Jean-Marc Fontaine
Institut Fourier
Université de Grenoble I

Saint-Martin-d'Hères, le 22 décembre 1980

Cher Tate,

Je vais essayer de te résumer ce que je sais et ce que j'aimerai savoir sur les représentations p-adiques (du groupe de Galois d'un corps local).

((sauf dans le §5 et dans l'appendice 5))

Dans toute la suite, K = corps local de car. 0 à corps résidue parfait de car. $p \neq 0$, $\overline{K}$ = une clôture algébrique de K, $C = \hat{\overline{K}}$, $G = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$; j'appelle <u>représentation p-adique</u> la donné d'un $\mathbb{Q}_p$-vectoriel de dimension finie sur lequel G opère linéairement et continûment.

Je vais découper cette lettre en 4 ou 5 parties :

- Dans <u>la première</u>, pas de grosses machines : j'utilise un théorème sur la structure du module des différentielles de l'anneau des entiers de $\overline{K}$ (qui est très facile à prouver, mais qui ne semblait pas connu) pour

  a) donner une décomposition a priori de $C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p$(groupe p-div.) en somme directe de deux sous-C-espaces vectoriels (qui n'utilise pas l'action de G) qui redonne a posteriori la décomposition de Hodge-Tate ;

  b) donner une nouvelle démonstration de "$C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p$(var.ab.) est de Hodge-Tate" qui me paraît considérablement plus simple que l'ancienne (pas besoin du th. de réduction semi-stable, ni de la notion de modèle de Néron, ni-même de la notion de groupe p-divisible).

- Dans la <u>deuxième partie</u>, je fais une espèce de classification des représentations p-adiques : outre les représentations de Hodge-Tate que tu connais bien, j'introduis ce que j'appelle les représentations de de Rham, puis les représentations cristallines (ou admissibles) et potentiellement cristallines ; on a les implications

crist. $\Rightarrow$ pot. crist. $\Rightarrow$ de Rham $\Rightarrow$ Hodge-Tate.

Pour te donner une idée, si X est une variété abélienne, tu sais bien que $V_p(X) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim X_{p^n}(\overline{K})$ est de Hodge-Tate ; mais $V_p(X)$ est aussi de de Rham ; c'est une représentation cristalline (resp. pot. cristalline) si (et probablement seulement si) X a bonne réduction (resp. pot. bonne réduction). J'espère (mais je ne sais absolument pas démontrer) que le même type de résultats est vrai pour la cohomologie étale p-adique de $X \times \overline{K}$, où X est maintenant une vaiété projective non singulière quelconque sur K.

- Dans la <u>troisième partie</u>, je vais te parler des représentations cristallines. A une telle représentation est associée un module de Dieudonné avec une filtration, mais, chose plus intéressante, cela fonctionne aussi dans l'autre sens.

Sont cristallines les $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p$(p-div.) et toute la $\otimes$-catégorie engendrée, mais ce ne sont pas les seules.

La machinerie des $\otimes$-catégories permet, partant du module de Dieudonné filtré associé à une repr. cristalline (par exemple, du module de Dieudonné filtré d'un groupe p-divisible) -et oubliant tout le reste - de déterminer, à un phénomène de torsion près, la clôture zariskienne de l'image de Galois dans la représentation. D'où un procédé (au moins théorique, on est loin du compte)

- pour déterminer quels sont les groupes algébriques, munis d'une représentation linéaire, que l'on peut obtenir à partir des groupes p-divisibles ;
- pour construire des représentations p-adiques (ou, plus exactement, pour montrer l'existence de représentations p-adiques) dont

la clôture Zariskienne de l'image de Galois est un groupe algébrique donné.

- Finalement, dans une quatrième et/ou cinquième partie, s'il me reste du courage, je te dirai un mot

-sur le travail avec Serre pour déterminer l'action de l'inertie modérée sur les représentations associées aux formes modulaires ; c'est un cas typique de représentations potentiellement cristallines, (en fait, on se ramène à travailler avec des variétés abéliennes sur $\mathbb{Q}_p$ ayant potentiellement bonne réduction) ;

-sur le travail de Wintenberger sur les extensions galoisiennes des corps locaux à groupe de Galois un groupe de Lie p-adique.

Bon ! Ready, steady, go !

1. - Formes différentielles et modules de Tate des groupes p-divisibles des variétés abéliennes.

1.1. - Proposition.- Soit $\mathcal{O}_K$ (resp. $\mathcal{O}_{\overline{K}}$) l'anneau des entiers de K (resp. $\overline{K}$) et soit $\Omega = \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ le module des $\mathcal{O}_K$-différentielles (de Kähler) de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$. L'application $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-linéaire

$$\tilde{\xi} : \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mu_{p^\infty}(\overline{K}) \longrightarrow \Omega \quad ,$$

qui à $\alpha \otimes \varepsilon$ associe $\alpha . \frac{d\varepsilon}{\varepsilon}$ est "presque" un isomorphisme : de façon précise, elle est surjective et son noyau est formé des éléments tués par $\mathfrak{d}.(\varepsilon_1 - 1)$, où $\mathfrak{d}$ est un générateur de la différente absolue de K et où ε_1 est une racine primitive p-ième de l'unité.

Démonstration : exercice !

1.2. - Soit alors J un schéma en groupes commutatif, fini et plat, de rang une puissance de p sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ et soit B' l'algèbre affine du dual de Cartier de J. Alors $J(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ s'identifie à un sous-groupe du groupe multiplicatif de l'anneau $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$; d'où une application $\mathcal{O}_{\overline{K}}$-linéaire

$$\varphi_J : \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') \quad :$$

c'est celle qui à $\alpha \otimes u$ associe $\alpha . \frac{du}{u}$.

Il se trouve que le noyau de φ_J est tué par $b.(\varepsilon_1 - 1)$ (cela résulte très facilement de la prop. 1.1). Observe d'autre part que le membre de droite se coupe en deux morceaux : on a

$$\Omega_{\mathcal{O}_K}(\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} B') = (\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')) \oplus (\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B') \quad .$$

En définissant convenablement le sous-$\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module $t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$ de $\mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathcal{O}_K} \Omega_{\mathcal{O}_K}(B')$ et le sous-$\mathcal{O}_{\overline{K}}$-module $t_J(\Omega)$ de $\Omega \otimes_{\mathcal{O}_K} B'$, on montre que l'image de φ_J est contenue dans $t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \oplus t_J(\Omega)$. Alors

$$\varphi_J : \mathcal{O}_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Z}_p} J(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \longrightarrow t^*_{J'}(\mathcal{O}_{\overline{K}}) \oplus t_J(\Omega)$$

est "presque" un isomorphisme, i.e. non seulement le noyau, mais aussi le conoyau sont tués par $b.(\varepsilon_1 - 1)$ (qui est un élément non nul de $\mathcal{O}_{\overline{K}}$ qui ne dépend pas de J).

Si maintenant H est un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$, les $\varphi_{H_{p^n}}$ vont te donner, par passage à la limite, un isomorphisme

$$C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(H) \xrightarrow{\sim} t^*_{H'}(C) \oplus t_H(C(1))$$

(j'utilise le fait que l'application $\tilde{\varepsilon}$ du n°1.1 induit un isomorphisme de $C(1) = C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\mu_{p^\infty})$ sur $\mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathrm{Hom}(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, \Omega)$).

C'est clair que ce que l'on a obtenu, c'est la décomposition de Hodge-Tate de $C \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(H)$.

1.3. - Passons maintenant aux variétés abéliennes. Soit X une variété abélienne sur K . Je choisis un prolongement propre $\mathfrak{X}$ de X sur $\mathrm{Spec}\, \mathcal{O}_K$ (je n'ai pas demandé que X ait bonne réduction, je ne demande pas que $\mathfrak{X}$ soit lisse). J'ai un accouplement

$$H^0(\mathfrak{X}, \Omega^1_{\mathfrak{X}}) \times X(\overline{K}) \longrightarrow \Omega \qquad :$$

c'est celui qui à (ω, u) associe l'image réciproque $u^*(\omega)$ de ω par u (j'ai identifié $X(\overline{K})$ à $\mathfrak{X}(\mathcal{O}_{\overline{K}})$).

Ce n'est pas tout à fait linéaire par rapport à la deuxième variable, mais ça l'est "presque" et, par passage à la limite, puis extension des scalaires, on en déduit une application K-linéaire

$$H^0(X,\Omega_X^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}_p[G]}(T_p(X),C(1)) .$$

Il n'est pas très difficile de montrer que cette application est injective et tu sais, depuis bien plus longtemps que moi, comment un argument de dualité entraîne alors d'une part que c'est un isomorphism et que d'autre part $C\otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(X)$ est de Hodge-Tate.

2. - Différents types de représentations p-adiques.

2.1 - Je vais noter Rep(G) la catégorie des représentations p-adiques. Je vais appeler sous-$\otimes$-catégorie de Rep(G) toute sous-catégorie pleine, stable par sous-objet, quotient, somme directe, produit tensoriel, dual. Je vais appeler foncteur fibre sur une telle sous-catégorie tout foncteur (à valeurs dans une catégorie additive avec noyaux et conoyaux, munie d'une notion de produit tensoriel et de dual) exact et fidèle qui "commute" au produit tensoriel et à la formation du dual.

2.2. - Soit $B_{HT} = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} C(i)$ (où $C(i)$ est ce que tout le monde, sauf toi, appelle le i-ième twist à la Tate de C). C'est, de manière évidente, une C-algèbre graduée, avec action de G compatible avec la graduation.

Ce que tout le monde appelle la théorie de Hodge-Tate, revient à dire que, pour toute représentation p-adique V ,

$$\underline{D}_{HT}(V) = (B_{HT}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$$

est un K-espace vectoriel gradué, de dimension inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbb{Q}_p$. On a égalité si et seulement si V est de Hodge-Tate. La sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}_{HT}(G)$ des représentations de Hodge-Tate est une sous-$\otimes$-catégorie et la restriction de $\underline{D}_{HT}$ à $\mathrm{Rep}_{HT}(G)$ est un foncteur fibre, à valeurs dans les K-espaces vectoriels gradués de dimension finie.

Une conjecture à toi peut être précisée en disant que, pour toute variété projective non singulière X sur K, la cohomologie étale p-adique de $X \times \overline{K}$ est de Hodge-Tate et $\underline{D}_{HT}$(coh.ét.p-adique "s'identifie" à la cohomologie de Hodge (par définition, $H^i_{Hodge}(X) = \bigoplus_{j=0}^{i} \mathrm{gr}^j H^i_{Hodge}(X)$, avec $\mathrm{gr}^j H^i_{Hodge}(X) = H^{i-j}(X, \Omega^j_X)$).

2.3. - On peut construire, par une manip sordide de vecteurs de Witt (cf. appendice 1), un corps B_{DR}, contenant $\overline{K}$, sur lequel G opère. Ce corps est complet pour une valuation discrète, son corps résiduel s'identifie à C et le gradué associé à la filtration définie par la valuation s'identifie à B_{HT}.

Si pour toute représentation p-adique V, je pose

$$\underline{D}_{DR}(V) = (B_{DR} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G ,$$

c'est un K-espace vectoriel filtré, de dimension inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbb{Q}_p$. Je dirai que V est de <u>de Rham</u> si on a l'égalité.

La sous-catégorie pleine $\underline{\mathrm{Rep}}_{DR}(G)$ des représentations de de Rham est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (et même de $\underline{\mathrm{Rep}}_{HT}(G)$) et la restriction de $\underline{D}_{DR}$ à cette catégorie est un foncteur fibre à valeurs dans les K-espaces vectoriels filtrés de dimension finie. En outre, si V est de de Rham, $\mathrm{gr}\,\underline{D}_{DR}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{HT}(V)$.

Tu as deviné que j'ai envie de conjecturer que, si X est une var. proj. non sing. sur K, la coh. ét. p-adique de $X \times \overline{K}$ est de de Rham et $\underline{D}_{DR}$(coh.ét.p-adique) "s'identifie" à la cohomologie de Hodge de X (c'est "presque" un théorème pour les var. abéliennes : la cohomologie étale p-adique est bien de de Rham ; et Bill Messing et moi avons presque construit l'identification cherchée : il reste à vérifier la commutativité d'un diagramme, mais la dualité sur les modèles de Néron n'est pas quelque chose de très agréable).

2.4. - Soit K_o le corps des fractions des vecteurs de Witt à coefficients dans le corps résiduel de K et soit σ le Frobenius absolu opérant sur K_o.

On peut définir (cf. appendice 2) un sous-anneau B de B_{DR}, stable par G, muni d'un automorphisme F, σ-semi-linéaire, commutant à l'action de G ; en outre l'application $\overline{K}$-linéaire de $\overline{K}\otimes_{K_o} B$ dans B_{DR}, déduite par extension des scalaires de l'inclusion de B dans B_{DR}, est injective, ce qui me permet d'identifier $B_K = K\otimes_{K_o} B$ et $B_{\overline{K}} = \overline{K}\otimes_{K_o} B$ à des sous-anneaux de B_{DR}.

Pour toute représentation p-adique, je pose

$$\underline{D}_{cris}(V) = (B\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \quad .$$

C'est un "module de Dieudonné filtré", i.e. un K_o-espace vectoriel (de dimension finie), D, muni

- d'une part, d'une application bijective $F : D \longrightarrow D$, σ-semi-linéaire,

- d'autre part, d'une filtration de $D_K = K\otimes_{K_o} D$ par des sous-K-espaces vectoriels.

En fait, on a $K\otimes_{K_o}\underline{D}_{cris}(V) = (B_K\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G \subset (B_{DR}\otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G = \underline{D}_{DR}(V)$, d'où, en particulier, $\dim_{K_o}\underline{D}_{cris}(V) \leq \dim_K \underline{D}_{DR}(V) \leq \dim_{\mathbb{Q}_p} V$. Je dis que V est <u>cristalline</u> si ces deux inégalités sont des égalités.

La sous-catégorie pleine $\underline{\text{Rep}}_{cris}(G)$ des représentations cristallines est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\text{Rep}}(G)$ (et même de $\underline{\text{Rep}}_{DR}(G)$) et la restriction de $\underline{D}_{cris}$ à cette catégorie est un foncteur fibre à valeurs dans les modules de Dieudonné filtrés. En outre, si V est cristalline, $K\otimes_{K_o}\underline{D}_{cris}(V)$ s'identifie à $\underline{D}_{DR}(V)$.

Ici encore, on peut conjecturer que la cohomologie étale p-adique de $X\times\overline{K}$, où X est une var. proj. non sing. sur K, <u>ayant</u>

bonne réduction, est cristalline et que $\underline{D}_{cris}$(coh.ét.p-adique) "s'identifie" à la cohomologie cristalline de X . Cela devient plus clair, si je te dis

- qu'avoir bonne réduction signifie : il existe un schéma projectif (propre, devrait suffire) lisse $\mathfrak{X}$ sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ qui prolonge X ;

- ce que j'appelle la cohomologie cristalline de X : cela sera bien évident, si je te dis

i) qu'un résultat tout récent de Messing dit que, si k est le corps résiduel de K , et si $\mathfrak{X}_1$ et $\mathfrak{X}_2$ sont deux schémas propres et lisses sur $\operatorname{Spec}\mathcal{O}_K$ tels que $\mathfrak{X}_1 \times K = \mathfrak{X}_2 \times K$, alors il existe un iso.(canonique, fonctoriel et tout) de $K_o \otimes_{W(k)} H^i_{cris}(\mathfrak{X}_1 \times k, W(k))$ sur $K_o \times_{W(k)} H^i_{cris}(\mathfrak{X}_2 \times k, W(k))$;

ii) que le résultat de Berthelot qui dit que $H^i_{DR}(\mathfrak{X}_1 \times K)$ s'identifie à $K \otimes_{W(k)} H^i_{cris}(\mathfrak{X}_1 \times k, W(k))$ si e ($= [K:K_o]$) $\leq p-1$ vient d'être étendu par Ogus à e quelconque (en utilisant un autre résultat de Berthelot !).

La conjecture précédente est un théorème pour les variétés abéliennes.

2.5. - Enfin, pour toute représentation p-adique V , la dimension du K-espace vectoriel $(B_{\overline{K}} \otimes_{\mathbb{Q}_p} V)^G$ est inférieure ou égale à celle de V sur $\mathbb{Q}_p$; je dis que V est potentiellement cristalline si on a l'égalité. Ici encore, la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}^{pot}_{cris}(G)$ des représentations p-adiques qui sont potentiellement cristallines est une sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{\mathrm{Rep}}(G)$ (et même de $\underline{\mathrm{Rep}}_{DR}(G)$) et contient les représentations cristallines. On a encore un foncteur fibre à valeurs dans la catégorie des "modules de Dieudonné potentiellement filtrés" et une conjecture évidente (à énoncer !) pour la cohomologie des variétés projectives non singulières sur K , ayant "potentiellement bonne réduction", qui est un théorème dans le cas des variétés abéliennes.

3. - Représentations cristallines.

3.1. - L'intérêt du foncteur $\underline{D}_B$, restreint à la catégorie $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ est qu'il est pleinement fidèle et induit donc une équivalence (et même une $\otimes$-équivalence) entre $\underline{\mathrm{Rep}}_{cris}(G)$ et son image essentielle que j'appelle la catégorie $\underline{MF}_{K,B}$ des modules de Dieudonné filtrés admissibles.

On dispose également d'un quasi-inverse : pour tout objet D de $\underline{MF}_{K,B}$, si $D \simeq \underline{D}_B(V)$, V s'identifie à

$$\underline{V}_B(D) = \{ b \in B \otimes_{K_0} D \mid Fb = b \text{ et } b \text{ est de filtr. } 0 \}$$

(ou, si tu préfères, si D' est le dual de D , $\underline{V}_B(D)$ est le $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel des morphismes, de modules de Dieudonné filtrés, de D' dans B).

3.2. - Ceci ne serait pleinement satisfaisant que si l'on avait une description explicite de $\underline{MF}_{K,B}$, ce qui n'est pas le cas.

Je sais cependant décrire la catégorie $\underline{MF}_K^f$ des modules de D. filtrés faiblement admissible (cf. appendice 3) qui est abélienne et je conjecture que $\underline{MF}_{K,B} = \underline{MF}_K^f$. Voici une liste de résultats dans cette direction qui sont dûs soit à Laffaille, soit à moi, soit à nous deux :

- $\underline{MF}_{K,B}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^f$, autrement dit admissible implique faiblement admissible ;

- $\underline{MF}_{K,B}$ est une sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^f$, stable par sous-objet et quotient : autrement dit si D est un objet de $\underline{MF}_{K,B}$, c'est un objet de $\underline{MF}_K^f$ et ses sous-objets (resp. ses quotients) dans $\underline{MF}_{K,B}$ sont exactement ses sous-objets (resp. ses quotients) dans $\underline{MF}_K^f$ (ceci est important, d'un point de vue théorique, car cela implique que, si par miracle - mais c'est un miracle qui se produit effectivement, comme tu vas voir dans un moment - je connais un objet D de $\underline{MF}_{K,B}$, je sais fabriquer la $\otimes$-catégorie engendrée, i.e. la plus petite sous-$\otimes$-catégorie de $\underline{MF}_{K,B}$ contenant D ; mais ce n'est rien d'autre que la catégorie des représentations linéaires de dim. finie de l'enveloppe algébrique de Galois dans la représentation p-adique à laquelle D est associée, et - d'après la thèse de Saavedra - cela signifie que je connais ce groupe algébrique, du moins à torsion près) ;

- voici maintenant quand le miracle arrive, i.e. quels sont les faiblement admissibles que je sais être admissibles : je pose $e = [K:K_o]$; soit D un module filtré faiblement admissible, soit $h = \dim_{K_o} D$, soit j le plus grand entier tel que $Fil^j D_K = D_K$, soit j' le plus petit entier tel que $Fil^{j'} D_K = 0$; alors, D est admissible

a) si $e = 1$ et $j'-j \leq p$,

b) si $e \leq p-1$ et $j'-j \leq 2$,

c) si $j'-j = 1$ (sans restriction sur e),

d) si $j'-j = 2$ et $h \leq 4$ (sans restr. sur e),

e) si $j'-j = 2$ et $\dim_K Fil^{j+1} D_K = 1$.

3.3. - J'en viens aux groupes p-divisibles.

Comme tu le sais, il y a deux foncteurs additifs pleinement fideles bien connus de la catégorie des groupes p-divisibles sur $\mathcal{O}_K$ à isogénie près

- le premier, à valeurs dans $\underline{Rep}(G)$, associe, au groupe p-divisible Γ, $\underline{V}_p(\Gamma) = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(\Gamma)$;

- le second, contravariant, est à valeurs dans les modules de Dieudonné filtrés : si Γ_k est la fibre spéciale de Γ et si $\underline{M}(\Gamma_k)$ est son module de Dieudonné, il existe une flèche canonique de

$t_K^*(\Gamma)$ dans $\underline{M}(\Gamma_k)$; alors, à Γ j'associe $\underline{D}_K(\Gamma)$ défini par

- le K_o-espace vectoriel sous-jacent est $D = K_o \otimes_{W(k)} \underline{M}(\Gamma_k)$, avec l'action naturelle de F ;
- la filtration de $D_K = K \otimes_{K_o} D = K \otimes_{W(k)} \underline{M}(\Gamma_k)$ est donnée par

$$\mathrm{Fil}^i D_K = \begin{cases} D_K & \text{si } i \leqslant 0 , \\ \text{image de } t_K^*(\Gamma) & \text{si } i = 1 , \\ 0 & \text{si } i \geqslant 2 . \end{cases}$$

Alors, si Γ est un groupe p-divsible sur $\mathcal{O}_K$, $\underline{V}_p(\Gamma)$ est une représentation cristalline, $\underline{D}_K(\Gamma)$ est un module de Dieudonné filtré admissible, $\underline{D}_K(\Gamma)$ s'identifie au dual de $\underline{D}_B(\underline{V}_p(\Gamma))$ et $\underline{V}_p(\Gamma$ s'identifie au dual de $\underline{V}_B(\underline{D}_K(\Gamma))$.

En outre, je conjecture que l'image essentielle de $\underline{D}_K$ est formée exactement des modules de Dieud. filtrés admissibles (ou faiblement admissibles) qui vérifient $\mathrm{Fil}^0 D_K = D_K$, $\mathrm{Fil}^2 D_K = 0$. C'est un théorème pour $e \leq p-1$ et il y a des résultats très partiels de Laffaille pour e quelconque : c'est O.K. pour les groupes de dimension 1 ou ceux de hauteur ≤ 4 .

3.4. - Reste à dire ce que je sais sur la clôture Zariski de l'image de Galois dans ces représentations. A vrai dire, très peu de choses convaincantes. Le problème précis est le suivant : Quels sont les couples (H,V) formés d'un groupe algébrique H sur $\mathbb{Q}_p$ et d'une représentation linéaire de dim. finie V de H qui sont tels qu'il existe une représentation p-adique admissible V_o vérifiant $(H,V) \simeq$ (env.alg. de l'image de Galois dans la rep. V_o) ? Quand peux-t'on choisir $V_o = \underline{V}_p$(grpe p-div.) ?

Ce problème se coupe en deux morceaux :

1) décrire les couples (H,V) après extension des scalaires à $\mathbb{Q}_p^{nr}$, extension maximale non ramifiée de $\mathbb{Q}_p$; cela se passe entièrement du côté modules filtrés et on a théoriquement tout ce qu'il

faut pour le résoudre (du moins dans les cas de la liste du n°3.2 où l'on sait que "faiblement admissible" = "admissible") ;

2) déterminer les couples (H,V) eux-mêmes, i.e. que peut-on dire du torseur qui fait passer du groupe algébrique du côté Dieudonné au groupe algébrique du côté galoisien ?

Sur le premier morceau

- Dans son papier aux journées de géométrie algébrique de Rennes, Serre a déterminé tous les couples $(H,V)\times \mathbb{Q}_p^{nr}$ provenant des groupes p-divisibles a priori possibles ("à priori" signifiant "en utilisant la description à la "Mumford-Tate"", i.e. que H est le plus petit sous groupe-algébrique de $GL(V)$, rationnel sur $\mathbb{Q}_p$, qui après extension des scalaires à C contient l'image du "tore à deux poids" défini par la décomposition de Hodge-Tate). Peut-être qu'en se fatigant un peu, on pourrait démontrer une réciproque ? C'est loin d'être fait !

- Serre a donné un résultat général (cf. appendice 4) qui, en un sens, dit qu'à peu près n'importe quoi est possible.

- J.-P. Wintenberger est en train de regarder en détail ce qui est possible pour les groupes p- divisibles de hauteur 4 : tout ce qui est a priori possible par Serre est effectivement possible ; en revanche, à propos de la question 2 , toutes les $\mathbb{Q}_p$-formes ne le sont pas. Ses résultats sont trop récents pour que j'ai envie d'être trop précis.

- On peut donner des exemples qui ne sont pas dans la $\otimes$-catégorie engendrée par les p-divisibles :

. j'ai montré que SL_2 , avec sa représentation naturelle était possible (au moins si $p \neq 2$, pour que l'on soit sûr d'être dans un cas où le faiblement admissible qu'on utilise est bien admissible) ;

. en appliquant le th. de Serre, on peut donner des exemples de

G_2 avec sa représentation fondamentale de degré 7 (du moins si $p \neq 2$) et de E_8 avec sa représentation adjointe (du moins si $p \neq 2,3$).

Sur le deuxième morceau, on est dans le brouillard le plus complet ; il semble que Wintenberger puisse dire certaines choses dans le cas de hauteur 4 ; il faudrait aussi essayer de comprendre une conjecture de Langlands !

3.5. - Pour en terminer avec les représentations cristallines, il faut quand même que je te donnes un résultat qui est une conséquence facile de ce qui précède et du travail de Mazur "Frobenius and the Hodge filtration" :

Supposons $e = 1$. Soit X une variété propre non singulière sur K ayant bonne réduction. On suppose $\dim X < p$ et que l'on peut choisir le prolongement propre et lisse $\mathfrak{X}$ de X sur $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_K$ pour que les $H^i(\mathfrak{X},\Omega^j_{\mathfrak{X}})$ soient sans trosion. Alors la cohomologie cristalline de X (au sens du n°2.4) est admissible. On peut donc associer à X des représentations p-adiques, à savoir les $\underline{V}_B(H^i_{cris}(X))$. Bien sûr, on ne sait pas montrer que c'est la cohomologie étale p-adique de $X \times \overline{K}$, mais ça a la bonne dimension et qu'est-ce que ça pourrait être d'autre ?

4. - Action de l'inertie modérée sur les formes modulaires.

(il s'agit d'un travail avec Serre dont tu as déjà entendu parler et qui n'est pas rédigé !). Je n'est pas la tête à cela en ce moment et je n'ai pas envie de m'apesantir la-dessus. Le résultat est le suivant

Thm : L'action de l'inertie modérée sur la représentation p-adique associée à une forme modulaire de poids $k \leq p-1$ sur $SL_2(\mathbb{Z})$ est donnée par

i) les caractères 1 et χ_1^{k-1} si a_p est une unité p-adique

ii) les caractères χ_2^{k-1} et $\chi_2^{p(k-1)}$ sinon.

(où χ_1 (resp. χ_2) désigne le (resp. un) caractère fondamental de niveau 1 (resp. 2)).

<u>Corollaire</u>. - <u>Soit</u> $\Delta_{16} = \sum_{n=1} a_n q^n$ <u>la forme modulaire parabolique de poids</u> 16, <u>pour</u> $SL_2(\mathbb{Z})$,<u>normalisée par</u> $a_1 = 1$. <u>Alors, pour tout nombre premier</u> $\ell \neq 59$, <u>il existe</u> $\varepsilon_\ell \in \{0,1,2,4\}$ <u>tel que</u>

$$a_\ell^2 \equiv \varepsilon_\ell . \ell^{15} \pmod{59} .$$

Je te rappelle, qu'une fois connue l'interprétation de cette congruence en terme de la représentation modulo 59 associée à Δ_{16} , le cor. est un exercice d'application des bornes d'Odlyzko.

Voici l'idée de la démonstration du théorème :

i) modulo p , la forme modulaire de poids k est congrue à une forme modulaire de poids 2 , f, pour $\Gamma_1(p)$ et les représentations modulo p associées à ces deux formes modulaires sont donc les mêmes.

ii) La représentation p-adique associée à f (qui est de poids 2, i.e. peut être considérée comme une forme diff. de 1° espèce) est un morceau du module de Tate de $J_{1/0}(p)$ = quotient de la jacobienne de $X_1(p)$ par celle de $X_0(p)$.

iii) $J_{1/0}(p)$ est une variété abélienne sur $\mathbb{Q}$ qui acquiert bonne réduction sur $\mathbb{Q}(\sqrt[p]{1})$. Comme ce qui nous intéresse c'est l'action du groupe de décomposition en p , on peut considérer $J_{1/0}(p)$ comme une variété abélienne sur $\mathbb{Q}_p$, ayant bonne réduction sur $\mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{1})$. Si $V = \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} T_p(J_{1/0}(p))$, c'est une représentation potentiellement cristalline, qui est entièrement déterminée par son module de Dieudonné potentiellement filtré D .

iv) D est un $\mathbb{Q}_p[F]$-module muni d'une action de $J = \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{1})/\mathbb{Q}_p)$ et d'une filtration de $D_L = L \otimes_{\mathbb{Q}_p} D$ (avec $L = \mathbb{Q}_p(\sqrt[p]{1})$. En outre l'algèbre de Hecke opère sur la situation.

v) D , comme $\mathbb{Q}_p[F]$-module, avec action de J , est déterminé dès que l'on connaît la fibre spéciale du modèle de Néron de $J_{1/0}(p) \times$ et on a assez de renseignements sur elle pour pouvoir le calculer explicitement, avec l'action de l'algèbre de Hecke (grosso modo, c'est l'étude de $X_1(p)$ modulo p faite par Wiles).

vi) Il reste à determiner la filtration de D_L ; elle doit satisfaire deux conditions

- on doit avoir un module admissible,
- l'action de l'algèbre de Hecke doit pouvoir se relever.

Il se produit alors un petit miracle, à savoir que cela détermine entièrement, à isomorphisme près, non pas le module de D. potentiellement filtré lui-même, mais son semi-simplifié.

vii) On connait donc, au moins théoriquement, la semi-simplifiée de la rep. V , donc aussi la semi-simplifiée de sa réduction modulo p (ou plus exactement de n'importe quel $\mathbb{Z}_p$-réseau stable par Galois), donc l'action de l'inertie modérée. On y arrive effectivement, mais il faut se fatiguer !

5. - <u>Extensions galoisiennes de corps locaux, à groupe de Galois un groupe de Lie p-adique</u>.

Il s'agit d'un sujet assez différent auquel j'ai commencé à réfléchir, il y a déjà longtemps, après avoir lu le papier de Sen sur les automorphismes des corps locaux. Et sur lequel Wintenberger a beaucoup travaillé. Je vais essayer de te donner rapidement quelques uns des résultats :

5.1. - Soit K un corps local (de car. 0 ou p), à corps résiduel parfait de car. $p \neq 0$, soit L une extension galoisienne de K , à groupe de Galois G un groupe de Lie p-adique de dim. finie, non nulle, le groupe d'inertie étant ouvert dans G . Soit

$$X_K^*(L) = \varprojlim_{E} E^* ,$$

pour E parcourant les extensions finies de K contenues dans L les applications de transition étant les normes. Alors $X_K^*(L)$ s'identifie au groupe multiplicatif d'un corps local $X_K(L)$ de car. p, à corps résiduel celui de L. Cette construction est fonctorielle et, en particulier, G s'identifie, en tant que groupe filtré, à un sous-groupe fermé du groupe des automorphismes continus de $X_K(L)$.

5.2. - On peut se poser la question d'une réciproque : étant donnés un corps de séries formelles $k((X))$ en une variable, à coefficients dans un corps parfait k de car. $p \neq 0$, un sous-groupe fermé G du groupe des automorphismes continus de $k((X))$, qui est un groupe de Lie p-adique et est tel que le sous-groupe des éléments qui fixent k est ouvert, à quelle condition le couple $(k((X)),G)$ peut-il s'identifier à un couple $(X_K(L),\mathrm{Gal}(L/K))$, comme en 5.1 ? Wintenberger a des réponses assez complètes. En particulier, c'est toujours le cas lorsque G est abélien (remarque, que cela implique que le théorème de Hasse-Arf est vrai pour ces groupes, ce qui dans le cas de dim. 1 redonne le thm. de Sen ; ce qui montre aussi que, en un sens, c'est une "fausse" généralisation de Hasse-Arf puisque cela consiste à appliquer d'une part cette théorie et d'autre part le "vrai" th. de Hasse-Arf (Hasse-Arf signifie : les nombres supérieurs de ramification sont des entiers)).

5.3. - Revenons à la situation de 5.1. Les propriétés fonctorielles de la construction de $X_K(L)$ sont telles qu'il y a équivalence entre l'étude des extensions algébriques séparables de L et celles de $X_K(L)$ (en particulier, par exemple, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p(\mu_{p^\infty}))$ s'identifie à $\mathrm{Gal}((\mathbb{F}_p((X)))^{\text{sép}}/\mathbb{F}_p((X)))$).

5.4 - Il existe un lien entre l'anneau R utilisé pour construire le corps B_{DR} (voir appendice 1) et $X_K(L)$: voir appendice 5.

Appendice 1 : Construction de B_{DR}.

Al.1. - Je note R l'anneau limite projective du diagramme

$$\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \longleftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \longleftarrow \cdots \longleftarrow \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}} \longleftarrow \cdots$$

(l'application de transition étant l'élévation à la puissance p-ième). Un élément x de R est donc une famille $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$, pour tout n ; l'addition et la multiplication se faisant composante par composante.

Il est commode de voir aussi R de la façon suivante : si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in R$, et si, pour tout n, je choisis un relèvement $\hat{x}_n$ de x_n dans $\mathcal{O}_C$ (ou $\mathcal{O}_{\bar{K}}$, si tu préfères, on a $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C = \mathcal{O}_{\bar{K}}/p\mathcal{O}_{\bar{K}}$) alors, pour tout entier m, la suite des $\hat{x}_{n+m}^{p^n}$ tend vers une limite $x^{(m)}$, lorsque n tend vers $+\infty$, qui ne dépend pas du choix des relèvements. L'application $x \longmapsto (x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ ansi définie est une bijection de R sur l'ensemble des suites $(x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ d'élément de $\mathcal{O}_C$ vérifiant $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$, pour tout m. Je vais m'en servir pour identifier R à cet ensemble.

En fait, R est une algèbre sur $\bar{k}$, corps résiduel de $\bar{K}$ (le plongement de $\bar{k}$ dans R est obtenu en associant à $\epsilon \in \bar{k}$ l'élément $([\epsilon^{p^{-m}}])_{m\in\mathbb{N}}$ (où $[\ ]$ désigne le représentant de Teichmüller)

Si v désigne la valuation de C normalisée par $v(p) = 1$, je pose, pour tout $x = (x^{(m)})_{m\in\mathbb{N}} \in R$, $v_R(x) = v(x^{(o)})$. Alors v_R est une valuation de R pour laquelle il est complet et le corps résiduel de R s'identifie à $\bar{k}$ (pour te donner une idée de la structure de R, on peut montrer, cf. appendice 5, que R s'identifie à l'anneau des entiers du complété d'une clôture séparable d'un corps local de car. p et de corps résiduel k, corps résiduel de K).

Al.2. - L'anneau $W(R)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans R est une $W(k)$-algèbre (et même une $W(\bar{k})$-algèbre) ; j'ai un homomorphisme de $W(k)$-algèbres

$$\theta_o : W(R) \longrightarrow \mathcal{O}_C \ :$$

c'est celui qui, à $(a_o, a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in W(R)$, associe $\sum_{n=0}^{\infty} p^n a_n^{(n)}$. Si $K_o = \mathrm{Frac}(W(k))$ et si $W_{K_o}(R) = K_o \otimes_{W(k)} W(R)$, θ_o induit, par extension des scalaires, un homomorphisme de K_o-algèbre de $W_{K_o}(R)$ sur C, que je note encore θ_o.

Le noyau de θ_o est un idéal maximal $\mathfrak{m}$ de $W_{K_o}(R)$; je note B_{DR}^+ le séparé complété de $W_{K_o}(R)$ pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique et B_{DR} est son corps des fractions.

A1.3. - Tu vois donc que B_{DR} est un corps local, dont le corps résiduel s'identifie à C. Si d désigne la valuation de B_{DR} normalisée par $d(B_{DR}^*) = \mathbb{Z}$, j'obtiens une filtration de B_{DR}, en posant

$$B_{DR}^i = \{ b \in B_{DR} \mid d(b) \geq i \} \text{, pour tout } i \in \mathbb{Z}$$

(en particulier $B_{DR}^o = B_{DR}^+$ est l'anneau des entiers).

On peut montrer (ça n'est pas évident) que, pour tout sous-groupe ouvert H de G, B_{DR}^H s'identifie à $\overline{K}^H$, ce qui permet d'identifier $\overline{K}$ à un sous-corps de B_{DR}. L'application de B_{DR}^o sur C qui prolonge θ_o par continuité, et que je note encore θ_o, n'est autre que la projection de B_{DR}^o sur son corps résiduel et sa restriction à $\overline{K}$ est l'identité.

A1.4. - Soit t un élément non nul de $T_p(\mu_{p^\infty})$. Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, tout élément de $C(i)$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $c \otimes t^i$, avec $c \in C$.

Je peux considérer t comme une suite $(\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}$ de racines de l'unité, d'ordre une puissance de p, vérifiant $(\varepsilon^{(m+1)})^p = \varepsilon^{(m)}$. En particulier, c'est un élément de R. Soit $a_t \in W(R)$ défini par $a_t = ((\varepsilon^{(m)})_{m \in \mathbb{N}}, 0, 0, \ldots, 0, \ldots)$. Il se trouve que, quitte à munir B_{DR}^o d'une topologie convenable (qui est moins fine que celle définie par la valuation d, mais pour laquelle B_{DR}^{o} est toujours séparé et complet), la série

$$\log(a_t) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}.(a_t-1)^n/n$$

converge dans B_{DR}^{o} et que son image $\mathfrak{t}$ est une uniformisante de B_{DR}.

Pour tout $i \in \mathbb{Z}$, on a donc $B_{DR}^{i} = B_{DR}^{o}.\mathfrak{t}^{i}$; l'application

$$\theta_i : B_{DR}^{i} \longrightarrow C(i) ,$$

qui à $b.\mathfrak{t}^{i}$ associe $\theta_o(b)\otimes t^{i}$ est surjective, et son noyau est B_{DR}^{i+1}. J'obtiens ainsi l'isomorphisme annoncé de $\mathrm{gr}\, B_{DR}$ sur B_{HT}

A1.5. Remarque. - Il est bien connu que je peux trouver un homomorphisme $\rho : C \longrightarrow B_{DR}^{o}$ tel que $\theta_o \circ \rho = \mathrm{id}_C$ et même tel que $\rho(x) = x$, pour tout $x \in \overline{K}$. Si je note $\hat{C}$ le sous-corps de B_{DR}^{o} image de ρ, j'ai alors $B_{DR} = \hat{C}((\mathfrak{t}))$, corps des séries formelles en $\mathfrak{t}$, à coefficients dans $\hat{C}$. Je n'ai pas la moindre idée s'il est possible ou non de choisir ρ tel que $\hat{C}$ soit stable par G (ou, ce qui revient au même, tel que ρ commute à l'action de G). S'il en était ainsi, cela impliquerait que, pour une représentation p-adique, être de de Rham équivaut à être de Hodge-Tate ; si l'on croît en outre à la conjecture reliant la cohomologie étale p-adique à la cohomologie de de Rham, le choix d'un tel ρ définirait un scindage de la filtration de Hodge sur la cohomologie de de Rham ; il est en tout cas déraisonnable de penser qu'il existe un tel ρ qui est canonique !

Appendice 2. - Définition de B.

A2.1.- Soit $\mathfrak{a}$ un idéal propre de R et soit $S_{\mathfrak{a}}$ la sous-$W(R)$-algèbre de $W_{K_o}(R)$ engendrée par les $p^{-1}[x]$, pour $x \in \mathfrak{a}$ (j'ai posé $[x] = (x,0,0,\ldots,0,\ldots) \in W(R)$). Je note $\hat{S}_{\mathfrak{a}}$ le séparé complété de $S_{\mathfrak{a}}$ pour la topologie p-adique et $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o} = K_o \otimes_{W(k)} \hat{S}_{\mathfrak{a}}$. Alors $W_{K_o}(R)$ s'identifie à un sous-anneau dense de $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$.

Si $\mathfrak{a}' \subset \mathfrak{a}$, la topologie de $W_{K_o}(R)$ induite par celle de $\hat{S}_{\mathfrak{a}',K_o}$ est plus fine que celle qui est induite par $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$. L'identité sur $W_{K_o}(R)$ se prolonge donc en un homomorphisme continu de $\hat{S}_{\mathfrak{a}',K_o}$ dans $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$ qui se trouve être injectif et que j'utilise pour identifier le premier anneau à un sous-anneau du second. Je note alors B^+ l'intersection des $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$, pour $\mathfrak{a}$ parcourant les idéaux propres de R.

J'ai une action de F sur $W(R)$:

$$F.(a_o,a_1,\ldots,a_n,\ldots) = (a_o^p,a_1^p,\ldots,a_n^p,\ldots) \ ;$$

elle se prolonge, par semi-linéarité, à $W_{K_o}(R)$ et, par continuité, à $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$. J'ai $F(\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}) = \hat{S}_{\mathfrak{a}^p,K_o}$, ce qui fait que l'action de F sur B^+ est bijective.

A2.2. - Soit $\mathfrak{a}_o = \{x \in R \mid v_R(x) \geqslant 1\}$. Il se trouve que, si l'on munit B^+_{DR} de ce que j'ai appelé, dans l'appendice 1, une topologie "convenable", $W_{K_o}(R)$ s'identifie à un sous-anneau de B^+_{DR}, dense pour cette topologie, et que, si $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}_o$, la topologie de $W_{K_o}(R)$ induite par celle de $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$ est plus fine que celle qui est induite par B^+_{DR}. D'où un homomorphisme continu de $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$ dans B^+_{DR}, qui se trouve être injectif et qui me permet d'identifier chaque $\hat{S}_{\mathfrak{a},K_o}$, donc aussi leur intersection B^+, à un sous-anneau de B^+_{DR}

A2.3. - On peut montrer que l'élément que j'ai noté $\mathfrak{t}$ dans l'appendice 1 appartient à B^+ et vérifie $F\mathfrak{t} = p\mathfrak{t}$. Je note $B = B^+[\mathfrak{t}^{-1}]$ le plus petit sous-anneau de B_{DR} contenant B^+ et $\mathfrak{t}^{-1}$; l'action de F se prolonge à B (en posant $F\mathfrak{t}^{-1} = p^{-1}\mathfrak{t}^{-1}$
Et voilà l'anneau B. Il faut se fatiguer un peu pour montrer que l'application canonique de $\bar{K} \otimes_{K_o} B$ dans B_{DR} est injective.

Appendice 3. - Modules de Dieudonné filtrés faiblement admissibles.

A3.1. - A tout module de D. filtré D j'associe deux invariants numériques :

- si $\dim_{K_o} D = 1$,

i) je note $t_H(D)$ l'unique entier i tel que $gr^i D_K \neq 0$;

ii) si $d \in D$, $d \neq 0$, et si $Fd = a.d$, je pose $t_N(D) = v_p(a)$ (cela ne dépend pas du choix de d) ;

- si $\dim_{K_o} D = h$, je pose $t_H(D) = t_H(\overset{h}{\Lambda} D)$ et $t_N(D) = t_N(\overset{h}{\Lambda} D)$ (on a aussi $t_H(D) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i.\dim_K gr^i D_K$ et on peut décrire $t_N(D)$ en terme des pentes de D).

Je dis alors qu'un module de Dieud. filtré D est <u>faiblement admissible</u> s'il vérifie les deux conditions suivantes

i) $t_H(D) = t_N(D)$;

ii) pour tout sous-K_o-espace vectoriel D' de D , stable par F , on a $t_H(D') \leq t_N(D)$ (je munis le sous-K-espace vectoriel $D'_K = K \otimes_{K_o} D'$ de $D_K = K \otimes_{K_o} D$ de la filtration induite par celle de D_K).

Il est facile de voir que la catégorie des modules de Dieud. filtrés faiblement admissible $\underline{MF}_K^f$ est abélienne.

Si D est faiblement admissible, les sous-objets de D , dans $\underline{MF}_K^f$, sont les sous-K_o-espaces vectoriels D' de D stables par F qui vérifient $t_H(D') = t_N(D')$.

A3.2. <u>Remarques</u>.

a) Dans la pratique, les conditions d'admissibilité faible sont relativement faciles à vérifier ou à satisfaire. Si l'on part d'un K_o-espace vectoriel de dimension finie, avec action de F , et si l'on cherche quelles sont les filtrations sur D_K qui sont faiblement admissibles, on constate

i) que la condition (i) porte sur les dimensions des $gr^i D_K$;

ii) que si l'on impose les dimensions des $gr^i D_K$ de façon que cette condition soit satisfaite, alors toute filtration "suffisamment générale" convient (si D est un $K_o[F]$-module simple, toute filtration convient vraiment).

b) Si mes conjectures sont vraies, il doit être vrai que le produit tensoriel de deux modules filtrés faiblement admissibles est encore faiblement admissible. Ce n'est pas du tout évident a priori ; mais, lorsque $e = 1$, c'est un théorème, dû à Laffaille.

c) Dans cet ordre d'idées, voici une question bizarre : Soit E un corps (quelconque) et soit K une extension (arbitraire) de E. Je considère la catégorie dont les objets sont les E-espaces vectoriels de dimension finie D_o, équippés avec une filtration (décroissante, à valeurs dans $\mathbb{Z}$) par des sous-K-espaces vectoriels de $D_K = K \otimes_E D_o$. Je dis qu'un tel objet est faiblement admissible si

- d'une part, $\sum_{i \in \mathbb{Z}} i . \dim_K \mathrm{gr}^i D_K = 0$,
- d'autre part, pour tout sous-E-espace vectoriel D'_o de D_o, j'ai $\sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim_K \mathrm{gr}^i D'_K \leq 0$ (avec la filtration induite sur $D'_K = K \otimes_E D'_o$).

Il est facile de voir que c'est une catégorie abélienne E-linéaire. [Lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et K est un corps local, cette catégorie s'identifie à une sous-catégorie pleine de $\underline{MF}_K^f$: celle formée des D tels que, si l'on pose $D_o = \{ d \in D \mid Fd = d \}$, la flèche évidente de $K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_o$ dans D (qui est toujours injective) est surjective ; si le corps résiduel de K est algébriquement clos, cela revient à dire que D est "de pente 0".

D'où la question : cette catégorie est-elle stable par produit tensoriel ? (la réponse est oui si $E = \mathbb{Q}_p$ et $K = \mathrm{Frac}(W(k))$, avec k corps parfait de car. p, grâce à Laffaille !). Si oui, c'est la catégorie des repr. linéaires de dim. finie d'un groupe proalgébrique défini sur E. Existe-t'il une interprétation raisonnable de ce groupe ?

Appendice 4. - Sur certaines représentations admissibles de pente 0 (d'après J.-P. Serre).

Je considère la situation suivante : K est un corps local, extension de $\mathbb{Q}_p$. Je me donne un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel D_o de dimension finie. On se donne aussi un sous-groupe algébrique H de $GL(D_o)$, que l'on suppose semi-simple déployé. On suppose le H-module D_o irréductible. On se donne enfin un morphisme

$$\rho : \mathbb{G}_m \longrightarrow H$$

(défini sur $\mathbb{Q}_p$) et on suppose que l'image T de $\mathbb{G}_m$ dans H n'est contenue dans aucun sous-groupe distingué de H, distinct de H (si H est simple, cela revient à demander que T ne soit p trivial). Le morphisme ρ fournit une graduation de D_o :

$D_o = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} gr^i D_o$, avec $gr^i D_o = \{ d \in D \mid \rho(\lambda).d = \lambda^i d$, si $\lambda \in \mathbb{Q}_p^* \}$

A tout $h \in H(K)$, on associe un module de Dieudonné filtré D_h

- le K_o-espace vectoriel sous-jacent est $K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_o$, avec action de F donnée par $F(a \otimes d) = a \otimes d$;
- la filtration de $D_{K,h} = K \otimes_{K_o} (K_o \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_o) = K \otimes_{\mathbb{Q}_p} D_o$ est définie pa

$$Fil^i D_{K,h} = \bigoplus_{j \geq i} h(K \otimes_{\mathbb{Q}_p} gr^i D_o) .$$

Théorème. - Il existe un entier N tel que, si $[K:\mathbb{Q}_p] \geq N$, alors l'ensemble des $h \in H(K)$ tels que

i) D_h est faiblement admissible,

ii) le groupe algébrique associé à D_h est H,

contient un ouvert dense de $H(K)$.

En particulier, si $e = 1$ (i.e. si $K = K_o$) et si D_o, H et ρ sont tels que, si j (resp. j') est le plus petit (resp. grand) des entiers i tels que $gr^i D_o \neq 0$, on ait $j'-j < p$, alors, pour D_h comme dans le théorème, D_h est admissible et est donc de la forme $\underline{D}_B(V_h)$, pour une certaine représentation p-adique cristalline V_h ; si je note H_h l'enveloppe algébrique de l'image de Galois dans cette représentation, quitte à étendre les scalaires à une extension finie non ramifiée convenable de $\mathbb{Q}_p$, les couples (H,D_o) et (H_h,V_h) deviennent isomorphes.

Appendice 5. - Relations entre $X_K(L)$ (n°5.1) et l'anneau R (n°A1.1.).

Je reprend les hypothèses et notations du n°5.1 . Si M est une extension finie séparable de L , on peut encore définir le corps $X_K(M)$ (dont le groupe multiplicatif est la limite projective des groupes multiplicatifs des extensions finies de K contenues dans M , avec les normes comme applications de transition). Si M' est une extension finie séparable de M , $X_K(M')$ s'identifie à une extension finie séparable de $X_K(M)$; si M'/M est galoisienne, il en est de même de $X_K(M')/X_K(M)$ et les deux groupes de Galois s'identifient.

Si je choisis une clôture séparable $\overline{K}$ de K , $\varinjlim X_K(M)$, pour M parcourant les extensions finies de L contenues dans $\overline{K}$, est une clôture séparable de $X_K(L)$; si K est de car. 0 , l'anneau des entiers de la complétion de cette clôture séparable s'identifie à l'anneau R défini en A1.1 .

Bibliographie commentée.

§ 1.

[1] J.-M. Fontaine, Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, à paraître.

(Contient les détails et les démonstrations de ce que je t'ai raconté dans le § 1)

§ 2.

La construction de B_{HT}, B_{DR} et B, quelques généralités sur les représentations p-adiques de Hodge-Tate, de Rham, cristallines et pot. cristallines et les énoncés des conjectures sur la cohomologie des variétés algébriques sur les corps locaux sont dans

[2] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, à paraître.

§ 3.

Les généralités sur les représentations cristallines (appelées B-admissibles) et les modules (de Dieudonné) filtrés se trouve dans

[3] J.-M. Fontaine, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, n°65, Société mathématique de France, Paris, 1979, p. 3-80.

Le fait que cela se passe pour les groupes p-divisibles comme je te l'ai indiqué au n°3.3 se trouve indiqué dans [2] comme conséquence de l'étude des groupes p-divisibles faite dans

[4] J.-M. Fontaine, Groupes p-divisibles sur les corps locaux, Astérisque, n°47-48, Société mathématique de France, Paris, 1977.

Les résultats du type"faiblement admissible implique admissible" du n°3.2 se trouvent :

- pour (a) dans :

[5] J.-M. Fontaine et G. Laffaille, Construction de représentations p-adiques, en préparation (c'est complètement rédigé, mais totalement indigeste, et on voudrait essayer de l'arranger un peu).

- pour (b) , c'est une conséquence de :

[6] G. Laffaille, Groupes p-divisibles et modules filtrés : le cas peu ramifié, Bull. Soc. Math. de France, 108 (1980), 187-206.

- pour (c) , c'est une trivialité : les représentations p-adiques que l'on obtient sont, "à un twist à la Tate près", les représentations non ramifiées.

- pour (d) , c'est une conséquence d'un travail de Laffaille sur les groupes p-divisibles, travail difficilement publiable en raison de la complexité des calculs.

- pour (e) , c'est encore une conséquence d'un travail de Laffaille sur les groupes p-divisibles :

[7] G. Laffaille, Construction de groupes p-divisibles : le cas de dimension 1 , in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, n°65, Société mathématique de France, Paris 1979, p.103-123.

Les résultats de Serre annoncés p.12, ligne 7, se trouvent dans

[8] J.-P. Serre, Groupes algébriques associés aux modules de Hodge-Tate, in Journées de Géométrie Algébrique de Rennes, Astérisque, n°65, Société mathématique de France, Paris 1979, p.155-187.

Le résultat de Serre qui suit et est expliqué dans l'appendice 4 se trouve dans une lettre que Serre m'a envoyée.

Enfin les résultats de Wintenberger sur le cas de hauteur 4 ne sont pas encore rédigés.

§ 4.

Les seules rédactions qui existent sont des échanges de lettres entre Serre et moi.

§ 5.

Il y a des notes aux C.R.A.S. :

[9] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger, Le "corps des normes" de certaines extensions algébriques des corps locaux, C.R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), p.367-370.

[10] J.-M. Fontaine et J.-P. Wintenberger, Extensions algébriques et corps des normes des extensions APF des corps locaux, C.R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), p.441-444.

[11] J.-P. Wintenberger, Extensions de Lie et groupes d'automorphismes des corps locaux de caractéristique p, C. R. Acad. Sci. Paris, 288 (1979), p. 477-479.

[12] J.-P. Wintenberger, Extensions abéliennes et groupes d'automorphismes des corps locaux, C R Acad. Sci. Paris, 290 (1980), p 201-203.

la thèse de 3° cycle de Wintenberger

[13] J.-P. Wintenberger, automorphismes et extensions galoisiennes des corps locaux, thèse de 3e cycle, Université de Grenoble I, Institut Fourier (1978)

et deux articles de Wintenberger en préparation

[14] J.-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications.

[15] J.-P. Wintenberger, Ramification dans les extensions de Lie.

Ouf !

Je te souhaite beaucoup de neige et beaucoup de soleil à Saint-Véran.

Bien à toi

Jean Marc Fontaine