COLLÈGE
DE
FRANCE

CHAIRE D'ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Paris, le x Octobre 78

cher Fontaine,

A titre d'entrainement, je vais essayer de t'expliquer comment on classifie les représentations à poids 0 et 1 qui sont irréductibles.

Le problème s'énonce ainsi: on part d'un corps k de caract. 0 (qui est Q_p dans le cas qui nous intéresse, mais il vaut mieux l'oublier pour le moment); on considère un groupe réductif connexe G sur k, muni :

a) d'une repr.irréductible (sur k) $\rho : G \to GL_V$, où V est un k-espace vectoriel;

b) d'un hom. $h : G_{m/C} \to G_{/C}$, où C est une extension de k (disons alg. close).

On fait les hypothèses suivantes :

i) (resp. i')) Le noyau de ρ est trivial (resp. fini).

ii) Le groupe $G_{/C}$ est engendré par les conjugués $\sigma(h)$ de h, pour σ parcourant $Aut(C/k)$.

iii) Les poids de G_m dans la représentation $\rho \circ h$ sont tous égaux à 0 et 1, les deux possibilités se présentant effectivement.

Il pourrait paraître plus naturel de faire l'hypothèse i), autrement dit de supposer que ρ est fidèle. Mais il est souvent plus commode de raisonner à isogénie près, et c'est alors l'hypothèse i') qui se présente.

Je commence par le cas suivant, moins trivial qu'on ne pourrait croire :

G est commutatif

Le groupe G est donc un tore. Soit k'/k une extension galoisienne finie, contenue dans C, sur laquelle G se déploie, et soit $\Gamma = Gal(k'/k)$. On sait que G est déterminé par son groupe des <u>caractères</u>

$$X = X(G) = \mathrm{Hom}_{k'}(G, G_m) \quad ,$$

muni de l'action naturelle de Γ dessus. On aura également besoin du groupe des <u>cocaractères</u> (comme disent Borel et Tits) :

$$Y = Y(G) = \text{dual de } X(G) = \mathrm{Hom}_{k'}(G_m, G).$$

Ces Γ-modules sont Z-libres de rang dim.G. Il est commode d'utiliser leurs tensorisés par Q :

$$X_Q = Q \otimes X \quad , \quad Y_Q = Q \otimes Y = \text{dual de } X_Q \; .$$

Sur k', la représentation ρ se décompose en représentations de degré 1, conjuguées entre elles, et de multiplicité 1; chacune de ces représentations peut être vue comme un élément de X. On en conclut que la donnée de ρ est équivalente à celle d'une <u>orbite</u> de Γ dans X; soit ω un élément de cette orbite.

D'autre part, tout homomorphisme $G_{m/C} \to G_{/C}$ est rationnel sur k', donc définit un élément de Y. On en conclut que h appartient à Y. On a donc obtenu un <u>couple</u> $(\omega, h) \in X \times Y$ (où ω n'est défini qu'à Γ-conjugaison près), avec les propriétés :

i) <u>les</u> $\gamma\omega$ $(\gamma \in \Gamma)$ <u>engendrent le</u> Z-<u>module</u> X (ou le Q-espace vectoriel X_Q si l'on veut simplement exprimer ma condition i'));

ii) <u>les</u> γh $(\gamma \in \Gamma)$ <u>engendrent le</u> Q-<u>espace vectoriel</u> Y_Q .

iii) les <u>produits scalaires</u> $\langle \gamma\omega , h \rangle$ <u>sont égaux à</u> 0 <u>et</u> 1 , les deux cas se présentant effectivement.

Ces propriétés <u>traduisent</u> les hypothèses i), ii), iii) du début.

(Remarque : cette traduction met en évidence le fait que la situation est <u>invariante par dualité de Langlands-Shimura-Taniyama</u>, i.e. par permutation de X et Y, et de ω et h - du moins si l'on utilise la condition i'). Je n'ai aucune interprétation " conceptuelle " de ce fait.)

Je vais essayer de rendre les choses un peu plus concrètes. Ne faisons pas pour l'instant l'hypothèse iii). Définissons une fonction $w : \Gamma \to Z$ par $w(\gamma) = \langle \gamma\omega \, ; h \rangle$. Je dis que la connaissance de cette fonction <u>détermine</u> à isomorphisme près le système (X, Y, ω, h). (La condition iii) signifie alors simplement que w a pour image $\{0,1\}$, i.e. correspond à une <u>partition</u> de Γ en deux ensembles $W_o = w^{-1}(0)$ et $W_1 = w^{-1}(1)$.)

Le fait que w <u>détermine</u> (X,Y,ω,h) n'est pas difficile. Par exemple, il résulte de i) que X est formé des combinaisons linéaires $\sum n_\gamma \gamma\omega$, avec $n_\gamma \in Z$, et il faut donc dire à quelle condition une telle somme est 0. Or elle est 0, d'après ii), si et seulement si son produit scalaire avec tous les $\delta^{-1}h$ est condition qui s'écrit :

$$\sum_\gamma n_\gamma \langle \gamma\omega, \delta^{-1}h\rangle = 0 \quad , \text{ i.e. } \sum_\gamma n_\gamma \langle \delta\gamma\omega, h\rangle = 0 ,$$

ou encore :

$$\sum n_\gamma\, w(\delta\gamma) = 0 \quad \text{pour tout} \quad \delta \in \Gamma .$$

En particulier, la <u>dimension</u> de G est égale au <u>rang</u> de la matrice $(w(\delta\gamma))_{\gamma,\delta\in\Gamma}$. Le <u>fixateur</u> Γ_ω de ω est l'ensemble des γ tel que $w(\delta\gamma) = w(\delta)$ pour tout $\delta\in\Gamma$, autrement dit c'est l'ensemble des γ qui fixent w pour l'action " translation à droite ". Lors que $\mathrm{Im}\, w = \{0,1\}$, Γ_ω est donc le plus grand sous-groupe de Γ tel que $W_o \Gamma_\omega = W_o$. Le <u>degré</u> de ρ est l'indice de Γ_ω dans Γ le <u>corps des endomorphismes</u> de la représentation ρ est isomorph au corps k_ω <u>fixé par</u> Γ_ω. Quant au fixateur de h (moins intéressant !) c'est évidemment le sous-groupe Γ_h de Γ formé des éléments qui fixent w à gauche; lorsque $\mathrm{Im}\, w = \{0,1\}$, c'est le plus grand sous-groupe tel que $\Gamma_h . W_o = W_o$.

(Note qu'on peut donner des exemples, même avec $\mathrm{Im}\, w = \{0,1\}$, où Y <u>n'est pas</u> engendré par les conjugués de h. J'ai fabriqué de tels exemples dans le cadre Shimura-Taniyama - cf.laïus Ribet à Rennes - et ces exemples fonctionnent également ici.)

Autre interprétation : si $T_{k'}$ désigne le tore attaché au corps k', on peut voir la matrice $(w(\delta\gamma))$ comme définissant un homomorphisme $T_{k'} \to T_{k'}$, homomorphisme qui se factorise d'ailleurs en

$$T_{k'} \xrightarrow{\text{norme}} T_{k_h} \to T_{k_\omega} \xrightarrow{\text{inj}} T_{k'} ,$$

où k_h est le sous-corps fixé par Γ_h. Les corps k_h et k_ω sont " les plus petits possibles " pour une telle factorisation (à conjugaison près). Notre groupe G est <u>l'image</u> de T_{k_h} dans T_{k_ω}. Au fond, tout ceci aurait dû (devrait ?) être expliqué dans la partie " abélienne " de mon laius à Rennes ...

(J'oubliais encore un autre point de vue : celui des "bimodules", lorsque $\mathrm{Im}\, w = \{0,1\}$. J'ai la flemme de préciser.)

Après ce petit galop d'entraînement, venons-en aux choses sérieuses :

G <u>n'est pas commutatif</u>

Ici encore, je choisis une extension galoisienne finie k'/k sur laquelle G se déploie. Je pose $\Gamma = \mathrm{Gal}(k'/k)$. Sur k', je choisis un <u>tore maximal déployé</u> T, ainsi qu'un <u>sous-groupe de Borel</u> $\underline{B}$ contenant T. A ces données sont associés :

i) un système de racines réductif, muni d'une base ;

ii) une action de Γ sur ce système.

Plus précisément :

i) Le système de racines réductif de G relativement à $(T,\underline{B})$ se compose de deux Z-modules libres $X = X(T)$, $Y = Y(T)$, duaux l'un de l'autre, munis de sous-ensembles :

$$B \subset R \subset X \quad , \quad B^\vee \subset R^\vee \subset Y ,$$

avec une bijection $\alpha \mapsto \alpha^\vee$ de R sur $R^\vee$ appliquant B sur B L'ensemble R est le <u>système de racines</u> de G (ou de sa partie semi-simple, c'est pareil), et B en est sa <u>base</u> canonique (associ au choix du sous-groupe de Borel $\underline{B}$); les éléments de $R^\vee$ sont les coracines (on écrit souvent H_α à la place de $\alpha^\vee$, surtout quand on interprète les choses en termes d'algèbres de Lie). On a $\langle\alpha , \alpha^\vee\rangle = 2$ pour tout $\alpha \in R$, et la symétrie s_α associée à α transforme un élément x de X en $x - \langle x , \alpha^\vee\rangle \alpha$. Le groupe W engendré par les s_α est le <u>groupe de Weyl</u> ; il opère sur X et Y Pour tout ceci, voir par exemple SGA 3, exp.XXI,XXII (LN 153); les autres textes standard ne parlent que du cas semi-simple.

ii) Le système ci-dessus est " canonique " : un autre choix de $(T,\underline{B})$ conduit à un système canoniquement isomorphe. Ce genre de choses est bien expliqué (dans le cas semi-simple) dans Bourbaki, LIE VIII.110. Cette canonicité entraîne que Γ <u>opère</u> sur X et en respectant la dualité entre ces espaces, ainsi que les sous-ensembles $B,R,B^\vee,R^\vee$. L'action de Γ normalise W. Je noterai W_Γ le sous-groupe de $\mathrm{Aut}(X)$ engendré par W et Γ ; c'est un quotient d'un certain produit semi-direct de Γ par W. Voir là-dessus Bourbaki, LIE VIII.227, exerc.8, ainsi que Tits, J.Crelle 247 (1971),p.196-220.

[Inversement, si $(X, \ldots)$ est un tel système, il existe un unique G_X <u>quasi-déployé</u> (i.e. ayant un Borel défini sur k) qui lui correspond. Notre G se déduit de ce G_X standard <u>par torsion</u> par un élément de $H^1(k, \operatorname{Ad} G_X)$, où $\operatorname{Ad} G_X$ est le groupe adjoint de G_X (qui est, lui, semi-simple). Lorsque $k = Q_p$, qui est le cas qui nous intéresse ici, on peut expliciter cet H^1 ; sauf erreur de ma part, il est isomorphe au H^2 du centre de $\operatorname{Ad} G_X$, lequel est un groupe fini, que l'on peut expliciter au moyen du théorème de dualité de Tate ([CG],II-22,th.2). Je ne me servirai pas de ce résultat.]

Encore quelques notations :

$X_Q = Q \otimes X$, $Y_Q = Q \otimes Y$ (comme dans le cas commutatif)

X^{++} = ensemble des $\omega \in X$ tels que $\langle \omega, \alpha^\vee \rangle \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in B$ (" poids dominants ")

Y^{++} défini de façon analogue.

L'intérêt de X^{++} provient de ce que tout élément de X est transformé par W <u>d'un élément de</u> X^{++} <u>et d'un seul</u>.

Revenons maintenant à nos ρ et h. Si l'on étend les scalaires à k', la restriction de ρ à T se décompose en somme directe de représentations de degré 1, données par des <u>poids</u>, i.e. par des éléments de X. L'ensemble de ces poids est stable par W et Γ , i.e. par W_Γ. Si l'on choisit <u>l'une</u> des composantes irréductibles de ρ sur k' , cette composante est déterminée par un <u>poids maximal</u> ω qui appartient à X^{++}, i.e. qui est dominant. Sur $\bar{k}$, la représentation ρ se décompose alors en

$$d \bigoplus_{\gamma \in \Gamma/\Gamma_\omega} V_{\gamma\omega} ,$$

où $V_{\gamma\omega}$ désigne la représentation irréductible de poids dominant $\gamma\omega$, et γ parcourt les classes à gauche de Γ modulo le fixateur Γ_ω de Γ . Quant à l'entier d, c'est <u>l'indice de Schur</u> de ρ . Le corps des endomorphismes de ρ est un corps gauche de degré d^2 sur son centre, lequel est isomorphe au corps k_ω fixé par Γ_ω . En particulier, le nombre des composantes deux à deux non isomorphes de ρ est égal à

$$\operatorname{Card} \Gamma\omega = (\Gamma : \Gamma_\omega) = [k_\omega : k] .$$

L'ensemble des <u>poids</u> de V_ω (compte non tenu des multiplicités) est le R-<u>saturé</u> de $W\omega$ (LIE VIII.125), autrement dit le plus petit sous-ensemble Λ de X qui contienne $W\omega$ et soit tel que, si $\lambda \in \Lambda$ et $\alpha \in R$, tous les $\lambda - t\alpha$, avec t entier compris entre 0 et $\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$, sont contenus dans Λ (*). Il en résulte que l'ensemble des poids de ρ est <u>le</u> R-<u>saturé de</u> $W_\Gamma \omega$. (En fait, on verra plus tard que ce saturé se réduit à $W_\Gamma \omega$, du fait que ω est " minuscule". N'anticipons pas ...)

Λ T

L'hypothèse i') (noyau de ρ fini) se traduit par :

i') <u>Le</u> Q-<u>espace vectoriel</u> X_Q <u>est engendré par la</u> W_Γ -<u>orbite de</u> ω.

Et de même, la condition i) (fidélité de ρ) se traduit par :

i) X <u>est engendré par</u> $W_\Gamma \omega$.

(Cela se déduit du <u>Lemme</u> suivant: pour qu'un homomorphisme de G dans un groupe algébrique soit injectif (resp. à noyau fini), il faut et il suffit que sa restriction à T le soit. Référence ?)

Passons maintenant à $h : G_{m/C} \to G_{/C}$. Si l'on se place sur C, on sait que tout homomorphisme de G_m dans G est conjugué (par un autom. intérieur de $G_{/C}$) à <u>un élément et un seul</u> de Y^{++}. Je me permettrai de désigner encore cet élément par h (peut-être faudrait-il noter h_C le h initial ?); cet h - là est rationnel sur k'. La condition ii) entraîne :

ii) Y_Q <u>est engendré par la</u> W_Γ -<u>orbite de</u> h.

(En effet, sinon, il y aurait un sous-groupe propre et normal de G, défini sur k, qui contiendrait h, donc aussi h_C puisque celui-ci s'en déduit par conjugaison.)

<u>Remarque</u> - Il semblerait que ii) ne reflète qu'imparfaitement l'hypothèse faite sur h_C. En fait, il n'en est rien : pars d'un h vérifiant la condition ii), et conjugue-le par un <u>point générique</u> du groupe G rationnel sur C (ce qui est possible si deg.tr.C est infini, ce qui est justement le cas pour le C de Tate - vérifie !); le h_C ainsi obtenu a alors la <u>propriété forte</u> ii) du début, c'est clair. Bien sûr, j'ignore si les h_C de la théorie de Tate sont d'un tel type, mais ça ne m'étonnerait pas.

(*) Ce R-saturé est l'intersection de <u>l'enveloppe convexe</u> de $W\omega$ (dans $R \otimes X$) avec l'ensemble des $\lambda \in X$ tels que $\lambda - \omega$ appartienne au sous-groupe de X engendré par R (LIE VIII.229, §7, exerc.1).

Enfin, on a :

iii) <u>Les produits scalaires</u> $\langle\sigma\omega , h\rangle$ ($\sigma \in W_\Gamma$) <u>sont égaux à</u> 0 <u>ou</u> 1, <u>les deux cas se présentant effectivement</u>.

Le fait que $\langle\sigma\omega , h\rangle$ soit égal à 0 ou 1 résulte de ce que $\sigma\omega$ est un poids de ρ. Si tous les $\langle\sigma\omega , h\rangle$ étaient égaux à 0, il résulterait de i) et ii) que $X = 0$, i.e. que G est réduit à un point. Si tous les $\langle\sigma\omega, h\rangle$ étaient égaux à 1, il résulterait de i) et ii) que $\omega = \sigma\omega$ pour tout $\sigma \in W_\Gamma$ et X serait isomorphe à Z, avec action triviale de W_Γ, autrement dit G serait isomorphe à G_m. On a écarté ces cas triviaux !

(Il n'est pas tout à fait évident <u>a priori</u> que iii) <u>traduise</u> l'hypothèse iii) du début, car ρ pourrait avoir d'autres poids que les $\sigma\omega$. En fait, on verra plus loin qu'il n'en est rien.)

Voici une conséquence de iii) :

iv) <u>On a</u>

$$\langle\lambda , \alpha^\vee\rangle = 0, 1 \ \underline{\text{ou}}\ -1 \qquad \underline{\text{si}}\ \lambda \in W_\Gamma\omega,\ \alpha \in R$$

$$\langle\alpha , H\rangle = 0, 1 \ \underline{\text{ou}}\ -1 \qquad \underline{\text{si}}\ H \in W_\Gamma h,\ \alpha \in R.$$

On va d'abord prouver que le <u>produit</u> $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\langle\alpha , H\rangle$ est égal à 0,1 ou -1. Pour cela, on remarque que, d'après iii) appliqué à λ et à $s_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\alpha$, on a

$$\langle\lambda, H\rangle = 0 \text{ ou } 1$$

$$\langle\lambda, H\rangle - \langle\lambda,\alpha^\vee\rangle\langle\alpha, H\rangle = 0 \text{ ou } 1.$$

Par différence, cela fait la formule que je voulais.

Cette formule établie, fixons λ et α, et choisissons $H \in W_\Gamma h$ de telle sorte que $\langle\alpha, H\rangle \neq 0$; c'est possible d'après ii). Si $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle$ est $\neq 0$, les deux entiers $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle$ et $\langle\alpha , H\rangle$ ont pour produit ± 1 ; ils sont donc tous deux égaux à 1 ou -1; on a donc démontré que $\langle\lambda ,\alpha^\vee\rangle = 0, 1$ ou -1. Le même argument (ou la " dualité de Langlands ") montre que $\langle\alpha, H\rangle = 0,1$ ou -1

Note que la propriété iv) entraîne déjà que <u>l'ensemble des poids de</u> ρ <u>est égal à</u> $W_\Gamma\omega$. En effet, il suffit de voir que $W_\Gamma\omega$ est " R-saturé " , ce qui est clair ! Il s'ensuit que <u>tous les poids de</u> V_ω <u>ont multiplicité</u> 1 (puisque c'est vrai pour le poids dominant ω); <u>tous les poids de</u> ρ <u>ont pour multipli-</u>

<u>cité l'indice de Schur</u> d , <u>et l'on a</u> $\deg(\rho) = d \,\mathrm{Card}(W_\Gamma \omega)$.

Pour exploiter iv), il est commode de <u>décomposer</u> X_Q et Y_Q . Pour cela, notons $(R_i)_{i \in I}$ les composantes simples du système de racines R, et posons $B_i = B \cap R_i$ (les B_i sont les composantes connexes du <u>graphe de Coxeter</u> de W). Notons X_i le Q-sous-espace vectoriel de X_Q engendré par R_i ; définissons de même Y_i comme engendré par $R_i^\vee$. Définissons X_c comme l'orthogonal dans de la somme directe des Y_i ; itou pour Y_c . On a des décompositio en somme directe :

$$X_Q = X_c \oplus \bigoplus_{i \in I} X_i \qquad \text{et} \qquad Y_Q = Y_c \oplus \bigoplus_{i \in I} Y_i ,$$

qui reflètent la décomposition de G (sur k') comme produit, à isogénie près, de son centre par des groupes simples G_i . Si $\lambda \in X_Q$, je noterai λ_c et $(\lambda_i)_{i \in I}$ ses composantes dans la décomposition ci-dessus; mêmes notations pour $H \in Y_Q$. On a

$$\langle \lambda , H \rangle = \langle \lambda_c , H_c \rangle + \sum_{i \in I} \langle \lambda_i , H_i \rangle .$$

La propriété (iv) montre que, si $\lambda \in W_\Gamma \omega$, on a $\langle \lambda_i , \alpha^\vee \rangle = 0, 1, -$ pour tout $\alpha \in R_i$. D'après LIE VIII.127-129, cela entraîne (si λ est dominant, i.e. si λ est de la forme $\gamma\omega$, avec $\gamma \in \Gamma$) que λ_i <u>est</u>, <u>soit</u> 0, <u>soit un poids minuscule du système de racines</u> (X_i, R_i). Le même argument montre que, si $H = \gamma h$, H_i est <u>soit</u> 0, <u>soit un copoids minuscule</u> (i.e. un poids minuscule du système dual). Tu trouveras dans Bourbaki, <u>loc.cit.</u>, prop.8 , une description très concrète des poids minuscules, ainsi que leur détermination pour les systèmes simples $A_\ell, B_\ell, C_\ell, D_\ell, E_6, E_7$ (il n'y en a pas pour G_2, F_4 , E_8). De cette description résulte ceci :

Si $\lambda \in \Gamma\omega$ (resp. $H \in \Gamma h$), soit I_λ (resp. I_H) l'ensemble des $i \in I$ tels que $\omega_i \neq 0$ (resp. $H_i \neq 0$). D'après i) et ii), on a $\Gamma . I_\lambda = \Gamma . I_H = I$ (note que Γ opère de façon naturelle sur I). Si $i \in I_\lambda$, la prop.8 de Bourbaki, LIE VIII.128, montre qu'il existe un unique $\alpha(i,\lambda) \in B_i$ tel que ω_i soit le <u>poids fondamental</u> ϖ_α relatif à $\alpha = \alpha(i,\lambda)$, i.e. tel que

$$\langle \lambda_i , \alpha^\vee \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \alpha(i,\lambda) \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \alpha(i,\lambda) \quad \text{et} \quad \alpha \in B . \end{cases}$$

De plus, le coefficient de $\check{\alpha}(i,\lambda)$ dans la plus grande racine du système $\check{R}_i$ est <u>égal à</u> 1. Dualement, si $i \in I_H$, il existe un unique $\beta(i,H) \in B_i$ tel que

$$\langle \alpha, H_i \rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta(i,H) \\ 0 & \text{si } \alpha \neq \beta(i,H) \text{ et } \alpha \in B_i \end{cases}$$

le coefficient de $\beta(i,H)$ dans la plus grande racine de R_i est 1.

Voilà l'exploitation de iv) terminée, au moins provisoirement. J'ai besoin d'un renseignement supplémentaire, lui aussi conséquence de iii). Pour l'exprimer, je rappelle d'abord que tout système de racines R muni d'une base B possède une " involution canonique " , à savoir $\varepsilon = -w_o$, où w_o est l'unique élément du groupe de Weyl qui transforme B en $-B$. Cette involution laisse stable les B_i; je la noterai $\lambda \mapsto \lambda'$. Si λ est le plus haut poids d'une représentation irréductible, $-\lambda'$ en est le plus bas poids (Bourbaki, LIE VIII.127). Ceci étant :

v) <u>Soient</u> $\lambda \in \Gamma\omega$ <u>et</u> $H \in \Gamma h$. <u>Deux cas seulement sont possibles</u>

v$_1$) $I_\lambda \cap I_H = \emptyset$, <u>auquel cas</u> $\langle w\lambda, H\rangle = \langle \lambda_c, H_c\rangle$ <u>est indépendant de</u> $w \in W$;

v$_2$) $I_\lambda \cap I_H$ <u>est réduit à un seul élément</u> $\{i\}$, <u>et l'on a</u>

(*) $$\langle \lambda_i, H_i\rangle + \langle \lambda_i', H_i\rangle = 1 ,$$

<u>où</u> λ_i' <u>est le transformé de</u> λ_i <u>par l'involution fondamentale</u> ε <u>décrite ci-dessus</u>.

Ecartons le cas v$_1$) qui est trivial. On a

$$\langle \lambda, H\rangle = \langle \lambda_c, H_c\rangle + \sum_i \langle \lambda_i, H_i\rangle$$

$$\langle w_o\lambda, H\rangle = \langle \lambda_c, H_c\rangle - \sum_i \langle \lambda_i', H_i\rangle ,$$

d'où

$$\langle \lambda, H\rangle - \langle w_o\lambda, H\rangle = \sum_i (\langle \lambda_i, H_i\rangle + \langle \lambda_i', H_i\rangle).$$

Vu iii), le membre de gauche est 0,1 ou -1. D'autre part, si $i \in I_\lambda \cap I_H$ (que nous avons supposé non vide), $\langle \lambda_i, H_i \rangle$ et $\langle \lambda'_i, H_i \rangle$ sont des nombres rationnels > 0. (Voici l'interprétation de $\langle \lambda_i, H_i \rangle$: c'est le coefficient de la racine $\beta(i,H)$ dans le poids fondamental $\lambda_i = \varpi_{\alpha(i,\lambda)}$. Que ce coefficient soit > 0 peut, soit se prouver a priori, soit simplement se vérifier sur les tables de Bourbaki LIE VI, Planches I à IX.) De plus, la somme $\langle \lambda_i, H_i \rangle + \langle \lambda'_i, H_i \rangle$ est un entier : cela résulte de ce que $\lambda_i + \lambda'_i = \lambda_i - w_0(\lambda_i)$ est un poids radiciel du système R_i, i.e. est une combinaison linéaire à coefficients dans Z des éléments de B_i. Ainsi, la contribution de tout $i \in I_\lambda \cap I_H$ à la somme $\sum_i (\langle \lambda_i, H_i \rangle + \langle \lambda'_i, H_i \rangle)$ est ≥ 1. Comme le membre de gauche est 0,1 ou -1, ce n'est possible que si le membre en question est 1, il y a un seul i dans $I_\lambda \cap I_H$, et la formule (*) est vraie. D'où v) !

Disons qu'un poids (fondamental) minuscule λ et un copoids (fondamental) minuscule H d'un système de racines irréductible (muni d'une base) forment un couple permis (ou " couple minuscule" ou " couple de niveau 1 " ? Aucune de ces terminologies ne me plaît ...) si la propriété

$$(*) \qquad \langle \lambda, H \rangle + \langle \lambda', H \rangle = 1$$

est satisfaite.

Liste des couples permis

Les notations sont celles de Bourbaki. Je note ϖ_i les poids fondamentaux du système considéré, et H_i ceux du système dual. Type A_ℓ : Les poids minuscules sont $\varpi_1, \ldots, \varpi_\ell$ (i.e. tous les poids fondamentaux sont minuscules); de même, les copoids minuscules sont les H_i, $1 \leq i \leq \ell$. L'involution canonique échange i et $\ell + 1 - i$. Les couples permis sont les (ϖ_i, H_j) tels que l'un des indices i,j soit égal à 1 ou ℓ. Autrement dit :

(ϖ_1, H_j) ; (ϖ_ℓ, H_j); (ϖ_j, H_1) ; (ϖ_j, H_ℓ).

Les produits scalaires correspondants sont respectivement

$(\ell+1-j)/(\ell+1)$; $j/(\ell+1)$; $(\ell+1-j)/(\ell+1)$; $j/(\ell+1)$.

La représentation irréductible correspondant à ϖ_j est $\wedge^j r$, où r est la représentation standard de $SL_{\ell+1}$.

<u>Type</u> B_ℓ : il y a un seul poids minuscule, le poids ϖ_ℓ (correspondant à la représentation spinorielle de $SO_{2\ell+1}$, si j'ose dire); de même, il y a un seul copoids minuscule H_1. Le couple (ϖ_ℓ, H_1) est permis. L'involution canonique est l'identité. Le produit scalaire $\langle \varpi_\ell, H_1 \rangle$ est égal à $1/2$.

<u>Type</u> C_ℓ : c'est le dual du précédent. Il y a un couple permis et un seul : (ϖ_1, H_ℓ). La représentation correspondant à ϖ_1 est la représentation standard de $Sp_{2\ell}$. Le produit scalaire $\langle \varpi_1, H_\ell \rangle$ est égal à $1/2$.

<u>Type</u> D_ℓ $(\ell \geqslant 4)$: il y a trois poids minuscules $(\varpi_1, \varpi_{\ell-1}, \varpi_\ell)$ correspondant à la représentation standard et aux deux représentations semi-spinorielles de $SO_{2\ell}$, si j'ose dire (bis). De même, il y a trois copoids minuscules : $H_1, H_{\ell-1}$ et H_ℓ. Les couples permis sont :

$\ell = 4$ - (ϖ_1, H_3), (ϖ_1, H_4), (ϖ_3, H_1), (ϖ_3, H_4), (ϖ_4, H_1), (ϖ_4, H_3) ;

$\ell \geqslant 5$ - $(\varpi_1, H_{\ell-1})$, (ϖ_1, H_ℓ), $(\varpi_{\ell-1}, H_1)$, (ϖ_ℓ, H_1).

Le produit scalaire d'un tel couple est $1/2$. L'involution canonique est l'identité si ℓ est pair; si ℓ est impair, elle fixe 1 et permute $\ell-1$ et ℓ.

<u>Les autres types n'ont pas de couple permis</u>:

<u>Type</u> E_6 : il y a deux poids minuscules (ϖ_1, ϖ_6) échangés par l'involution canonique, et deux copoids minuscules H_1 et H_6. On a $\langle \varpi_1, H_1 \rangle + \langle \varpi_1^!, H_1 \rangle = \langle \varpi_1, H_1 \rangle + \langle \varpi_6, H_1 \rangle = 4/3 + 2/3 = 2$, ce qui montre que (ϖ_1, H_1) n'est pas permis; le même argument s'applique aux autres couples.

<u>Type</u> E_7 : il y a un poids minuscule ϖ_7 et un copoids minuscule H_7. On a $\langle \varpi_7, H_7 \rangle + \langle \varpi_7^!, H_7 \rangle = \langle \varpi_7, H_7 \rangle + \langle \varpi_7, H_7 \rangle = 3/2 + 3/2 = 3$, ce qui montre que (ϖ_7, H_7) n'est pas permis.

<u>Types</u> G_2, F_4, E_8 : il n'y a pas de poids (ni de copoids) minuscule.

Telle est la classification des " couples permis ". Comme tu vois ce n'est pas bien compliqué - et ça se trouve dans la littérature (T.A.Springer, <u>Jordan Algebras and Algebraic Groups</u>, Ergebn.75, §11 - j'ai suivi à peu de choses près sa méthode).

Une conséquence de cette classification est :

vi) <u>Tous les composants irréductibles du système de racines</u> R <u>sont de type classique</u> (A, B, C ou D).

Prouvons d'abord :

vii) <u>Pour tout</u> $i \in I$, <u>il existe</u> $\lambda \in \Gamma\omega$ <u>et</u> $H \in \Gamma h$ <u>tels que</u> $I_\lambda \cap I_H = \{i\}$.

En effet, comme $I = \Gamma I_\omega$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $i \in \gamma I_\omega$, autrement dit $i \in I_\lambda$ avec $\lambda = \gamma\omega$. De même, il existe $H \in \Gamma h$ tel que $i \in I_H$. On a alors $i \in I_\lambda \cap I_H$, d'où $I_\lambda \cap I_H = \{i\}$, puisque $I_\lambda \cap I_H$ a au plus 1 élément, d'après v).

Ceci fait, on applique v_2) : le couple (λ,H) est un couple permis pour le système de racines R_i . Ce dernier est donc bien de type classique.

Un rabiot :

vi') <u>Aucun composant irréductible de</u> R <u>n'est de type</u> D_4 <u>trialitaire</u>.

(Je dis qu'un composant R_i de R est " de type D_4 trialitaire " si le stabilisateur de R_i dans Γ a pour image dans $\mathrm{Aut}(R_i)$ un groupe d'ordre 3 ou 6.)

En effet, supposons R_i trialitaire, et choisissons λ et H comme dans vii) ci-dessus. Si γ appartient au stabilisateur de i on a $(\gamma H)_i = \gamma H_i$, et il en résulte que les trois copoids minuscules de R_i sont des " H_i " , donc forment avec λ un couple permis. Mais ce n'est pas possible : la liste des couples permis de la page précédente montre que, pour tout λ minuscule de D_4 , il existe un H minuscule (à savoir celui de même indice) tel que (λ,H) ne soit pas permis.

[Il faut considérer vi') comme un complément à vi). En effet, un D_4 trialitaire ne mérite pas d'être considéré comme "classique"; il ne s'obtient pas au moyen d'algèbres à involution, par exemple.]

Les résultats ci-dessus sont ceux que j'avais vraiment en vue. Toutefois, je m'aperçois (un peu tard ...) que j'aurais eu intérêt à les formuler pour <u>une représentation</u> ρ <u>semi-simple quelconque</u> (à noyau fini - mais pas nécessairement irréductible) à poids 0 et 1. Il n'y a pratiquement rien à changer aux définitions et constructions ci-dessus: on a encore X, X_Q, Y, Y_Q, R, R_i, h, etc. La différence essentielle est que, au lieu d'avoir un poids dominant ω et ses transformés par Γ, on a un <u>ensemble fini</u> Ω <u>de poids dominants</u>, stable par Γ. On a :

(1) <u>Pour tout</u> $i \in I$, <u>il existe</u> $\omega \in \Omega$ <u>et</u> $H \in \Gamma h$ <u>tels que</u> $\omega_i \neq 0$ <u>et</u> $H_i \neq 0$.

(2) <u>Si</u> $\omega_i \neq 0$ <u>et</u> $H_i \neq 0$, <u>le couple</u> (ω_i, H_i) <u>est un couple permis</u>. <u>En particulier</u> ω_i <u>et</u> H_i <u>sont minuscules</u>, <u>et</u> R_i <u>est de type classique</u>, <u>non trialitaire</u>.

(3) <u>Si</u> $\omega \in \Omega$ <u>et</u> $H \in \Gamma h$, <u>l'ensemble des</u> $i \in I$ <u>tels que</u> $\omega_i \neq 0$ <u>et</u> $H_i \neq 0$ <u>a au plus un élément</u>.

Tout ceci peut, soit se déduire du cas irréductible, soit se démontrer directement (ce que je ferai sans doute dans la rédaction définitive).

Note aussi une démonstration directe du fait que les H_i sont, soit 0, soit minuscules : on observe que la représentation adjoint de G n'a que des poids $0,1,-1$ par rapport à un conjugué H de h (car elle est contenue dans $\rho \otimes \rho^*$); on a donc

$$\langle \alpha, H \rangle \in \{0,1,-1\} \qquad \text{pour tout } \alpha \in R,$$

ce qui montre que les composantes H_i de H sont, soit 0, soit minuscules, cf. Bourbaki, LIE VIII.127, prop.6.

Voici une application curieuse de ce qui précède :

viii) <u>Soit</u> g <u>l'algèbre de Lie de</u> G <u>sur</u> k'. <u>Soit</u> $\alpha \in R$, <u>et soit</u> x <u>un élément du sous-espace</u> g^{α} <u>de</u> g <u>correspondant à la racine</u> α. <u>Alors l'endomorphisme</u> x_V <u>de</u> V <u>défini par</u> x <u>est de carré nul</u>.

Cela résulte de la prop.7 de Bourbaki, LIE VIII.128.

En termes de groupes, on peut reformuler ce résultat ainsi : notons $\varphi_\alpha : SL_2 \to G$ l'homomorphisme attaché à une racine α (et à un épinglage de G). En composant ρ et φ_α, on obtient une représentation linéaire de SL_2 dans l'espace V. La traduction " globale" de viii) est :

viii') <u>La représentation</u> $\rho \circ \varphi_\alpha$ <u>est somme directe de représentations de degré</u> 1 <u>ou</u> 2.

(On peut préciser : si $\alpha \in R_i$, les repr. de degré 1 interviennent dans la partie fixée par G_i , et celles de degré 2 interviennent dans l'autre.)

Autre conséquence :

ix) Le groupe G n'a aucun quotient semi-simple simplement connexe distinct de $\{1\}$.

On se ramène au cas où ce quotient est simple, i.e. correspond à une composant irréductible R_i de R. Si l'on désigne par X_i (resp. Y_i) le réseau associé à ce quotient, le fait que le groupe soit simplement connexe équivaut à dire que Y_i est le réseau $Q(\check{R}_i)$ des copoids radiciels, i.e. celui engendré par $\check{R}_i$. Or, en tenant compte de ce que le groupe est un quotient de G, on voit que Y_i contient tous les H_i , pour $H \in \Gamma h$. Mais c'est impossibl car l'un au moins des H_i est minuscule, et l'on sait qu'un (co)poids minuscule n'est pas combinaison Z-linéaire des (co)racines, cf. Bourbaki, LIE VIII.128, dernière assertion de la prop.8.

En particulier, aucun quotient de G ne peut être isomorphe à SL_n, Sp_{2n} , etc (même sur un corps plus grand que k).

(J'avais d'abord essayé de prouver un résultat un peu plus fort que ix), à savoir que le centre de G est connexe. Je me suis aperçu que c'était faux ; le groupe associé à une repr.semi-spinorielle de D_ℓ , ℓ impair, fournit un contre-exemple.)

Il me faut maintenant discuter de la question suivante : ai-je bien traduit les conditions de départ ? Autrement dit, comment peut on construire les groupes G qui interviennent, avec leurs h, leurs ω et tout le fourbi ? Je vais essayer de répondre:

On va se donner :

a) une extension galoisienne finie k^*/k, de groupe de Galois Γ

b) un système de racines R, de base B, sur lequel Γ opère (en laissant stable B - cela revient à dire que l'on se donne un graphe de Dynkin, avec action de Γ dessus). On fait l'hypothèse que les composants de ce système sont tous classiques, et qu'aucun d'eux n'est un D_4 trialitaire.

Il existe des groupes semi-simples sur k correspondant à la donnée b). On peut les prendre simplement connexes. Soit G_s l'un d'eux. (Note que G_s est déterminé à torsion près par un cocycle dans $\mathrm{Ad}\, G_s$.) Le groupe G_s sera la composante semi-simple de notre groupe G.

Au point où j'en suis, je dispose des R_i (composants irréductibles de R), des B_i , des X_i et des Y_i . Je vais maintenant me donner, pour chaque $i \in I$, un élément h_i de Y_i tel que :

c_1) h_i est soit 0, soit minuscule ;

c_2) pour tout $i \in I$, il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que l'élément $\gamma^{-1} h_{\gamma i}$ de Y_i soit minuscule ;

c_3) pour tout $i \in I$, l'ensemble des $\gamma^{-1} h_{\gamma i}$ du type c_2) est " compatible " au sens suivant : il existe un poids minuscule ϖ qui forme un couple permis avec chacun des $\gamma^{-1} h_{\gamma i}$.

[Il résulte des tables des p.10-11 que, pour les types A_ℓ, B_ℓ et C_ℓ , tout ensemble de copoids minuscules est compatible au sens ci-dessus. Dans le cas D_4 , un tel ensemble est compatible s'il a au plus deux éléments. Dans le cas D_ℓ, $\ell \geqslant 5$, les ensembles compatibles sont ceux à 1 élément, et le couple $(H_{\ell-1}, H_\ell)$.]

Un tel choix est possible. Voici comment on peut faire : on choisit d'abord un système de représentants I_1 des orbites de Γ dans I. Si $i \in I_1$, et si Γ_i désigne le fixateur de i dans Γ , on choisit un ensemble $\underline{H}_i$ de copoids minuscules de R_i qui soit à la fois stable par Γ_i , et compatible ; c'est possible : si R_i est de type A, B ou C, on prend pour $\underline{H}_i$ tous les copoids minuscules; si R_i est de type D_4 , l'un des sommets terminaux de son diagramme de Dynkin est fixé par Γ_i, vu b) , et l'on prend les copoids minuscules correspondant aux deux autres sommets; si R_i est de type D_ℓ , $\ell \geqslant 5$, on prend pour $\underline{H}_i$ l'ensemble $\{H_{\ell-1}, H_\ell\}$. Si maintenant i est un élément quelconque de I, on écrit i sous la forme γj, avec $\gamma \in \Gamma$, $j \in I_1$, et l'on définit $\underline{H}_i$ comme $\gamma\, \underline{H}_j$. Ceci étant, on choisit pour h_i un élément quelconque de $\underline{H}_i$; les conditions c_1), c_2) et c_3) sont évidemment satisfaites.

(Moralité : j'aurais dû parler plus tôt de la notion de <u>compatibilité</u>.)

Les h_i définissent, après extension des scalaires, un homomorphisme $h_s : G_m \to \mathrm{Ad}\, G_s$ (note que $\mathrm{Ad}\, G_s = \mathrm{Ad}\, G$).

Je me donne maintenant un Γ-ensemble fini $\widetilde{\Omega}$ et une application $\omega \mapsto (\omega_i)$ de $\widetilde{\Omega}$ dans $X_s = \bigoplus_{i \in I} X_i$, commutant à Γ, et telle que :

d_1) pour tout $i \in I$ et tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$, ω_i est, soit 0, soit un poids minuscule de R_i ;

d_2) pour tout $i \in I$, il existe $\omega \in \widetilde{\Omega}$ tel que $\omega_i \neq 0$;

d_3) si $i \in I$, $\gamma \in \Gamma$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$ sont tels que $\omega_i \neq 0$ et $\gamma^{-1}h_{\gamma i} \neq$ le couple $(\omega_i, \gamma^{-1}h_{\gamma i})$ est permis;

d_4) pour tout $\gamma \in \Gamma$ et tout $\omega \in \widetilde{\Omega}$, l'ensemble des $i \in I$ tels que $\omega_i \neq 0$ et $\gamma^{-1}h_{\gamma i} \neq 0$ a au plus un élément.

(En fait, il suffit de vérifier d_3) et d_4) pour $\gamma = 1$: le cas général en résulte, vu l'action de Γ.)

Un tel ensemble existe. Exemple : si $i \in I$, soit Z_i l'ensemble des poids minuscules de R_i qui sont compatibles avec tous les $\gamma^{-1}h_{\gamma i}$ non nuls; cet ensemble est non vide d'après c_3); on prend pour $\widetilde{\Omega}$ la réunion des Z_i.

Jusqu'à présent, je ne me suis occupé que de la partie semi-simpl du groupe G cherché (d'où les indices " s "). Il me faut maintenant fabriquer une partie commutative qui la complète. On va voir que c'est possible (mais pas de façon unique). Pour cela, on se donne une fonction $e : \widetilde{\Omega} \to Q$ ayant les propriétés suivantes :

e_1) $e(\omega) = 0$ ou 1 s'il n'existe aucun $i \in I$ avec $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$;

e_2) $e(\omega) = 1 - \langle \omega_i , h_i \rangle$ si i est tel que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$.

(Note qu'il y a en général plusieurs fonctions e possibles, à cause de la condition e_1.)

On va maintenant fabriquer :

deux Q-espaces vectoriels X_c et Y_c, de dimension finie, en dualité, sur lesquels Γ opère (de façon compatible avec la dualité) ;

une Γ-application $\omega \mapsto \omega_c$ de $\widetilde{\Omega}$ dans X_c;

un élément h_c de Y_c ;

et cela de telle sorte que l'on ait les propriétés suivantes :

f_1) X_c est engendré par les ω_c ;
f_2) Y_c est engendré par Γh_c ;
f_3) $\langle \omega_c , h_c \rangle = e(\omega)$ pour tout $\omega \in \tilde{\Omega}$.

Ces conditions <u>déterminent</u> $(X_c, Y_c, h_c, (\omega_c))$ <u>à isomorphisme près</u>. Cela se voit comme à la page 3 de cette (longue) lettre. On remarq d'abord que, d'après f_1), tout élément x de X_c s'écrit

$$x = \sum_{\omega \in \tilde{\Omega}} x(\omega)\, \omega_c \quad , \text{ avec } \quad x(\omega) \in Q .$$

D'après f_2), une telle combinaison linéaire est nulle si et seule-ment si elle est orthogonale à tous les γh, autrement dit si

$$\sum x(\omega) \langle \gamma \omega_c , h \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma ,$$

i.e.

$$(f) \sum x(\omega)\, e(\gamma\omega) = 0 \qquad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma .$$

On peut alors <u>définir</u> X_c comme l'ensemble des $\sum x(\omega)\omega_c$ <u>modulo</u> la relation (f). On prend pour Y_c le dual de X_c . L'application $\tilde{\Omega} \to X_c$ est évidente. L'élément h_c de Y_c est défini comme la forme linéaire $\sum x(\omega)\omega_c \mapsto \sum x(\omega) e(\omega)$.

Ceci étant, on peut (enfin) définir le système de racines " ré-ductif " que l'on veut. On pose

$$X_Q = X_c \oplus \bigoplus X_i \quad , \quad Y_Q = Y_c \oplus \bigoplus Y_i \quad , \; h = (h_c, (h_i)),$$

et on envoie $\tilde{\Omega}$ dans X_Q comme on pense : $\omega \mapsto (\omega_c, (\omega_i))$.

Comme l'application $\tilde{\Omega} \to X_Q$ n'est pas nécessairement injective, j'appelle Ω son image. Les éléments de Ω sont des <u>poids dominants</u> du système de racines ainsi défini. Soit $W = W(R)$ le groupe de Weyl de R. Le point essentiel des constructions précé-dentes est :

g) <u>Pour tout</u> $\omega \in \Omega$ <u>et tout</u> $w \in W$, <u>on a</u> $\langle w\omega , h \rangle = 0$ <u>ou</u> 1.

Remarque d'abord que $w\omega = \omega_c + \sum w_i \omega_i$, où w_i désigne la i-ième composante de w. On en tire :

$$\langle w\omega, h \rangle = \langle \omega_c, h_c \rangle + \sum \langle w_i\omega_i , h_i \rangle .$$
$$= e(\omega) + \sum \langle w_i\omega_i , h_i \rangle .$$

Suppose d'abord qu'il n'y ait aucun $i \in I$ tel que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$. La somme des $\langle w_i\omega_i , h_i \rangle$ est alors nulle. Comme $e(\omega)$ est égal à 0 ou 1 d'après e_1), cela donne le résultat voulu.

Suppose maintenant qu'il existe $i \in I$ tel que $\omega_i \neq 0$ et $h_i \neq 0$. Cet i est unique, et l'on a

$$\langle w\omega, h\rangle = e(\omega) + \langle w_i\omega_i , h_i\rangle$$
$$= 1 - \langle \omega_i , h_i\rangle + \langle w_i\omega_i , h_i\rangle \quad \text{d'après } e_2) \text{ et } f_3).$$

Or les $w_i\omega_i$ sont les poids de la représentation minuscule du groupe G_i de poids dominant ω_i; le plus haut de ces poids est ω_i, le plus bas est $-\omega'_i$ (où $\omega \mapsto \omega'$ est l'involution canonique habituelle). Comme h_i est un copoids dominant, on en conclut que $\langle w_i\omega_i , h_i\rangle$ appartient à l'intervalle $\langle \omega_i , h_i\rangle, -\langle \omega'_i , h_i\rangle$. Cet intervalle est de longueur 1: cela résulte de d_3). De plus, les différences entre les divers $\langle w_i\omega_i , h_i\rangle$ (pour w_i variable) sont des entiers, car h_i est un copoids. On en conclut (ceci pourrait être énoncé en lemme sur les couples permis) que $\langle w_i\omega_i , h_i\rangle$ est égal, soit à $\langle \omega_i,h_i\rangle$, soit à $-\langle \omega'_i,h_i\rangle = \langle \omega_i,h_i\rangle - 1$. Dans le premier cas, on a $\langle w\omega ,h\rangle = 1$, et dans le second on a $\langle w\omega,h\rangle = 0$, cqfd.

Ouf! La situation radicielle du début est maintenant reconstituée. Bien sûr, on prend pour réseau X le sous-groupe de X_Q engendré par Ω, et on définit Y comme son Z-dual. On prend un groupe correspondant (il est défini à torsion intérieure près, comme je l'ai déjà signalé). Des résultats généraux connus (voir par exemple Tits) entraînent qu'il admet une représentation linéaire fidèle dont les poids (multiplicités non comprises) sont les éléments de $W.\Omega$ (leurs poids dominants sont les éléments de Ω). Si (et seulement si ...) Γ opère transitivement sur Ω, on peut choisir la représentation ci-dessus k-irréductible. Bref, on a gagné.

On peut maintenant se mettre à faire des exercices variés. Par exemple : comment calcule-t-on la dimension de la représentation ρ (supposée k-irréductible) ? Si d est l'indice de Schur, on remarque que, sur k', ρ se décompose en d fois la somme de représentations irréductibles V_ω indexées par $\omega \in \Omega$ (sur lequel Γ opère transitivement, je l'ai dit). Et la dimension de V_ω

est simplement $\prod d(\omega_i)$, où $d(\omega_i)$ est le degré de la représentation irréductible correspondant au poids ω_i (si $\omega_i = 0$, on a $d(\omega_i) = 1$; on peut donc se borner à regarder les i tels que $\omega_i \neq 0$). Finalement, on obtient :

$$\deg(\rho) = d|\Omega| \prod_i d(\omega_i).$$

(Je rappelle les degrés des représentations minuscules :

A_ℓ : $\ell+1$, $(\ell+1)\ell/2$, ... , $\binom{\ell+1}{i}$,..., $\ell+1$

B_ℓ : 2^ℓ (spinorielle !)

C_ℓ : 2ℓ (standard !)

D_ℓ : 2ℓ (standard) et $2^{\ell-1}, 2^{\ell-1}$ (semi-spinorielles).)

Voici un petit corollaire amusant :
Si $\deg(\rho)$ est <u>impair</u>, tous les composants irréductibles de R sont de type A. C'est clair sur la formule ci-dessus.

On peut aussi faire la liste des représentations minuscules ordonnées <u>par degré croissant</u>. On trouve :

degré 2 : $\underline{A}_1$
" 3 : A_2
" 4 : $A_3 = D_3$ et $\underline{B}_2 = \underline{C}_2$
" 5 : A_4
" 6 : $\underline{\underline{A}}_3 = \underline{\underline{D}}_3$, A_5 , $\underline{C}_3$
" 7 : A_6
" 8 : A_7 , $\underline{\underline{B}}_3$, $\underline{C}_4$, $\underline{\underline{D}}_4$
" 9 : A_8
" 10 : A_4 , A_9 , $\underline{C}_5$, $\underline{\underline{D}}_5$
" 11 : A_{10}
" 12 : A_{11}, $\underline{C}_6$, $\underline{\underline{D}}_6$
...

— : symplectique
= : orthogonale

(Toutes ces représentations sont des représentations " standard à l'exception de celle de B_3 en degré 8, qui est une représentation spinorielle, et de celle de A_4 en degré 10 qui est la puissance extérieure deuxième de la représentation standard.)

<u>Rabiot</u> - Le cas <u>irréductible</u>, avec $|\Omega| = 1$ (le commutant de la représentation a pour centre k). Si ω désigne l'unique élément de Ω , on a $\omega_i \neq 0$ pour tout i et d'ailleurs $\omega_{\gamma i} = \gamma\omega_i$ pour tout $\gamma \in \Gamma$: toutes les composantes de ω sont des poids minuscules. Cela entraîne <u>qu'une seule</u> des composantes h_i de h est $\neq 0$. Comme Γh engendre Y, on en déduit que Γ <u>opère tran</u> <u>sitivement</u> sur l'ensemble I. La composante semi-simple de G s'obtient donc, par restriction des scalaires ~~relativement~~ à une extension finie k_1 de k, à partir d'un k_1-groupe simple G_1 de type classique (et pas D_4 trialitaire). La représentation ρ est la " norme " (produit tensoriel de conjuguées) d'une représentation minuscule de $G_1^{(*)}$. Quant à la composante centrale de G, c'est simplement G_m ; cela se voit, soit directement, soit en utilisant la description de X_c, Y_c donnée ci-dessus, compte tenu de ce que ω_c est fixé par Γ . Bref, on a la situation bien en main ...

Salut et fraternité

J-P. Serre

PS - Une question qui me semble intéressante : quelle est la traduction en termes de mes X, Y, etc de ton " groupe multiplicatif qui donne les poids " ? C'est un élément de Y_Q . Lequel J'espère que nous pourrons en discuter un de ces jours.

(*) à un multiple entier près