AMPHI 2

REPRÉSENTATIONS DES GROUPES FINIS

THÉORIE DES CARACTÈRES

Représentations des groupes finis (G groupe fini)

•Représentation V de G de dimension finie $\dim V \leftrightarrow \rho_V : G \to \mathbf{GL}(V)$.

•*Caractère* χ_V de V défini par $\chi_V(g) = \mathrm{Tr}(\rho_V(g))$, si $g \in G$. C'est la somme des valeurs propres de $\rho_V(g)$ comptées avec multiplicité ou la somme des termes diagonaux de la matrice $R_V(g)$ dans une base arbitraire.

•χ_V est constant sur les classes de conjugaison (*fonction centrale*).

•$\chi_V(1) = \mathrm{Tr}(1) = \dim V$.

•V_1 et V_2 sont *isomorphes* ($V_1 \cong V_2$) s'il existe $u : V_1 \to V_2$ linéaire bijectif tel que $u(g \cdot v) = g \cdot u(v)$, pour tout $v \in V_1$. Ceci se traduit par $u \circ \rho_{V_1}(g) = \rho_{V_2}(g) \circ u$ et donc $\rho_{V_1}(g) = u^{-1} \circ \rho_{V_2}(g) \circ u$ et $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$.

Principaux résultats

Théorème (Maschke, 1899) *Toute représentation* V *est une somme directe de représentations irréductibles.*

•$\mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ = ensemble des *caractères irréductibles* (vu aussi comme ensemble des *représentations irréductibles*), $\mathrm{R}_{\mathbf{C}}(\mathrm{G})$ espace des fonctions centrales muni de $\langle \phi_1, \phi_2 \rangle = \dfrac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \overline{\phi_1(\mathrm{g})} \phi_2(\mathrm{g}) = \int_{\mathrm{G}} \overline{\phi_1}\, \phi_2.$

Théorème (Frobenius, 1897) *Les* $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$ *forment une base orthonormale de* $\mathrm{R}_{\mathbf{C}}(\mathrm{G})$.

Applications

•$|\mathrm{Irr}(\mathrm{G})| = |\mathrm{Conj}(\mathrm{G})|$.

•$\mathrm{V} \cong \bigoplus_{\mathrm{W} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})} \langle \chi_{\mathrm{W}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle \mathrm{W}$; donc V est déterminée par son caractère.

•V est irréductible ssi $\langle \chi_{\mathrm{V}}, \chi_{\mathrm{V}} \rangle = 1$.

•La régulière V_{G} se décompose comme $\mathrm{V}_{\mathrm{G}} = \oplus_{\mathrm{W} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})} (\dim \mathrm{W})\, \mathrm{W}$, et $\sum_{\mathrm{W} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})} (\dim \mathrm{W})^2 = |\mathrm{G}|$ (formule de Burnside).

•Table des caractères de A_4.

Morphismes de représentations

•$\mathrm{u} : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ linéaire, $\mathrm{g} \cdot \mathrm{u}$ défini par $(\mathrm{g} \cdot \mathrm{u})(\mathrm{v}) = \mathrm{g} \cdot \mathrm{u}(\mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{v})$. D'où une action de G sur $\mathrm{Hom}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ espace des $\mathrm{u} : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2$ linéaires.

•$\mathrm{Hom}_\mathrm{G}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = \{\mathrm{u} : \mathrm{V}_1 \to \mathrm{V}_2, \mathrm{g}{\cdot}\mathrm{u}(\mathrm{v}) = \mathrm{u}(\mathrm{g}{\cdot}\mathrm{v})\}$ est aussi l'ensemble des points fixes de $\mathrm{Hom}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ sous l'action de G.

Proposition $\chi_{\mathrm{Hom}(\mathrm{V}_1,\mathrm{V}_2)}(\mathrm{g}) = \overline{\chi_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{g})}\, \chi_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{g})$.

•$\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}$ et $\mathrm{V}_2 = \mathbf{C} \mapsto$ *représentation duale* V^* et $\chi_{\mathrm{V}^*}(\mathrm{g}) = \overline{\chi_\mathrm{V}(\mathrm{g})}$.

$*$On choisit des bases de V_1 et V_2 dans lesquelles g est diagonal.

Théorème (Lemme de Schur, 1905) *Soient* V_1, V_2 *irréductibles.*

(i) *Si* $\mathrm{V}_1 \not\cong \mathrm{V}_2$, *alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2) = 0$.

(ii) *Si* $\mathrm{V}_1 = \mathrm{V}_2$, *alors* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{G}}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$ *est la droite des homothéties.*

Corollaire (i) *Soient* $\mathrm{V}_1 \not\cong \mathrm{V}_2$ *irréductibles. Si* $\mathrm{u} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)$, *alors* $\mathrm{M}(\mathrm{u}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \mathrm{g} \cdot \mathrm{u} = 0$.

(ii) *Soit* V *irréductible. Si* $\mathrm{u} \in \mathrm{Hom}(\mathrm{V}, \mathrm{V})$, *alors* $\mathrm{M}(\mathrm{u}) = \frac{\mathrm{Tr}(\mathrm{u})}{\dim \mathrm{V}}$.

$$*\langle \chi_{\mathrm{V}_1}, \chi_{\mathrm{V}_2} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \overline{\chi_{\mathrm{V}_1}(\mathrm{g})} \chi_{\mathrm{V}_2}(\mathrm{g}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \chi_{\mathrm{Hom}(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2)}(\mathrm{g})$$

est égal à $\mathrm{Tr}(\mathrm{u} \mapsto \mathrm{M}(\mathrm{u})) \Rightarrow$ orthonormalité des caractères.

Le théorème de la progression arithmétique

Théorème (Dirichlet, 1837) *Si* $(\mathrm{a}, \mathrm{D}) = 1$, *alors il y a une infinité de nombres premiers de la forme* $\mathrm{Dn} + \mathrm{a}$.

•Euler (1737) $\zeta(\mathrm{s}) = \sum \mathrm{n}^{-\mathrm{s}} = \prod (1 - \mathrm{p}^{-\mathrm{s}})^{-1}$ et $\lim_{\mathrm{s} \to 1} \zeta(\mathrm{s}) = +\infty$, donc $\log \zeta(\mathrm{s}) \sim \sum \mathrm{p}^{-\mathrm{s}} \to +\infty$ et donc une infinité de nombres premiers.

•Si G est commutatif et $\mathrm{W} \in \mathrm{Irr}(\mathrm{G})$, alors $\dim \mathrm{W} = 1$ et toute fonction $\phi : \mathrm{G} \to \mathbf{C}$ se décompose comme $\phi = \sum_{\chi \in \widehat{\mathrm{G}}} \widehat{\phi}(\chi)\chi$, avec $\widehat{\phi}(\chi) = \langle \chi, \phi \rangle$ (formule d'inversion de Fourier).

$\bullet \mathrm{G} = (\mathbf{Z}/\mathrm{D}\mathbf{Z})^*$; $\phi_{\mathrm{a}} : \mathrm{G} \to \mathbf{C}$ avec $\phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{a}) = 1$ et $\phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{x}) = 0$ si $\mathrm{x} \neq \mathrm{a}$.

$\bullet$Idée : prouver que $\sum \phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{p})\mathrm{p}^{-\mathrm{s}} \to +\infty$ en $\mathrm{s} = 1^+$.

$\bullet$Caractère de Dirichlet modulo D = caractère linéaire de $\mathrm{G} = (\mathbf{Z}/\mathrm{D}\mathbf{Z})^*$.

$$\bullet \phi_{\mathrm{a}} = \sum_{\chi \in \widehat{\mathrm{G}}} \langle \chi, \phi_{\mathrm{a}} \rangle \chi, \text{ et } \langle \mathbf{1}, \phi_{\mathrm{a}} \rangle = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \sum_{\mathrm{g} \in \mathrm{G}} \phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{g}) = \frac{1}{|\mathrm{G}|} \neq 0.$$

Théorème *Si* $\chi \neq \mathbf{1}$, $\sum_{\mathrm{p}} \frac{\chi(\mathrm{p})}{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}}$ *a une limite finie en* $\mathrm{s} = 1^+$.

$\bullet$Attendre les fonctions holomorphes pour la démonstration.

$$* \sum_{\mathrm{p}} \frac{\phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{p})}{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}} = \sum_{\chi} \langle \chi, \phi_{\mathrm{a}} \rangle \sum_{\mathrm{p}} \frac{\chi(\mathrm{p})}{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}} \Rightarrow \lim_{\mathrm{s} \to 1} \sum_{\mathrm{p}} \frac{\phi_{\mathrm{a}}(\mathrm{p})}{\mathrm{p}^{\mathrm{s}}} = +\infty.$$