Semaines 5-6 : fin du §10, perspectivités et projections centrales, involutions d'une droite projective et birapport

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. II, §§2.1-2.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Co] H. S. M. Coxeter, Projective Geometry (revised reprint of the 2nd edition, Springer-Verlag, 1994), Chap. 1 et 4-6.

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. VII.

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§2.5-2.8), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. I, §B et Chap. II, §§A-D.

10.6. Retour sur les homographies et le $(n+1)$-rapport. — La définition des homographies donnée au §10.3 (Déf. 10.9) est trop restrictive et doit être remplacée par la suivante.

Déf. 10.9 revue. — (i) Soient E, F deux k-espaces vectoriels de même dimension $n+1$. Notons $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isomorphismes (i.e. applications linéaires bijectives) de E sur F. Il est muni d'une action du groupe multiplicatif $k^\times$: pour tout $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $x \in E$, $(\lambda \cdot \phi)(x) = \lambda\phi(x) = \phi(\lambda x)$.[(1)]

Soient $\phi \in \mathrm{Isom}(E,F)$ et $\psi = \phi^{-1} \in \mathrm{Isom}(F,E)$ l'isomorphisme réciproque. Alors ϕ transforme toute droite de E en une droite de F, donc induit une application $\mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$, $D \mapsto \phi(D)$, qu'on notera $\mathbb{P}(\phi)$ ou simplement $\overline{\phi}$. Cette application est bijective, car elle admet pour réciproque l'application $\overline{\psi} : \mathbb{P}(F) \to \mathbb{P}(E)$. Notant $\mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$ l'ensemble des bijections de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, on obtient donc une application :

$$\mathrm{Isom}(E,F) \longrightarrow \mathrm{Bij}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big), \quad \phi \mapsto \overline{\phi}.$$

Les bijections $\overline{\phi} : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ ainsi obtenues s'appellent des **homographies** de $\mathbb{P}(E)$ sur $\mathbb{P}(F)$, et l'ensemble de ces homographies sera noté $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F)\big)$. Si $F = E$, on le notera $\mathrm{PGL}(E)$.

(ii) Notons que l'application $\phi \mapsto \overline{\phi}$ « respecte la composition des applications », i.e. si $\theta \in \mathrm{Isom}(F,V)$ on a $\overline{\theta \circ \phi} = \overline{\theta} \circ \overline{\phi}$. Par conséquent, l'application $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$, $\phi \mapsto \overline{\phi}$ est un morphisme de groupes.

Prop. 10.12 revue. — *On conserve les notations précédentes. Soient* $\phi, \psi \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

(i) *Alors :* $\overline{\phi} = \overline{\psi} \iff$ *il existe* $\lambda \in k^\times$ *tel que* $\phi = \lambda\psi$. *En particulier, le noyau du morphisme de groupes* $\mathrm{GL}(E) \to \mathrm{PGL}(E)$ *est le sous-groupe* $k^\times \mathrm{id}_E$ *des homothéties de* E, *et donc* $\boxed{\mathrm{PGL}(E) \text{ s'identifie au groupe quotient } \mathrm{GL}(E)/k^\times \mathrm{id}_E.}$

(ii) *Pour tout sev* W *de* E, *on a* $\overline{\phi}(\mathbb{P}(W)) = \mathbb{P}(\phi(W))$, *donc* $\overline{\phi}$ *transforme tout sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(E)$ *en un sous-espace projectif de* $\mathbb{P}(F)$ *de même dimension.*

(iii) *Par conséquent, toute homographie* $h : \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$ *respecte la notion de points projectivement indépendants, donc en particulier transforme tout repère de* $\mathbb{P}(E)$ *en un repère de* $\mathbb{P}(F)$.

(1) Donc cette action coïncide avec celle des homothéties de F (ou de E).

Démonstration. — (i) Il suffit de démontrer la première assertion (la seconde étant un cas particulier). Or, on a : $\overline{\phi} = \overline{\psi}$ si et seulement si $\overline{\psi}^{-1} \circ \overline{\phi} = \overline{\psi^{-1} \circ \phi}$ est l'application identique $\mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ de $\mathbb{P}(E)$. Or $f = \psi^{-1} \circ \phi$ est un automorphisme de E et d'après le lemme 10.13 (semaine 3), $\overline{f} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(E)}$ si et seulement si il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $f = \lambda\,\mathrm{id}_E$, ce qui équivaut à $\phi = \lambda\psi$. Ceci prouve (i).

La démonstration de (ii) et (iii) est identique à celle de (ii) et (iii) de la Prop. 10.12. $\square$

Notation. — Lorsque $E = k^{n+1}$, on désigne $\mathbb{P}(k^{n+1})$ par $\mathbb{P}^n(k)$. Comme k^{n+1} est muni de la base canonique $(e_0, \dots, e_n)$, alors $\mathbb{P}^n(k)$ est muni des coordonnées homogènes « canoniques » $[x_0, \dots, x_n]$ et du repère projectif canonique $(p_0, \dots, p_{n+1}) = ([e_0], \dots, [e_n], [e_0 + \cdots + e_n])$.

Donc il faut vraiment penser à $\mathbb{P}^n(k)$ comme à « un espace projectif de dimension n muni d'un repère projectif $\mathscr{R}_0$ fixé une fois pour toutes ».

La définition du $(n+1)$-rapport donnée au §10.4 (Th. 10.22) n'est pas tout-à-fait satisfaisante, car l'application $\phi : \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ qu'on y a défini dépend du choix d'une base $\mathscr{B}$ de V. En fait, le bon énoncé est le suivant :

Théorèmes 10.14 et 10.22 revus. — *Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Posons $X = \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V)$.*

(i) *Pour tout $(q_0, \dots, q_{n+1}) \in \mathrm{RP}(V)$, il existe un* unique *$h \in \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ tel que $h(p_i) = q_i$ pour $i = 0, \dots, n$.*

(ii) *Pour $x = (q_0, \dots, q_{n+1}, q_{n+2})$ dans X et pour h comme ci-dessus, on pose $\phi(x) = h^{-1}(q_{n+2})$. Ceci définit une application $\phi : X \to \mathbb{P}^n(k)$.*

(iii) *ϕ est constante sur chaque orbite de $G = \mathrm{PGL}(V)$ dans X et induit une application $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$ qui est* bijective.

(iv) *ϕ est donnée par la formule suivante : écrivons $q_i = [v_i]$ pour $i = 0, \dots, n$ et choisissons une base $\mathscr{B}$ de V, alors les coordonnées homogènes ξ_i de $\phi(x)$ sont données par :*

$$(\star) \qquad \forall i = 0, \dots, n \qquad \xi_i = \frac{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \overset{i\text{-ème place}}{\overset{\downarrow}{v_{n+2}}}, \dots, v_n)}{\mathrm{d\acute{e}t}_{\mathscr{B}}(v_0, \dots, \underset{i\text{-ème place}}{\underset{\uparrow}{v_{n+1}}}, \dots, v_n)}$$

(En particulier, ceci est indépendant du choix de $\mathscr{B}$.)

(v) *Cette application $\phi : \mathrm{RP}(V) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k)$ est appelée le « $(n+1)$-*rapport *», et le* **birapport** *lorsque $n = 1$.*

Démonstration. — La démonstration de (i) est identique à celle du Th. 10.14 : au lieu de partir d'une base $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de V on part de la base canonique $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ de k^{n+1}, et l'on obtient un unique élément h qui appartient à $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ au lieu d'être dans $\mathrm{PGL}(V)$. Par conséquent, le point (i) donne une identification canonique :

$$(*) \qquad \mathrm{RP}(V) = \mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big).$$

Via cette identification, l'action naturelle de $G = \mathrm{PGL}(V)$ sur $\mathrm{RP}(V)$ correspond à l'action $(g, h) \mapsto gh = g \circ h$ de G sur $\mathrm{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ et comme celle-ci est libre et transitive, il en est de même de l'action de G sur $\mathrm{RP}(V)$.

Soient $x = (\mathscr{R}, q) \in X$ et $g \in G$, posons $x' = gx = (\mathscr{R}', q')$, où $\mathscr{R}' = g(\mathscr{R})$ et $q' = g(q)$. Soit h l'unique homographie de $\mathbb{P}^n(k)$ sur $\mathbb{P}(V)$ telle que $h(\mathscr{R}_0) = \mathscr{R}$; par définition on a $\phi(x) = h^{-1}(q)$. D'autre part, l'homographie gh envoie $\mathscr{R}_0$ sur $g(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$, donc par définition aussi, on a $\phi(x') = (gh)^{-1}(q') = h^{-1}g^{-1}(g(q)) = h^{-1}(q)$, d'où $\phi(x') = \phi(x)$. Ceci montre que ϕ est constante sur les G-orbites. Elle induit donc une application $\overline{\phi} : X/G \to \mathbb{P}^n(k)$, $Gx \mapsto \phi(x)$.

Pour montrer que $\overline{\phi}$ est bijective, remarquons que pour tout $\alpha \in \mathbb{P}^n(k)$, l'ensemble

$$\theta(\alpha) = \Big\{(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)) \mid h \in \operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)\Big\}$$

est une orbite sous G : en effet, pour toute homographie $h : \mathbb{P}^n(k) \to \mathbb{P}(V)$ *fixée*, on a : $\operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) = \{gh \mid g \in G\}$ et donc $\theta(\alpha) = G\big(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)\big)$.

Donc θ est une application $\mathbb{P}^n(k) \to X/G$ et l'on a, pour tout $h \in \operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$:

$$(\overline{\phi} \circ \theta)(\alpha) = \phi\big(h(\mathscr{R}_0), h(\alpha)\big) = h^{-1}(h(\alpha)) = \alpha,$$

et $(\theta \circ \phi)(h(\mathscr{R}_0), q) = \theta(h^{-1}(q))$ est la G-orbite de $\big(h(\mathscr{R}_0), h(h^{-1}(q)\big) = (h(\mathscr{R}_0), q)$. Ceci montre que θ et $\overline{\phi}$ sont des bijections réciproques l'une de l'autre, ce qui prouve (iii).

Enfin, fixant une base $\mathscr{B}$ de V, on obtient la formule $(\star)$ exactement comme dans la preuve du théorème 10.22. Mais on voit qu'en fait cette formule ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$, car si $\mathscr{B}'$ est une autre base de V, on a $\operatorname{dét}_{\mathscr{B}'}(\cdot) = \operatorname{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \operatorname{dét}_{\mathscr{B}}(\cdot)$ donc le numérateur et le dénominateur dans la formule $(\star)$ sont tous deux multipliés par le scalaire $\operatorname{dét}_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \neq 0$ et donc le quotient est inchangé. Ceci achève la démonstration de cette version revue des théorèmes 10.14 et 10.22. □

Remarque. — En fait, on a une application naturelle :

$$\operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(k), \qquad (h, q) \mapsto h^{-1}(q)$$

et via l'identifiation $\mathrm{RP}(V) = \operatorname{Homog}\big(\mathbb{P}^n(k), \mathbb{P}(V)\big)$ obtenue en $(*)$, ϕ n'est autre que cette application.

Corollaire 10.14 bis. — *Soient* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$ *deux espaces projectifs de même dimension* n.

(i) *Étant donnés des repères projectifs* $\mathscr{R}$ *et* $\mathscr{R}'$ *de* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$, *il existe une* unique *homographie* $h : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *telle que* $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}'$.

(ii) *En particulier, si* p_0, p_1, p_2 (*resp.* q_0, q_1, q_2) *sont des points deux à deux distincts d'une droite projective* $\mathbf{D}$ (*resp.* $\mathbf{D}'$), *il existe une* unique *homographie* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *telle que* $h(p_i) = q_i$ *pour* $i = 0, 1, 2$.

Démonstration. — Le point (i) découle de la démonstration de 10.14 (i). Et lorsque $n = 1$, un repère projectif d'une droite $\mathbf{D}$ n'est autre qu'un triplet de points deux à deux distincts, d'où le point (ii). □

10.7. Homographies et préservation du $(n+1)$-rapport. — [2]

Terminologie 10.24. — Soient $\mathbf{D}, \mathbf{D}'$ deux droites projectives. Un repère projectif de $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$) est simplement un triplet de points de $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$) qui sont *deux à deux distincts*. Par conséquent, si $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une *bijection* alors, pour tout quadruplet $(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(\mathbf{D}) \times \mathbf{D}$, les points $(f(p_0), f(p_1), f(p_2))$ forment un repère de $\mathbf{D}'$ et donc le birapport $[f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)]$ est bien défini.

On dira alors que f « *préserve le birapport* » si, pour tout quadruplet $(p_0, p_1, p_2, p_3) \in \mathrm{RP}(\mathbf{D}) \times \mathbf{D}$ on a : $[p_0, p_1, p_2, p_3] = [f(p_0), f(p_1), f(p_2), f(p_3)]$.

Proposition 10.25. — *Soit* $f : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *une* bijection *entre deux droites projectives. Alors* f *est une homographie ssi elle préserve le birapport.*

Plus généralement, on a la :

[2] Après les corrections données dans le §10.6 précédent, on reprend la suite du §10.5, qui se terminait par la définition 10.23 du birapport. C'est pourquoi l'énoncé suivant porte le no. 10.24.

Proposition 10.26. — *Soient* $\mathbf{V}$ *et* $\mathbf{V}'$ *deux espaces projectifs de même dimension* n *et soit* $f : \mathbf{V} \to \mathbf{V}'$ *une application* bijective. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Il existe un repère projectif* $\mathscr{R} = (q_0, \ldots, q_{n+1})$ *tel que* $f(\mathscr{R}) = (f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}))$ *soit un repère projectif de* $\mathbf{V}'$ *et pour tout* $x \in \mathbf{V}$ *on a :*

$$[q_0, \ldots, q_{n+1}, x] = [f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)].$$

(ii) *L'assertion précédente est vérifiée pour* tout *repère projectif* $\mathscr{R}$ *de* $\mathbf{V}$.

(iii) f *est une homographie.*

On peut résumer ceci en disant que : « f est une homographie ssi elle préserve le $(n+1)$-rapport *».*

Démonstration. — Notons $\mathscr{R}_0 = (p_0, \ldots, p_{n+1})$ le repère standard de $\mathbb{P}^n(k)$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii). Supposons que f soit une homographie. Soit $\mathscr{R} = (q_0, \ldots, q_{n+1})$ un repère de $\mathbf{V}$. D'après la Prop. 10.12 revue, $(f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}))$ est un repère projectif de $\mathbf{V}'$. Notons h' l'unique homographie de $\mathbf{V}'$ sur $\mathbb{P}^n(k)$ telle $h'(f(q_i)) = p_i$. Alors $h = h' \circ f$ est l'unique homographie de $\mathbf{V}$ sur $\mathbb{P}^n(k)$ telle que $h(\mathscr{R}) = \mathscr{R}_0$. Donc, par définition du $(n+1)$-rapport, on a :

$$[f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) = (h' \circ f)(x) = [q_0, \ldots, q_{n+1}, x].$$

(i) $\Rightarrow$ (iii). Réciproquement, supposons (i) vérifié. Soit h (resp. h') l'unique homographie de $\mathbf{V}$ (resp. $\mathbf{V}'$) sur $\mathbb{P}^n$ telle $h(\mathscr{R})$ (resp. $h'(f(\mathscr{R}))$) égale $\mathscr{R}_0$. Par définition du $(n+1)$-rapport on a :

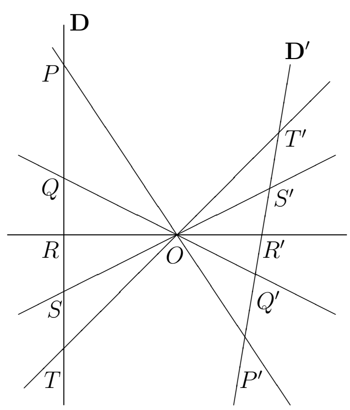
$$[f(q_0), \ldots, f(q_{n+1}), f(x)] = h'(f(x)) \qquad \text{et} \qquad [q_0, \ldots, q_{n+1}, x] = h(x)$$

et l'égalité de ces deux quantités entraîne $f(x) = h'^{-1}\big(h(x)\big)$, pour tout $x \in \mathbf{V}$. On a donc $f = h'^{-1} \circ h$, ce qui prouve que f est une homographie. $\square$

11. Perspectivités et projections centrales, involutions et birapport

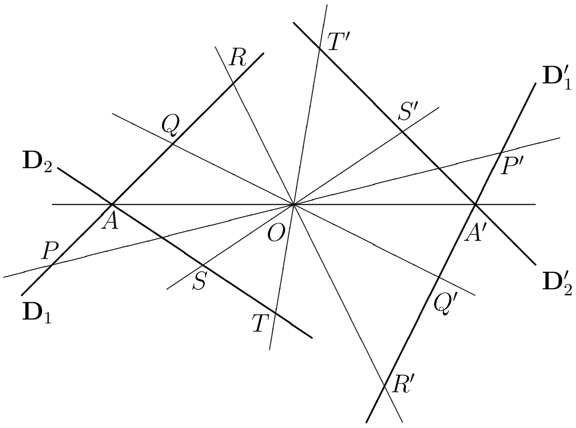
11.1. Figures en perspective. — Dans ce paragraphe et le suivant on va essayer de présenter les points de vue de Desargues et de Poncelet[3], en suivant l'excellente présentation de Coxeter [Co, Chap. 1]. Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$.

(1) On dit que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont *en perspective depuis un point* O si l'application qui à tout point $P \in \mathbf{D}$ associe le point P' où la droite (OP) coupe $\mathbf{D}'$ est bien définie (i.e. si $O \notin \mathbf{D}$) et est une bijection de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$, la réciproque étant l'application (bien définie si $O \notin \mathbf{D}'$) qui à tout $P' \in \mathbf{D}'$ associe le point $P = (OP') \cap \mathbf{D}$. On voit ainsi que deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont « en perspective » depuis n'importe quel point O hors de $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}'$:



[3]Jean-Victor Poncelet, mathématicien (et capitaine d'artillerie, puis général) français, 1788-1867.

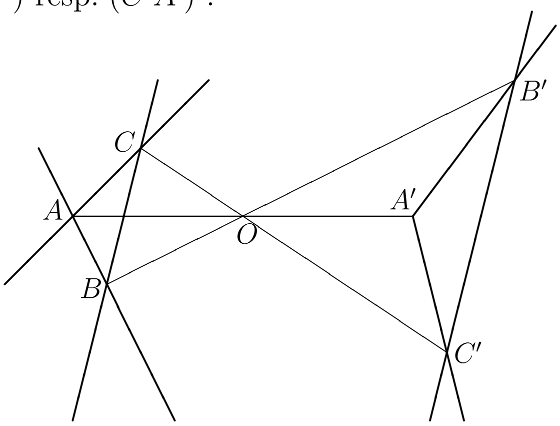
(2) Soient A, A' deux points distincts et soit $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ (resp. $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$) un couple de droites distinctes, sécantes en A (resp. en A'). Si elles sont en perspective depuis un point O (i.e. si $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}'_1$ sont en perspective depuis O, ainsi que $\mathbf{D}_2$ et $\mathbf{D}'_2$), alors le point de concours $A = \mathbf{D}_1 \cap \mathbf{D}_2$ correspond par cette bijection au point de concours $A' = \mathbf{D}'_1 \cap \mathbf{D}'_2$ et donc AOA' sont alignés. Réciproquement, pour tout point O de (AA') distinct de A et A', les couples de droites $(\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2)$ et $(\mathbf{D}'_1, \mathbf{D}'_2)$ sont en perspective depuis O :



Terminologie. — Si $\mathbf{V}$ est un espace projectif de dimension n et N un entier $\geq n+1$, on dit que N points $p_1, \ldots, p_N$ de $\mathbf{V}$ sont *en position générale* si $n+1$ quelconques d'entre eux sont projectivement indépendants.

(3) Soient A, B, C, A', B', C' six points de $\mathbf{P}$ en position générale (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés). Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont alors deux à deux distinctes. Si les trois paires de droites $\big((AB), (A'B')\big)$, $\big((AC), (A'C')\big)$ et $\big((BC), (B'C')\big)$ sont en perspective depuis un point O alors, d'après (2) ci-dessus, O appartient à (AA'), (BB') et (CC'), donc $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes et O.

Réciproquement, on peut montrer (voir le §11.5 et sa note de bas de page) que si $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes, leur point de concours O n'appartient à aucune des droites $(AB), (AC), (CA), (A'B')$, etc. et donc (AB) resp. (BC) resp. CA est en perspective depuis O avec $(A'B')$ resp. $(B'C')$ resp. $(C'A')$:



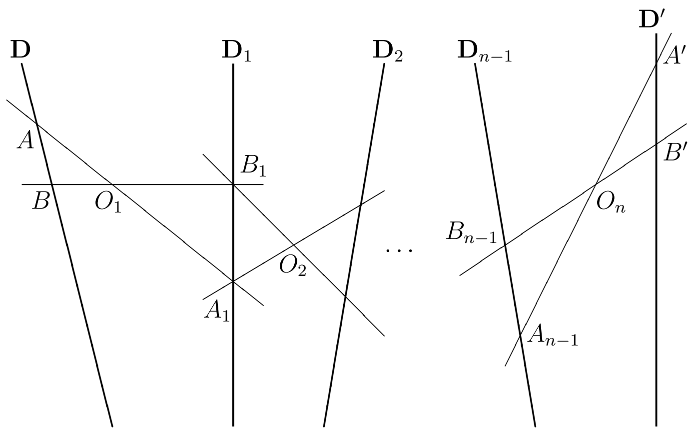
Dans ce cas, au lieu de dire que « les deux triplets de droites $\big((AB), (BC), (CA)\big)$ et $\big((A'B'), (B'C'), (C'A')\big)$ sont en perspective », on dira plus brièvement que : « les deux triangles (ABC) et $(A'B'C')$ » sont en perspective. La condition précédente se récrit donc :

Pour six points A, B, C, A', B', C' en position générale, les triangles (ABC) et $(A'B'C')$ sont en perspective ssi les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

11.2. Perspectivités et projectivités. — Dans le paragraphe précédent, on s'est intéressé à la situation où des figures données sont « en perspective », i.e. dans une certaine position l'une par rapport à l'autre.

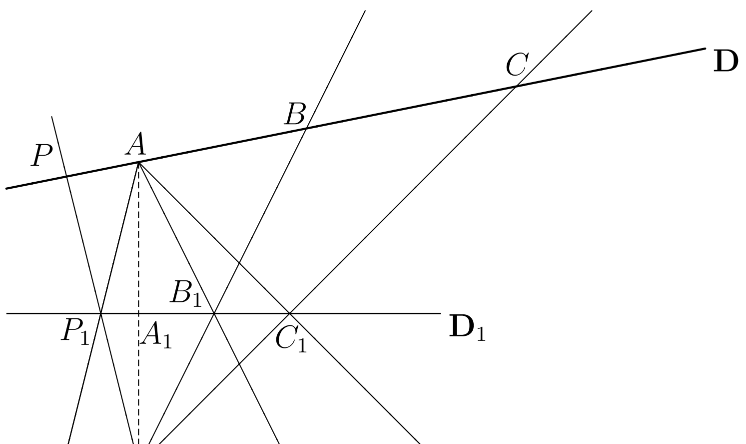
Changeons légèrement de point de vue : fixons un point O, deux droites $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ ne passant pas par O, et considérons *l'application bijective* $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ qui à tout $P \in \mathbf{D}$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$. (Noter que le point de concours E de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ vérifie $E' = E$.) On dira provisoirement que cette application est une *perspectivité*.(4)

D'autre part, Poncelet s'est intéressé à des applications a priori plus générales que les perspectivités, à savoir les composées de perspectivités : si deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ sont reliées par une suite de perspectivités $\mathbf{D} = \mathbf{D}_0 \to \mathbf{D}_1 \to \cdots \to \mathbf{D}_n = \mathbf{D}'$, l'application $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$, $P \mapsto P'$ ainsi obtenue est appelée une *projectivité* de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$:



Tout ceci pose un certain nombre de questions. Une projectivité de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$ est-elle une homographie ? Obtient-on ainsi toutes les homographies de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$? Si oui, est-ce que les perspectivités sont des homographies particulières ?

Remarque. — On verra au paragraphe suivant que toute projectivité est une homographie. La construction ci-dessous montrera alors que toute homographie est une projectivité : Pour deux droites distinctes $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ et trois points distincts A, B, C (resp. A', B', C') sur $\mathbf{D}$ (resp. $\mathbf{D}'$), on peut construire une projectivité entre $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$, composée de seulement deux perspectivités, qui envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement :



(4) « perspectivity » dans [Co, 1.6 et 4.22], à ne pas confondre avec la terminologie « perspective collineation » de [Co, 6.2] qui donne, comme on le verra plus bas, les élations et les homologies.

En effet, notons B_1 (resp. C_1) le point d'intersection des droites (AB') et $(A'B)$ (resp. (AC') et $(A'C)$), puis notons A_1 le point d'intersection de (AA') avec la droite $\mathbf{D}_1 = (B_1C_1)$. Alors la perspectivité de centre A' transforme A, B, C en A_1, B_1, C_1, puis ceux-ci sont transformés en A', B', C' par la perspectivité de centre A.

11.3. Projections centrales et perspectivités. — Revenons sur les perspectivités dans le plan projectif $\mathbf{P}$: la donnée d'un point O et d'une droite $\mathbf{D}'$ ne contenant pas O définit une application $\mathbf{P} - \{O\} \to \mathbf{D}'$, qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours P' de (OP) et $\mathbf{D}'$.[5] Ceci se généralise comme suit.

***Définition 11.1* (Projections centrales).** — Soit V un k-espace vectoriel de dimension $n+1$. Soient E et F deux sev de V non nuls et supplémentaires (i.e. $V = E \oplus F$) et soit π la projection de V sur F de noyau E. Elle induit une application

$$\overline{\pi} : \mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(E) \to \mathbb{P}(F)$$

définie comme suit : pour tout $v \in V - E$, $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)]$. Ceci est bien défini, car comme $v \notin E$ on a $\pi(v) \neq 0$. On dit que $\overline{\pi}$ est la projection sur $\mathbb{P}(F)$ *de centre* $\mathbb{P}(E)$.[6]

***Proposition 11.2*.** — *Conservons les notations précédentes. Pour tout supplémentaire F' de E,[7] la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est une* homographie *de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$.*

Démonstration. — En effet, notons $\pi' : F' \to F$ la restriction de π à F' ; elle est injective (car $F' \cap E = \{0\}$) donc c'est un *isomorphisme* de F' sur F (puisque $\dim(F') = \dim(F)$). De plus, pour tout $v \in \mathbb{P}(F')$ on a : $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [\pi'(v)]$. Ceci montre que la restriction de $\overline{\pi}$ à $\mathbb{P}(F')$ est l'homographie de $\mathbb{P}(F')$ sur $\mathbb{P}(F)$ définie par l'isomorphisme $\pi' : F' \xrightarrow{\sim} F$. □

***Proposition 11.3*.** — *Soient H un hyperplan de V, O un point de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$ et p la projection sur $\mathbb{P}(H)$ de centre O.*

(i) *p est l'application qui à tout point $P \neq O$ associe le point de concours de la droite (OP) et de $\mathbb{P}(H)$.*

(ii) *Les points fixes de p sont les points de $\mathbb{P}(H)$.*

(iii) *Pour tout point P distinct de O et hors de $\mathbb{P}(H)$, les droites $(Pp(P))$ concourent en O.*

Démonstration. — Écrivons $O = [v_0]$ et notons π la projection $V \to H$ de noyau kv_0. Soit $P = [v]$ un point distinct de O, alors v s'écrit de façon unique $v = x + \mu v_0$, avec $\mu \in k$ et $x \in H - \{0\}$, et l'on a $\overline{\pi}([v]) = [\pi(v)] = [x]$.

D'autre part, $W = \mathrm{Vect}(v_0, v)$ est de dimension 2 et non contenu dans H, donc $W \cap H$ est une droite vectorielle Δ. Comme la droite projective (OP) égale $\mathbb{P}(W)$, alors $(OP) \cap \mathbb{P}(H) = \mathbb{P}(W \cap H) = \mathbb{P}(\Delta)$ est le point de $\mathbb{P}(H)$ correspondant à Δ. Enfin, $x = v - \mu v_0$ est un élément non nul de $H \cap W$, donc $\Delta = kx$. Ceci prouve (i).

Un point $P \neq O$ est fixe ssi la droite (OP) coupe $\mathbb{P}(H)$ en P, c.-à-d. ssi $P \in \mathbb{P}(H)$. Ceci prouve (ii). Enfin, (iii) résulte de (i). □

***Définition 11.4* (Perspectivités).** — Soient $O \in \mathbb{P}(V)$ et $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ deux hyperplans projectifs ne contenant pas O. On dira que l'homographie $\mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ induite par la projection sur $\mathbf{H}'$ de centre O est une *perspectivité*.[8] Ceci généralise la définition donnée au §11.2. lorsque $\dim \mathbb{P}(V) = 2$.

---

[5] Noter que cette application n'est pas définie au point O.

[6] Noter que $\overline{\pi}$ n'est pas définie en les points de $\mathbb{P}(E)$.

[7] C.-à-d. pour tout sev F' de V de même dimension que F et tel que $F' \cap E = \{0\}$.

[8] On dit aussi *homologie*, mais nous préférons conserver la terminologie « perspectivité ».

Remarque 11.5. — Plaçons-nous dans un plan projectif $\mathbf{P}$, comme au §11.2. On vient de voir que toute perspectivité est une homographie, donc toute projectivité (= composée de perspectivités) est une homographie. De plus, d'après la Remarque du §11.2, toute homographie $\mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ est une projectivité, composée de seulement deux perspectivités. Celles-ci sont caractérisées par la proposition suivante.

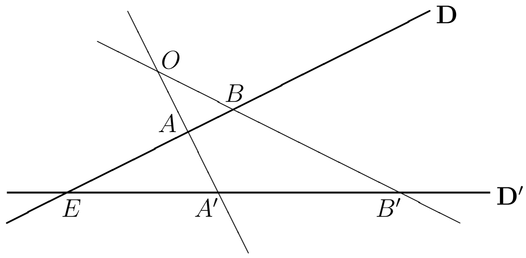
Proposition 11.6. — *Dans un plan projectif* $\mathbf{P}$*, soient* $\mathbf{D}, \mathbf{D}'$ *deux droites distinctes,* E *leur point de concours et* $h : \mathbf{D} \to \mathbf{D}'$ *une homographie. Alors :*

(i) *h est une perspectivité ssi $h(E) = E$.*

(ii) *Dans ce cas, si $A \neq B$ sont des point* $\mathbf{D}$ *distincts de E, le centre de perspectivité est le point de concours des droites $(Ah(A))$ et $(Bh(B))$.*

Démonstration. — On a vu en §11.2 que si h est une perspectivité de centre O alors $h(E) = E$ et pour tout $P \in \mathbf{D}$, d'image $P' \in \mathbf{D}'$, les points O, P, P' sont alignés.

Réciproquement, supposons $h(E) = E$ et soient $A \neq B$ des points de $\mathbf{D}$ distincts de E, et A', B' leurs images par h. Notons O le point de concours des droites (AA') et (BB') :



Alors la perspectivité de centre O laisse fixe E et envoie A, B sur A', B', donc coïncide avec h d'après le Corollaire 10.14 bis. $\square$

Revenons à un espace projectif $\mathbf{V} = \mathbb{P}(V)$ de dimension n. Soient H, H' deux hyperplans de V distincts. Alors $H_1 = H \cap H'$ est un hyperplan de H. Notons $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ et $\mathbf{H}_1$ les sous-espaces projectifs de V correspondants. Si $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ est une perspectivité de centre O, elle laisse fixe tout point de $\mathbf{H}_1$. Réciproquement, ceci caractérise les perspectivités de $\mathbf{H}$ sur $\mathbf{H}'$:

Proposition 11.7. — *Soient* $\mathbf{H}, \mathbf{H}'$ *deux hyperplans distincts de* $\mathbf{V}$*, soit* $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \cap \mathbf{H}'$ *et soit* $h : \mathbf{H} \to \mathbf{H}'$ *une homographie. Alors :*

(i) *h est une perspectivité ssi h est l'identité sur $\mathbf{H}_1$ (i.e. $h(P) = P$ pour tout $P \in \mathbf{H}_1$).*

(ii) *Dans ce cas, pour tout point A de $\mathbf{H} - \mathbf{H}_1$, les droites $(Ah(A))$ sont concourantes en un point O qui est le centre de perspectivité.*

Démonstration. — Soit g l'isomorphisme $H \xrightarrow{\sim} H'$ (unique à homothétie près) tel que $\overline{g} = h$. Supposons que h est l'identité sur $\mathbf{H}_1$. Ceci entraîne qu'il existe $\lambda \in k^\times$ tel que $g(v) = \lambda v$ pour tout $v \in H_1$ et, quitte à remplacer g par $\lambda^{-1} g$, on peut supposer que $\lambda = 1$.

Fixons un vecteur $e \in H - H_1$ et posons $v_0 = g(e) - e$. On a $v_0 \notin H'$ car sinon on aurait $e \in H'$ et comme $H = H_1 \oplus ke$ on aurait $H \subset H'$, ce qui n'est pas le cas. (De même, $v_0 \notin H$.) On a donc $V = H' \oplus kv_0$, notons alors π la projection sur H' de noyau kv_0.

Soit $v \in H$, écrivons $v = x + \mu e$ avec $x \in H_1$ et $\mu \in k$, alors on a $v = x + \mu g(e) + \mu v_0$ donc $g(v) = x + \mu g(e)$ égale $\pi(v)$. Ceci montre que h est la projection sur $\mathbb{P}(H')$ de centre $O = [v_0]$. Ceci prouve (i), et alors (ii) découle de la Prop. 11.3. $\square$

11.4. Homographies de $\mathbb{P}(V)$ laissant stable un hyperplan. — Le but de ce paragraphe est de démontrer le théorème ci-dessous. Commençons par la :

Notation 11.8. — Soit $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$ un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Ceci équivaut à dire que $g(H) \subset H$ et donc $g(H) = H$ (puisque $g(H)$ et H ont même dimension), d'où $\overline{g}(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ et donc $\overline{g}$ induit une bijection de l'ouvert affine $U = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$ sur lui-même, qu'on notera $\overline{g}_U$.

D'autre part, on rappelle que l'on note $\mathrm{GA}(U)$ le groupe des automorphismes de l'espace affine U (i.e. applications affines $U \to U$ bijectives).

Théorème 11.9. — *Soient $\mathbf{H}$ un hyperplan de $\mathbb{P}(V)$ et U l'ouvert affine $\mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$. Notons $G_{\mathbf{H}}$ le sous-groupe de $\mathrm{PGL}(V)$ formé des $\overline{g}$ tels que $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. Alors :*

(i) *Pour tout $\overline{g} \in G_{\mathbf{H}}$, la bijection $\overline{g}_U : U \to U$ est une application* affine.

(ii) *L'application $\overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ est un isomorphisme de groupes $G_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GA}(U)$.*

La démonstration de ce théorème repose sur quelques résultats d'algèbre linéaire et de théorie des groupes. En 1ère lecture, on pourra sauter cette démonstration et passer directement au § suivant, pour des applications géométriques de la correspondance entre « homographies fixant un hyperplan (à l'infini) $\mathbf{H}$ » et « automorphismes de l'espace affine $\mathscr{H} = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$ ».

Définition 11.10 **(Produits semi-directs)**. — (1) Soient H un groupe, G et N deux sous-groupes, N étant *distingué* dans H. On dit que H est le *produit semi-direct* de N par G, et l'on note $H = N \rtimes G$, si tout $h \in H$ s'écrit de façon unique $h = ng$, avec $n \in N$ et $g \in G$, i.e. si l'application $N \times G \to H$, $(n, g) \mapsto ng$ est bijective. **Attention**, cette application n'est **pas** un morphisme de groupes en général : le produit de ng et de $n'g'$ est donné par : $(ng)(n'g') = n(gn'g^{-1})\, gg'$ (noter que $gn'g^{-1} \in N$ puisque N est distingué).[9]

(1 bis) Remarquons que l'application $G \times N \to N$, $(g, n) \mapsto gng^{-1}$ est une action à gauche de G sur N. Cette action est compatible à la structure de groupe de N, i.e. pour tout $n, n' \in N$ et $g \in G$, on a :

$$g(nn')g^{-1} = (gng^{-1})(gn'g^{-1}).$$

Notant $\mathscr{S}(N)$ le groupe de toutes les bijections $N \to N$, on peut exprimer ceci en disant que le morphisme de groupes $G \to \mathscr{S}(N)$ donné par l'action, est à valeurs dans le sous-groupe $\mathrm{Aut}(N)$ de $\mathscr{S}(N)$ formé des automorphismes de groupe.

(2) On peut alors reformuler la définition de façon plus abstraite (mais plus souple). Soient G, N deux groupes ; on dit que G agit sur N « par automorphismes de groupe » si l'on s'est donné un morphisme de groupes $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(N)$. On peut alors former le *produit semi-direct* de N par G (relativement à l'action φ), noté $N \rtimes_\varphi G$ (ou simplement $N \rtimes G$), en déclarant que c'est l'ensemble produit $N \times G$ muni de la loi de groupe ainsi définie :

$$(n, g) \cdot (n', g') = \big(n\varphi(g)(n'), gg'\big).\ ^{(10)}$$

Dans le cas particulier où l'action de G sur N est *triviale*[11] le groupe obtenu est noté $N \times G$ et appelé le *produit direct* de N et G : c'est l'ensemble produit $N \times G$ muni de la loi de groupe $(n, g) \cdot (n', g') = (nn', gg')$.

(3) Dans la situation de (1), lorsque N et G sont des sous-groupes d'un groupe H dans lequel N est distingué, l'action φ est la conjugaison : $\varphi(g)(n) = gng^{-1}$. En fait, la situation (2) n'est pas plus générale que (1), car posant $H = N \rtimes_\varphi G$ et notant e_N (resp. e_G) l'élément neutre de N (resp. G), le groupe N (resp. G) s'identifie au sous-groupe $\{(n, e_G) \mid n \in N\}$ (resp. $\{(e_N, g) \mid g \in G\}$) de H, et alors pour tout $n \in N$ et $g \in G$ on a :

$$gng^{-1} = (e_N, g)(n, e_G)(e_N, g^{-1}) = (e_N, g)(n, g^{-1}) = (\varphi(g)(n), e_G) = \varphi(g)(n),$$

i.e. l'action donnée φ de G sur N devient dans $H = N \rtimes_\varphi G$ l'action par conjugaison de G sur le sous-groupe distingué N.

(4) Si $H = N \rtimes G$, alors le groupe quotient H/N est isomorphe à G.

---

[9] Tout $h \in H$ s'écrit aussi de façon unique gn', avec $g \in G$ et $n' \in N$, puisque $ng = g(g^{-1}ng)$.

[10] On laisse au lecteur le soin de vérifier que ceci est bien une loi de groupe.

[11] Si G est un groupe et X un ensemble, l'action *triviale* de G sur X est donnée par $g \cdot x = x$ pour tout $g \in G$ et $x \in X$.

Proposition 11.11. — *Soient $(\mathscr{E}, E)$ un espace affine,* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *le groupe affine de* $\mathscr{E}$ *et* T *le sous-groupe des translations (isomorphe à* E*). Pour tout* $O \in \mathscr{E}$ *on a :*

(i) *Le sous-groupe* $G_O = \{g \in \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \mid g(O) = O\}$ *est isomorphe à* $\mathrm{GL}(E)$ *via le morphisme* $f \mapsto \overrightarrow{f}$.

(ii) $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ *est le produit semi-direct de* T *et de* G_O *et la projection* $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \to \mathrm{GA}(\mathscr{E})/T$ *s'identifie à* $f \mapsto \overrightarrow{f}$ *via les isomorphismes* $\mathrm{GA}(\mathscr{E})/T \simeq G_O \simeq \mathrm{GL}(E)$.

(iii) *On peut résumer ceci en écrivant :* $\mathrm{GA}(\mathscr{E}) \simeq T \rtimes \mathrm{GL}(E) \simeq E \rtimes \mathrm{GL}(E)$.

Démonstration. — D'abord, la bijection $E \to T$, $u \mapsto t_u$ est un isomorphisme de groupes, puisque $t_u \circ t_v = t_{u+v}$ pour tout $u, v \in E$. D'autre part, T est un sous-groupe distingué de $\mathrm{GA}(\mathscr{E})$ car, pour tout $g \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, $u \in E$ et $A \in \mathscr{E}$, on a :

$$(g \circ t_u \circ g^{-1})(A) = g(g^{-1}(A) + u) = A + \overrightarrow{g}(u),$$

ce qui montre que $g \circ t_u \circ g^{-1} = t_{\overrightarrow{g}(u)}$.

Fixons $O \in \mathscr{E}$. Alors l'application $G_O \to \mathrm{GL}(E)$, $f \mapsto \overrightarrow{f}$ est un isomorphisme de groupes, sa réciproque étant le morphisme qui à tout $\phi \in \mathrm{GL}(E)$ associe l'application affine $M \mapsto O + \phi(\overrightarrow{OM})$. Ceci prouve (i).

De plus, pour tout $h \in \mathrm{GA}(\mathscr{E})$, l'application affine $t_{\overrightarrow{h(O)O}} \circ h$ appartient à G_O et l'on obtient ainsi des bijections réciproques :

$$\begin{array}{ccc} T \times G_O & \longrightarrow & \mathrm{GA}(\mathscr{E}) \\ (t_u, g) & \mapsto & t_u \circ g \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{GA}(\mathscr{E}) & \longrightarrow & T \times G_O \\ h & \mapsto & \big(t_{\overrightarrow{Oh(O)}},\ t_{\overrightarrow{h(O)O}} \circ h\big). \end{array}$$

□

On peut maintenant démontrer le Théorème 11.9, dont on rappelle l'énoncé :

Théorème (11.9). — *Soient* $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$ *un hyperplan de* $\mathbb{P}(V)$ *et* U *l'ouvert affine* $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(H)$. *Soit* $G_{\mathbf{H}}$ *le sous-groupe de* $\mathrm{PGL}(V)$ *formé des* $\overline{g}$ *tels que* $\overline{g}(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$. *Alors :*

(i) *Pour tout* $\overline{g} \in G_{\mathbf{H}}$, *la bijection* $\overline{g}_U : U \to U$ *est une application* affine.

(ii) *L'application* $\overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ *est un isomorphisme de groupes* $G_{\mathbf{H}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{GA}(U)$.

Démonstration. — Soit $f \in V^*$ une forme linéaire telle que $H = \mathrm{Ker}(f)$. Soit $(e_0, \dots, e_{n-1})$ une base de H et soit $e_n \in V$ tel que $f(e_n) = 1$; alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base de V. Alors un élément $h \in \mathrm{PGL}(V)$ vérifie $h(\mathbf{H}) = \mathbf{H}$ ssi h est l'image dans $\mathrm{PGL}(V)$ d'un (unique) élément $g \in \mathrm{GL}(V)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est de la forme :

$$(*) \qquad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g) = \left(\begin{array}{c|c} & a_1 \\ A & \vdots \\ & a_n \\ \hline 0 \cdots 0 & 1 \end{array}\right)$$

où $A \in \mathrm{GL}_n(k)$ et $a_i \in k$. (Les éléments qui ont pour image h sont les λg, pour $\lambda \in k^\times$, et parmi eux g est déterminé par la condition que le coefficient dans le coin inférieur droit de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(g)$ vaut 1, autrement dit que $g(e_n) - e_n \in H$.) Notons G_1 l'ensemble des matrices de cette forme, on voit facilement que c'est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_{n+1}(k)$. On obtient donc que l'application $G_1 \to G_{\mathbf{H}}$, $g \mapsto \overline{g}$ est un *isomorphisme* de groupes.

D'autre part, identifions U à l'hyperplan affine $\mathscr{H} = \{v \in V \mid f(v) = 1\} = e_n + H$. Alors, pour tout $g \in G_1$ et $v \in \mathscr{H}$, on a $g(v) \in \mathscr{H}$ [12] et donc $\overline{g}_U([v]) = [g(v)]$ s'identifie

[12] On peut montrer que la réciproque est vraie, i.e. si $g \in \mathrm{GL}(V)$ vérifie $g(\mathscr{H}) \subset \mathscr{H}$ alors $g \in G_1$.

à $g(v)$ via l'identification $U = \mathscr{H}$. Par conséquent, pour tout $x \in H$ et $g \in G_1$ comme en $(*)$ ci-dessus, on a :

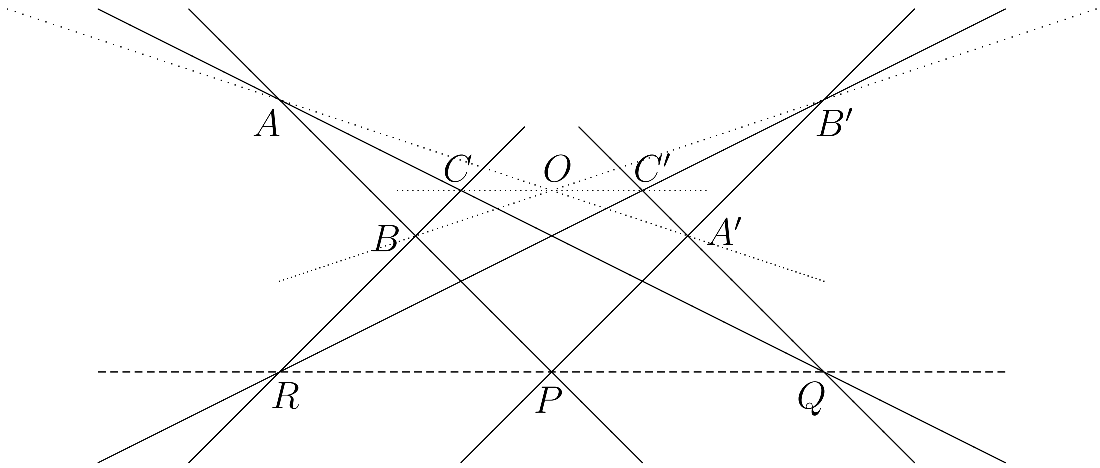
$$\overline{g}_U(e_n + x) = g(e_n + x) = g(e_n) + Ax = e_n + Ax + u,$$

où u désigne le vecteur $\sum_{i=1}^n a_i e_i = g(e_n) - e_n \in H$. Ceci montre que $\overline{g}_U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ est une application affine, dont la partie linéaire est l'application $H \to H$, $x \mapsto Ax$.

Donc l'application de restriction $r_U : \overline{g} \mapsto \overline{g}_U$ est un morphisme de groupes de $G_{\mathbf{H}}$ dans $\mathrm{GA}(\mathscr{H})$, et r_U est surjective car $A \in \mathrm{GL}(H)$ et $u \in H$ pouvant être choisis arbitrairement, on obtient ainsi tous les éléments de $\mathrm{GA}(\mathscr{H})$, d'après la proposition 11.11. Enfin, r_U est injective, car si $r_U(g) = \mathrm{id}_{\mathscr{H}}$ alors, prenant $x = 0$ on obtient $u = 0$, puis l'égalité $Ax = x$ pour tout $x \in H$ donne que $A = \mathrm{id}_H$, d'où $g = \mathrm{id}_V$. Le théorème est démontré. $\square$

11.5. Homologies et élations de $\mathbb{P}(V)$. — Intéressons-nous maintenant à quelques homographies d'un espace projectif $\mathbb{P}(V)$ dans lui-même. (On en verra d'autres au paragraphe suivant.)

Commençons par le cas d'un plan projectif et considérons la configuration de Desargues :



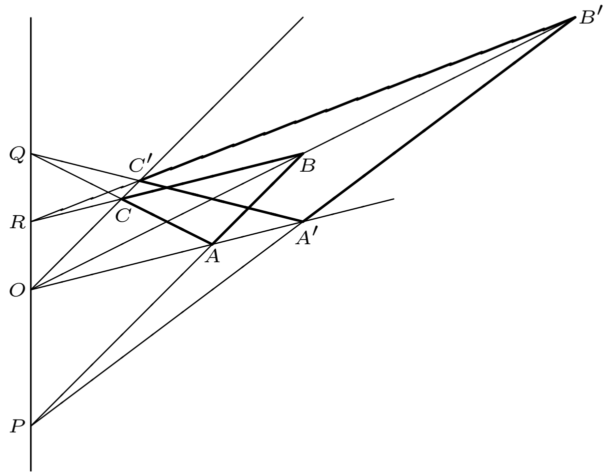
Supposons que, comme sur le dessin, O soit distinct des six points A, B, C, A', B', C'.[13] Alors O n'appartient pas à la droite (AB) : sinon A' et B' appartiendraient à la droite $(AO) = (AB) = (OB)$ donc on aurait $(AA') = (BB')$, contrairement à l'hypothèse. De même, O n'appartient à aucune des droites $(AB), (BC), (CA), (A'B')$, etc. donc (O, A, B, C) forme un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$, de même que (O, A', B', C'). Donc il existe une unique homographie h de $\mathbf{P}$ qui fixe O et envoie A, B, C sur A', B', C' respectivement.

Elle échange donc les droites (AB) et $(A'B')$ donc laisse fixe leur point de concours P. Pour la même raison, elle laisse fixe Q et R. Comme elle fixe trois points distincts de la droite projective $\mathscr{D} = (PQR)$, elle fixe donc chaque point de cette droite. Prenant celle-ci comme droite à l'infini, et posant $U = \mathbf{P} - \mathscr{D}$, étudions l'application affine $h_U : U \to U$ induite par h. Comme on a envoyé P, Q, et R à l'infini, les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, ainsi que (AC) et $(A'C')$ d'une part, et (BC) et $(B'C')$ d'autre part. D'après la démonstration du théorème de Desargues affine, on voit que l'on est dans l'un des deux cas suivants :

[13] On pourrait avoir, par exemple, $O = A$; dans ce cas B', C' appartiennent respectivement à (AB) et (AC), d'où $B' = P$ et $C' = Q$. Alors $(PQ) = (B'C')$ est soit parallèle à (BC), soit la coupe en un point R, et P, Q, R sont alignés. Quant à A' il est arbitraire et les droites (AA'), $(BB') = (AB')$ et $(CC') = (AC')$ sont concourantes en $A = O$. Noter que comme A, B, B' sont alignés, ceci ne peut pas se produire si l'on suppose que A, B, C, A', B', C' sont en position générale, cf. §11.1 (3).

a) Si $O \notin \mathscr{D}$ (comme sur le dessin ci-dessus), alors le repère affine (A', B', C') se déduit de (A, B, C) par une *homothétie de centre O* (de rapport $\neq 1$), donc h_U coïncide avec cette homothétie. Dans ce cas, on dira que h est une *homologie*.

b) Si $O \in \mathscr{D}$, alors le repère affine (A', B', C') se déduit de (A, B, C) par une *translation*, donc h_U coïncide avec cette translation. Dans ce cas, on dira que h est une *élation* :



Définition et proposition 11.12. — *Soit g une homographie de $\mathbb{P}(V)$ qui* fixe chaque point *d'un hyperplan $\mathbf{H} = \mathbb{P}(H)$. Posons $U = \mathbb{P}(V) - \mathbf{H}$. Alors, on est dans l'une des situations suivantes :*

a) *L'application affine g_U est une homothétie* (*de rapport $\neq 1$*), *donc possède un unique point fixe O dans U. Dans ce cas, on dit que g est une* homologie *et ses points fixes sont les points de $\mathbf{H}$ et O.*

b) *L'application affine g_U est une translation. Dans ce cas, on dit que g est une* élation. *Si g_U est distincte de id_U (i.e. si $g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}$) alors g_U n'a aucun point fixe donc les points fixes de g sont exactement les points de $\mathbf{H}$.*

Démonstration. — Comme $g(\mathbf{H}) \subset \mathbf{H}$ on est dans la situation du théorème 11.9. L'hypothèse supplémentaire que g soit l'identité sur $\mathbf{H}$ entraîne que la matrice A de 11.9 $(*)$ est une homothétie $\lambda\,\mathrm{id}_H$. De plus, la démonstration de 11.9 montre que A est la partie linéaire de l'application affine g_U. Si $\lambda \neq 1$ alors g_U est une « vraie » homothétie et possède un point fixe unique, d'où (i). Et si $\lambda = 1$ alors g_U est une translation et (ii) en découle. □

11.6. Involutions d'une droite projective. — Dans ce paragraphe, on suppose que $\mathrm{car}(k) \neq 2$ et l'on se place dans un plan projectif $\mathbf{P}$.

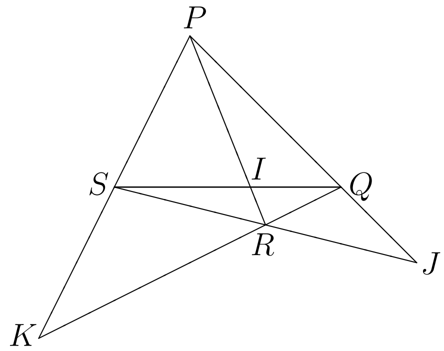
Les objectifs principaux de ce paragraphe sont : le Th. 11.18 et son corollaire, la Prop. 11.23 et les points (i), (ii), (ii) du Th. 11.24. Pour ajouter un contenu plus « géométrique » à ces résultats, on a ajouté des définitions ou énoncés géométriques (Déf. 11.13, 11.15, 11.16, Prop. 11.21),(14) en suivant à nouveau l'excellente présentation de Coxeter [Co, 2.4 et 5.3].(15) En première lecture, on pourra se concentrer sur les résultats principaux sus-mentionnés, et revenir plus tard sur les énoncés géométriques.

Définition 11.13. — Un *quadrangle complet* dans $\mathbf{P}$ est la donnée de quatre points P, Q, R, S formant un repère projectif (i.e. trois d'entre eux ne sont jamais alignés), appelés les *sommets*, et des $\binom{4}{2} = 6$ droites qui les joignent, appelées les *côtés* (cf. la figure suivante).

Deux côtés qui ne se coupent pas en un sommet sont dits *opposés* ; les trois paires de côtés opposés se coupent en trois points supplémentaires I, J, K, appelés les points *diagonaux*.

(14)Qui remontent probablement à Desargues, vers 1640.

(15)Sauf pour le lemme 11.14, tiré de [Gr, Ch. VII, p. 171], qui est pris comme axiome dans [Co, 2.17].



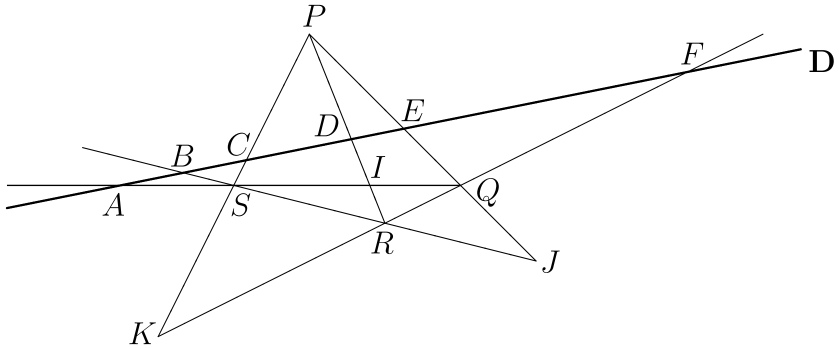
Lemme 11.14. — *Les points diagonaux I, J, K ne sont pas alignés.* [16]

Démonstration. — Les points P, Q, R, S définissent un repère projectif dans lequel leurs coordonnées homogènes sont $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$ et $[1,1,1]$. Alors la droite (PQ) (resp. (RS)) a pour équation $z = 0$ (resp. $x = y$), donc $K = [1,1,0]$. On obtient de même que $J = [0,1,1]$ et $I = [1,0,1]$. On a

$$\text{dét}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 0 \qquad (\text{car } \operatorname{car}(k) \neq 2)$$

donc I, J, K ne sont pas alignés. □

Définition 11.15. — Soit **D** une droite projective de **P**. On dit que trois paires de points $\{A, D\}$, $\{B, E\}$ et $\{C, F\}$ de **D** sont *en involution* si ce sont les points d'intersection avec **D** des trois paires de côtés opposés d'un quadrangle complet $(PQRS)$:



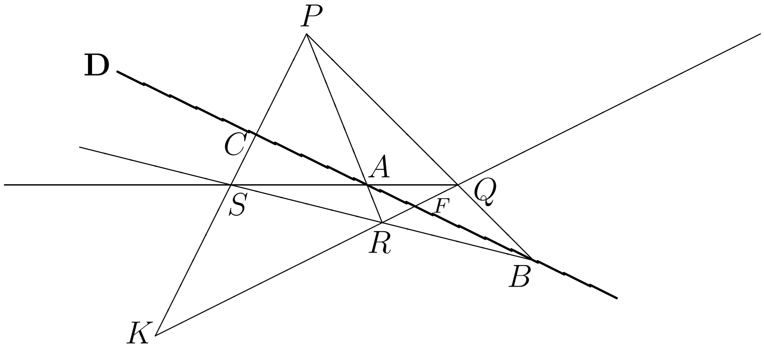
On a dessiné ci-dessus le cas « général » où les six points sont distincts. Si **D** passe par un point diagonal M, la paire correspondante est « dégénérée » : ses deux points coïncident avec M ; par exemple si **D** passe par I alors $A = D = I$. Et si **D** passe par deux points diagonaux, il y a deux paires dégénérées : par exemple si **D** passe par I et J alors $A = D = I$ et $B = E = J$; [17] ce cas particulier donne la définition suivante.

Définition 11.16. — Soit **D** une droite projective de **P**. On dit que quatre points A, B, C, F dans cet ordre sont *en division harmonique* si les paires $\{A, A\}$, $\{B, B\}$ et $\{C, F\}$ sont en involution, i.e. si A, B sont deux points diagonaux d'un quadrangle complet et C, F sont les points d'intersection de **D** avec la dernière paire de côtés opposés :

---

[16] A fortiori, ils sont deux à deux distincts.

[17] D'après le lemme précédent, **D** ne peut pas passer par les trois points diagonaux, puisqu'ils ne sont pas alignés.



Les définitions précédentes soulèvent les questions suivantes : s'agit-il de propriétés intrinsèques des points $A, \ldots, F$ de la droite $\mathbf{D}$? C.-à-d., est-ce indépendant du plongement de $\mathbf{D}$ dans le plan $\mathbf{P}$ et du choix du quadrangle complet ? On va voir que oui.

Terminologie 11.17. — Comme expliqué par Coxeter [Co, p.45], le mot « involution » a été introduit en mathématiques vers 1640 par Desargues, sous la forme de « paires de points en involution ». Plus tard, von Staudt [18] a relié cela à une propriété de l'homographie h qui échange les points de ces paires : $h \circ h$ est l'identité !

Depuis, on dit qu'une application f d'un ensemble X dans lui-même est une *involution* (ou une application *involutive*) si elle vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_X$. Ceci équivaut à dire que f est bijective et que $f^{-1} = f$.

Dans la suite, on va s'intéresser aux **homographies** de $\mathbb{P}(V)$ qui sont *involutives*. Conformément à l'usage (cf. [Co], [Gr], [Sa]), on dira simplement une **involution** de $\mathbb{P}(V)$.[19]

Théorème 11.18. — *Soient $\mathbf{D}$ une droite projective et $\{A, D\}$ et $\{B, E\}$ deux paires disjointes de points de $\mathbf{D}$, avec $A \neq D$.*

(i) *Il existe une (unique) homographie h de $\mathbf{D}$ qui échange A et D d'une part, et B et E d'autre part.*

(ii) *h est une involution.*

Démonstration. — Posons $\mathbf{D} = \mathbb{P}(V)$, où $\dim(V) = 2$. Comme A, D, B sont deux à deux distincts, ils forment un repère projectif. Il existe donc une base (e_1, e_2) de V telle que $[e_1] = A$, $[e_2] = D$ et $[e_1 + e_2] = B$. Comme E est distinct de A et B, alors $E = [ae_1 + be_2]$ pour certains $a, b \in k^\times$.

On cherche une matrice $g \in \mathrm{GL}_2(k)$ qui échange A et D d'une part, et D et E d'autre part. La première condition signifie que g envoie e_1 sur λe_2 et e_2 sur μe_1, pour certains $\lambda, \mu \in k^\times$, i.e. que g est de la forme $g = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Remarquons déjà que $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ est une homothétie, donc l'homographie $h = \overline{g}$ est une involution $\big($car $\overline{g}^2 = \overline{g^2} = \mathrm{id}_{\mathbb{P}(V)}\big)$. Ceci prouve (ii).

D'autre part, on veut que $g(e_1 + e_2) = \mu e_1 + \lambda e_2$ soit colinéaire à $ae_1 + be_2$, ce qui équivaut à $b\mu = a\lambda$. Posant $\nu = \lambda/b = \mu/a$, on a donc $\lambda = b\nu$ et $\mu = a\nu$, d'où :

$$g = \begin{pmatrix} 0 & a\nu \\ b\nu & 0 \end{pmatrix} = \nu \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}.$$

Ceci montre que g est unique à homothétie près, d'où (i). Le théorème est démontré. □

[18] Karl Georg Christian von Staudt, mathématicien allemand, 1798-1867.

[19] Attention, il existe des bijections involutives de $\mathbb{P}(V)$ qui ne sont *pas* des homographies donc ce raccourci est un abus de langage. Il faut garder présent à l'esprit qu'on ne s'intéresse qu'à des homographies !

***Corollaire 11.19* (de la démonstration).** — *Soit h une homographie d'une droite projective* $\mathbf{D}$.

(i) *Si h échange deux points distincts A et B, c'est une involution.*

(ii) *Si h est une involution, une paire de points $\{B, E\}$ est dite une* « paire de h » *si h échange B et E. On dit que la paire est dégénérée si $B = E$ est un point fixe de h.*

(iii) *Toute involution h est déterminée par deux quelconques de ses paires $\{A, D\}$ et $\{B, E\}$, pourvu que l'une au moins soit non dégénérée.*

Démonstration. — On a vu dans la démonstration du théorème 11.18 que si $h = \overline{g}$ échange A et B alors la matrice de g dans une base appropriée est $\begin{pmatrix} 0 & \mu \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}$ et donc $g^2 = \begin{pmatrix} \lambda\mu & 0 \\ 0 & \lambda\mu \end{pmatrix}$ est une homothétie. Ceci prouve (i). Et (iii) résulte de l'unicité établie dans le théorème 11.18. □

Notation 11.20. — Dans un plan projectif, soient $A, B, C, D, \ldots$ (resp. $I, J, K, L, \ldots$) des points alignés et pas tous égaux, et soit O un point hors des droites $\mathbf{D} = (ABCD)$ et $\mathbf{D}' = (IJKL)$. On écrira :

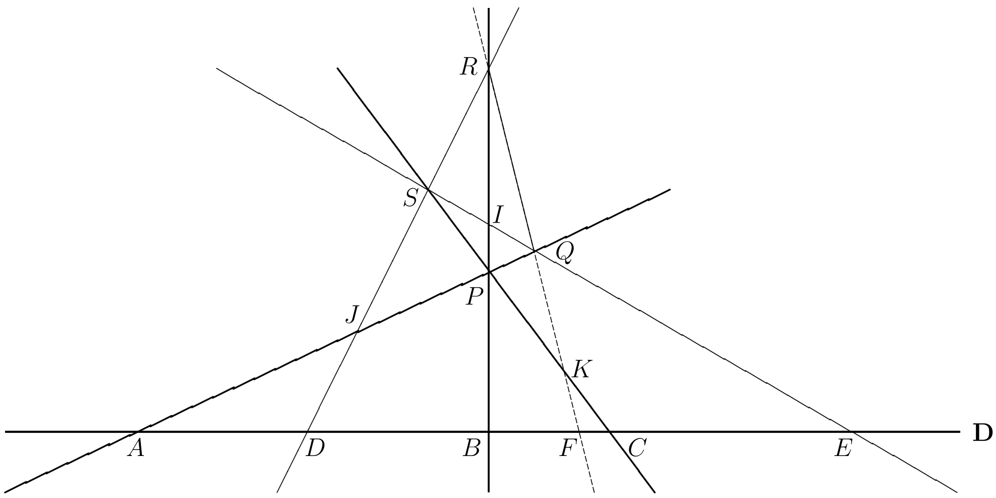
$$ABCD \xrightarrow{O} IJKL$$

pour indiquer que la perspectivité de $\mathbf{D}$ sur $\mathbf{D}'$ de centre O envoie A sur I, B sur J, etc. De même, lorsque $\mathbf{D} = \mathbf{D}'$ et que h est une homographie de $\mathbf{D}$, on écrira :

$$h : ABCD \longrightarrow IJKL$$

pour indiquer que h envoie A sur I, B sur J, etc.

Considérons maintenant trois ensembles $\{A, D\}$, $\{B, E\}$ et $\{C\}$ de points de $\mathbf{D}$, deux à deux disjoints. Plongeons $\mathbf{D}$ dans un plan projectif et choisissons un point P hors de $\mathbf{D}$. Alors les droites $(PA), (PB), (PC)$ sont deux à deux distinctes. Choisissons sur la droite (PA) un point Q distinct de P et A, et notons S le point de concours des droites (QE) et (PC), puis R celui de (DS) et de (PB) :



Montrons que les points P, Q, R, S forment un repère projectif : il faut montrer que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Or les trois droites $(PQ), (PR), (PS)$ (resp. $(SP), (SQ), (SR)$) coupent $\mathbf{D}$ en trois points distincts : A, B, C (resp. C, E, D), donc P (resp. S) ne peut être aligné avec deux autres de ces points. Ceci montre que P, Q, R, S forment un repère projectif.

On obtient donc un quadrangle complet $PQRS$, tel que A, D (resp. B, E) sont les points d'intersection de $\mathbf{D}$ avec la paire de côtés opposés (PQ) et (RS) (resp. (PR) et (QS)). Enfin, la droite (RQ) coupe $\mathbf{D}$ (resp. (SP)) en un point F (resp. K).

Remarquons que A et D (resp. B et E) coïncident ssi ils coïncident avec le point diagonal J (resp. I). Par conséquent, si $A = D = J$ et $B = E = I$, alors $C \neq F$ car sinon on aurait $C = F = K$ et les trois points diagonaux appartiendraient à $\mathbf{D}$, contredisant le lemme 11.14.

Ce qui précède montre que toute donnée de « deux paires et demie » $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C\}$ se complète en « trois paires en involution » $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ au sens de la définition 11.15. Montrons de plus que F est uniquement déterminé.

Considérant la perspectivité p_1 de $\mathbf{D}$ sur (SPC) de centre Q, puis la perspectivité p_2 de (SPC) sur $\mathbf{D}$ de centre R, on a :

$$AECF \xrightarrow{Q} PSCK \xrightarrow{R} BDCF$$

donc $h = p_2 \circ p_1$ vérifie $h(A) = B$, $h(E) = D$, $h(C) = C$ et $h(F) = F$. Comme A, E, C sont deux à deux distincts, les trois premières égalités déterminent h. Montrons que la dernière détermine F.

Supposons que $M \in \mathbf{D} - \{C\}$ soit un point fixe de h et posons $M' = p_1(M)$, alors M, Q, M' sont alignés, ainsi que M', R, M (puisque $M = p_2(M')$). Donc $M' \in (MQ) \cap (MR)$ et comme $M' \neq M$ (car $M \neq C$), les droites (MQ) et (MR) ont en commun les deux points M et M', donc sont égales, donc M, R, Q sont alignés et donc $M = \mathbf{D} \cap (QR) = F$. Ceci montre que F est uniquement déterminé : si $\mathbf{D}$ et (QR) se coupent en C, alors C est l'unique point fixe de h et $F = C$. Si $\mathbf{D}$ et (QR) se coupent en un point $F \neq C$, alors C et F sont les deux seuls points fixes de h (car une homographie de $\mathbf{D}$ ayant 3 points fixes est l'identité ; or $h \neq \mathrm{id}$ car $h(A) = B \neq A$.)

Proposition 11.21. — *Soient $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ trois paires disjointes de points de $\mathbf{D}$, dont l'une au moins est non dégénérée. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Ce sont les paires de points d'intersection de $\mathbf{D}$ avec les paires de côtés opposés d'un quadrangle complet.*

(ii) *Il existe une homographie h_3 de $\mathbf{D}$ telle que $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$.*

(iii) *Il existe une homographie h_2 de $\mathbf{D}$ telle que $h_2 : AFBE \longrightarrow CDBE$.*

(iv) *Il existe une homographie h_1 de $\mathbf{D}$ telle que $h_1 : BFAD \longrightarrow CEAD$.*

(v) *Il existe une homographie s de $\mathbf{D}$ qui échange A, D ainsi que B, E et C, F, et s est une involution.*

Démonstration. — Comme A, E, C sont deux à deux distincts, il existe une unique homographie h de $\mathbf{D}$ telle que $h : AEC \to BDC$.

D'autre part, dans ce qui précède, on a construit à partir de A, B, C, D, E un quadrangle complet $PQRS$ dont les paires de côtés opposés coupent $\mathbf{D}$ en les paires de points $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ et l'on a montré que F est caractérisé par la propriété que $h(F) = F$. L'équivalence de (i) et (ii) en découle. D'autre part, comme les trois paires $\{A, D\}$, $\{B, E\}$, $\{C, F\}$ jouent des rôles symétriques, on a l'équivalence de (ii), (iii) et (iv).

Montrons que l'existence de s équivaut à celle d'une des h_i. Supposons par exemple que $C \neq F$. D'après le théorème 11.18, il existe une involution g de $\mathbf{D}$ qui échange B, D et C, F. Donc, si $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$ est donnée, alors $s = g \circ h_3$ vérifie

$$s : AECF \longrightarrow DBFC$$

et comme s échange C, F qui sont distincts, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19, donc elle échange aussi A, D et E, B.

Réciproquement, si s est donnée, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19, et $h_3 = g^{-1} \circ s = g \circ s$ vérifie $h_3 : AECF \longrightarrow BDCF$. La proposition est démontrée. $\square$

Remarques 11.22. — (1) Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ et $[v] \in \mathbb{P}(V)$. Alors : $[v]$ est un point fixe de $\overline{g} \Leftrightarrow [g(v)] = [v] \Leftrightarrow v$ est un vecteur propre de g.

(2) Donc, si $\dim(V) = 2$ alors $\overline{g}$ a deux points fixes p_1 et $p_2 \Leftrightarrow g$ est diagonalisable.

Dans la suite, on suppose que $\dim(V) = 2$ et l'on note $\mathbf{D}$ la droite projective $\mathbb{P}(V)$.

Proposition 11.23. — *Soit $g \in \mathrm{GL}(V)$ tel que $h = \overline{g}$ soit $\neq \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ et ait deux points fixes $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$. Notons μ_1 et μ_2 les valeurs propres correspondantes de g. Alors :*

(i) *Le rapport μ_1/μ_2 ne dépend que de h, on le notera $\rho(h)$.*

(ii) *h est une involution (distincte de $\mathrm{id}_{\mathbf{D}}$) ssi $\rho(h) = -1$.*

(iii) *Pour tout $m \in \mathbf{D}$ distinct de p_1 et p_2, le birapport $[p_1, p_2, m, h(m)]$ est égal à $\rho(h)$.*

Démonstration. — Remarquons d'abord que comme g est inversible, ses valeurs propres sont $\neq 0$, donc on peut former le quotient μ_1/μ_2. De plus, pour tout $\lambda \in k^\times$, les valeurs propres de λg sont $\lambda\mu_1$ et $\lambda\mu_2$, donc le rapport est inchangé. Ceci prouve (i).

Prenons $\mathscr{B} = (v_1, v_2)$ comme base de V. Alors g s'identifie à la matrice $\begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}$. (Notons que $\mu_1 \neq \mu_2$ car l'hypothèse $h \neq \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$ équivaut à dire que g n'est pas une homothétie.) On a donc $g^2 = \begin{pmatrix} \mu_1^2 & 0 \\ 0 & \mu_2^2 \end{pmatrix}$, d'où les équivalences : h est une involution $\Leftrightarrow g^2$ est une homothétie $\Leftrightarrow \mu_1^2 = \mu_2^2 \Leftrightarrow \mu_1 = -\mu_2$ (la dernière équivalence résultant du fait que $\mu_1 = \mu_2$ est exclu). Ceci montre que h est une involution (distincte de $\mathrm{id}_{\mathbf{D}}$) ssi $\rho(h) = -1$, d'où (ii).

Prouvons (iii). Rappelons que l'on prend $[1, 0]$ comme point à l'infini ∞ et que la droite affine $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\} = \{[x, 1] \in \mathbf{D} \mid x \in k\}$ s'identifie au corps k via l'identification de $[x, 1]$ avec x. Comme m est distinct de p_1 et p_2, on a $m = [av_1 + bv_2]$, avec $ab \neq 0$, et $h(m) = [a\mu_1 v_1 + b\mu_2 v_2]$. Par définition du birapport, on a :

$$[p_1, p_2, m, h(m)] = \left[\frac{\begin{vmatrix} a\mu_1 & 0 \\ b\mu_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{vmatrix}}, \frac{\begin{vmatrix} 1 & a\mu_1 \\ 0 & b\mu_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & a \\ 0 & b \end{vmatrix}} \right] = \left[\frac{a\mu_1}{a}, \frac{b\mu_2}{b} \right] = [\mu_1, \mu_2] = \left[\frac{\mu_1}{\mu_2}, 1 \right] = \rho(m).$$

□

***Théorème 11.24* (Divisions harmoniques).** — *Soit (p_1, p_2, p_3, p_4) quatre points distincts d'une droite projective $\mathbf{D}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ égale -1.*

(ii) *Il existe une involution h de $\mathbf{D}$ qui fixe p_1 et p_2 et échange p_3 et p_4.*

(iii) *Si l'on prend p_1 (resp. p_2) comme point à l'infini ∞, alors dans la droite affine $\mathbf{D} - \{\infty\}$, le point p_2 (resp. p_1) est le milieu de p_3 et p_4.*

(iv) *Si l'on plonge $\mathbf{D}$ dans un plan projectif, il existe un quadrangle complet $PQRS$ tel que p_1, p_2 soient des points diagonaux et p_3, p_4 soient les points d'intersection avec $\mathbf{D}$ de la dernière paire de côtés opposés.*

Si ces conditions sont vérifiées, on dit que (p_1, p_2, p_3, p_4) sont en divison harmonique.

Démonstration. — L'implication (ii) $\Rightarrow$ (i) découle immédiatement de la proposition 11.23. Réciproquement, supposons (i) vérifié et soit h l'unique homographie qui fixe p_1 et p_2 et envoie p_3 sur p_4. Alors on a :

$$\rho(h) = [p_1, p_2, p_3, h(p_3)] = [p_1, p_2, p_3, p_4] = -1,$$

donc h est une involution (d'après la proposition 11.23) et donc, comme $h(p_3) = p_4$ on a aussi $h(p_4) = p_3$, i.e. h échange p_3 et p_4. Ceci prouve l'équivalence de (i) et (ii).

Supposons (ii) vérifié et prenons p_1 comme point à l'infini ∞. Notons $\mathscr{D}$ la droite affine $\mathbf{D} - \{\infty\}$. Comme $h(\infty) = \infty$ alors, d'après le théorème 11.9, la restriction de h à $\mathscr{D}$ est une bijection *affine*, qu'on notera h'. Comme h' est affine elle préserve les barycentres. Notons m le milieu de p_3 et p_4. Comme h' échange p_3 et p_4 alors $h'(m) = m$. Donc $m \in \mathscr{D}$ est un second point fixe de h, distinct de ∞, et comme h a exactement deux points fixes : $p_1 = \infty$ et p_2, ceci entraîne que $m = p_2$. Ceci prouve que (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Réciproquement, supposons (iii) vérifié. Alors, dans la droite affine $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\}$, la symétrie de centre p_2 fixe p_2 et échange p_3 et p_4. D'après le théorème 11.9, s se prolonge de façon unique en une homographie h de $\mathbf{D}$ telle que $h(\infty) = \infty$. Comme h échange les points distincts p_3 et p_4, c'est une involution, d'après le corollaire 11.19. Ceci prouve l'équivalence de (ii) et (iii).

Donnons une démonstration directe élémentaire de l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii). On choisit des coordonnées homogènes $[x, y]$ telles que $p_1 = \infty = [1, 0]$, $p_2 = [0, 1]$ et $p_3 = [1, 1]$. Via l'identification de $\mathscr{D} = \mathbf{D} - \{\infty\}$ à k, p_2 et p_3 correspondent à 0 et 1, et comme p_2 est le milieu de p_3 et p_4 on a alors $p_4 = [-1, 1]$. Dans $\mathscr{D}$, la symétrie s de centre p_2 est donnée par $x \mapsto -x$, elle se prolonge en une homographie h de $\mathbf{D}$ donnée par $h([x, y]) = [-x, y]$, qui vérifie bien $h(\infty) = \infty$. De plus, il est clair que $h \circ h = \mathrm{id}_{\mathbf{D}}$, i.e. h est une involution.

Enfin, l'équivalence de (ii) et (iv) est un cas particulier de la proposition 11.21 (prendre $A = D = p_1$, $B = E = p_2$ et $\{C, F\} = \{p_3, p_4\}$). $\square$

11.7. Action de S_3 et S_4 sur les birapports. — Rappelons que S_n désigne le groupe symétrique « à n lettres » : c'est le groupe des permutations de l'ensemble $X = \{1, \ldots, n\}$. Pour $i \neq j$ dans X, la *transposition* (ij) est la permutation qui échange i et j et laisse fixe tout autre élément de X. D'autre part, pour tout r-uplet $(i_1, \ldots, i_r)$ d'éléments distincts de X, on note $(i_1 i_2 \cdots i_r)$ la permutation qui envoie i_1 sur i_2, i_2 sur i_3, …, i_{r-1} sur i_r et i_r sur i_1, et l'on dit que c'est un r-cycle. (Si $r = 2$, on retrouve la transposition $(i_1 i_2)$.) À l'intention des futurs agrégatifs, on rappelle sans démonstration la proposition suivante. [20]

Proposition 11.25. — *S_n est engendré par les transpositions $s_i = (i, i+1)$ pour $i = 1, \ldots, n-1$.*

Dans S_3, le produit (composition) (23)(12) est le 3-cycle $c = (132)$ tandis que le produit (12)(23) est le 3-cycle $c' = (312) = c^{-1}$. Enfin, $(12)(23)(12) = (13) = (23)(12)(23)$ et l'on a obtenu ainsi tous les éléments de S_3 autres que $\mathrm{id}, (12)$ et (23). Il est commode de représenter les 6 éléments de S_3 par l'hexagone suivant : [21]

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{id} \arrow[dl, "(12)"'] \arrow[dr, "(23)"] & \\
(12) \arrow[d, "(23)"'] & & (23) \arrow[d, "(12)"] \\
(12)(23) = (312) \arrow[dr, "(12)"'] & & (23)(12) = (132) \arrow[dl, "(23)"] \\
& (13) &
\end{tikzcd}$$

Pour ce qui suit, on fixe une droite projective $\mathbf{D}$.

[20] Nous n'en aurons besoin que pour $n = 3$, auquel cas la vérification est immédiate.

[21] Dans cet hexagone, les flèches représentent des multiplications *à droite*, i.e. deux éléments g et gs_i sont reliés par une flèche $\xrightarrow{s_i}$.

Lemme 11.26. — *Soient* (p_1, p_2, p_3) *trois points distincts de* $\mathbf{D}$ *et* q *un quatrième point. Posons* $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$*. Alors :*

$$\boxed{[p_2, p_1, p_3, q] = \frac{1}{\lambda}} \qquad \textit{et} \qquad \boxed{[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda}$$

(*avec* $1/0 = \infty$ *et* $1/\infty = 0$ *et* $1 - \infty = \infty$).

Démonstration. — Soit $h : \mathbf{D} \to \mathbb{P}^1$ l'unique homographie envoyant le triplet (p_1, p_2, p_3) sur le triplet standard $(\infty, 0, 1) = \big([1, 0], [0, 1], [1, 1]\big)$, alors $h(q) = \lambda$.

D'autre part, h envoie le triplet (p_2, p_1, p_3) sur le triplet $(0, \infty, 1)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie σ qui échange 0 et ∞ et fixe 1. Celle-ci est donnée par $\sigma([x, y]) = [y, x]$, i.e. σ échange 0 et ∞ et, pour tout $t \in k^*$, on a :

$$\sigma(t) = \sigma([t, 1]) = [1, t] = \Big[\frac{1}{t}, 1\Big] = \frac{1}{t}.$$

Ainsi, $\sigma \circ h$ envoie (p_2, p_1, p_3) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_2, p_1, p_3, q] = \sigma(h(q)) = \sigma(\lambda)$. Ceci prouve la première égalité (y compris les cas particuliers $1/0 = \sigma(0) = \infty$ et $1/\infty = \sigma(\infty) = 0$).

La deuxième s'obtient de façon analogue : h envoie (p_1, p_3, p_2) sur le triplet $(\infty, 1, 0)$; pour mettre celui-ci « dans le bon ordre », il faut composer avec l'homographie τ qui échange 0 et 1 et fixe ∞. Celle-ci est donnée par $\tau([x, y]) = [y - x, y]$, i.e. $\tau(\infty) = \infty$ et, pour tout $t \in k$, on a :

$$\tau(t) = \tau([t, 1]) = [1 - t, 1] = 1 - t.$$

Ainsi, $\tau \circ h$ envoie (p_1, p_3, p_2) sur $(\infty, 0, 1)$ et donc $[p_1, p_3, p_2, q] = \tau(h(q)) = \tau(\lambda)$. Ceci prouve la seconde égalité (y compris le cas particulier $1 - \infty = \tau(\infty) = \infty$). $\square$

Compte tenu de la description « hexagonale » de S_3 donnée plus haut, on déduit du lemme la proposition suivante : [22]

Proposition 11.27. — *Soient* (p_1, p_2, p_3) *trois points distincts de* $\mathbf{D}$ *et* q *un quatrième point. Posons* $[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda \in k \cup \{\infty\}$*. Alors on a l'hexagone suivant :*

$$\begin{tikzcd}
& {[p_1, p_2, p_3, q] = \lambda} \arrow[dl, "(12)"'] \arrow[dr, "(23)"] & \\
{[p_2, p_1, p_3, q] = \dfrac{1}{\lambda}} \arrow[d, "(23)"'] & & {[p_1, p_3, p_2, q] = 1 - \lambda} \arrow[d, "(12)"] \\
{[p_2, p_3, p_1, q] = 1 - \dfrac{1}{\lambda}} \arrow[dr, "(12)"'] & & {[p_3, p_1, p_2, q] = \dfrac{1}{1 - \lambda}} \arrow[dl, "(23)"] \\
& {[p_3, p_2, p_1, q] = \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}} &
\end{tikzcd}$$

Si l'on impose au quatrième point $q = p_4$ d'être distinct de p_1, p_2 et p_3, alors dans le birapport $[p_1, p_2, p_3, p_4]$ on peut permuter les places des quatre points. Mais on va voir que, d'après le théorème 11.18, on n'obtient rien de plus que dans la proposition précédente.

(22) **Attention !** À chaque étape ce sont les *places* $(1, 2$ ou $3)$ des p_i que l'on échange, et non leurs indices.

Commençons par donner des résultats sur la structure du groupe symétrique S_4. Identifions S_3 au sous-groupe de S_4 formé des permutations σ telles que $\sigma(4) = 4$.

Proposition 11.28. — (i) *Les trois permutations* $(12)(34)$, $(13)(24)$ *et* $(14)(23)$ *forment, avec l'identité, un sous-groupe distingué* V *de* S_4*, isomorphe à* $\{\pm 1\}^2$.

(ii) S_4 *est le produit semi-direct de* V *et de* S_3*. Par conséquent,* $S_4/V \simeq S_3$.

Démonstration. — (i) Notons a, b, c ces trois permutations. Elles sont involutives (i.e. $a^2 = \mathrm{id} = b^2 = c^2$) et l'on a $ab = (12)(34)(13)(24) = (23)(14) = c$ et donc $b = ac$ et $a = cb$.

De plus, comme $ab = c$ égale $c^{-1} = b^{-1}a^{-1} = ba$, on obtient que $ab = ba = c$ (on aurait pu le voir par un calcul direct) et de même $ac = ca = b$ et $bc = cb = a$. On obtient ainsi que $V = \{\mathrm{id}, a, b, c\}$ est un sous-groupe commutatif d'ordre 4 isomorphe à $\{\pm 1\}^2$. Ce sous-groupe est distingué car pour tout $g \in S_n$ et $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$, on a $g(i_1 i_2)g^{-1} = (j_1 j_2)$, où l'on a posé $j_1 = g(i_1)$ et $j_2 = g(i_2)$. Appliquant ceci pour $n = 4$, on voit que pour tout élément $(i_1 i_2)(i_3 i_4)$ de V, l'élément

$$g(i_1 i_2)(i_3 i_4)g^{-1} = (j_1 j_2)(j_3 j_4)$$

est encore un élément de V. Ceci prouve (i).

Pour prouver (ii), remarquons que $S_3 \cap V = \{\mathrm{id}\}$ et que $|S_3| \times |V| = 6 \cdot 4 = 24 = |S_4|$. Par conséquent, (ii) résulte du lemme ci-dessous. □

Lemme 11.29. — *Soient* H *un groupe fini,* G *et* N *deux sous-groupes,* N *étant* distingué *dans* H*. On suppose que :*

a) $G \cap N = \{e\}$.

b) $|G| \times |N| = |H|$.

Alors H *est le produit semi-direct de* N *et* G.

Démonstration. — Il faut montrer que l'application $\phi : N \times G \to H$, $(n, g) \mapsto ng$ est bijective (voir la définition 11.10). Comme les deux ensembles ont même cardinal, il suffit de montrer que ϕ est *injective.*[23] Or, si $n_1 g_1 = n_2 g_2$ alors on a $n_2^{-1} n_1 = g_2 g_1^{-1}$ et cet élément appartient à $N \cap G$ donc égale e, d'où $n_1 = n_2$ et $g_1 = g_2$. Ceci prouve que ϕ est injective. Le lemme est démontré. □

Proposition 11.30. — *Soient* (p_1, p_2, p_3, p_4) *quatre points distincts de* $\mathbf{D}$*. Alors les permutations des* p_i *par les éléments de* V *ne changent pas le birapport, i.e. on a :*

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

Démonstration. — D'après le théorème 11.18, l'action sur le quadruplet (p_1, p_2, p_3, p_4) d'un élément quelconque $\tau \in V$ est « réalisée par une homographie » : c.-à-d., prenant par exemple $\tau = (12)(34)$, il existe une homographie h de $\mathbf{D}$ qui échange p_1, p_2 d'une part, et p_3, p_4 d'autre part. On a donc :

$$[p_2, p_1, p_4, p_3] = [h(p_1), h(p_2), h(p_3), h(p_4)] = [p_1, p_2, p_3, p_4],$$

et de même pour les éléments $(13)(24)$ et $(14)(23)$. □

[24] On peut énoncer le résultat précédent en introduisant une action du groupe S_4. Commençons par quelques lemmes.

---

[23] Attention, comme ϕ n'est pas en général un morphisme de groupes, on ne peut pas considérer son noyau.

[24] Ce qui suit est un complément, qui peut être omis.

Lemme 11.31. — *Soient X, Y deux ensembles et $A(X,Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y. Si un groupe G agit à gauche (resp. à droite) sur X, il agit à droite (resp. à gauche) sur $A(X,Y)$, de la façon suivante : pour tout $\phi : X \to Y$ et $g \in G$, on pose, pour tout $x \in X$,*

$$(\phi \cdot g)(x) = \phi(gx) \qquad \text{resp.} \qquad (g \cdot \phi)(x) = \phi(xg).$$

Démonstration. — Notant e l'élément neutre de G, on a dans les deux cas $\phi \cdot e = \phi$ et $e \cdot \phi = \phi$. Supposons que G agisse à gauche sur X. Pour tout $g, h \in X$ on a :

$$\big((\phi \cdot g) \cdot h\big)(x) = (\phi \cdot g)(hx) = \phi(ghx) = \big(\phi \cdot (gh)\big)(x)$$

et donc $(\phi \cdot g) \cdot h = \phi \cdot (gh)$. De même, si G agit à droite sur X, on a :

$$\big(g \cdot (h \cdot \phi)\big)(x) = (h \cdot \phi)(xg) = \phi(xgh) = \big((gh) \cdot \phi\big)(x)$$

et donc $g \cdot (h \cdot \phi) = (gh) \cdot \phi$. □

Remarques 11.32. — Soit H un groupe agissant (disons à gauche) sur un ensemble E et soit $\mathscr{O}$ une orbite de G dans E.

a) Tout sous-groupe G de H agit aussi sur E.

b) H, ainsi que chacun de ses groupes, agit sur $\mathscr{O}$.

c) Supposons que pour un point $p \in \mathscr{O}$, le stabilisateur H_p de p dans H contienne un sous-groupe *distingué* N. Alors l'action de H sur $\mathscr{O}$ se factorise en une action de H/N sur $\mathscr{O}$.

En effet, pour tout $x = hp$ dans $\mathscr{O}$, on sait (semaine 4, Lemme 10.7) que le stabilisateur H_x de x est égal à $hH_p h^{-1}$, il contient hNh^{-1} qui égale N puisque N est distingué. Donc N agit trivialement sur $\mathscr{O}$ et donc l'action de H se factorise en une action de H/N sur $\mathscr{O}$, définie par $\overline{h} \cdot x = hx$, pour tout $x \in X$ et $h \in H$.

d) Sous les conditions précédentes, supposons de plus que H soit un produit semi-direct $N \rtimes G$. Alors l'action de H/N sur $\mathscr{O}$ coïncide avec celle de G : en effet, le morphisme de groupes $G \to H/N$, $g \mapsto \overline{g}$ est un isomorphisme et pour tout $x \in \mathscr{O}$ on a, par définition, $\overline{g} \cdot x = gx$.

Lemme 11.33. — *Soient E un ensemble et n un entier ≥ 2.*

(i) *Le groupe symétrique S_n agit à droite sur $E^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in E\}$ par la formule : $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$.*

(ii) *Cette action laisse stable le sous-ensemble Y_n de E^n formé des n-uplets d'éléments deux à deux distincts.*

Démonstration. — E^n s'identifie à l'ensemble des applications $x : \{1, \dots, n\} \to E$, en identifiant une telle application au n-uplet $(x(1), \dots, x(n))$, qu'on note aussi $(x_1, \dots, x_n)$. Donc, d'après le lemme 11.31, S_n agit à droite sur E^n par $x \cdot \sigma = x \circ \sigma$, i.e. $(x_1, \dots, x_n) \cdot \sigma = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$. Ceci prouve (i), et (ii) est clair. □

Appliquons ce qui précède à $E =$ la droite projective $\mathbf{D}$. Alors S_4 agit à droite sur $\mathbf{D}^4$ et aussi sur le sous-ensemble Y_4 formé des quadruplets de points deux à deux distincts. Donc S_4 agit à gauche sur l'ensemble A de toutes les applications $Y_4 \to \mathbb{P}^1(k)$. Parmi celles-ci se trouve le birapport b. Son orbite $\mathscr{O}$ est formée des « birapports permutés », i.e. des applications $(p_1, p_2, p_3, p_4) \mapsto [p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(4)}]$, pour $\sigma \in S_4$. D'après la proposition 11.30, le sous-groupe V est contenu dans le stabilisateur de b. D'après les remarques précédentes, on obtient donc le :

Théorème 11.34. — *Considérons l'action de S_4 sur l'ensemble « birapports permutés ». Alors :*

(i) *L'action du sous-groupe V est triviale, i.e. pour tout $(p_1, p_2, p_3, p_4) \in Y_4$ on a :*

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_2, p_1].$$

(ii) *Par conséquent, l'action de S_4 se factorise par le groupe quotient $S_4/V \simeq S_3$, dont l'action a été décrite dans la proposition* 11.27.

Remarque 11.35. — Une autre approche consiste à définir un morphisme de groupes $S_4 \to \mathrm{PGL}_2(k)$, de noyau V ; pour cela voir [Sa, Chap. II, §B].