si $\mu \neq 1$, alors les droites (AA') et (CC') se coupent en un point T, et d'après le théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{TA'} = \mu\overrightarrow{TA}$, d'où $\boxed{\overrightarrow{AT} = (1-\mu)^{-1}\overrightarrow{AA'}.}$ On en déduit que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ssi $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$, et $T = O$. Or $T = O$ équivaut à $\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{AO}$ et donc à $\mu = \lambda$. Donc finalement :

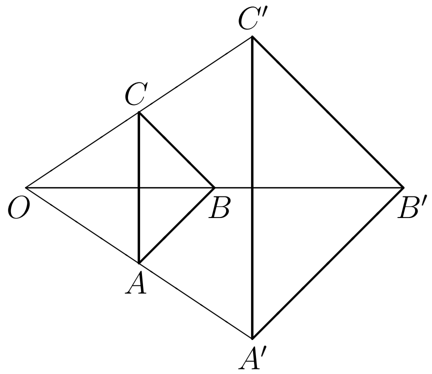
(3) $$(AA'), (BB') \text{ et } (CC') \text{ sont concourantes} \Longleftrightarrow \lambda = \mu \neq 1.$$

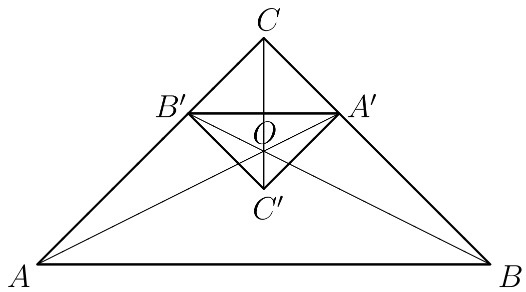
En combinant (1), (2) et (3), on obtient bien que (BC) et $(B'C')$ sont parallèles si et seulement si $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Lorsque $k = \mathbb{R}$, on peut illustrer les deux cas par les figures suivantes. □

Lorsque (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles, il y a essentiellement une figure :

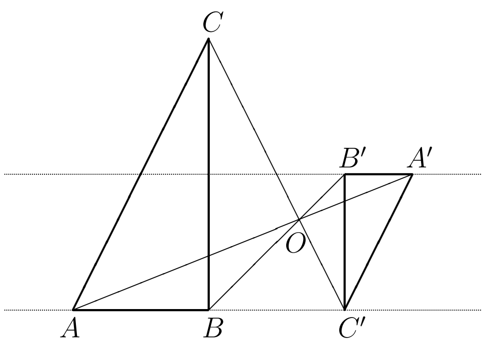


Si (AA'), (BB') et (CC') se coupent en un point O, le triangle $A'B'C'$ est l'image de ABC par une homothétie de centre O et de rapport λ, et la figure est différente selon le signe de λ :





Remarquons que le second cas contient aussi le cas « dégénéré » où, par exemple, ABC' sont alignés :



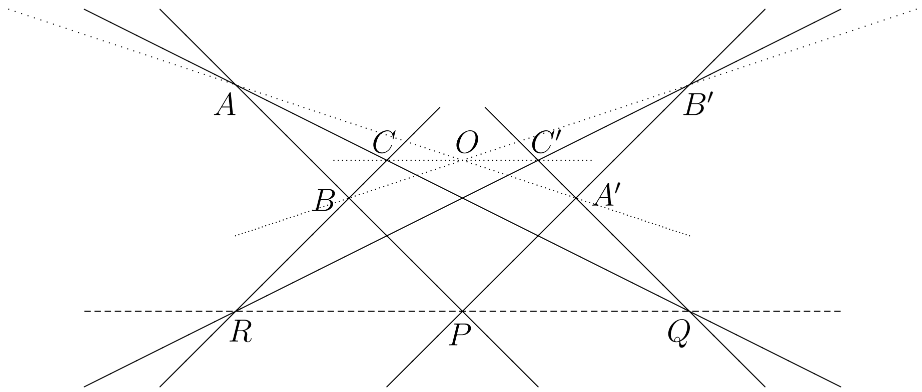
Du théorème précédent on déduit :

***Théorème 9.9* (de Desargues projectif).** — *Dans un plan projectif, considérons six points distincts A, B, C, A', B', C'. On suppose :*

a) A, B, C *(resp.* A', B', C'*) sont* non alignés.

b) *Les droites* $(AA'), (BB')$ *et* (CC') *sont deux à deux* distinctes.

Notons P, resp. Q, resp. R, l'unique point d'intersection des droites (AB) et $(A'B')$, resp. (AC) et $(A'C')$, resp. (BC) et $(B'C')$. Alors P, Q, R sont alignés si et seulement si les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes en un point O.



Démonstration. — (1) Remarquons d'abord que les points P, Q, R sont bien définis, car les droites (AB) et $(A'B')$ sont *distinctes*, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. En effet, comme $(AA') \neq (BB')$, les points $ABA'B'$ ne sont pas alignés donc (AB) et $(A'B')$ se coupent en un unique point P, et de même pour Q et R.

(2) Remarquons de plus que P, Q, R sont deux à deux distincts. En effet, supposons par exemple que $P = R$ et notons provisoirement M ce point. Comme $B \neq B'$ alors M ne peut être simultanément égal à B et à B'. Supposons par exemple $M \neq B$. Alors la droite $(BM) = (BP) = (BR)$ contient A (car ABP sont alignés) et aussi C (car BCR sont alignés). Donc A, B, C sont alignés, contradiction. Ceci montre que P, Q, R sont bien deux à deux distincts.

(3) Démontrons maintenant l'équivalence annoncée.

(i) Supposons P, Q, R alignés et prenons cette droite comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles, donc les droites projectives correspondantes sont concourantes.

(ii) Réciproquement, supposons les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') concourantes. Prenons la droite (PQ) comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$. Alors dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, les droites affines (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, de même que (AC) et $(A'C')$, et les droites affines $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes ou parallèles. Donc, d'après le théorème de Desargues affine, les droites affines (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, donc les droites projectives correspondantes se coupent sur la droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$, donc $R \in \mathscr{D}_\infty = (PQ)$ et donc P, Q, R sont alignés. $\square$

Et de cette version projective, on déduit la variante affine suivante :

***Corollaire 9.10* (Version affine de Desargues projectif)**

Dans un plan affine $\mathscr{P}$, soit A, B, C, A', B', C' six point distincts. On suppose que A, B, C (resp. A', B', C') sont non alignés *et que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont deux à deux* distinctes. *Alors les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :*

a) *Les paires de droites* $\{(AB),(A'B')\}$, $\{(AC),(A'C')\}$, $\{(BC),(B'C')\}$ *sont formées de droites parallèles.*

b) *Les droites d'une paire concourent en un point* P*, celles d'une autre paire en un point* $Q \neq P$*, et la droite* (PQ) *est parallèle aux deux droites de la dernière paire.*

c) *Chaque paire de droites est concourante, et les points d'intersection* P, Q, R *sont alignés.*

La démonstration est laissée en exercice. D'autre part, on suggère de faire les 6 dessins correspondant aux cas (a), (b) ou (c), selon que $(AA'),(BB')$ et (CC') sont parallèles ou bien concourantes.