Semaines 8 et 9 [1] : Formes quadratiques et quadriques

Références pour ce chapitre :

[Be] Daniel Bertrand, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. III, §§1-2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~daniel.bertrand

[Gr] André Gramain, Géométrie élémentaire (Hermann, 1997), Chap. VIII et IX.

[It] Ilia Itenberg, Algèbre et géométrie, Cours de M1 à l'UPMC 2013-2014 (§§3.1 et 3.2), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~ilia.itenberg

[Po] Patrick Polo, Algèbre et géométrie, Cours de L2 à l'UPMC 2009-2013 (Chap. 5), disponible sur la page de l'auteur : www.imj-prg.fr/~patrick.polo/L2

[Sa] Pierre Samuel, Géométrie projective (P.U.F., 1986), Chap. III et Chap. IV, §A.

Dans tout ce chapitre, on suppose que le corps k est de caractéristique $\neq 2$.

14. Formes quadratiques

14.1. Généralités sur les formes quadratiques. — [2]

Rappel 14.1. — Soient V, E deux k-espaces vectoriels. Une **application bilinéaire** de $V \times V$ dans E est une application $b : V \times V \to E$ qui est linéaire en chaque variable (l'autre variable étant fixée), i.e. pour $u, u', v, v' \in V$ et $\lambda, \mu \in k$, on a :

$$b(\lambda u + u', v) = \lambda b(u, v) + b(u', v) \qquad \text{et} \qquad b(u, \mu v + v') = \mu b(u, v) + b(u, v').$$

En appliquant successivement ces deux conditions on obtient que :

$$b(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2) = \lambda_1\mu_1 b(u_1, v_1) + \lambda_1\mu_2 b(u_1, v_2) + \lambda_2\mu_1 b(u_2, v_1) + \lambda_2\mu_2 b(u_2, v_2).$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $u_i, v_i \in V$ et $\lambda_i, \mu_i \in k$, on a :

$$b\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i u_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\Big) = \sum_{i=1}^n \lambda_i b\Big(u_i, \sum_{j=1}^n \mu_j v_j\Big) = \sum_{i,j=1}^n \lambda_i\mu_j \, b(u_i, v_j).$$

Exemple 14.2. — On a déjà rencontré cette notion en semaine 7 lors de la définition de l'algèbre A des polynômes sur k en r variables : la multiplication $m : A \times A \to A$ est définie par $X^{\mathbf{a}} \cdot X^{\mathbf{b}} = X^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}$ et la condition que m soit k-bilinéaire, ce qui équivaut à dire que pour $P = \sum_{\mathbf{a}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}} X^{\mathbf{a}}$ et $Q = \sum_{\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r} \beta_{\mathbf{b}} X^{\mathbf{b}}$ arbitraires, on a :

$$P \cdot Q = m(P, Q) = \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}}\beta_{\mathbf{b}} \, m(X^{\mathbf{a}}, X^{\mathbf{b}}) = \sum_{\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{N}^r} \alpha_{\mathbf{a}}\beta_{\mathbf{b}} \, X^{\mathbf{a}+\mathbf{b}}.$$

Définitions 14.3. — Soit V un k-espace vectoriel.

(1) Une **forme bilinéaire** sur V est une application bilinéaire $\phi : V \times V \to k$.

(2) On dit que ϕ est **symétrique** si pour tout $x, y \in V$ on a $\boxed{\phi(x, y) = \phi(y, x).}$

[1] Pour rattraper les cours supprimés le 11/11 et 19/11, on a fait cours les vendredis 17 et 31 octobre. Le cours du 31 octobre sera donc le 18ème cours.

[2] Cette section, à l'exception des §§14.3-4, est constituée de rappels de L2 ou L3 sur lesquels on passera rapidement en cours, le but étant d'arriver rapidement à la partie « géométrique » : l'étude des coniques du plan projectif.

(3) Dans ce cas, on dit que l'application $Q : V \to k$, $x \mapsto Q(x) = \phi(x,x)$ est la **forme quadratique** définie par ϕ. Pour tout $\lambda \in k$ et $x, y \in V$, on a $\boxed{Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)}$ et :

$$\begin{aligned} Q(x+y) &= \phi(x+y, x+y) = \phi(x,x) + \phi(x,y) + \phi(y,x) + \phi(y,y) \\ &= Q(x) + Q(y) + 2\phi(x,y). \end{aligned} \tag{$\dagger$}$$

Donc ϕ est déterminée par Q, i.e. :

$$\phi(x,y) = \frac{1}{2}\big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\big) \tag{$*$}$$

et, si Q est donnée, on dira que ϕ est la **forme polaire** de Q.

(4) En remplaçant y par $-y$ dans la formule ($\dagger$), on obtient $Q(x-y) = Q(x) + Q(y) - 2\phi(x,y)$ d'où la formule également utile :

$$\phi(x,y) = \frac{1}{4}\big(Q(x+y) - Q(x-y)\big). \tag{$**$}$$

Remarque 14.4. — Remarquons que, pour vérifier qu'une application $\phi : V \times V \to k$ est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de voir que $\phi(x,y) = \phi(y,x)$ et que ϕ est linéaire en la 1ère variable, car ces deux conditions entraînent la linéarité en la 2ème variable.

***Remarque 14.5* (importante)**. — Soit ϕ une forme bilinéaire sur V. Elle définit deux applications linéaires $V \to V^*$, notées θ_1 et θ_2 et définies comme suit.

(i) Pour tout $x \in V$, $\theta_1(x)$ est l'application $V \to k$, $y \mapsto \phi(x,y)$. La linéarité de ϕ en la 2ème variable signifie que $\theta_1(x)$ est une forme linéaire sur V ; on obtient donc une application $\theta_1 : V \to V^*$. De plus, la linéarité de ϕ en la 1ère variable entraîne alors que θ_1 est linéaire i.e. que $\theta_1(\lambda x + x') = \lambda\theta_1(x) + \theta_1(x')$ (égalité de formes linéaires) ; en effet, pour tout $y \in V$ on a :

$$\theta_1(\lambda x + x')(y) = \phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x,y) + \phi(x',y) = \lambda\theta_1(x)(y) + \theta_1(x')(y).$$

(ii) De même, $\theta_2 : V \to V^*$ est l'application linéaire qui à tout $x \in V$ associe la forme linéaire $\theta_2(x)$ définie par $\theta_2(x)(y) = \phi(y,x)$, pour tout $y \in V$.

(iii) Notons que $\theta_1 = \theta_2$ équivaut à $\theta_1(x) = \theta_2(x)$ pour tout $x \in V$, ce qui équivaut à :

$$\forall x, y \in V, \qquad \phi(x,y) = \theta_1(x)(y) = \theta_2(x)(y) = \phi(y,x)$$

i.e. à la condition que ϕ soit symétrique. Donc si ϕ est *symétrique*, elle définit une unique application $\theta : V \to V^*$, où $\theta(x) = \phi(x, -) = \phi(-, x)$.

Désormais, on suppose V de **dimension finie** n. Soit ϕ une forme bilinéaire symétrique [3] sur V et Q la forme quadratique associée. Soit $\theta : V \to V^*$ l'application linéaire définie par ϕ.

***Définition 14.6* (Expression dans une base)**. — Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées correspondantes. Pour $i, j = 1, \dots, n$, posons $a_{ij} = \phi(e_i, e_j)$; comme ϕ est symétrique alors $a_{ji} = a_{ij}$.

(i) La matrice $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ est *symétrique* (i.e. ${}^tA = A$) ; elle est appelée la matrice de ϕ (ou de Q) dans la base $\mathscr{B}$ et notée $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ ou $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$.

(ii) Pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, notons ${}^tX = (x_1, \dots, x_n)$ et ${}^tY = (y_1, \dots, y_n)$, alors on a $\boxed{\phi(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\, x_i y_j}$ et ceci est égal, d'une part, à

$$(x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = {}^tXAY \tag{$\dagger$}$$

[3] Pour abréger, on écrira souvent dans la suite « fbs » au lieu de « forme bilinéaire symétrique ».

et, d'autre part, à :

$$(\ddagger)\qquad \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\, x_i y_i + \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij}\,(x_i y_j + x_j y_i).$$

(iii) Pour $y = x$, ($\ddagger$) donne $Q(x) = \sum_{i=1}^n a_{ii}\, x_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}\, x_i x_j$ donc Q correspond dans la base $\mathscr{B}$ au polynôme $\sum_{i=1}^n a_{ii}\, X_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} 2a_{ij}\, X_i X_j$ homogène de degré 2.

(iv) Réciproquement, si Q est donnée par $Q(X) = \sum_{i=1}^n c_i\, X_i^2 + \sum_{1\le i<j\le n} c_{ij}\, X_i X_j$ alors sa forme polaire ϕ est donnée par $\phi(e_i, e_i) = c_i$ et, pour $i \neq j$, $\phi(e_i, e_j) = c'_{ij}$ où $c'_{ij} = c'_{ji} = (1/2)c_{ij}$. Donc

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix} c_1 & c'_{12} & \cdots & \cdots & c'_{1n} \\ c'_{21} & c_2 & c'_{23} & \cdots & c'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c'_{n-1,1} & \cdots & \ddots & c_{n-1} & c'_{n-1,n} \\ c'_{n1} & c'_{n2} & \cdots & c'_{n,n-1} & c_n \end{pmatrix}.$$

(v) Soit $\mathscr{C}$ une autre base de V et $P = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{C})$ la matrice de passage. Alors

$$(\star)\qquad \boxed{\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi) = {}^tPAP.}$$

Démonstration. — Seul le point (v) nécessite une démonstration. Donnons-en deux. Écrivons $\mathscr{C} = (f_1, \ldots, f_n)$ et posons $B = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\phi)$.

1ère démonstration. Écrivons $f_i = \sum_{r=1}^n p_{ri} e_r$ pour tout i. Alors

$$b_{ij} = \phi(f_i, f_j) = \sum_{r,s=1}^{n} p_{ri} p_{sj} \phi(e_r, e_s) = \sum_{r,s=1}^{n} p_{ri} p_{sj} a_{rs} = \sum_{r,s=1}^{n} ({}^tP)_{ir} a_{rs} p_{sj} = ({}^tPAP)_{ij}.$$

2ème démonstration. Soient $v_1, v_2 \in V$ arbitraires, notons X_1, X_2 (resp. Y_1, Y_2) leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ (resp. $\mathscr{C}$). On a $X_i = PY_i$, d'après la formule de changement de coordonnées, et donc

$$\phi(v_1, v_2) = {}^tX_1 A X_2 = {}^tY_1\, {}^tPAP\, Y_2$$

et ceci entraîne que $b_{ij} = \phi(f_i, f_j)$ est le coefficient d'indice (i, j) de la matrice ${}^tPAP$ (car alors ${}^tY_1 = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ avec le 1 à la i-ème place et de même pour Y_2), d'où $B = {}^tPAP$. □

Proposition 14.7. — *A est la matrice de θ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$, notée* $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}}(\theta)$.

Démonstration. — Écrivons $\mathscr{B}^* = (e_1^*, \ldots, e_n^*)$. Pour tout $f \in V^*$, son écriture $f = \sum_{i=1}^n c_i e_i^*$ est donnée par $c_i = f(e_i)$. Pour $f = \theta(e_j)$ on a : $\theta(e_j)(e_i) = \phi(e_j, e_i) = a_{ij}$ et donc $\theta(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i^*$. Ceci montre que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*,\mathscr{B}}(\theta) = A$. □

***Définition 14.8* (Rang de ϕ ou de Q).** — On appelle *rang* de ϕ (ou de Q) le rang de l'application linéaire θ. D'après la proposition précédente, ceci est le rang de la matrice de ϕ dans n'importe quelle base de V.

Définition 14.9. — (i) On dit que ϕ (ou Q) est **non dégénérée** si elle est de rang $n = \dim(V)$, c.-à-d. si θ est un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$.

(ii) Dans le cas contraire, $\mathrm{Ker}(\theta)$ est noté $N(\phi)$ ou $N(Q)$ et appelé *noyau* de ϕ (ou de Q), i.e. on a :

$$N(\phi) = \{x \in V \mid \phi(x, y) = 0, \quad \forall y \in V\}.$$

***Définition 14.10* (Orthogonalité).** — Soit ϕ une fbs sur V.

(i) On dit que deux vecteurs $x, y \in V$ sont **orthogonaux** (pour ϕ) si $\phi(x, y) = 0$. Plus généralement, on dit que deux sous-ensembles X, Y de V sont orthogonaux si l'on a $\phi(x, y) = 0$ pour tout $x \in X$ et $y \in Y$. On notera $X \perp Y$ pour signifier que X et Y sont orthogonaux.

(ii) Pour tout sous-ensemble Y de V, on définit son orthogonal (relativement à ϕ), noté $Y^\perp$, par :

$$(\star) \qquad \boxed{Y^\perp = \{x \in V \mid \phi(x, y) = 0, \quad \forall y \in Y\}.}$$

(iii) $Y^\perp$ est un **sous-espace vectoriel** de V (même si Y n'en est pas un) ; de plus, on a les propriétés suivantes :

$$(\star\star) \qquad \boxed{Y \subset Z \Longrightarrow Z^\perp \subset Y^\perp} \qquad \text{et} \qquad \boxed{Y^\perp = \mathrm{Vect}(Y)^\perp}$$

en particulier, si Y est un sous-espace vectoriel F de V et si $(f_1, \ldots, f_p)$ est une famille génératrice de F, alors

$$\boxed{F^\perp = \{f_1, \ldots, f_p\}^\perp = \{x \in V \mid \phi(x, f_i) = 0, \quad \forall i = 1, \ldots, p\}.}$$

Démonstration de (iii). — Soient $x, x' \in Y^\perp$ et $\lambda \in k$, alors on a, pour tout $y \in Y$, $\phi(\lambda x + x', y) = \lambda\phi(x, y) + \phi(x', y) = 0$, ce qui montre que $\lambda x + x' \in Y^\perp$. Donc $Y^\perp$ est un sous-espace vectoriel de V.

Il est immédiat que si $Y \subset Z$, alors $Z^\perp \subset Y^\perp$ car si $x \in Z^\perp$ alors x est orthogonal à tout élément de Z, donc x est *a fortiori* orthogonal à tout élément de Y (puisque $Y \subset Z$), donc $x \in Y^\perp$.

Comme $Y \subset \mathrm{Vect}(Y)$, ceci donne l'inclusion $\mathrm{Vect}(Y)^\perp \subset Y^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque. Soit $x \in Y^\perp$ et soit v un élément arbitraire de $\mathrm{Vect}(Y)$; par définition, v s'écrit comme une combinaison linéaire finie $v = \lambda_1 y_1 + \cdots + \lambda_r y_r$, avec $y_i \in Y$ et $\lambda_i \in k$; alors on a

$$\phi(x, v) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \underbrace{\phi(x, y_i)}_{=0} = 0$$

et donc $x \in \mathrm{Vect}(Y)^\perp$. Ceci montre que $Y^\perp \subset \mathrm{Vect}(Y)^\perp$, d'où l'égalité $\mathrm{Vect}(Y)^\perp = Y^\perp$. Ceci prouve (iii). $\square$

***Théorème 14.11* (Orthogonalité pour ϕ non dégénérée)**

Soit ϕ une fbs non dégénérée *sur V et soit F un sev de V.*

(i) *On a* $\boxed{\dim(F^\perp) = \dim(V) - \dim(F)}$ *et* $\boxed{F = (F^\perp)^\perp.}$

(ii) *Si $F \cap F^\perp = \{0\}$, alors* $\boxed{V = F \oplus F^\perp.}$

(iii) *En fait* (ii) *est vrai même sans supposer que ϕ soit non dégénérée.*

Démonstration. — (i) Si $x \in F$ alors pour tout $y \in F^\perp$ on a $\phi(x, y) = 0$ et donc $x \in (F^\perp)^\perp$. Ceci montre que $F \subset (F^\perp)^\perp$, sans supposer que ϕ soit non dégénérée.

Soit $\theta : V \to V^*$ l'application linéaire associée à ϕ. Alors $\theta(F)$ est un sev de V^* et l'on a

$$F^\perp = \big\{y \in V \mid \forall x \in V, \quad 0 = \phi(x, y) = \theta(x)(y)\big\} = \theta(F)^0,$$

où ^{0} désigne l'orthogonalité entre V et V^* (cf. 12.2). D'après 12.2 (i) on a donc

$$(*) \qquad \dim(F^\perp) = \dim(V) - \dim\theta(F).$$

Supposons maintenant que ϕ soit non dégénérée. Alors θ est bijective donc $\theta(F)$ est de même dimension que F, et donc $(*)$ entraîne que $\dim(F^\perp) = \dim(V) - \dim(F)$.

On a de même $\dim(F^\perp)^\perp = \dim(V) - \dim(F^\perp) = \dim(F)$, et alors l'inclusion $F \subset (F^\perp)^\perp$ entraîne l'égalité $F = (F^\perp)^\perp$. Ceci prouve (i).

(ii) et (iii) : ne supposant plus que ϕ soit non dégénérée, on a toujours $\dim\theta(F) \leq \dim(F)$ et donc $\dim(F^\perp) \geq \dim(V) - \dim(F)$.

Si l'on a $F \cap F^\perp = \{0\}$, alors F et $F^\perp$ sont en somme directe, et d'après ce qui précède on a :

$$\dim(F \oplus F^\perp) = \dim(F) + \dim(F^\perp) \geq \dim(V)$$

et ceci entraîne que $F \oplus F^\perp = V$ (et que $\dim(F^\perp) = \dim(V) - \dim(F)$). □

Remarque 14.12. — Attention ! Le lecteur peut penser au cas de $V = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire euclidien $(x \mid y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$; dans ce cas, pour tout sev F de V on a $F \cap F^\perp = \{0\}$ car si $x \in F \cap F^\perp$ alors l'égalité $0 = (x \mid x) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ entraîne que $x = 0$. Mais ceci est une particularité du cas euclidien et n'est pas vrai pour une fbs non dégénérée ϕ arbitraire. Par exemple, soit ϕ la fbs sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\phi(u, v) = x_1 y_2 + x_2 y_1 \qquad \text{si } u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ et } v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix};$$

sa matrice dans la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, donc ϕ est non dégénérée. Cependant, on a $\phi(e_1, e_1) = 0 = \phi(e_2, e_2)$ donc chacune des droites $D_1 = \mathbb{R}e_1$ et $D_2 = \mathbb{R}e_2$ est égale à son propre orthogonal, i.e. $D_1^\perp = D_1$ et $D_2^\perp = D_2$.

***Définition 14.13* (Cône isotrope)**. — Soit Q une forme quadratique sur V, non nulle.

(i) Un vecteur $v \in V$ est dit **isotrope** (pour Q) si l'on a $Q(v) = 0$.

(ii) L'ensemble $C(Q) = \{v \in V \mid Q(v) = 0\}$ des vecteurs isotropes est appelé le **cône isotrope**. C'est un *cône*, au sens où il est stable par homothéties : si $v \in C(Q)$ et $\lambda \in k^\times$ alors $Q(\lambda v) = \lambda^2 Q(v) = 0$ donc $\lambda v \in C(Q)$.

(iii) L'image de $C(Q) - \{0\}$ dans $\mathbb{P}(V)$ est l'hypersurface de $\mathbb{P}(V)$ définie par le polynôme homogène Q, i.e. c'est :

$$\mathscr{V}(Q) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(v) = 0\}.$$

On dit que $\mathscr{V}(Q)$ est la *quadrique projective* définie par Q. (On étudiera ces quadriques dans la section suivante.)

Exemples 14.14. — (1) Si Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par $Q(x_1, x_2) = x_1 x_2$, alors le cône isotrope est la réunion de la droite d'équation $x_1 = 0$ et de celle d'équation $x_2 = 0$, et la quadrique $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ est formée des deux points $[0, 1]$ et $[1, 0]$.

(2) Si Q est la forme quadratique sur $\mathbb{R}^3$ définie par $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$, alors le cône isotrope est le cône d'équation $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$: la section par chaque plan « horizontal » d'équation $x_3 = c$ donne le cercle de centre $(0, 0, c)$ et de rayon $r = |c|$. Son image $\mathscr{V}(Q)$ dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ est formée du « cercle » $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ dans le plan affine $\mathscr{P} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})-$ la droite $\mathscr{D}_\infty$ d'équation $z = 0$; il lui manque les deux points d'intersection avec $\mathscr{D}_\infty$, qui sont les deux points $[1, i, 0]$ et $[1, -i, 0]$ de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$.

Remarque 14.15. — Attention ! Il ne faut pas confondre le cône isotrope $C(Q) = \{x \in V \mid Q(x) = 0\}$ avec le sev $N(Q) = \{x \in V \mid \forall y \in V,\ \phi(x, y) = 0\}$. On a toujours $N(Q) \subset C(Q)$ mais l'inclusion est en général stricte : dans les deux exemples précédents Q est non dégénérée donc $N(Q) = \{0\}$, tandis que $C(Q)$ est un cône $\neq \{0\}$.

***Définition 14.16* (Restriction à un sous-espace)**. — Soit ϕ une fbs sur V et soit F un sev de V.

(i) On note ϕ_F la fbs sur F obtenue en restreignant ϕ à $F \times F$, i.e. $\phi_F(x, y) = \phi(x, y)$ pour tout $x, y \in F$; on l'appelle la *restriction* de ϕ à F.

(ii) On a $F \cap F^\perp = \{x \in F \mid \forall y \in F \quad \phi(x, y) = 0\} = N(\phi_F)$. Donc l'assertion (ii) du théorème 14.11 peut se récrire comme suit : « *si ϕ_F est non dégénérée, alors $V = F \oplus F^\perp$* ».

Remarque 14.17. — Attention ! Même si ϕ est non dégénérée, ϕ_F ne l'est pas nécessairement. Par exemple, soit ϕ la forme polaire de la forme quadratique $Q(x_1x_2) = x_1x_2$ sur $\mathbb{R}^2$, elle est non dégénérée mais sa restriction à chaque droite isotrope $D_1 = \mathbb{R}e_1$ ou $D_2 = \mathbb{R}e_2$ est nulle, donc dégénérée.

***Définition 14.18* (Bases orthogonales).** — Soient Q une forme quadratique sur V et ϕ sa forme polaire. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées correspondantes.

(i) On dit que $\mathscr{B}$ est une base **orthogonale** pour ϕ (ou pour Q) si l'on $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$, ce qui équivaut à dire que la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est **diagonale**.

(ii) Ceci équivaut encore à dire que $Q(x_1, \dots, x_n) = c_1\, x_1^2 + \cdots + c_n\, x_n^2$, et dans ce cas $c_1, \dots, c_n$ sont les coefficients diagonaux de A.

***Théorème 14.19* (Existence de bases orthogonales).** — *Soit ϕ une fbs sur V.*

(i) *Il existe une base de V orthogonale pour ϕ.*

(ii) *Si $\mathscr{B}$ est une base de V orthogonale pour ϕ et si $(x_1, \dots, x_n)$ sont les coordonnées correspondantes, alors $Q(x_1, \dots, x_n) = c_1x_1^2 + \cdots + c_nx_n^2$ et le rang de ϕ est égal au nombre de c_i non nuls. En particulier, ϕ est non dégénérée ssi tous les c_i sont $\neq 0$.*

Démonstration. — (i) Procèdons par récurrence sur $n = \dim(V)$. Il n'y a rien à montrer si $n = 0$ ou si $\phi = 0$. On peut donc supposer $n \geq 1$, le résultat établi pour $n - 1$ et $\phi \neq 0$. Alors la forme quadratique Q est non nulle (cf. 14.3 $(*)$), donc il existe $e_1 \in V$ tel que $Q(e_1) \neq 0$. Posons $F = ke_1$; comme $\phi(e_1, e_1) \neq 0$, alors $F \cap F^\perp = \{0\}$ et donc, d'après le théorème 14.11, on a $V = F \oplus F^\perp$.

Par hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \dots, e_n)$ de $F^\perp$ telle que $\phi(e_i, e_j) = 0$ pour $i \neq j$. Alors $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de V orthogonale pour ϕ. Ceci prouve (i).

(ii) est clair, car le rang de ϕ est le rang de la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$, qui est diagonale de coefficients diagonaux $c_1, \dots, c_n$. □

14.2. Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. — Le théorème 14.19 est valable pour tout corps k de caractéristique $\neq 2$. La possibilité d'effectuer des réductions supplémentaires dépend de propriétés « arithmétiques » de k, c.-à-d., de quels éléments de k sont des carrés. Lorsque $k = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$, on peut donner des versions plus précises.

***Théorème 14.20* (Formes quadratiques sur $\mathbb{C}$).** — *Soient k un corps algébriquement clos, V un k-ev de dimension n et Q une forme quadratique non dégénérée sur V. Il existe une base $\mathscr{B}$ de V telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ soit la matrice identité I_n, i.e. telle que dans les coordonnées correspondantes on ait : $Q(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$.*

Démonstration. — D'après le théorème 14.19, il existe une base $(e_1, \dots, e_n)$ de V orthogonale pour Q, et chaque $c_i = Q(e_i)$ est $\neq 0$. Comme k est algébriquement clos, chaque c_i possède dans k une racine carrée μ_i. Remplaçant chaque e_i par $e_i' = \mu_i^{-1}e_i$ on obtient une base $\mathscr{B}$ comme désiré. □

***Théorème 14.21* (Théorème d'inertie de Sylvester).** — *Soient V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, Q une forme quadratique sur V et ϕ sa forme polaire.*

(i) *Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthogonale pour ϕ et soit p (resp. q) le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. < 0). Alors p et q ne dépendent pas de la base orthogonale choisie.*

(ii) *Le couple (p, q) s'appelle la* **signature** *de Q (ou de ϕ) ; on a $\mathrm{rang}(\phi) = p + q$.*

(iii) *On peut choisir $\mathscr{B}$ de sorte que la matrice diagonale $D = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ ait pour termes diagonaux $(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$, le nombre de 1 (resp. -1) étant p (resp. q).*

Démonstration. — Posons $r = \operatorname{rang}(\phi)$. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de V orthogonales pour ϕ. Notons p (resp. p') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) > 0$ (resp. $Q(f_i) > 0$) et q (resp. q') le nombre d'indices i tels que $Q(e_i) < 0$ (resp. $Q(f_i) < 0$). Alors

$$r = p + q = p' + q'$$

et il s'agit de montrer que $q = q'$ et $p = p'$. Quitte à renuméroter les éléments de $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on peut supposer que

$$(\star) \qquad \begin{cases} Q(e_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \dots, p \\ Q(e_i) < 0 & \text{pour } i = p+1, \dots, p+q \\ Q(e_i) = 0 & \text{pour } i > p+q = r\,; \end{cases} \qquad \begin{cases} Q(f_i) > 0 & \text{pour } i = 1, \dots, p' \\ Q(f_i) < 0 & \text{pour } i = p'+1, \dots, p'+q' \\ Q(f_i) = 0 & \text{pour } i > p'+q' = r\,. \end{cases}$$

Notons P_+ le sous-espace de V engendré par les vecteurs e_i tels que $Q(e_i) \geq 0$. Ces vecteurs sont au nombre de $n - q$, donc $\dim P_+ = n - q$. Soit x un élément arbitraire de P_+, écrivons $x = \sum_{i \in I} x_i e_i$, avec $I = \{1, \dots, p\} \cup \{r+1, \dots, n\}$; alors, d'après $(\star)$, on obtient

$$(1) \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2\, Q(e_i) \geq 0.$$

D'autre part, soit P'_- le sous-espace de V engendré par les vecteurs f_j tels que $Q(f_j) < 0$. Ces vecteurs sont au nombre de q', donc $\dim P'_- = q'$. Soit y un élément non nul de P'_-, on peut écrire $y = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} y_j f_j$, avec au moins l'un des y_j non nul (car $y \neq 0$). Alors, d'après $(\star)$ à nouveau, on obtient

$$(2) \qquad Q(y) = \sum_{j=p'+1}^{p'+q'} y_j^2\, Q(f_j) < 0.$$

Par conséquent, on a $P_+ \cap P'_- = \{0\}$ donc P_+ et P'_- sont en somme directe, d'où

$$n = \dim V \geq \dim P_+ + \dim P'_- = n - q + q'$$

d'où $q \geq q'$. Échangeant les rôles des bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$, on obtient de même $q' \geq q$, d'où $q = q'$, puis $p = r - q = r - q' = p'$. Ceci prouve (i).

Prouvons (iii). Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ comme ci-dessus ; pour $i = 1, \dots, p+q$, notons c_i la racine carrée de $|Q(e_i)|$ et remplaçons e_i par $c_i^{-1} e_i$; on obtient ainsi une base orthogonale ayant la propriété désirée. ☐

14.3. Points singuliers des cônes quadratiques et des quadriques. — [4]

Terminologie 14.22. — Dans les définitions 13.9 et 13.12, on dira que le point a de l'hypersurface $\mathscr{V}(P)$ est *singulier* si ce n'est pas un point lisse de $\mathscr{V}(P)$, i.e. si toutes les dérivées partielles de P s'annulent en a.

***Définition 14.23* (Extension des scalaires).** — Soient $k \subset K$ deux corps et V un k-espace vectoriel de dimension n. Si l'on choisit une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de V, alors V s'identifie à k^n et l'on peut alors le plonger dans le K-espace vectoriel K^n.

Ce plongement ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ choisie. En effet, notons $e_1 \otimes 1, \dots, e_n \otimes 1$ les vecteurs de la base canonique de K^n, qu'on notera $\mathscr{B}_K$. Pour tout $v = \sum_{i=1}^n a_i e_i$ dans V, on pose :

$$v \otimes 1 \overset{\text{déf.}}{=\!=} \textstyle\sum_{i=1}^n a_i e_i \otimes 1.$$

Si $\mathscr{C} = (f_1, \dots, f_n)$ est une autre base de V et si $P = (p_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ est la matrice de passage alors la matrice exprimant $\mathscr{C}_K = (f_1 \otimes 1, \dots, f_n \otimes 1)$ dans la base $\mathscr{B}_K$ n'est autre que P, qui appartient à $\mathrm{GL}_n(k) \subset \mathrm{GL}_n(K)$ donc est inversible. Par conséquent, $\mathscr{C}_K$ est aussi une base de K^n. Ceci nous conduit à noter V_K le K-espace vectoriel ainsi défini. On dira que c'est le K-espace vectoriel déduit de V par extension des scalaires de k à K.[5]

Ceci nous sera utile pour la raison suivante. Soit Q une forme quadratique sur V ; considérons son cône isotrope $C(Q)$, qu'on va noter $C_k(Q)$:

$$C_k(Q) = \{v \in V \mid Q(v) = 0\} = \{v = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \in V \mid Q(x_1, \dots, x_n) = 0\}.$$

---

[4] Ce paragraphe a été ajouté le 31/10, et traité en cours dans le cas des coniques.

[5] On peut définir V_K de façon canonique comme le produit tensoriel $V \otimes_k K$, sans avoir à choisir une base de V, cf. le cours 4M002.

On aura parfois besoin de considérer des « points de $C(Q)$ à valeurs dans K », où K est un corps algébriquement clos contenant k (par exemple $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$), c.-à-d. on sera amené à considérer

$$C_K(Q) = \{v = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V_K \mid Q(x_1, \ldots, x_n) = 0\},$$

où cette fois les x_i sont pris dans K. D'après ce qui précède, $C_K(Q)$ ne dépend que de V et Q, et pas du choix des coordonnées x_i.

Soient V un k-ev de dimension n, Q une forme quadratique sur V de rang $r \geq 1$ et $N(Q)$ son noyau. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de V orthogonale pour Q et soient $(x_1, \ldots, x_n)$ les coordonnées correspondantes. Quitte à renuméroter les e_i, on peut supposer que $c_i = Q(e_i)$ est non nul pour $i = 1, \ldots, r$ et nul pour $i > r$. Commençons par le :

Lemme 14.24. — *$N(Q)$ est le sev $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$, donné par les équations $x_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, r$.*

Démonstration. — Soit ϕ la forme polaire de Q. Fixons un indice $i > r$. Comme la base $\mathscr{B}$ est orthogonale et comme $\phi(e_i, e_i) = 0$, alors e_i est orthogonal à tous les éléments de $\mathscr{B}$ donc appartient à $N(Q)$. Ceci montre que $\mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n) \subset N(Q)$. Réciproquement, si un élément $v = \sum_{j=1}^n a_je_j$ appartient à $N(Q)$ alors, pour $i = 1, \ldots, r$, l'égalité $0 = \phi(e_i, v) = a_ic_i$ donne $a_i = 0$ (car $c_i \neq 0$), donc $v \in \mathrm{Vect}(e_{r+1}, \ldots, e_n)$. Ceci prouve le lemme. □

De plus, Q est donnée dans la base $\mathscr{B}$ par $Q(X) = c_1X_1^2 + \cdots + c_rX_r^2$, d'où :

$$\partial_{X_i}Q = \begin{cases} 2c_iX_i & \text{si } i = 1, \ldots, r, \\ 0 & \text{si } i > r. \end{cases}$$

Par conséquent, pour tout $v = p_1e_1 + \cdots + p_ne_n$ dans V, on a

$$(\star) \qquad d_vQ = \sum_{i=1}^n (\partial_{X_i}Q)(v)X_i = 2\sum_{i=1}^r c_ip_iX_i = 2\phi(v, X)$$

où la dernière égalité signifie que d_vQ n'est autre que la forme linéaire $2\phi(v, -)$. En particulier, le point $0 = (0, \ldots, 0)$ est toujours un point singulier du cône isotrope $C(Q)$, mais *c'est le seul si Q est non dégénérée.* On a donc démontré la :

Proposition 14.25. — *Soient Q une forme quadratique sur V, ϕ sa forme polaire, $N(Q)$ son noyau, $C(Q)$ son cône isotrope et $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ la quadrique associée.*

(i) *Pour tout $v \in V$, la différentielle d_vQ est la forme linéaire $2\phi(v, -)$. Par conséquent :*

(ii) *Si $v \neq 0$, alors v (resp. $[v]$) est un point singulier de $C(Q)$ (resp. de $\mathscr{V}(Q)$) ssi $v \in N(Q)$.*

(iii) *Si $v \in C(Q) - N(Q)$ alors $T_vC(Q) = (kv)^\perp$ et $T_{[v]}\mathscr{V}(Q) = \mathbb{P}\big((kv)^\perp\big)$.*

De plus, pour tout corps K contenant k et tout $v = p_1e_1 + \cdots + p_ne_n$ dans V_K (i.e. les p_i sont dans K), on a encore :

$$d_vQ = \sum_{i=1}^n (\partial_{X_i}Q)(v)X_i = 2\sum_{i=1}^r c_ip_iX_i.$$

Donc, si p appartient à $C_K(Q)$ c'en est un point singulier ssi $p_1 = 0 = \cdots = p_r$ (i.e. ssi $p \in N(Q)_K$). On obtient donc la :

Proposition 14.26. — *Soit K un corps contenant k.*

(i) *Si Q est non dégénérée alors tout point $p \in C_K(Q) - \{0\}$ est un point lisse de $C_K(Q)$.*

(ii) *Au contraire, si Q est dégénérée alors $C_k(Q)$ contient au moins un point singulier $v \neq 0$ et donc la quadrique projective $\mathscr{V}(Q) = \{[w] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(w) = 0\}$ contient au moins le point singulier $[v]$.*

Remarques 14.27. — Prenons par exemple $k = \mathbb{R}$ et $V = \mathbb{R}^3$.

a) Il se peut que la conique projective $\mathscr{V}(Q)$ soit vide, c'est par exemple le cas si $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2 + Z^2$. D'après la proposition précédente, ceci entraîne que Q est non dégénérée et donc que tous les points de $\mathscr{V}(Q)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ sont lisses.

b) Si Q est dégénérée, on a vu que $\mathscr{V}_{\mathbb{R}}(Q)$ contient au moins un point singulier ; il est possible que ce soit le seul point réel : si $Q(X, Y, Z) = X^2 + Y^2$ alors d'une part $N(Q)$ est la droite engendrée par $(0, 0, 1)$, et d'autre part le seul point réel de $\mathscr{V}(Q)$ est le point $p = [0, 0, 1]$ qui est singulier. En passant à $\mathbb{C}$, on a $Q(X, Y, Z) = (X - iY)(X + iY)$ donc $\mathscr{V}_{\mathbb{C}}(Q)$ est la réunion des droites d'équations $x = iy$ et $x = -iy$, qui se coupent au point réel $p = [0, 0, 1]$.

14.4. Plans hyperboliques et sev totalement isotropes. — [6] Soient V un k-ev de dimension $n \geq 2$, Q une forme quadratique sur V de rang ≥ 1, ϕ sa forme polaire et $N(Q)$ son noyau.

Lemme 14.28. — *Soit E un sev de V et Q_E la restriction de Q à E.*

(i) *Alors Q_E est non dégénérée ssi $E \cap E^{\perp} = \{0\}$. Dans ce cas, on a :*

(ii) *$V = E \oplus E^{\perp}$ et :* (iii) *$Q_{E^{\perp}}$ est non dégénérée.*

Démonstration. — On a $N(Q_E) = \{x \in E \mid \forall y \in E, \quad \phi(x, y) = 0\} = E \cap E^{\perp}$ d'où (i). Alors (ii) découle du théorème 14.11 (iii). Soit $\mathscr{B}_1$ (resp. $\mathscr{B}_2$) une base de E (resp. $E^{\perp}$) et A_1 (resp. A_2) la matrice de Q_E (resp. $Q_{E^{\perp}}$) dans cette base. Alors $\mathscr{B} = \mathscr{B}_1 \cup \mathscr{B}_2$ est une base de V et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$ égale $A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, d'où $\mathrm{dét}(A) = \mathrm{dét}(A_1)\,\mathrm{dét}(A_2)$. Ceci est non nul (car Q est non dégénérée), d'où $\mathrm{dét}(A_2) \neq 0$ donc $Q_{E^{\perp}}$ est non dégénérée. $\square$

Proposition 14.29. — *Soit $e_1 \in V$ un vecteur isotrope. Supposons que $e_1 \notin N(Q)$. Alors :*

(i) *Il existe un vecteur isotrope e_2 tel que $\phi(e_1, e_2) = 1$.*

(ii) *Soient $E = \mathrm{Vect}(e_1, e_2)$ et Q_E la restriction de Q à E. Alors (e_1, e_2) est une base de E et $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(Q_E) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc Q_E est non dégénérée.*

(iii) *Par conséquent, $V = E \oplus E^{\perp}$.*

Démonstration. — Comme $e_1 \notin N(Q)$ il existe $v \in V$ tel que $\lambda = \phi(e_1, v)$ soit $\neq 0$. Remplaçant v par $\lambda^{-1}v$, on se ramène au cas où $\phi(e_1, v) = 1$. Soit $c = Q(v)$. Si $c = 0$ on peut prendre $e_2 = v$. Sinon, comme

$$Q(v + \mu e_1) = Q(v) + 2\mu\phi(v, e_1) = c + 2\mu,$$

alors $e_2 = v - (c/2)e_1$ vérifie $Q(e_2) = 0$ et $\phi(e_2, e_1) = 1$. Alors e_2 n'est pas colinéaire à e_1, donc (e_1, e_2) forme une base du sev E et la matrice de Q_E est comme indiqué. Ceci montre que Q_E est non dégénérée. Ceci prouve (i) et (ii). Alors (iii) découle du lemme précédent. $\square$

Définition 14.30. — On dit qu'un sev E de dimension 2 de V est un *plan hyperbolique* s'il possède une base (e_1, e_2) comme ci-dessus. La proposition précédente démontre donc que tout vecteur isotrope $v \notin N(Q)$ appartient à au moins un plan hyperbolique.

Définition 14.31. — Un sev F de V est dit *totalement isotrope* si $Q_F = 0$, c.-à-d. si $\phi(x, y) = 0$ pour tout $x, y \in F$.

Lemme 14.32. — *Supposons Q* non dégénérée. *Alors, si F est un sev totalement isotrope de dimension p, on a $2p \leq n = \dim(V)$.*

---

[6] Ce paragraphe peut-être omis en 1ère lecture.

Démonstration. — Soit $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F. Comme Q est non dégénérée, l'application $\theta : V \to V^*$ est un isomorphisme, donc la famille $\big(\theta(f_1), \dots, \theta(f_p)\big)$ est libre. On peut donc la compléter en une base $\mathscr{C}$ de V^*. Soit $(g_1, \dots, g_n)$ la base de V dont $\mathscr{C}$ est la base duale. Alors, pour $i, j = 1, \dots, p$ on a : $\phi(f_i, g_j) = \theta(f_i)(g_j) = \delta_{ij}$ (rappelons que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $= 0$ sinon).

Il en résulte que F et $G = \mathrm{Vect}(g_1, \dots, g_p)$ sont en somme directe, car si on a une égalité $\sum_{j=1}^{p} x_j f_j = \sum_{j=1}^{p} y_j g_j$ alors en appliquant $\phi(f_i, -)$ on obtient $y_i = 0$ pour tout $i = 1, \dots, p$. Comme $\dim(G) = p$ (car les g_i sont linéairement indépendants), on en déduit que $2p = \dim(F \oplus G) \leq \dim(V)$. □

Exemple 14.33. — Si $n = 2p$ et si V est la somme directe orthogonale de p plans hyperboliques, i.e. si dans certaines coordonnées Q est donnée par

$$Q(X_1, \dots X_{2p}) = X_1 X_2 + \cdots + X_{2p-1} X_{2p}$$

alors le cône isotrope $C(Q)$ contient les deux sous-espaces de dimension p totalement isotropes $F_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3, \dots, e_{2p-1})$ et $F_2 = \mathrm{Vect}(e_2, e_4, \dots e_{2p})$. Et donc la quadrique projective $\mathscr{V}(Q) = \{[x_1, \dots, x_{2p}] \in \mathbb{P}^{2p-1}(k) \mid Q(x) = 0\}$ contient les deux sous-espaces projectifs $\mathbb{P}(F_1)$ et $\mathbb{P}(F_2)$, chacun de dimension $p - 1$.

15. Quadriques et coniques projectives

Dans toute cette section, V désigne un k-ev de dimension $n + 1$, d'où $\dim(\mathbb{P}(V)) = n$. Sauf mention du contraire, les formes quadratiques considérées seront supposées *non nulles*, i.e. dans la suite la phrase « Soit Q une forme quadratique sur V » signifie : « Soit Q une forme quadratique sur V, non nulle ».

15.1. Généralités sur les quadriques. —

Définition 15.1. — Soit Q une forme quadratique sur V. Elle définit l'hypersurface $\mathscr{V}(Q) = \{[v] \in \mathbb{P}(V) \mid Q(v) = 0\}$ de $\mathbb{P}(V)$, qu'on appelle une *quadrique projective.* Bien sûr, Q et λQ définissent la même quadrique, pour tout $\lambda \in k^\times$.

Si $\dim \mathbb{P}(V) = 2$, on dira que $\mathscr{V}(Q)$ est une **conique** projective.

Remarque 15.2. — Décrivons tout d'abord les quadriques d'une droite projective $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$, où $\dim(E) = 2$. Soit Q une forme quadratique sur E et soient $\mathscr{B} = (e_0, e_1)$ une base de E orthogonale pour Q et (x_0, x_1) les coordonnées correspondantes. Quitte à échanger e_0 et e_1 on peut supposer que $\lambda = Q(e_0)$ est $\neq 0$; alors en remplaçant Q par $\lambda^{-1}Q$ (ce qui ne change pas la quadrique) on se ramène au cas où $Q(e_0) = 1$, d'où $Q(x_0, x_1) = x_0^2 - \delta x_1^2$, pour un certain $\delta \in k^\times$. Distinguons les cas suivants :

(i) $\delta = 0$, d'où $Q(x_0, x_1) = x_0^2$. Dans ce cas, $\mathscr{V}(Q)$ est formée d'un point « double », i.e. c'est le point $p = [0, 1]$ de $\mathbf{D}$ « compté deux fois ». Ce n'est pas un point lisse de $\mathscr{V}(Q)$, car $d_p Q = 0$.

(ii) $\delta \neq 0$. Soit α une racine carrée de δ dans le corps algébriquement clos $\overline{k}$, alors $Q(x_0, x_1) = (x_0 - \alpha x_1)(x_0 + \alpha x_1)$. Donc $\mathscr{V}(Q)$ est formée des deux points distincts $[\alpha, 1]$ et $[-\alpha, 1]$. Ces deux points sont dans $\mathbb{P}(E)$ ssi $\alpha \in k$; sinon, notant k' l'extension quadratique $k[\alpha]$ de k, ils sont dans $\mathbb{P}^1(k')$.[7]

Revenons à un k-ev V de dimension $n+1 \geq 3$ et décrivons plus précisément l'intersection de la quadrique $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ et d'une droite projective $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$, pour E un sev de V de dimension 2. Notons Q_E la restriction de Q à E et remarquons que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est la variété des zéros $\mathscr{V}(Q_E) \subset \mathbf{D}$.

[7] Plus précisément, ils sont dans $\mathbb{P}(E_{k'})$, où $E_{k'}$ désigne le k'-espace vectoriel déduit de E par extension des scalaires de k à k', cf. 14.23.

Proposition 15.3. — *On a l'une des trois alternatives suivantes :*

a) $Q_E = 0$ *et* $\mathbf{D} \subset \mathscr{V}(Q)$.

b) Q_E *est non dégénérée. Alors* $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ *est formée de deux points distincts* $p \neq q$ *(éventuellement à coordonnées dans une extension quadratique de* k*) qui sont des points lisses de* $\mathscr{V}(Q)$*. De plus,* $\mathbf{D}$ *n'est pas tangente à* $\mathscr{V}(Q)$ *en ces points.*

c) Q_E *est de rang* 1*. Alors* $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ *est formée d'un seul point* p *(à coordonnées dans* k*) et si* p *est un point lisse de* $\mathscr{V}(Q)$ *alors* $\mathbf{D}$ *est contenue dans l'hyperplan tangent* $T_p\mathscr{V}(Q)$*.*

Démonstration. — On a $Q_E = 0$ ssi $\mathscr{V}(Q_E) = \mathbf{D}$, et ceci équivaut à $\mathbf{D} \subset \mathscr{V}(Q)$. Ceci règle l'alternative (a).

Supposons $Q_E \neq 0$. Soit (e_0, e_1) une base orthogonale de E. Comme dans la remarque précédente, on se ramène au cas où $Q(e_0) = 1$ et l'on pose alors $Q(e_1) = -\delta$.

Supposons Q_E non dégénérée, i.e. $\delta \neq 0$. Alors $E \cap E^\perp = \{0\}$, d'après le lemme 14.28, et donc $V = E \oplus E^\perp$. Soit alors $(e_2, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $E^\perp$, alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de V. Notons $(x_0, \dots, x_n)$ les coordonnées correspondantes. Alors

$$Q(X_0, \dots, X_n) = X_0^2 - \delta X_1^2 + \sum_{i=2}^n c_i X_i^2 \quad \text{et donc } \partial_{X_i} Q = \begin{cases} 2X_0 & \text{si } i = 0, \\ -2\delta X_1 & \text{si } i = 1, \\ 2c_i X_i & \text{si } i \geq 2. \end{cases}$$

Notons α une racine carrée de δ (éventuellement dans une extension quadratique de k). On voit alors que $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée des deux points $p = [\alpha, 1, 0, \dots, 0]$ et $q = [-\alpha, 1, 0, \dots, 0]$. De plus, $d_pQ = 2\alpha X_0 - 2\delta X_1$ est une forme linéaire non nulle, donc p est un point lisse de $\mathscr{V}(Q)$, et l'hyperplan tangent $T_p\mathscr{V}(Q)$ a pour équation $\alpha x_0 = \delta x_1$ donc coupe la droite $\mathbf{D}$ en le point $[\delta, \alpha, 0, \dots, 0]$, donc $\mathbf{D} \not\subset T_p\mathscr{V}(Q)$, i.e. $\mathbf{D}$ n'est pas tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en p. Et de même pour q.[8] Ceci règle le cas de l'alternative (b).

Supposons enfin Q_E de rang 1, i.e. $\delta = 0$. Dans ce cas, $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(Q)$ est formée de l'unique point $p = [e_1]$. D'après la proposition 14.25, $p = [e_1]$ est un point singulier de $\mathscr{V}(Q)$ ssi $e_1 \in N(Q)$, et sinon on a $T_p\mathscr{V}(Q) = \mathbb{P}\big((ke_1)^\perp\big)$. Comme e_0 et e_1 sont orthogonaux à e_1, on a bien $E \subset (ke_1)^\perp$ d'où $\mathbf{D} \subset T_p\mathscr{V}(Q)$. Ceci achève la démonstration de la proposition. □

Remarque 15.4. — Dans le cas (c), lorsque $e_1 \notin N(Q)$ on peut aussi introduire des coordonnées et déterminer l'équation de $T_p\mathscr{V}(Q)$ comme suit. D'après la proposition 14.29 il existe un vecteur isotrope e_2 tel que $\phi(e_1, e_2) = 1$. Comme $e_2 \notin E$ (puisque $e_1 \in N(Q_E)$) alors (e_0, e_1, e_2) forme une base d'un sev F de dimension 3, et la matrice de Q_F dans cette base est

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ \beta & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

où l'on a posé $\beta = \phi(e_0, e_2)$. Le déterminant de cette matrice est 1, donc Q_F est non dégénérée et donc $V = F \oplus F^\perp$, d'après le lemme 14.28. Soit alors $(e_3, \dots, e_n)$ une base orthogonale de $F^\perp$, alors $\mathscr{B} = (e_0, \dots, e_n)$ est une base orthogonale de V. Notons $(x_0, \dots, x_n)$ les coordonnées correspondantes. Alors

$$Q(X_0, \dots, X_n) = X_0^2 + 2\beta X_0 X_2 + 2X_1 X_2 + \sum_{i=3}^n c_i X_i^2$$

d'où $\partial_{X_0} Q = 2X_0 + 2\beta X_2$, $\partial_{X_1} Q = 2X_2$, $\partial_{X_2} Q = 2\beta X_0 + 2X_1$ et $\partial_{X_i} Q = 2X_i$ pour $i \geq 3$. Comme $p = [0, 1, 0, \dots, 0]$, on obtient que $d_pQ = 2X_2$, donc l'hyperplan tangent $T_p\mathscr{V}(Q)$ a pour équation $x_2 = 0$ et il contient bien la droite $\mathbf{D}$, d'équation $x_2 = 0 = \cdots = x_n$.

Corollaire 15.5. — *Soit* $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ *une quadrique de* $\mathbb{P}(V)$*. Si* $\mathscr{C}$ *contient trois points d'une droite* $\mathbf{D}$ *alors* $\mathscr{C}$ *contient* $\mathbf{D}$*.*

[8] On aurait aussi pu appliquer la Prop. 14.25.

Démonstration. — Ceci découle de la proposition précédente. □

15.2. Coniques et théorème de Pascal. —

Proposition 15.6. — *Soit $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ une conique d'un plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Supposons que $\mathscr{C}$ contienne une droite $\mathbf{D}$.*

(i) *Alors $\mathscr{C}$ est dégénérée.*

(ii) *Plus précisément, si l'on choisit des coordonnées homogènes $[x, y, z]$ telles que $\mathbf{D}$ ait pour équation $Z = 0$, alors $Q = ZL(X, Y, Z)$ pour une certaine forme linéaire L.*

(iii) *Si L n'est pas multiple de Z, alors Q est de rang 2 et $\mathscr{C}$ est la réunion de $\mathbf{D}$ et de la droite $\mathbf{D}'$ d'équation $L = 0$. Sinon, $Q = \lambda Z^2$ est de rang 1 et dans ce cas on dit que $\mathscr{C}$ est la* « droite double » $\mathbf{D}$.

Démonstration. — Soit ϕ la forme polaire de Q. Écrivons $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$, où E est un sev de V de dimension 2. Par hypothèse, la restriction de Q à E est nulle, donc pour tout $x, y \in E$ on a :

$$\phi(x, y) = \frac{1}{2}\big(Q(x + y) - Q(x) - Q(y)\big) = 0.$$

Soient (e_1, e_2) une base de E, complétons-la en une base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de V et notons (x, y, z) les coordonnées dans cette base. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\phi)$ est de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

où $a = \phi(e_1, e_3)$, $b = \phi(e_2, e_3)$ et $c = Q(e_3)$ ne sont pas tous nuls (car Q est supposée non nulle). Alors on a

$$Q(X, Y, Z) = cZ^2 + 2Z(aX + bY) = Z(2aX + 2bY + cZ),$$

ce qui donne (ii) avec $L(X, Y, Z) = (2aX + 2bY + cZ)$. De plus, on voit que A est de rang ≤ 2 (car ses colonnes 1 et 2 sont liées), d'où (i).

Enfin, on voit que A est de rang 1 ssi $a = 0 = b$, ce qui correspond au cas où L est multiple de Z. Le point (iii) en découle. □

Remarques 15.7. — (1) Réciproquement, la réunion de deux droites $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ du plan projectif est une conique. En effet, soient L et L' les formes linéaires (uniques à homothétie près) définissant $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$ et soit $Q = L \cdot L'$. Alors, pour tout $[x, y, z] \in \mathbb{P}(V)$, on a $Q(x, y, z) = L(x, y, z)L'(x, y, z)$ et ceci est nul ssi l'un au moins de $L(x, y, z)$ et $L'(x, y, z)$ est nul : ceci montre que $\mathscr{V}(Q)$ est la réunion de $\mathbf{D}$ et $\mathbf{D}'$.

(2) Il résulte de la proposition que si $\mathscr{C}$ est une conique dégénérée (i.e. la réunion de deux droites ou une droite « double ») et si $p_1, \dots, p_5$ sont cinq points distincts de $\mathscr{C}$, alors trois au moins sont alignés.

Théorème 15.8. — *Soient $\mathbb{P}(V)$ un plan projectif et $p_1, \dots, p_5$ cinq points distincts de $\mathbb{P}(V)$, quatre d'entre eux n'étant jamais alignés. Alors il existe une unique conique $\mathscr{C}$ passant par ces cinq points.*

Démonstration. — Distinguons deux cas. (1) Supposons que trois points soient alignés sur une droite $\mathbf{D}$, par exemple p_1, p_2, p_3. Si une conique $\mathscr{C}$ contient les p_i alors, d'après 15.5 et 15.6, elle contient $\mathbf{D}$ donc elle est dégénérée et est la réunion de $\mathbf{D}$ et d'une seconde droite $\mathbf{D}'$. Alors, comme p_4 et p_5 ne sont pas sur $\mathbf{D}$ ils doivent être sur $\mathbf{D}'$ et donc $\mathbf{D}' = (p_4 p_5)$. Ceci montre que, dans ce cas, $\mathbf{D} \cup \mathbf{D}'$ est l'unique conique contenant les p_i.

(2) Supposons maintenant que trois des p_i ne sont jamais alignés. Alors (p_1, p_3, p_5, p_2) [9] forment un repère projectif et dans ce repère ils ont pour coordonnées homogènes respectives : $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, et $[1,1,1]$. De même, $p_4 = [a,b,c]$ avec a,b,c tous non nuls et deux à deux distincts (car si on avait, par exemple, $c = 0$ (resp. $a = b$) alors p_1, p_3, p_4 (resp. p_5, p_2, p_4) seraient alignés).

Soit $Q(X,Y,Z) = \alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 + uYZ + vZX + wXY$ une forme quadratique arbitraire. Elle s'annule en p_1 (resp. p_3, resp. p_5) ssi $\alpha = 0$ (resp. $\beta = 0$, resp. $\gamma = 0$), et l'annulation en p_2 et p_4 équivaut aux deux équations linéaires en u, v, w suivantes :

$$u + v + w = 0 \qquad \text{et} \qquad bc\,u + ca\,v + ab\,w = 0.$$

On en déduit $w = -u - v$ puis $b(c-a)\,u + a(b-c)\,v = 0$, d'où $v = \dfrac{b}{a}\,\dfrac{c-a}{b-c}\,u$, puis

$$w = -u - v = \frac{-u}{a(b-c)}\Big(a(b-c) - b(a-c)\Big) = \frac{c}{a}\,\frac{a-b}{b-c}\,u.$$

Ceci détermine de façon unique Q, à homothétie près, i.e. en prenant $u = a(b-c)$ on obtient que

$$Q(X,Y,Z) = a(b-c)YZ + b(c-a)ZX + c(a-b)XY$$

est l'équation de l'unique conique qui passe par le repère standard $[1,0,0]$, $[0,1,0]$, $[0,0,1]$, $[1,1,1]$ et par le point $[a,b,c]$. (Celle-ci est non dégénérée d'après la remarque 15.7.) $\square$

Définition 15.9 **(Côtés opposés d'un hexagone).** — Soient A, B, C, D, E, F six points d'un plan projectif, dont trois ne sont jamais alignés.[10] Pour chaque numérotation $p_1, \dots, p_6$ de ces points, appelons « *paires de côtés opposés* » (pour la numérotation donnée) les trois paires de droites

$$\big((p_1p_2), (p_4p_5)\big), \qquad \big((p_2p_3), (p_5p_6)\big), \qquad \big((p_3p_4), (p_6p_1)\big)$$

et notons P (resp. Q, resp. R) le point de concours de la 1ère paire (resp. de la 2ème, resp. 3ème). Ces trois points sont distincts. (Si on avait par exemple $P = Q$, ce point appartiendrait à $(p_1p_2) \cap (p_2p_3)$ et à $(p_4p_5) \cap (p_5p_6)$ donc devrait être égal à p_2 et à p_5, impossible car $p_2 \neq p_5$.)

Si $k = \mathbb{R}$ et si les points $p_1, \dots, p_6$ forment *dans cet ordre* les sommets d'un hexagone convexe régulier du plan affine $\mathscr{E} = \mathbb{R}^2$, alors la notion de « côtés opposés » a le sens habituel et les côtés opposés sont parallèles (et donc dans le plongement projectif $\widehat{\mathbb{P}}(\mathscr{E})$, les points P, Q, R appartiennent à la droite à l'infini). Mais dans la définition précédente, la numérotation des p_i est arbitraire, ce qui donne plus de configurations possibles.

Théorème 15.10. — *Soient A, B, C, D, E, F six points d'un plan projectif, dont trois ne sont jamais alignés.*

(i) **(Théorème de Pascal)** [11] *Si ces points appartiennent à une même conique $\mathscr{C}$ (nécessairement non dégénérée) alors, pour toute numérotation $p_1, \dots, p_6$, les points de concours des trois paires de côtés opposés sont alignés.*

(ii) *Réciproquement, si pour une numérotation $p_1, \dots, p_6$ les points de concours des trois paires de côtés opposés sont alignés, alors il existe une unique conique $\mathscr{C}$ passant par A, B, C, D, E, F.*

[9] Ce choix de numérotation est lié à la démonstration du théorème de Pascal 15.10 qui va suivre.

[10] En particulier, ces six points sont deux à deux distincts.

[11] Blaise Pascal, mathématicien et philosophe français (1623-1662), qui fut l'élève de Desargues.

Démonstration. — Choisissons une numérotation $p_1, \ldots, p_6$. Reprenant les notations de la démonstration précédente, on peut supposer que p_1, p_3, p_5, p_2, p_4 et p_6 ont pour coordonnées homogènes respectives :

$$[1,0,0], \quad [0,1,0], \quad [0,0,1], \quad [1,1,1], \quad [a,b,c] \quad \text{et} \quad [u,v,w],$$

avec a, b, c (resp. u, v, w) non nuls et deux à deux distincts. D'après le théorème précédent, l'unique conique $\mathscr{C}$ passant par $p_1, \ldots, p_5$ est donnée par

$$Q(X,Y,Z) = a(b-c)YZ + b(c-a)ZX + c(a-b)XY,$$

et donc p_6 appartient à $\mathscr{C}$ ssi on a :

$$0 = Q(u,v,w) = a(b-c)vw + b(c-a)wu + c(a-b)uv.$$

Déterminons à quelle condition les points de concours des trois paires de côtés opposés sont alignés.

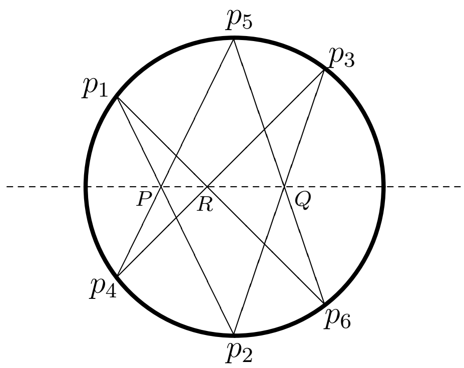
La droite (p_1p_2), resp. (p_4p_5), a pour équation $y = z$, resp. $bx = ay$, donc elles se coupent au point $P = [a,b,b]$. De même, la droite (p_2p_3), resp. (p_5p_6), a pour équation $x = z$, resp. $vx = uy$, donc elles se coupent au point $Q = [u,v,u]$.

Enfin, la droite (p_3p_4), resp. (p_6p_1), a pour équation $cx = az$, resp. $wy = vz$, donc elles se coupent au point $R = [aw, cv, cw]$.

Alors P, Q, R sont alignés ssi le déterminant $\begin{vmatrix} a & u & aw \\ b & v & cv \\ b & u & cw \end{vmatrix}$ est nul, or on voit qu'il vaut :

$$vw\, a(c-b) + wu\, b(a-c) + uv\, c(b-a) = -Q(u,v,w).$$

Ceci montre (ii), et aussi (i) puisque la numérotation $p_1, \ldots, p_6$ a été choisie arbitrairement. □



15.3. Polarité et théorème de Brianchon. — Soient V un k-ev de dimension $n+1 \geq 3$ et Q une forme quadratique *non dégénérée* sur V, de forme polaire ϕ. Alors l'isomorphisme $\theta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ permet de « transporter » ϕ en une fbs non dégénérée ϕ^* sur V^*, définie par :

$$\forall f, g \in V^*, \quad \phi^*(f,g) = \phi\big(\theta^{-1}(f), \theta^{-1}(g)\big),$$

c.-à-d. $\phi^*\big(\theta(x), \theta(y)\big) = \phi(x,y)$ pour tout $x, y \in V$. (ϕ^* est bien non dégénérée, car si $\theta(x) \in N(\phi^*)$ alors pour tout $y \in V$ on a $0 = \phi^*\big(\theta(x), \theta(y)\big) = \phi(x,y)$, d'où $x = 0$.) On pose $Q^*(f) = \phi^*(f,f)$ pour tout $f \in V^*$, i.e. $Q^*(\theta(v)) = Q(v)$ pour tout $v \in V$.

Remarque 15.11. — Via l'identification canonique $V = V^{**}$ (qui identifie tout $x \in V$ à la forme linéaire $\varepsilon_x : f \mapsto f(x)$ sur V^*), l'isomorphisme $\theta^* : V^* \to V$ défini par ϕ^* n'est autre que θ^{-1}. En effet, pour tout $x, y \in V$ on a, par définition :

$$\theta^*\big(\theta(x)\big)(\theta(y)) = \phi^*\big(\theta(x), \theta(y)\big) = \phi(x,y) = \varepsilon_x(\theta(y)),$$

d'où $\theta^*(\theta(x)) = x$ et donc $\theta^* = \theta^{-1}$. Par conséquent, la fbs ϕ^{**} sur V définie par ϕ^* n'est autre que ϕ car, comme $(\theta^*)^{-1} = \theta$, alors pour tout $x, y \in V$ on a : $\phi^{**}(x,y) = \phi^*\big(\theta(x), \theta(y)\big) = \phi(x,y)$. Donc (V,Q) et (V^*,Q^*) jouent des rôles symétriques.

Lemme 15.12. — *Soient $\mathscr{B}$ une base de V, $\mathscr{B}^*$ la base duale de V^*. Notons $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q)$.*

(i) *On a $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(Q^*) = A^{-1}$.*

(ii) *Par conséquent, pour tout $\lambda \in k^\times$, on a $(\lambda Q)^* = \lambda^{-1} Q^*$.*

Démonstration. — Soient $x, y \in V$, notons X, Y les vecteurs colonnes de leurs coordonnées dans la base $\mathscr{B}$. Posons $A^* = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}^*}(Q^*)$. Comme $\phi^*(\theta(x), \theta(y)) = \phi(x, y)$ et comme A est aussi la matrice de θ dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}^*$, on a :

$$^tXAY = \phi(x,y) = \phi^*(\theta(x), \theta(y)) = {}^t(AX)A^*(AY) = {}^tX({}^tAA^*A)Y.$$

Il en résulte ${}^tAA^*A = A = {}^tA$ (car A est symétrique), d'où $A^*A = \mathrm{Id}$ et donc $A^* = A^{-1}$. Ceci prouve (i). Et (ii) en découle, car λQ a pour matrice λA, donc $(\lambda Q)^*$ a pour matrice $\lambda^{-1}A^{-1}$. $\square$

***Définitions 15.13* (Pôles et polaires).** — (1) À tout hyperplan $\mathbb{P}(H)$ de $\mathbb{P}(V)$ on associe son *pôle*, qui est le point $p = \mathbb{P}(H^\perp)$.

(2) À tout point $p = [v]$ de $\mathbb{P}(V)$ on associe son *hyperplan polaire*, qui est l'hyperplan $\mathbb{P}\big((kv)^\perp\big)$.

(3) Plus généralement, à tout sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de dimension d on peut associer le sous-espace projectif $\mathbb{P}(W^\perp)$, qui est de dimension $n - d - 1$.

(4) On obtient ainsi des bijections réciproques entre points et hyperplans de $\mathbb{P}(V)$ et, plus généralement, entre sous-espaces projectifs de dimension d et $n - 1 - d$. Ces bijections *renversent les inclusions* et *échangent les notions d'intersection et de sous-espace engendré.*

Démonstration. — Le point (4) découle du fait que cette notion de « polarité » est obtenue en composant l'isomorphisme $\theta : V \xrightarrow{\sim} V^*$ avec la dualité projective entre $\mathbb{P}(V^*)$ et $\mathbb{P}(V)$ (cf. 12.7). $\square$

Un point-clé de la notion de polarité est fourni par la proposition suivante.

Proposition 15.14. — *Soit $\mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}(V)$ une quadrique non dégénérée, θ l'isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V^*$ qu'elle induit et Q^* la forme quadratique sur V^* définie par $Q^*(\theta(v)) = Q(v)$, pour tout $v \in V$. Alors :*

(i) *L'homographie $\overline{\theta} : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V^*)$, $[v] \mapsto [\theta(v)]$ induit une bijection de $\mathscr{V}(Q)$ sur la quadrique $\mathscr{V}(Q^*) \subset \mathbb{P}(V^*)$.*

(ii) *Pour tout point p de $\mathscr{V}(Q)$, le point $\overline{\theta}(p)$ de $\mathscr{V}(Q^*)$ correspond à l'hyperplan tangent en p à $\mathscr{V}(Q)$.*

Démonstration. — (i) découle de la définition de Q^*. Prouvons (ii). Soit $p = [v]$ un point de $\mathscr{V}(Q)$. D'une part, le point $\overline{\theta}(p) = [\theta(v)]$ de $\mathscr{V}(Q^*) \subset \mathbb{P}(V^*)$ correspond, via la dualité entre $\mathbb{P}(V^*)$ et $\mathbb{P}(V)$, à l'hyperplan :

$$\mathbb{P}\big(\theta(v)^0\big) = \{[w] \in \mathbb{P}(V) \mid 0 = \theta(v)(w) = \phi(v,w)\} = \mathbb{P}\big((kv)^\perp\big).$$

D'autre part, d'après la Prop. 14.25, on a $T_p\mathscr{V}(Q) = \mathbb{P}\big((kv)^\perp\big)$, d'où la proposition. $\square$

En particulier, si $\mathbb{P}(V)$ est un plan projectif, alors pour tout point p de la conique $\mathscr{V}(Q)$, la droite tangente à $\mathscr{V}(Q)$ en p correspond au point $\overline{\theta}(p)$ de la conique $\mathscr{V}(Q^*)$. On obtient alors l'énoncé dual du théorème de Pascal :

Théorème 15.15. — *Dans le plan projectif, soient $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_6$ six droites distinctes, dont trois ne sont jamais concourantes. Notons p_{12} le point de concours de $\mathbf{D}_1$ et $\mathbf{D}_2$, et définissons de même p_{23}, p_{34}, etc.*

(i) **(Théorème de Brianchon)** [12] *Si ces droites sont tangentes à une même conique non dégénérée $\mathscr{C}$, alors les trois droites $(p_{12}p_{45})$, $(p_{23}p_{56})$ et $(p_{34}p_{61})$ sont concourantes.* (*Et bien sûr ceci est vrai pour tout choix de numérotation des six droites, cf. figure plus bas*).

(ii) *Réciproquement, si ces trois droites sont concourantes, alors $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_6$ sont tangentes à une unique conique non dégénérée $\mathscr{C}$.*

Démonstration. — Soit $f_i \in V^*$ une équation (unique à homothétie près) de $\mathbf{D}_i$ et soit q_i le point $[f_i]$ de $\mathbb{P}(V^*)$. Alors trois des q_i ne sont jamais alignés. De plus, la droite (q_1q_2) (resp. (q_2q_3), etc.) est la duale du point p_{12} (resp. p_{34}, etc.).

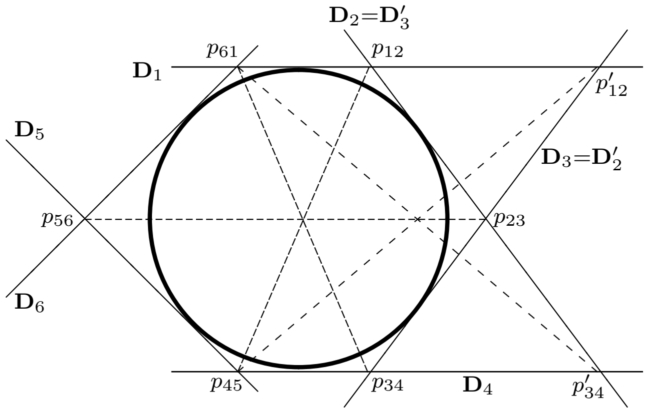
Notons E, F, G les points de concours des « paires de côtés opposés » $\big((q_1q_2), (q_4, q_5)\big)$, etc. Comme on l'a vu dans la définition 15.9, ces trois points sont distincts. D'autre part, ils sont duaux des droites $(p_{12}p_{45})$, $(p_{23}p_{56})$ et $(p_{34}p_{56})$; celles-ci sont donc deux à deux distinctes.

(i) Supposons que $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_6$ soient tangentes à une même conique non dégénérée $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$. Alors, d'après la proposition 15.14, les points $q_1, \dots, q_6$ de $\mathbb{P}(V^*)$ appartiennent à la conique non dégénérée $\mathscr{V}(Q^*)$ donc, d'après le théorème de Pascal appliqué dans $\mathbb{P}(V^*)$, les points E, F, G sont alignés et donc les trois droites de l'énoncé sont concourantes.

(ii) Réciproquement, supposons que ces trois droites soient concourantes. Alors les points E, F, G sont alignés et donc, d'après la réciproque du théorème de Pascal (appliquée dans $\mathbb{P}(V^*)$), il existe une forme quadratique non dégénérée Γ sur V^*, unique à homothétie près, telle que les points $q_1, \dots, q_6$ appartiennent à la conique $\mathscr{V}(\Gamma)$. D'après la remarque 15.11, il existe une unique forme quadratique non dégénérée Q sur V telle que $\Gamma = Q^*$, et alors les droites $\mathbf{D}_1, \dots, \mathbf{D}_6$ sont tangentes à $\mathscr{V}(Q)$ d'après la proposition 15.14. Ceci prouve (ii), à l'exception de l'assertion d'unicité de $\mathscr{C}$.

Mais si Q' est une forme quadratique non dégénérée telle que les $\mathbf{D}_i$ soient tangentes à $\mathscr{V}(Q')$, alors les q_i appartiennent à $\mathscr{V}(Q'^*)$ et donc il existe $\mu \in k^\times$ tel que $Q'^* = \mu\Gamma$, d'où $Q' = \mu^{-1}Q$ d'après le lemme 15.12. Ceci achève la démonstration du théorème. □

Dans la figure ci-dessous, on a représenté en pointillé les droites $(p_{12}p_{45})$, etc. et avec des tirets plus espacés les droites $(p'_{12}p_{45})$, etc. correspondant à une autre numérotation des droites, en l'occurrence $\mathbf{D}'_2 = \mathbf{D}_3$ et $\mathbf{D}'_3 = \mathbf{D}_2$ (la droite $(p_{23}p_{56})$ est la même dans les deux cas).



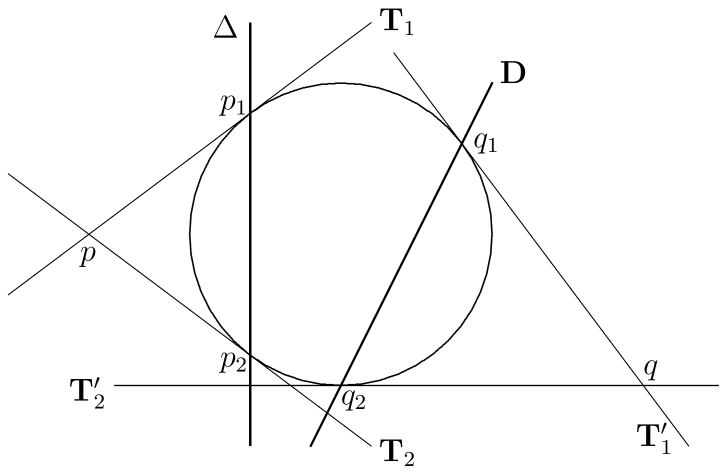
Soit $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ une conique non dégénérée du plan projectif $\mathbb{P}(V)$. Pour un point p de $\mathscr{C}$, on a vu que la droite polaire est la tangente à $\mathscr{C}$ en p. Et pour un point p n'appartenant pas à $\mathscr{C}$, sa droite polaire est décrite par la proposition suivante.

Proposition 15.16. — *Dans un plan projectif $\mathbb{P}(V)$, soient $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ une conique non dégénérée, p un point de $\mathbb{P}(V)$ n'appartenant pas à $\mathscr{C}$ et $\mathbf{D}$ une droite non tangente à $\mathscr{C}$. Alors :*

[12] Charles Julien Brianchon, mathématicien français (1783-1864), contemporain de Poncelet.

(i) **D** *coupe* $\mathscr{C}$ *en deux points distincts* q_1 *et* q_2 (*éventuellement à coordonnées dans une extension quadratique de* k). *Soient* $\mathbf{T}'_1$ *et* $\mathbf{T}'_2$ *les tangentes à* $\mathscr{C}$ *en ces points. Alors le point de concours* q *de* $\mathbf{T}'_1$ *et* $\mathbf{T}'_2$ *est le pôle de la droite* **D** *relativement à la forme quadratique* Q.

(ii) *De même, par* p *il passe deux droites distinctes* $\mathbf{T}_1$ *et* $\mathbf{T}_2$ (*qui éventuellement sont des droites de* $\mathbb{P}(V_{k'})$, *où* k' *est une extension quadratique de* k, *et qui ont* p *pour unique point à coordonnées dans* k). *Notons* p_1 *et* p_2 *leurs points de contact avec* $\mathscr{C}$; *alors la droite* $\Delta = (p_1p_2)$ *est la polaire du point* p *relativement à la forme quadratique* Q.



Démonstration. — (ii) Posons $p = [u]$ et $E = (ku)^\perp$. Alors la droite polaire de p est la droite $\Delta = \mathbb{P}(E)$. Notons ϕ la forme polaire de Q.

Par hypothèse $Q(u) \neq 0$, donc $ku \cap E = \{0\}$ et donc $V = ku \oplus E$. Comme Q est non dégénérée, alors Q_E ne l'est pas non plus. Donc $\Delta \cap \mathscr{C}$ est formée de deux points distincts $p_1 = [v_1]$ et $p_2 = [v_2]$ (éventuellement à coordonnées dans une extension quadratique k' de k). Alors on a $\Delta = (p_1p_2)$ et il reste à voir que chacune des droites $\mathbf{T}_i = (pp_i)$ est tangente à $\mathscr{C}$ en p_i. Or $\mathbf{T}_i = \mathbb{P}(E_i)$, où $E_i = ku \oplus kv_i$, et comme $\phi(u, v_i) = 0 = \phi(v_i, v_i)$ alors $E_i \subset (kv_i)^\perp$ et donc la droite $\mathbb{P}(E_i)$ est tangente à $\mathscr{C}$ en $p_i = [v_i]$, d'après la proposition 14.25 (ou 15.14).

Pour prouver (i), on peut utiliser que la polarité est involutive : soit q le pôle de **D**, alors **D** est la polaire de q. Comme **D** n'est pas tangente à $\mathscr{C}$ alors $q \notin \mathscr{C}$, donc **D** est donnée à partir de q par la construction précédente, d'où (i).

On peut aussi raisonner directement, comme suit. On a $\mathbf{D} = \mathbb{P}(E)$, où E est un sev de V de dimension 2, alors le pôle de **D** est le point $q = \mathbb{P}(E^\perp)$.

Comme **D** n'est pas tangente à $\mathscr{C}$, alors Q_E est non dégénérée (cf. la démonstration de (i) : si $N(Q_E)$ contenait un vecteur $w \neq 0$, on aurait $E \subset (kw)^\perp$ et donc **D** serait tangente à $\mathscr{C}$ en $[w]$). Donc $\mathbf{D} \cap \mathscr{C}$ est formée de deux points distincts $q_1 = [v_1]$ et $q_2 = [v_2]$ (éventuellement à coordonnées dans une extension quadratique k' de k). Alors (v_1, v_2) est une base de E, donc la droite vectorielle $E^\perp$ est l'intersection des deux plans vectoriels $H_i = (kv_i)^\perp$, pour $i = 1, 2$, et donc le pôle q est l'intersection des deux droites projectives $\mathbf{T}'_i = \mathbb{P}(H_i)$, qui sont les tangentes à $\mathscr{C}$ en q_1 et q_2. □

15.4. Classification des coniques projectives réelles. — Il résulte du théorème d'inertie de Sylvester 14.21 qu'il n'y a, à homographie près, que cinq types de coniques réelles $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q) \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. En effet, d'après le théorème de Sylvester, il existe une base $\mathscr{B}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que, dans les coordonnées correspondantes, on ait $Q(X, Y, Z) = aX^2 + bY^2 + cZ^2$, avec a, b, c dans $\{-1, 0, 1\}$ et non tous nuls. Comme Q et $\pm Q$ définissent la même conique, on a les cinq alternatives suivantes :

(1) Q est de rang 1. Dans ce cas, on peut supposer que $Q = X^2$ et alors $\mathscr{C}$ est la droite double de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ d'équation $x^2 = 0$.

(2) Q est de rang 2. Dans cas cas, on peut supposer que $Q = X^2 \pm Y^2$ et l'on a les deux sous-cas :

2a) $Q = X^2 - Y^2 = (X - Y)(X + Y)$. Alors $\mathscr{C}$ est la réunion des deux droites projectives d'équations $x = y$ et $x = -y$.

2b) $Q = X^2 + Y^2$. Alors dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, $\mathscr{C}_{\mathbb{C}}$ est la réunion des deux droites projectives d'équations $x = iy$ et $x = -iy$; elles se coupent au point $p = [0, 0, 1]$ qui est le seul point réel de $\mathscr{C}$.

(3) Q est de rang 3, i.e. non dégénérée. On peut alors supposer que $Q = X^2 + Y^2 \pm Z^2$ et l'on a les deux sous-cas :

3a) $Q = X^2 + Y^2 + Z^2$. Dans ce cas, $\mathscr{C}$ n'a pas de point réel.

3b) $Q = X^2 + Y^2 - Z^2$. À homographie près, c'est donc l'unique conique projective non dégénérée ayant des points réels. Remarquons que si on prend comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$ la droite d'équation $z = 0$ (resp. $y = 0$) alors dans le plan affine $\mathscr{E} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - \mathscr{D}_\infty$, identifié aux triplets de points $(x, y, 1)$ (resp. $(x, 1, z)$) de $\mathbb{R}^3$, on obtient l'ellipse (resp. l'hyperbole) d'équation $x^2 + y^2 = 1$ (resp. $x^2 - z^2 = 1$).

De plus, si l'on fait le changement de coordonnées $u = z + y$ et $v = z - y$ (de sorte que $z^2 - y^2 = uv$) et qu'on prend comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$ la droite d'équation $v = 0$ alors dans le plan affine $\mathscr{E} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - \mathscr{D}_\infty$, identifié aux triplets de points $(x, u, 1)$ de $\mathbb{R}^3$, on obtient la parabole d'équation $u = x^2$.

On voit donc qu'en passant aux coniques projectives, on fait disparaître la distinction entre les trois sortes de coniques affines réelles non dégénérées (ellipses, hyperboles, paraboles). On reviendra dans un chapitre ultérieur sur l'étude « métrique » des coniques affines dans le plan réel euclidien (i.e. muni du produit scalaire usuel).

15.5. Vers Bézout : intersection d'une conique avec une courbe de degré d. — (13) Dans ce paragraphe, on se place dans le plan projectif $\mathbb{P}^2(k)$. On suppose que k est contenu dans un corps algébriquement clos $\overline{k}$. (Par exemple $k = \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.)

Terminologie 15.17. — Pour tout polynôme non nul $F \in k[X, Y, Z]$ homogène de degré $d \geq 1$, la variété des zéros $\mathscr{V}(F) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(k) \mid F(x, y, z) = 0\}$ est appelée la *courbe projective plane* définie par F.(14)

Comme déjà dit au §13.3, quand on considère une telle courbe, on s'autorise à considérer aussi les points de $\mathscr{V}(F)$ « à valeurs dans $\overline{k}$ », i.e. les points de

$$\mathscr{V}_{\overline{k}}(F) = \{[x, y, z] \in \mathbb{P}^2(\overline{k}) \mid F(x, y, z) = 0\}.$$

Lemme 15.18. — *Soit $P \in \overline{k}[X, Y]$ un polynôme homogène de degré $d \geq 1$. Alors :*

(i) *P se factorise en un produit de d facteurs linéaires (pas nécessairement distincts).*

(ii) *Par conséquent, la variété des zéros $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P) \subset \mathbb{P}^2(\overline{k})$ est formée de d points « comptés avec multiplicités ».*

Démonstration. — (i) Écrivons $P = \sum_{i=0}^d a_i Y^i X^{d-i}$. Supposons d'abord, pour simplifier, que $a_0 \neq 0$. Remplaçant P par $a_0^{-1} P$, on se ramène au cas où $a_0 = 1$. Alors

$$\frac{1}{Y^d} P(X, Y) = \frac{1}{Y^d} \big(X^d + a_1 Y X^{d-1} + \cdots + a_{d-1} Y^{d-1} X + a_d Y^d\big) = \sum_{i=0}^{d} a_i T^{d-i}$$

(13) Ce paragraphe ne sera pas traité en cours dans l'immédiat ; on y reviendra à la fin du cours si possible.

(14) L'adjectif « plane » signifie « contenu dans un plan ». Il existe dans $\mathbb{P}^3(k)$ des courbes projectives (définies par deux équations homogènes $F(x, y, z, t) = 0 = G(x, y, z, t)$ qui ne sont contenues dans aucun sous-espace projectif $\mathbb{P}(W)$ de dimension 2, ni même « isomorphes » à une courbe projective plane.

où l'on a posé $T = \dfrac{X}{Y}$. Comme $\overline{k}$ est algébriquement clos, ce polynôme $Q(T)$, unitaire de degré d, se factorise en un produit de d termes du 1er degré $T - \alpha_i$ (non nécessairement distincts), pour $i = 1, \dots, d$. Ou bien, si l'on préfère, on peut noter $\beta_1, \dots, \beta_s$ les racines distinctes de Q dans $\overline{k}$, chacune étant de multiplicité m_i (avec $m_1 + \cdots + m_s = d$). On a donc

$$\sum_{i=0}^{d} a_i T^{d-i} = \prod_{i=1}^{d} (T - \alpha_i) = \prod_{j=1}^{s} (T - \beta_j)^{m_j}.$$

En remultipliant ceci par Y^d, on obtient :

$$P(X,Y) = \prod_{i=1}^{d} (X - \alpha_i Y) = \prod_{j=1}^{s} (X - \beta_j Y)^{m_j}.$$

Ceci prouve (i) lorsque $a_0 \neq 0$. Dans le cas général, soit r le plus petit entier ≥ 0 tel que $a_r \neq 0$. À nouveau, remplaçant P par $a_r^{-1} P$, on se ramène au cas où $a_r = 1$. Alors $P(X,Y) = Y^r P_1(X,Y)$, où $P_1(X,Y)$ est un polynôme homogène de degré $d - r$ contenant le terme X^{d-r} (avec le coefficient 1). D'après ce qui précède, appliqué à P_1, on a une factorisation

$$P_1(X,Y) = \prod_{i=1}^{d-r} (X - \alpha_i Y) = \prod_{j=1}^{s} (X - \beta_j Y)^{m_j},$$

où dans le terme de droite la somme des m_j vaut $d - r$. Il en résulte que

$$(\star) \qquad P(X,Y) = Y^r \prod_{i=1}^{d-r} (X - \alpha_i Y) = Y^r \prod_{j=1}^{s} (X - \beta_j Y)^{m_j}.$$

Ceci achève la preuve de (i).

L'assertion (ii) en découle, car $(\star)$ montre que $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P)$ est formé du point $[1, 0]$, compté r fois, et des points $[\beta_j, 1]$, chacun compté m_j fois. □

Corollaire 15.19. — *Soit $F \in k[X,Y,Z]$ homogène de degré $d \geq 1$ et soit $\mathbf{D}$ une droite de $\mathbb{P}^2(k)$ dont l'équation $L(X,Y,Z)$ ne divise pas F. Alors :*

(i) $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(F)$ *est formé d'au plus d points distincts.*

(ii) *Si l'on se place sur le corps $\overline{k}$, cette intersection est formée d'exactement d points, comptés avec multiplicités.*

Démonstration. — Écrivons $L(X,Y,Z) = aX + bY + cZ$ et supposons par exemple que $c \neq 0$. Remplaçant L par $c^{-1}L$, on se ramène au cas où $c = 1$. On peut alors faire la division euclidienne du polynôme $F \in k[X,Y][Z]$ par le polynôme L, unitaire en Z. On obtient :

$$F(X,Y,Z) = L \cdot Q(X,Y,Z) + R(X,Y),$$

où R est de degré 0 en Z, i.e. il ne dépend que de X et Y. C'est aussi le polynôme en X, Y obtenu en remplaçant Z par $-aX - bY$; en particulier il est nul ou bien homogène de degré d. L'hypothèse que L ne divise pas F signifie que $R \neq 0$. On voit alors qu'un point $[x,y,z]$ de $\mathbb{P}^2(k)$ appartient à $\mathbf{D} \cap \mathscr{V}(F)$ ssi le point $[x,y]$ de $\mathbb{P}^1(k)$ vérifie $R(x,y) = 0$ (et dans ce cas $z = -ax - by$). Comme R est un polynôme non nul homogène de degré d alors, d'après le lemme 15.18, $\mathscr{V}_{\overline{k}}(R)$ est formé d'exactement d points comptés avec multiplicité, donc au plus d points distincts, et *a fortiori* $\mathscr{V}_k(R)$ contient au plus d points distincts. Ceci prouve (ii) et (i). □

Proposition 15.20. — *Soit $F \in k[X,Y,Z]$ homogène de degré $d \geq 2$ et soit $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ une conique non dégénérée de $\mathbb{P}^2(k)$, telle que $\mathscr{V}_{\overline{k}}(Q)$ ne* soit pas *contenue dans $\mathscr{V}_{\overline{k}}(F)$. Alors :*

(i) *$\mathscr{C} \cap \mathscr{V}(F)$ est formé d'au plus $2d$ points distincts.*

(ii) *Si l'on se place sur le corps $\overline{k}$, cette intersection est formée d'exactement $2d$ points, « comptés avec multiplicités ».*

Démonstration. — À nouveau, (i) est une conséquence immédiate de (ii), donc il suffit de démontrer (ii). Pour simplifier l'écriture, supposons donc k algébriquement clos. Notons ϕ la forme polaire de Q. Comme $\mathscr{C} = \mathscr{V}(Q)$ n'est pas contenue dans $\mathscr{V}(F)$, il existe un point $p = [v] \in \mathscr{C}$ n'appartenant pas à $\mathscr{V}(F)$.

Comme Q est non dégénérée alors, d'après la proposition 14.29, il existe un vecteur isotrope w tel que $\phi(v,w) = 1$ et alors V est la somme directe du plan hyperbolique $E = \mathrm{Vect}(v,w)$ et de la droite vectorielle $D = E^{\perp}$. Soit u un générateur de D, alors $\mathscr{B} = (u,v,w)$ est une base de V et

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $\lambda \neq 0$. Remplaçant simultanément Q et w par $-\lambda^{-1}Q$ et $(-\lambda/2)w$, on se ramène au cas où

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remplaçant alors X, Y, Z par les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$, on se ramène au cas où

$$Q(X,Y,Z) = -X^2 + YZ.$$

Prenons comme droite à l'infini $\mathscr{D}_\infty$ la droite d'équation $z = 0$. Elle coupe $\mathscr{D}$ en l'unique point $p = [0,1,0]$ qui par hypothèse n'appartient pas à $\mathscr{V}(F)$.

L'intersection $\mathscr{V}(F) \cap \mathscr{C}$ est donc contenue dans l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan affine $\mathbb{P}(V) - \mathscr{D}_\infty$, qui est la parabole

$$\mathscr{C}' = \big\{[x,y,1] \in \mathbb{P}(V) \mid y = x^2\big\} = \big\{[x,x^2,1] \in \mathbb{P}(V) \mid x \in k\big\}.$$

On a donc

$$\mathscr{V}(F) \cap \mathscr{C} = \mathscr{V}(F) \cap \mathscr{C}' = \{x \in k \mid F(x,x^2,1) = 0\}.$$

Or, comme F ne s'annule pas en $p = [0,1,0]$ alors F contient le terme Y^d avec un coefficient non nul, et par conséquent le polynôme $P(X) = F(X,X^2,1)$ est de degré exactement $2d$. Soient $\beta_1, \ldots, \beta_r$ ses racines distinctes dans k, chacune étant de multiplicité m_i, avec $m_1 + \cdots + m_r = 2d$. Alors $\mathscr{V}(F) \cap \mathscr{C}$ est formé des points $[\beta_j, \beta_j^2, 1]$, chacun « compté m_i fois ». □

Définitions 15.21. — (1) On « rappelle » que l'anneau $A = \overline{k}[X,Y,Z]$ est **factoriel**, i.e. que tout $P \in A$ s'écrit comme produit d'éléments irréductibles, ceci de façon *unique* à l'ordre des facteurs près (et à multiplication près par des éléments inversibles de A, i.e. des éléments de $\overline{k}^\times$).[15] De plus, on peut montrer que si P est **homogène** alors tous les facteurs irréductibles de P sont également homogènes.

(2) Si $P = P_1^{m_1} \cdots P_r^{m_r}$ est ainsi factorisé, les P_i étant des polynômes homogènes irréductibles tels que $P_i \neq \lambda P_j$ pour tout $i \neq j$ et $\lambda \in \overline{k}^\times$, alors la variété des zéros $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P)$ est la réunion

[15]Ceci est vrai pour $k[X_1, \ldots, X_n]$ pour tout corps k, voir par exemple le cours 4M002 ou un cours de L3 d'arithmétique.

des $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P_i)$ (chacune étant « comptée m_i fois »), et l'on dit que celles-ci sont les **composantes irréductibles** de $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P)$.

(3) Conservons les notations de (2) et soit $Q \in \overline{k}[X,Y,Z]$ un autre polynôme homogène. On peut montrer (théorème des zéros de Hilbert) que $\mathscr{V}_{\overline{k}}(Q)$ contient $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P_i)$ si et seulement si P_i divise Q.

(4) On dit que P et Q sont **sans facteur commun** s'ils n'ont pas de diviseurs communs autres que les éléments de $\overline{k}^{\times}$. D'après le point (3), ceci équivaut à dire qu'aucune composante irréductible de $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P)$ n'est contenue dans $\mathscr{V}_{\overline{k}}(Q)$ et vice-versa. On dit alors que $\mathscr{V}_{\overline{k}}(P)$ et $\mathscr{V}_{\overline{k}}(Q)$ sont **sans composante commune**. Si Q est irréductible, ceci est le cas ssi Q ne divise pas P.

(5) Si $Q \in \overline{k}[X,Y,Z]$ est un polynôme homogène de degré 2, il est irréductible ssi ce n'est pas le produit de deux formes linéaires, i.e. ssi la forme quadratique Q est non dégénérée. Dans ce cas, on voit que la condition « $\mathscr{V}_{\overline{k}}(Q)$ n'est pas contenue dans $\mathscr{V}_{\overline{k}}(F)$ » utilisée dans la proposition 15.20 équivaut à dire que Q et F sont sans facteur commun.

On peut alors démontrer (mais ceci demande un peu de travail) le théorème suivant : [16]

***Théorème 15.22* (de Bézout).** — *Soient k un corps algébriquement clos et $F, G \in k[X,Y,Z]$ deux polynômes homogènes, de degrés p et q, sans facteur commun. Alors :*

(i) *$\mathscr{V}(F) \cap \mathscr{V}(G)$ est formé d'au plus pq points distincts.*

(ii) *Si l'on définit de façon appropriée la notion de «* multiplicité d'intersection en un point *», alors $\mathscr{V}(F) \cap \mathscr{V}(G)$ est formé d'exactement pq points, « comptés avec multiplicités ».*

Références pour le théorème de Bézout :

[Fu] W. Fulton, Algebraic curves (Benjamin, 1974), Chap. 5, §3 (disponible en ligne sur la page de l'auteur).
[Ku] E. Kunz, Introduction to plane algebraic curves (Birkhäuser, 2005), Chap. 5.
[ST] J. H. Silverman, J. Tate, Rational points on elliptic curves (Springer, 1992), App. §§3-4.

[16] Étienne Bézout, mathématicien français (1730-1783).