AMPHI 5

TRANSFORMÉE DE FOURIER

Principaux résultats d'intégration

•Ensembles de mesure nulle (ou *négligeables*) et th. de Borel-Cantelli.

•Intégration des fonctions positive et théorème de convergence monotone.

•Théorème de convergence dominée

•Complétude des espaces $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$ et $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$, si $\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$.

•X ouvert $\Longrightarrow$ $\mathrm{Esc}(\mathrm{X})$, $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}(\mathrm{X})$ et $\mathscr{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathrm{X})$ denses dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$ et $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$.

•Théorème de Fubini et formule du changement de variable.

•Continuité et dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale.

Comparaison des différents modes de convergence

$\mathrm{X} \subset \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$, convergence de $\mathrm{f_n}$ vers f sur X.

•Convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple $\Longrightarrow$ convergence p.p.

•Convergence p.p. + domination $\Longrightarrow$ convergence dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$ ou $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ (th. de CV dominée).

•Convergence dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$ ou $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ $\Longrightarrow$ sous-suites convergeant p.p.

•Convergence dans $\mathrm{L}^2(\mathrm{X})$ $\Longrightarrow$ convergence dans $\mathrm{L}^1(\mathrm{X})$ si $\lambda(\mathrm{X}) < +\infty$ (Cauchy-Schwarz).

Transformée de Fourier dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^m)$

Cadre naturel $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}^m)$ ou distributions (l'an prochain).

•Si $x = (x_1, \ldots, x_m)$ et $t = (t_1, \ldots, t_m)$, on pose $x \cdot t = \sum_i x_i t_i$.

•Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^m)$, on pose $\hat{f}(x) = \int_{\mathbf{R}^m} e^{-2i\pi\, x\cdot t} f(t)\, dt$.

•$f \mapsto \hat{f}$ linéaire continue de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^m)$ dans $(\mathscr{B}(\mathbf{R}^m), \|\ \|_\infty)$ ($\|\hat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$).

•Notations : $\mathscr{F} f$ au lieu de $\hat{f}$ et $\overline{\mathscr{F}} f(x) = \hat{f}(-x)$.

•$\mathscr{F}(\mathbf{1}_{[a,b[})(x) = \int_a^b e^{-2i\pi\, tx}\, dt = \dfrac{e^{-2i\pi\, ax} - e^{-2i\pi\, bx}}{2i\pi\, x}$ appartient à $\mathscr{C}_0(\mathbf{R})$.

•Translation : $\mathscr{F}(\mathrm{f}(\mathrm{t}+\mathrm{b}))(\mathrm{x}) = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi \mathrm{x}\cdot \mathrm{b}}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{x})$.

•Dilatation : $\mathscr{F}(\mathrm{f}(\mathrm{at}))(\mathrm{x}) = |\mathrm{a}|^{-\mathrm{m}}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{a}^{-1}\mathrm{x})$.

•Multiplication par un caractère : $\mathscr{F}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{c}\cdot \mathrm{t}}\mathrm{f}(\mathrm{t}))(\mathrm{x}) = \hat{\mathrm{f}}(\mathrm{x}-\mathrm{c})$.

•Si $\mathrm{f} \in \mathrm{Esc}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, alors $\hat{\mathrm{f}} \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$.

Théorème (Riemann-Lebesgue) *Si* $\mathrm{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *alors* $\hat{\mathrm{f}} \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$.

$*\mathrm{f} \mapsto \hat{\mathrm{f}}$ est continue de $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ dans $(\mathscr{B}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}}), \|\ \|_\infty)$.

$*\mathrm{Esc}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ est dense dans $\mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$.

Transformée de Fourier et dérivation

La transformée de Fourier échange régularité et décroissance à l'infini ainsi que dérivation et multiplication par un polynôme.

Théorème (i) *Si* $\mathrm{f} \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *et si* $\partial^{\boldsymbol{\ell}}\mathrm{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *pour tout* $|\boldsymbol{\ell}| \leq \mathrm{k}$, *alors* $(1+\|\mathrm{x}\|^2)^{\mathrm{k}/2}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{x}) \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ *et*

$$\mathscr{F}(\partial^{\boldsymbol{\ell}}\mathrm{f})(\mathrm{x}) = (2\mathrm{i}\pi\mathrm{x})^{\boldsymbol{\ell}}\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{x}), \text{ si } |\boldsymbol{\ell}| \leq \mathrm{k}.$$

(ii) *Si* $(1+\|\mathrm{t}\|^2)^{\mathrm{k}/2}\mathrm{f}(\mathrm{t}) \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *alors* $\hat{\mathrm{f}} \in \mathscr{C}^{\mathrm{k}}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ *et*

$$\partial^{\boldsymbol{\ell}}\hat{\mathrm{f}} = \mathscr{F}((-2\mathrm{i}\pi\mathrm{t})^{\boldsymbol{\ell}}\mathrm{f}(\mathrm{t})), \text{ si } |\boldsymbol{\ell}| \leq \mathrm{k}.$$

L'inversion de Fourier

•G groupe localement compact commutatif (e.g. fini, $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}^{\mathrm{m}}$) et $\widehat{\mathrm{G}}$ groupe des caractères linéaires unitaires continus ($\chi_1\chi_2(\mathrm{g}) = \chi_1(\mathrm{g})\chi_2(\mathrm{g})$).

Proposition (i) *Si* $\mathrm{G} = \mathbf{R}$, *alors* $\widehat{\mathrm{G}} = \{e^{2i\pi\, xt},\ x \in \mathbf{R}\} \cong \mathbf{R}$.

(ii) *Si* $\mathrm{G} = \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$, *alors* $\widehat{\mathrm{G}} = \{e^{2i\pi\, x\cdot t},\ x \in \mathbf{R}^{\mathrm{m}}\} \cong \mathbf{R}^{\mathrm{m}}$.

(iii) *Si* $\mathrm{G} = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, *alors* $\widehat{\mathrm{G}} = \{e^{2i\pi\, nt},\ n \in \mathbf{Z}\} \cong \mathbf{Z}$.

•$\phi : \mathrm{G} \to \mathbf{C}$, transformée de Fourier $\hat{\phi} : \widehat{\mathrm{G}} \to \mathbf{C}$ avec $\hat{\phi}(\chi) = \int_{\mathrm{G}} \overline{\chi}\phi$.

•Fonction caractéristique en probabilités.

•Inversion de Fourier : $\phi = \int_{\widehat{\mathrm{G}}} \hat{\phi}(\chi)\,\chi$ (si normalisation de $\int_{\mathrm{G}}$ et $\int_{\widehat{\mathrm{G}}}$).

•Groupes finis : $\int_{\mathrm{G}}\phi = \frac{1}{|\mathrm{G}|}\sum_{\mathrm{g}\in\mathrm{G}}\phi(\mathrm{g})$ et $\int_{\widehat{\mathrm{G}}}\psi = \sum_{\chi\in\widehat{\mathrm{G}}}\psi(\chi)$, et $\phi=\sum_{\chi\in\widehat{\mathrm{G}}}\widehat{\phi}(\chi)\chi$, si $\widehat{\phi}(\chi)=\int_{\mathrm{G}}\overline{\chi}\phi$ (base orthonormée de $\mathbf{C}^{\mathrm{G}}$).

Théorème (i) *Base hilbertienne de* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ *: les* $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}}$, *pour* $\mathrm{n}\in\mathbf{Z}$.

(ii) *Si* $\mathrm{f}\in\mathrm{L}^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ (en particulier, si $\mathrm{f}\in\mathscr{C}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$), *et si* $\mathrm{n}\in\mathbf{Z}$, *soit*

$$\mathrm{c_n}(\mathrm{f})=\langle \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}},\mathrm{f}\rangle=\int_0^1\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}}\,\mathrm{dt},$$

alors $\sum_{\mathrm{n}\in\mathbf{Z}}\mathrm{c_n}(\mathrm{f})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}}\to\mathrm{f}$ *dans* $\mathrm{L}^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ *et* $\sum_{\mathrm{n}}|\mathrm{c_n}(\mathrm{f})|^2=\int_0^1|\mathrm{f}(\mathrm{t})|^2\,\mathrm{ft}$.

•Étude de $\sum_{\mathrm{n}\in\mathbf{Z}}\mathrm{c_n}(\mathrm{f})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}}\longrightarrow\mathrm{f}(\mathrm{t})$ très difficile en général.

Proposition *Si* $\phi\in\mathscr{C}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ *et si* $\sum|\mathrm{c_n}(\phi)|<+\infty$ (en particulier, si ϕ est $\mathscr{C}^1$), *alors* $\phi(\mathrm{t})=\sum\mathrm{c_n}(\phi)\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi\,\mathrm{nt}}$, *pour tout* t.

La formule de Poisson

•$\mathscr{S}(\mathbf{R}^m) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{R}^m),\ (1+\|t\|^2)^N \partial^{\boldsymbol{\ell}} f \in \mathscr{C}_0(\mathbf{R}^m), \forall \boldsymbol{\ell}, N\}$, (espace de Schwartz, contient $\mathscr{C}_c^\infty(\mathbf{R}^m)$).

Théorème (i) *Si* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R})$, *alors* $\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \hat{f}(n)$.

(ii) *Si* $f \in \mathscr{S}(\mathbf{R}^m)$, *alors* $\sum_{\omega\in\mathbf{Z}^m} f(\omega) = \sum_{\omega\in\mathbf{Z}^m} \hat{f}(\omega)$.

•$f \in \mathscr{S}$ peut être affaibli : pour $m = 1$, il suffit (par exemple) que $f \in \mathscr{C}^1$ et $f, f' = O(t^{-2})$ en $|t| = \infty$.

$*G(t) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n+t)$ est somme de sa série de Fourier (e.g. en 0).

Inversion de Fourier dans $\mathscr{S}$ et L^1

Théorème *$\mathscr{F}$ est un isomorphisme de $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ sur $\mathscr{S}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$ d'inverse $\overline{\mathscr{F}}$.*

$*$Formule de Poisson pour $\mathrm{f}(\mathrm{t}) = \phi(\mathrm{u} + 2^{\mathrm{r}}\mathrm{t})$ et $\mathrm{r} \to \infty$.

Théorème (i) *Si* $\mathrm{f}, \mathrm{g} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *alors* $\int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{g}\, \hat{\mathrm{f}} = \int_{\mathbf{R}^{\mathrm{m}}} \mathrm{f}\, \hat{\mathrm{g}}$.

(ii) *Si* $\mathrm{u} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *et si* $\hat{\mathrm{u}} \in \mathrm{L}^1(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$, *alors* $\mathrm{u} = \overline{\mathscr{F}}\hat{\mathrm{u}}$ *p.p.*

$*$Fubini pour $\mathrm{h}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \mathrm{g}(\mathrm{x})\mathrm{f}(\mathrm{t})\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\pi\, \mathrm{x}\cdot\mathrm{t}}$ pour le (i).

$*\phi \in \mathscr{C}_{\mathrm{c}}^{\infty}(\mathbf{R}^{\mathrm{m}})$. Le (i) pour $\mathrm{f} = \mathscr{F}\mathrm{u}$ et $\mathrm{g} = \phi$ (et $\overline{\mathscr{F}}$ au lieu de $\mathscr{F}$) puis $\mathrm{f} = \mathrm{u}$ et $\mathrm{g} = \overline{\mathscr{F}}\phi$ donne $\int(\overline{\mathscr{F}}\mathscr{F}\mathrm{u} - \mathrm{u})\phi = 0$.