Semaine 4 : Repères projectifs, groupe $\mathrm{PGL}(V)$ et birapports

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. II, §§2.1-2.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.5-2.8), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

10. Repères projectifs, groupe $\mathrm{PGL}(V)$ et birapports

On fixe un k-espace vectoriel V de dimension $n+1$. On rappelle que $\mathrm{GL}(V)$ désigne le groupe des automorphismes de V (i.e. applications linéaires $V \to V$ bijectives).

10.1. Points projectivement indépendants et repères projectifs. —

Définition 10.1. — On dit que $N+1$ points $p_0, \dots, p_N \in \mathbb{P}(V)$ sont *projectivement indépendants* si le sous-espace projectif qu'ils engendrent (cf. Déf. 8.7) est de dimension N.

Si $N = 1$ (resp. $N = 2$, resp. $N = 3$), ceci équivaut à dire que p_0, p_1 sont *distincts*, resp. que p_0, p_1, p_2 sont *non alignés*, resp. que p_0, p_1, p_2, p_3 sont *non coplanaires*

Remarques 10.2. — (1) Attention, la donnée de $n+1$ points projectivement indépendants de $\mathbb{P}(V)$ ne suffit pas à déterminer des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(V)$. Ceci revient juste à se donner des droites $D_i = ke_i$, où $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V, et il reste à préciser un générateur v_i de chaque D_i — ceci à multiplication près des v_i par un scalaire commun λ, d'après le point (2) ci-dessous.

(2) On a défini en semaine 3 les coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ sur $\mathbb{P}(V)$ associées à une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de V. Remarquons que, pour tout $\lambda \in k^\times$, la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$ définit les *mêmes* coordonnées homogènes : en effet, $[x_0, \dots, x_n]$ représente la droite engendrée par le vecteur $v = \sum_i x_i e_i$, resp. le vecteur λv, et il s'agit bien de la même droite !

Définition 10.3. — (i) On dit qu'un $(n+2)$-uplet $(p_0, \dots, p_{n+1})$ de points de $\mathbb{P}(V)$ est un **repère projectif** si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants. On notera $\mathrm{RP}(V)$ l'ensemble des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(ii) Si $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V, on appellera « repère (projectif) standard » associé à $\mathscr{B}$ le repère $(p_0, \dots, p_{n+1})$ où $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$. Remarquons que, pour tout $\lambda \in k^\times$, ce repère est *le même* que celui associé à la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$.

10.2. Retour sur les actions de groupes. — Soient X un ensemble et G un groupe (non nécessairement commutatif), dont on note e l'élément neutre. On dit que G **agit** (ou *opère*) à gauche sur X si l'on s'est donné une application $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto g \cdot x$ vérifiant les deux propriétés : a) $e \cdot x = x$, b) $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ pour tout $x \in X$, $g, h \in G$. Souvent on notera simplement gx au lieu $g \cdot x$.

Terminologie 10.4. — Pour tout $x \in X$, le sous-ensemble $Gx = \{gx \mid g \in G\}$ de X est appelé **l'orbite** de x sous l'action de G, ou simplement la *G-orbite* de x. L'ensemble $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ est un *sous-groupe* de G, appelé le **stabilisateur** de x. On dit que deux éléments $x, y \in X$ sont **conjugués** (sous l'action de G) s'ils sont dans la même orbite. L'ensemble des orbites sera noté X/G et appelé le **quotient** de X par G.

Remarquons que deux orbites distinctes sont *disjointes*,[(1)] donc les orbites forment une *partition* de X.

Remarquons aussi que $gx = g'x \Leftrightarrow x = g^{-1}g'x \Leftrightarrow h = g^{-1}g'$ appartient à $G_x \Leftrightarrow g' = gh$ avec $h \in G_x$. On voit donc que l'application $G \to Gx$, $g \mapsto gx$ est bijective si et seulement si $G_x = \{e\}$.

Enfin, on dit qu'un élément x_0 de X est un **point fixe** de G si $gx_0 = x_0$ pour tout $g \in G$, i.e. si $G_{x_0} = G$.

Définitions 10.5. — L'action est dite :

(i) *transitive* s'il n'y a qu'une seule orbite.

(ii) *libre* si pour tout $x \in X$ on a $G_x = \{e\}$.

(iii) *fidèle* si $\bigcap_{x\in X} G_x = \{e\}$, c.-à-d. si l'élément neutre e est le seul élément g de G qui vérifie $gx = x$ pour tout x.

(iv) Dans la semaine 1, on avait dit qu'une action est « simplement transitive » si (i) et (ii) sont vérifiés. Cette terminologie est un peu désuète, donc dans ce cas il vaut mieux dire que l'action est **libre et transitive**.[(2)]

Exemple 10.6. — L'action naturelle de $G = \mathrm{GL}(V)$ sur V est fidèle (car le seul automorphisme de V qui fixe chaque $v \in V$ est l'application identique id_V), mais elle n'est pas libre.

Lemme 10.7. — *Soit G un groupe agissant à gauche sur X. Alors :*

(i) *Pour tout $x \in X$ et $g \in G$, on a* $\boxed{G_{gx} = gG_xg^{-1}}$[(3)] *donc :* « deux éléments conjugués ont des stabilisateurs conjugués ».

(ii) *$N = \bigcap_{x\in X} G_x$ est un sous-groupe* distingué *de G.*

(iii) *Le groupe quotient $\overline{G} = G/N$ agit* fidèlement *sur X.*

Démonstration. — (i) Fixons x et g et soit h un élément arbitraire de G. Alors : $h \in G_{gx} \Leftrightarrow hgx = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in G_x \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}$. Ceci prouve (i).

(ii) peut se déduire de (i), mais nous préférons procéder comme suit. Notons $\mathscr{S}(X)$ le groupe des *permutations* de X, i.e. des bijections de X dans X. Alors se donner une action à gauche de G sur X équivaut à se donner le morphisme de groupes $\phi : G \to \mathscr{S}(X)$ défini par $\phi(g)(x) = gx$. (Exercice : vérifier cette assertion !) Posons $N = \mathrm{Ker}(\phi)$, c'est un sous-groupe distingué de G qu'on appellera « noyau de l'action sur X ». Remarquons que N est formé des $g \in G$ tels que $\phi(g) = \mathrm{id}_X$, i.e. tels que $gx = x$ pour tout $x \in X$. On voit donc que $N = \bigcap_{x\in X} G_x$. Ceci prouve (ii) et montre aussi que l'action est fidèle ssi $\mathrm{Ker}(\phi) = \{e\}$.

(iii) Pour tout $g \in G$, notons gN sa classe modulo N, i.e. son image dans G/N. D'après la propriété universelle du groupe quotient, il existe un unique morphisme de groupes $\overline{\phi} : G/N \to \mathscr{S}(X)$ tel que $\overline{\phi}(gN) = \phi(g)$ pour tout $g \in G$. Ceci montre que l'action de G sur X « se factorise » (ou « se descend ») en une action de $\overline{G}$ sur X. De plus, un élément gN de $\overline{G}$ appartient à $\mathrm{Ker}(\overline{\phi})$ ssi $\phi(g) = \mathrm{id}_X$, c.-à-d. ssi $g \in N$. Ceci montre que $\overline{\phi}$ est injectif, donc l'action de $\overline{G}$ sur X est fidèle. $\square$

Le lemme suivant peut être omis en 1ère lecture. Il ne sera utilisé que dans la remarque 10.20.

Lemme 10.8. — *Soit G un groupe agissant à gauche sur X et soit H un sous-groupe* distingué *de G. Alors :*

(i) *G agit sur X/H par $g \cdot Hx = Hgx$ et ceci se factorise en une action de $\overline{G} = G/H$ sur X/H.*

---

(1) En effet, si $z \in Gx \cap Gy$ il existe $g, h \in G$ tels que $z = gx = hy$, alors $x = g^{-1}hy$ donc $Gx \subset Gy$, et de même $Gy \subset Gx$, d'où $Gx = Gy$.

(2) Ainsi, un espace affine de direction V est un ensemble non vide $\mathscr{V}$ muni d'une action (à droite) du groupe abélien V, qui est *libre et transitive*.

(3) Si H est un sous-groupe de G, on rappelle que gHg^{-1} désigne le sous-groupe : $\{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

(ii) *Si l'action de G sur X est transitive, l'action de $\overline{G}$ sur X/H l'est aussi.*
(iii) *Si l'action de G sur X est libre, l'action de $\overline{G}$ sur X/H l'est aussi.*

Démonstration. — (i) Pour tout $g \in G$ et $x \in X$, on définit $g \cdot Hx$ comme étant la H-orbite de gx, notée Hgx. Ceci est bien défini car si hx est un autre élément de l'orbite Hx on a $ghx = (ghg^{-1})gx$ et, comme $h' = ghg^{-1} \in H$ puisque H est distingué, on voit que $ghx = h'gx$ et gx définissent la même H-orbite.

Ayant ainsi montré que $g \cdot Hx$ est bien défini, on vérifie immédiatement que c'est une action, car $e \cdot Hx = Hx$ et $g \cdot (g' \cdot Hx) = g \cdot Hg'x = Hgg'x = (gg') \cdot Hx$. De plus, pour tout $h \in H$ et $x \in X$, on a $hHx = Hx$, donc H est contenu dans le noyau de l'action de G sur X/H. Par conséquent, l'action de G se factorise en une action de $\overline{G} = G/H$ telle que $\overline{g} \cdot Hx = Hgx$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

(ii) Supposons l'action de G sur X transitive et soient $x_0, x_1 \in X$. Par hypothèse, il existe $g \in G$ tel que $gx_0 = x_1$; alors on a $\overline{g} \cdot Hx_0 = Hx_1$. Ceci montre que l'action de $\overline{G}$ sur X/H est transitive.

(iii) Soient $x \in X$ et $g \in G$ tels que $g \cdot Hx = Hx$, i.e. tels que gx appartienne à Hx. Il existe donc $h \in H$ tel que $gx = hx$ d'où $h^{-1}g \in G_x$. Si $G_x = \{e\}$ (ou, plus généralement, si l'on suppose que $G_x \subset H$), on en déduit $h^{-1}g \in H$ d'où $g \in H$ et donc $\overline{g} = \overline{e}$. Ceci montre que si l'action de G sur X est libre (ou, plus généralement, si elle vérifie $G_x \subset H$ pour tout x), alors l'action de $\overline{G}$ sur X/H est libre. □

10.3. PGL(V) et repères projectifs. —

Définition 10.9. — Soit $H = \{\lambda \, \mathrm{id}_V \mid \lambda \in k^\times\}$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$ formé des homothéties. Il est *central* (i.e. pour tout $h \in H$ et $g \in G$ on a $ghg^{-1} = h$) donc a fortiori *distingué*. On peut donc former le groupe quotient $\mathrm{GL}(V)/H$. On le note $\mathrm{PGL}(V)$ et on l'appelle le **groupe projectif** de V. Ses éléments sont appelés *transformations projectives* ou **homographies**.

Notation. Pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ on notera $\overline{g}$ son image dans $\mathrm{PGL}(V)$.

Proposition 10.10. — $\mathrm{GL}(V)$ *agit librement et transitivement sur l'ensemble des bases de* V.

Démonstration. — Soient $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ deux bases de V. Comme un endomorphisme de V est déterminé par l'image d'une base, il existe un unique endomorphisme g de V tel que $g(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$, i.e. tel que $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 0, \dots, n$ et de plus, comme g transforme une base en une base, c'est un automorphisme de V (dont l'inverse est l'endomorphisme qui à chaque e'_i associe e_i). Il en résulte que g est l'unique élément de $\mathrm{GL}(V)$ tel que $g(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. La proposition en découle. □

Corollaire 10.11. — *Pour tout entier $N \leq n$,* $\mathrm{GL}(V)$ *agit transitivement sur l'ensemble des familles $(v_0, \dots, v_N)$ de $N+1$ vecteurs linéairement indépendants.*

Démonstration. — Soient $\mathscr{F} = (e_0, \dots, e_N)$ et $\mathscr{F}' = (e'_0, \dots, e'_N)$ deux telles familles. Complétons $\mathscr{F}$ en une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et de même $\mathscr{F}'$ en $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$. D'après la proposition précédente, il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $g(e_i) = e'_i$ pour $i = 0, \dots, n$, d'où a fortiori $g(\mathscr{F}) = \mathscr{F}'$. □

Proposition 10.12. — (i) $\mathrm{PGL}(V)$ *agit* fidèlement et transitivement *sur* $\mathbb{P}(V)$.

(ii) *Cette action transforme tout sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ en un sous-espace projectif de même dimension.*

(iii) *Elle respecte donc la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère projectif en un repère projectif.*

Démonstration. — Le groupe $G = \mathrm{GL}(V)$ agit sur V et transforme chaque droite en une droite, donc agit sur l'ensemble $\mathbb{P}(V)$ des droites de V. D'après le corollaire précédent, cette action est transitive, car étant données deux droites $D_0 = kv_0$ et $D = kv$, il existe $g \in G$ tel que $gv_0 = v$ d'où $g(D_0) = D$.

Le noyau N de cette action est formé des $g \in \mathrm{GL}(V)$ tels que $g(D) = D$ pour toute droite D donc, d'après le lemme ci-dessous, $N = H$. Donc, d'après le lemme 10.7, l'action de $\mathrm{GL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$ se factorise en une action fidèle de $\mathrm{PGL}(V)$ sur $\mathbb{P}(V)$. De plus, cette action est transitive puisque l'action de $\mathrm{GL}(V)$ l'est. Ceci prouve (i).

(ii) Soit W un sev non nul de V et soit $g \in \mathrm{GL}(V)$. Alors $g(W)$ est un sev de V de même dimension, et pour toute droite D de V on a : $D \subset W \Leftrightarrow g(D) \subset g(W)$. Il en résulte que

$$\overline{g}\big(\mathbb{P}(W)\big) = \{\overline{g}(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \{g(D) \mid D \in \mathbb{P}(W)\} = \mathbb{P}(g(W)).$$

Ceci prouve (ii), et (iii) en découle. $\square$

Lemme 10.13. — *Soit $f : V \to V$ un endomorphisme non nul tel que $f(D) \subset D$ pour toute droite D. Alors f est une homothétie.*

Démonstration. — Si $\dim(V) = 1$ tout endomorphisme non nul est une homothétie. On peut donc supposer $\dim(V) \geq 2$, i.e. $n \geq 1$. Soit $(e_0, \ldots, e_n)$ une base de V. L'hypothèse entraîne qu'il existe des scalaires μ_i tels que $f(e_i) = \mu_i e_i$ pour tout i. Fixons un indice $i \geq 1$. Comme e_0 et e_i sont linéairement indépendants, l'hypothèse que $f(e_0 + e_i) = \mu_0 e_0 + \mu_i e_i$ soit colinéaire à $e_0 + e_i$ entraîne que $\mu_i = \mu_0$. Ceci prouve que $f = \mu_0 \,\mathrm{id}_V$ (et $\mu_0 \neq 0$ par hypothèse). $\square$

***Théorème 10.14* (L'action de $\mathrm{PGL}(V)$ sur les repères projectifs)**

(i) *Soient $(e_0, \ldots, e_n)$ une base de V et $(p_0, \ldots, p_{n+1})$ le repère « standard » associé* (cf. 10.3). *Pour tout repère projectif $(q_0, \ldots, q_{n+1})$, il existe un* unique *élément $\overline{g} \in \mathrm{PGL}(V)$ tel que $\overline{g}(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \ldots, n+1$.*

(ii) *Par conséquent,* $\mathrm{PGL}(V)$ *agit* librement et transitivement *sur l'ensemble* $\mathrm{RP}(V)$ *des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$.*

Démonstration. — Pour $i = 0, \ldots, n+1$, choisissons un vecteur v_i tel que $[v_i] = p_i$. Alors $(v_0, \ldots, v_n)$ est une base de V donc v_{n+1} s'écrit de façon unique

$$v_{n+1} = \lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Notons g l'élément de $\mathrm{GL}(V)$ défini par $g(e_i) = \lambda_i v_i$ pour $i = 0, \ldots, n$, il vérifie $g(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \ldots, n+1$.

Pour $h \in \mathrm{GL}(V)$ arbitraire, la condition $h([e_i]) = [v_i]$ pour $i = 0, \ldots, n$ équivaut à : il existe $\mu_0, \ldots, \mu_n \in k^\times$ tels que $h(e_i) = \mu_i v_i$ pour $i = 0, \ldots, n$. Sous ces conditions, $h(e_0 + \cdots + e_n) = \mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n$ est colinéaire à v_{n+1} ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mu_i = \lambda \lambda_i$ pour $i = 0, \ldots, n$, c.-à-d. ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $h = \lambda g$, et cette condition équivaut à ce que h et g aient pour image $\overline{g}$ dans $\mathrm{PGL}(V)$. Ceci montre que $\overline{g}$ est l'unique élément de $\mathrm{PGL}(V)$ tel que $\overline{g}(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \ldots, n+1$. Ceci prouve (i), et (ii) en découle immédiatement. $\square$

10.15. — Conservons les notations de la démonstration et notons $f_i : V \to k$ la forme linéaire définie par $f_i(u) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, u, \ldots, v_n)$, où u se trouve à la i-ème place (au lieu de v_i). Comme $v_{n+1} = \lambda_i v_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j v_j$, il résulte des propriétés du déterminant que :

$$f(v_{n+1}) = \mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, \lambda_i v_i, \ldots, v_n) = \lambda_i f(v_i),$$

et donc λ_i s'exprime comme un quotient de déterminants :

$$(\dagger) \qquad \lambda_i = \frac{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, v_{n+1}, \ldots, v_n)}{\mathrm{dét}_{\mathscr{B}}(v_0, \ldots, v_i, \ldots, v_n)}.$$

Ceci nous sera utile pour définir le birapport sous une forme généralisée (cf. §10.4). Avant cela, signalons l'interprétation plus « géométrique » suivante de la notion de repère projectif.

Proposition 10.16. — *Dans $\mathbb{P}(V)$, il est équivalent de se donner :*

a) *Un repère projectif $(p_0, \ldots, p_{n+1})$.*

b) *Un hyperplan* $\mathbb{P}(H)$ *et un repère affine* $(p_0, \dots, p_n)$ *de l'ouvert affine* $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$.

Démonstration. — (i) Le passage de (a) vers (b) est essentiellement contenu dans la preuve du théorème 10.14. En effet, soit $(p_0, \dots, p_{n+1})$ un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$; choisissons pour $i = 0, \dots, n+1$ un vecteur v_i tel que $[v_i] = p_i$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V donc v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v_i$. Posons $e_i = \lambda_i v_i$, soit f la forme linéaire sur V définie par $f(e_i) = 1$ pour $i = 0, \dots, n$ et soit $H = \mathrm{Ker}(f)$. Alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V contenue dans l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f = \{v \in V \mid f(v) = 1\}$, donc forme un repère affine de $\mathscr{H}_f$, identifié à l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. De plus, p_{n+1} est la droite $k(e_0 + \cdots + e_n)$ et ceci détermine $\mathscr{B}$ à homothétie près, i.e. si $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ est une autre base de V telle que $p_i = [e'_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e'_0 + \cdots + e'_n]$, alors il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $e'_i = \lambda e_i$ pour $i = 0, \dots, n$.

(ii) Réciproquement, supposons donné un hyperplan $\mathbb{P}(H)$ et un repère affine $(p_0, \dots, p_n)$ de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Fixons un générateur f de H^0 et identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H}_f$. Chaque droite p_i contient un unique vecteur e_i tel que $f(e_i) = 1$, et comme $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est un repère affine de $\mathscr{H}_f$, c'est une base de V. Si l'on remplace f par $\lambda^{-1} f$, on obtient la base $\lambda\mathscr{B} = (\lambda e_0, \dots, \lambda e_n)$, et quelque soit $\lambda \in k^\times$ le repère standard associé à la base $\lambda\mathscr{B}$ est $(p_0, \dots, p_n, p_{n+1})$ où p_{n+1} est la droite engendrée par $e_0 + \cdots + e_n$. □

Avant de passer à la définition du « $(n+1)$-rapport », signalons les trois bijections suivantes, qui permettent de reformuler les résultats précédents. Ce paragraphe peut être omis en première lecture.[4]

Lemme 10.17. — *Soit* $\phi : X \to Y$ *une application et soit* H *un groupe agissant sur* X*. Supposons* ϕ constante sur les H-orbites, *i.e.* $\phi(hx) = \phi(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et* $h \in H$*. Alors :*

(i) *L'application* $\overline{\phi} : X/H \to Y$, $Hx \mapsto \phi(x)$ *est bien définie.*
(ii) *Elle est surjective si* ϕ *l'est.*
(iii) *Elle est injective ssi* ϕ *vérifie la propriété suivante : « si* $\phi(x') = \phi(x)$ *alors* $Hx' = Hx$ *».*

Démonstration. — (i) est clair et (ii) est facile : soit $y \in Y$, comme ϕ est surjective il existe $x \in X$ tel que $y = \phi(x) = \overline{\phi}(Hx)$, donc $\overline{\phi}$ est surjective. Enfin, $\overline{\phi}$ est injective ssi l'égalité de $\overline{\phi}(Hx') = \phi(x')$ avec $\overline{\phi}(Hx) = \phi(x)$ entraîne $Hx' = Hx$. Ceci prouve (iii). □

Notations 10.18. — (1) Notons $\mathbf{B}$ l'ensemble des bases de V et $\mathbf{B}/\!\sim$ le quotient par l'action des homothéties, i.e. deux bases $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ sont équivalentes ssi il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $\mathscr{B}' = \lambda\mathscr{B}$, i.e. $e'_i = \lambda e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. On notera $[\mathscr{B}]$ la classe de $\mathscr{B}$, i.e. son image dans $\mathbf{B}/\!\sim$.

(2) Notons $\mathrm{AH}_\infty(V)$ l'ensemble des couples $(\mathbb{P}(H), A)$ où $\mathbb{P}(H)$ est un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ (choisi comme hyperplan à l'infini) et $A = (p_0, \dots, p_n)$ est un repère affine de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$.[5]

(3) Pour toute base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$, posons $A(\mathscr{B}) = (p_0, \dots, p_n) = ([e_0], \dots, [e_n])$ et, notant $f_{\mathscr{B}}$ la forme linéaire définie par $f(e_i) = 1$ pour $i = 0, \dots, n$, posons

$$J(\mathscr{B}) = \big(\mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}}), A(\mathscr{B})\big) \in \mathrm{AH}_\infty(V).$$

Le repère standard $R(\mathscr{B})$ associé à $\mathscr{B}$ s'obtient en ajoutant à $A(\mathscr{B})$ le point $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$. Enfin, notons $C(\mathscr{B})$ les coordonnées homogènes $[x_0, \dots, x_n]$ définies par $\mathscr{B}$.

[4]Mais, de l'avis de l'auteur, en seconde lecture ce second point de vue peut aider à mieux comprendre le Th. 10.14 et la Prop. 10.16.

[5]D'après la Prop.10.16, ceci fournit une interprétation plus « géométrique » de la notion de repère projectif.

Proposition 10.19 **(Trois bijections).** — *Les applications* J,R *et* C *définies plus haut se factorisent par* $\mathbf{B}/\!\sim$ *et induisent des* bijections $\overline{J}$, $\overline{R}$ *et* $\overline{C}$ *:*

$$\begin{tikzcd} \left\{ \begin{array}{c} \textit{systèmes de} \\ \textit{coord. homog.} \end{array} \right\} & \mathbf{B}/\!\sim \arrow[l, "\overline{C}"'] \arrow[r, "\overline{R}"] \arrow[d, "\overline{J}"] & \mathrm{RP}(V) \\ & \mathrm{AH}_\infty(V) & \end{tikzcd}$$

Démonstration. — C est surjective car, par définition, tout système de coordonnées homogènes provient d'une base. On a déjà remarqué en 10.2 que si $\mathscr{B}' \sim \mathscr{B}$ alors $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}$ définissent les mêmes coordonnées homogènes. Donc C se factorise en une application $\overline{C}$ qui est surjective. Montrons qu'elle est injective. Supposons que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ définissent les mêmes coordonnées homogènes. Alors, pour tout $i = 0, \dots, n$, la coordonnée homogène $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]$, où le 1 est à la i-ème place, correspond à $[e_i]$ et à $[e'_i]$ donc il existe des scalaires $\mu_i \neq 0$ tels que $e'_i = \mu_i e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus, la coordonnée homogène $[1, \dots, 1]$ correspond à $[e_0 + \cdots + e_n]$ et aussi à $[e'_0 + \cdots + e'_n]$; il existe donc $\mu \in k^\times$ tel que $\mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n = \mu(e_0 + \cdots + e_n)$, d'où $\mu_i = \mu$ pour tout i et donc $\mathscr{B}' = \mu\mathscr{B}$. D'après le lemme 10.17, ceci montre que $\overline{C}$ est injective et surjective. C'est donc une bijection.

Montrons que R et J sont surjectives. Soit $A = (p_0, \dots, p_n) = ([v_0], \dots, [v_n])$ un $(n+1)$-uplet de points projectivement indépendants et soient, respectivement, $p_{n+1} = [v_{n+1}]$ un point tel que $\mathscr{R} = (p_0, \dots, p_{n+1})$ soit un repère projectif, et $H = \mathrm{Ker}(f)$ un hyperplan de V tel que $p_0, \dots, p_n$ appartiennent à $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. Alors $(v_0, \dots, v_n)$ est une base de V et :

(1) Dans le premier cas, v_{n+1} s'écrit de façon unique $v_{n+1} = \sum_{i=0}^n \lambda_i v_i$ et l'hypothèse que $\mathscr{R}$ soit un repère projectif entraîne que chaque λ_i est non nul. Posant alors $e_i = \lambda_i v_i$, on obtient que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V telle que $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $p_{n+1} = [e_0 + \cdots + e_n]$, i.e. $\mathscr{R} = R(\mathscr{B})$.

(2) Dans le second cas, on a $f(v_i) \neq 0$ pour $i = 0, \dots, n$. Posant alors $e_i = f(v_i)^{-1} v_i$, on obtient que $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V telle que $p_i = [e_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et $f_{\mathscr{B}} = f$, d'où $H = \mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}})$ et donc $(H, A) = J(\mathscr{B})$.

Ceci montre que R et J sont surjectives. On a déjà remarqué en 10.2 que $\mathscr{B}$ et $\lambda\mathscr{B}$ définissent le même repère projectif ; d'autre part $f_{\mathscr{B}} = \lambda f_{\lambda\mathscr{B}}$ donc on a aussi $J(\lambda\mathscr{B}) = J(\mathscr{B})$. Donc R et J induisent des applications $\overline{R} : \mathbf{B}/\!\sim \longrightarrow \mathrm{RP}(V)$ et $\overline{J} : \mathbf{B}/\!\sim \longrightarrow \mathrm{AH}_\infty(V)$ qui sont surjectives.

Montrons qu'elles sont aussi injectives. Soient $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_0, \dots, e'_n)$ deux bases ayant même image par R (resp. J). Alors les égalités $[e_i] = p_i = [e'_i]$ entraînent qu'il existe des scalaires $\mu_i \neq 0$ tels que $e'_i = \mu_i e_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus :

(1) Dans le cas de R, l'égalité $[e_0 + \cdots + e_n] = p_{n+1} = [e'_0 + \cdots + e'_n]$ entraîne qu'il existe $\mu \in k^\times$ tel que $\mu_0 e_0 + \cdots + \mu_n e_n = \mu(e_0 + \cdots + e_n)$, d'où $\mu_i = \mu$ pour tout i.

(2) Dans le cas de J, l'égalité $\mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}}) = H = \mathrm{Ker}(f_{\mathscr{B}'})$ entraîne qu'il existe $\mu \in k^\times$ tel que $f_{\mathscr{B}} = \mu f_{\mathscr{B}'}$. Alors, pour tout $i = 0, \dots, n$ on a :

$$\mu = \mu f_{\mathscr{B}'}(e'_i) = f_{\mathscr{B}}(e'_i) = f_{\mathscr{B}}(\mu_i e_i) = \mu_i.$$

Dans les deux cas, on obtient que $\mathscr{B}' = \mu\mathscr{B}$. D'après le lemme 10.17, ceci montre que $\overline{R}$ (resp. $\overline{J}$) est injective et surjective. C'est donc une bijection. Ceci achève la démonstration. □

Remarque 10.20. — La démonstration du fait que $\overline{J}$, resp. $\overline{R}$, soit une bijection est quasiment identique à celle de la Prop. 10.16, resp. du Th. 10.14. Et ce dernier se déduit de la proposition précédente grâce au lemme 10.8. En effet, $G = \mathrm{GL}(V)$ agit librement et transitivement sur l'ensemble $\mathbf{B}$ des bases de V et $\mathbf{B}/\!\sim$ n'est autre que le quotient de $\mathbf{B}$ par le sous-groupe H (central donc distingué) des homothéties. Donc, d'après le lemme 10.8, le groupe quotient $\overline{G} = G/H = \mathrm{PGL}(V)$ agit librement sur $\mathbf{B}/\!\sim$ et aussi sur $\mathrm{RP}(V)$, car la bijection $\overline{R}$ « respecte l'action de $\overline{G}$ », i.e. $\overline{R}\big([g\mathscr{B}]\big) = \overline{g}\,\overline{R}(\mathscr{B})$ pour tout $g \in G$ et $\mathscr{B} \in \mathbf{B}$.

10.4. Le quotient de $\mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$ par $\mathrm{PGL}(V)$.

— La définition du birapport de quatre points (dont trois distincts) dans une droite projective repose sur le lemme simple mais important suivant.

Lemme 10.21. — *Soit* G *un groupe agissant sur deux ensembles* Y *et* Z *; il agit alors sur* $X = Y \times Z$ *par* $g(y, z) = (gy, gz)$*. On suppose que l'action sur* Y *est* libre et transitive *et l'on fixe un point* $y_0 \in Y$*. Alors :*

(i) *Pour tout* $(y,z) \in X$*, il existe un unique* $u \in Z$ *tel que* (y,z) *et* (y_0,u) *soient dans la même orbite. Ceci définit une application* $\phi : X \to Z$, $(y,z) \mapsto u$.

(ii) ϕ *est* constante sur les G-orbites, *i.e.* $\phi(gy,gz) = \phi(y,z)$ *pour tout* $g \in G$.

(iii) *L'application* $\overline{\phi} : X/G \to Z$ *définie par* $\overline{\phi}(Gx) = \phi(x)$ *est une* bijection *de* X/G *sur* Z*, dont la bijection réciproque est l'application* $Z \to X/G$, $u \mapsto G(y_0,u)$.

Démonstration. — Soient $y \in Y$ et $z,u \in Z$. Si (y,z) et (y_0,u) sont dans la même orbite, il existe $g \in G$ tel que $gy_0 = y$ et $gu = z$.

Comme l'action de G sur Y est libre et transitive, la condition $gy_0 = y$ détermine un *unique* élément $g \in G$ et alors il existe un unique u tel que $gu = z$, à savoir $u = g^{-1}z$. Ceci définit donc une application $\phi : X \to Z$, $(y,z) \mapsto u$.

Cette application est *constante* sur les orbites de G dans X : en effet, si $h \in G$ et si $x' = (hy,hz)$, alors hg est l'unique élément de G vérifiant $hgy_0 = hy$ et donc on a

$$\phi(x') = (hg)^{-1}hz = g^{-1}h^{-1}hz = g^{-1}z = \phi(y,z).$$

Par conséquent, l'application $\overline{\phi} : X/G \to Z$ qui à toute G-orbite Gx associe $\phi(x)$ est bien définie.

Notons $\psi : Z \to X/G$ l'application qui à tout $u \in Z$ associe la G-orbite de (y_0,u). Alors, $\overline{\phi}(\psi(u)) = u$ pour tout $u \in Z$. D'autre part, pour tout $x = (y,z) \in X$ on a vu que $u = \phi(y,z)$ est l'unique élément de Z tel que $Gx = G(y_0,u) = \psi(u)$; on a donc $Gx = \psi(\phi(x)) = \psi(\overline{\phi}(Gx))$. Ceci montre que $\overline{\phi}$ et ψ sont des bijections réciproques l'une de l'autre. Le lemme est démontré. □

D'après le théorème 10.14, l'action de $G = \mathrm{PGL}(V)$ sur l'ensemble $Y = \mathrm{RP}(V)$ des repères projectifs de $\mathbb{P}(V)$ est libre et transitive. Posons $Z = \mathbb{P}(V)$, alors $X = Y \times Z$ est l'ensemble des $(n+3)$-uplets $(p_0,\dots,p_{n+2}) \in \mathbb{P}(V)^{n+3}$ tels que les $n+2$ premiers points $(p_0,\dots,p_{n+1})$ forment un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$.

D'après le lemme précédent, le choix d'un repère projectif $\mathscr{R}_0$ fournit une bijection ϕ entre le quotient $E = X/G$ et $Z = \mathbb{P}(V)$. De plus, ϕ est donnée explicitement par le théorème suivant :

***Théorème 10.22* (« du $(n+1)$-rapport »).** — [6] *Posons* $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$*. Soit* $\mathscr{B}$ *une base de* V*, notons* $(p_0,\dots,p_{n+1})$ *le repère projectif associé et* $[\xi_0,\dots,\xi_n]$ *les coordonnées homogènes correspondantes.*

(i) *L'application* ϕ*, qui à tout* $(n+3)$*-uplet* $x = ([v_0],\dots,[v_{n+2}]) \in X$ *associe l'unique point* α *de* $\mathbb{P}(V)$ *tel que* $(p_0,\dots,p_{n+1},\alpha)$ *et* x *soient dans la même orbite de* $G = \mathrm{PGL}(V)$*, est donné en coordonnées homogènes par : pour tout* $i = 0,\dots,n$*,*

$$(\star) \qquad \xi_i(\alpha) = \frac{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,\overset{\substack{i\text{-ème place}\\ \downarrow}}{v_{n+2}},\dots,v_n)}{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(v_0,\dots,\underset{\substack{\uparrow\\ i\text{-ème place}}}{v_{n+1}},\dots,v_n)}$$

(ii) *De plus, cette application est constante sur les orbites de* G *dans* X *et induit une bijection* $\overline{\phi}$ *de l'ensemble quotient* $E = X/G$ *sur* $\mathbb{P}(V)$.

Démonstration. — Que l'application ϕ soit constante sur les G-orbites et induise une bijection $\overline{\phi}$ de X/G sur $\mathbb{P}(V)$ résulte du lemme 10.21, donc la seule chose à démontrer est la formule explicite $(\star)$. Donnons deux démonstrations.

Première démonstration. D'après le lemme 10.21, on sait qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$, unique à homothétie près, tel que $[ge_i] = [v_i]$ pour $i = 0,\dots,n+1$, et alors l'élément α cherché est

[6] Cette terminologie est due à l'auteur, donc n'est peut-être pas standard.

égal à $[g^{-1}v_{n+2}]$. En remplaçant g par g^{-1}, on peut reformuler ceci en disant qu'il existe $g \in \mathrm{GL}(V)$, unique à homothétie près, tel que

$$(*) \qquad [gv_i] = [e_i] \quad \text{pour } i = 0, \dots, n+1,$$

et alors l'élément α cherché est égal à $[gv_{n+2}]$. Il suffit donc d'exhiber un élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ vérifiant $(*)$, et alors on aura $\alpha = [gv_{n+2}]$. Fixons les vecteurs $v_0, \dots, v_{n+1}$ et, pour tout $j = 0, \dots, n$ notons $f_j : V \to k$ la forme linéaire définie par $f_j(u) = \det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, u, \dots, v_n)$, où u se trouve à la j-ème place (au lieu de v_j). Remarquons que comme $([v_0], \dots, [v_{n+1}])$ est un repère projectif, alors $f_j(v_j)$ et $f_j(v_{n+1})$ sont *non nuls*. Par contre, pour $i \in \{0, \dots, n\} - \{j\}$ on a $f_j(v_i) = 0$ car le vecteur v_i apparaît alors deux fois.

Soit g l'endomorphisme de V qui à tout $u \in V$ associe le vecteur dont les coordonnées dans la base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ sont :

$$\Big(\frac{f_0(u)}{f_0(v_{n+1})}, \dots, \frac{f_n(u)}{f_n(v_{n+1})}\Big).$$

D'après les remarques précédentes, ceci est bien défini car $f_j(v_{n+1}) \neq 0$ pour tout j, et pour tout $i = 0, \dots, n$, le vecteur $g(v_i)$ a toutes ses coordonnées nulles sauf la i-ème, qui vaut $f_i(v_i)/f_i(v_{n+1})$. On a donc $[g(v_i)] = [e_i] = p_i$ pour $i = 0, \dots, n$. De plus, il est clair que $g(v_{n+1}) = (1, \dots, 1)$ donc $[g(v_{n+1})] = p_{n+1}$. Donc g est bien l'élément cherché (unique à homothétie près), d'où $\alpha = [g(v_{n+2})]$ et donc les coordonnées homogènes de α sont :

$$\xi_i(\alpha) = \frac{f_i(v_{n+2})}{f_i(v_{n+1})} = \frac{\det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \dots, v_n)}{\det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n)}$$

On peut se demander d'où vient la formule $(\star)$. Pour cette raison, nous donnons la :

<u>Deuxième démonstration</u>. Déterminons une matrice $A \in M_{n+1}(k)$ telle que $[Ae_i] = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n+1$: une telle A est unique à homothétie près et alors $\alpha = [A^{-1}v_{n+2}]$. Pour $i = 0, \dots, n$, la condition $[Ae_i] = [v_i]$ entraîne que la i-ème colonne de A, notons-la C_i, égale $\lambda_i v_i$ pour un certain $\lambda_i \in k^\times$. D'après la remarque 10.15, la condition $A(e_0 + \cdots + e_n) = v_{n+1}$ donne les formules

$$(\dagger) \qquad \forall i = 0, \dots, n, \qquad \lambda_i = \frac{\det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, v_{n+1}, \dots, v_n)}{\det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, v_i, \dots, v_n)},$$

qui déterminent donc la matrice A. Notons $\mathrm{Com}(A)$ la matrice des cofacteurs, i.e. $\mathrm{Com}(A)_{ij} = (-1)^{i+j}\Delta_{ij}(A)$ alors $A^{-1} = \det(A)^{-1}\,{}^t\mathrm{Com}(A)$ donc $\alpha = [A^{-1}v_{n+2}] = [{}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}]$. Enfin, les coordonnées de ${}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}$ sont données par les « formules de Cramer » : notant $(y_0, \dots, y_n)$ les coordonnées de v_{n+2}, la i-ème coordonnée x_i de ${}^t\mathrm{Com}(A)v_{n+2}$ vaut $\sum_{j=0}^n (-1)^{i+j}\Delta_{ji}(A)y_j$ et l'on reconnaît là le développement suivant la i-ème colonne du déterminant $\det_{\mathscr{B}}(C_0, \dots, v_{n+2}, \dots, C_n)$, où v_{n+2} est la i-ème colonne. Comme $C_j = \lambda_j v_j$ pour $j \neq i$, on obtient donc que :

$$x_i = \det_{\mathscr{B}}(C_0, \dots, v_{n+2}, \dots, C_n) = \det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, v_{n+2}, \dots, v_n) \times \prod_{j \neq i} \lambda_j$$

et tenant compte de la formule $(\dagger)$ pour les λ_j, on obtient que les coordonnées homogènes de α sont données, à homothétie près, par :

$$(1) \qquad \xi_i(\alpha) = \det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+2}}}, \dots, v_n) \times \prod_{j \neq i} \det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{j\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n).$$

En divisant chaque $\xi_i(\alpha)$ par le scalaire $\prod_{j=0}^n \det_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{j\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n)$, on obtient que α a aussi pour coordonnées homogènes les $(n+1)$ rapports indiqués en $(\star)$. $\square$

10.5. Birapport. — Soit $\mathbf{D} = \mathbb{P}(W)$ une droite projective (i.e. $\dim(W) = 2$). Dans ce cas, trois points p_1, p_2, p_3 de $\mathbf{D}$ forment un repère projectif ssi ils sont deux à deux distincts. Soit $\mathscr{B} = (e_0, e_1)$ une base de W et notons $[x, y]$ les coordonnées homogènes correspondantes. Il est d'usage de prendre pour point à l'infini ∞ le point $[1, 0] = [e_0]$; alors on identifie la droite affine $U = \{[x, y] \mid y \neq 0\}$ à k par la bijection $[x, y] \mapsto \dfrac{x}{y}$ (dont l'inverse est $t \mapsto [t, 1]$). On désigne donc par 0 et 1 les points $[0, 1] = [e_1]$ et $[1, 1] = [e_0 + e_1]$. (De plus, pour tout $x \neq 0$, on a « $x/0 = \infty$ ».)

Définition et proposition 10.23 **(Birapport)**. — (i) *Soient p_1, p_2, p_3, p_4 quatre points de $\mathbf{D}$, avec p_1, p_2, p_3 deux à deux distincts. Leur* **birapport**, *noté $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ est l'unique élément α de $\mathbf{D}$ tel que (p_1, p_2, p_3, p_4) et $(\infty, 0, 1, \alpha)$ soient dans la même orbite de $G = \mathrm{PGL}(W)$. En d'autres termes, si g est l'unique élément de G tel que $g(p_1) = \infty$, $g(p_2) = 0$ et $g(p_3) = 1$, alors $\alpha = g(p_4)$.*

(ii) *Notant $[x_i, y_i]$ les coordonnées homogènes de p_i, on a :*

$$\alpha = \big[(x_4y_2 - x_2y_4)(x_1y_3 - x_3y_1), (x_1y_4 - x_4y_1)(x_3y_2 - x_2y_3)\big].$$

Si de plus on a $p_i \in U$ et qu'on écrit $p_i = [x_i, 1]$, alors

$$\alpha = \big[(x_4 - x_2)(x_1 - x_3), (x_1 - x_4)(x_3 - x_2)\big] = \left[\frac{x_4 - x_2}{x_3 - x_2}, \frac{x_4 - x_1}{x_3 - x_1}\right].$$

(C'est cette dernière expression qui explique le nom de birapport.*)*

Démonstration. — Tout ceci découle du théorème 10.22, dans le cas $n = 1$. □