AMPHI 9

THÉORÈME DES NOMBRES PREMIERS

La fonction ζ dans le plan complexe

Théorème (i) $\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{n}^{-\mathrm{s}}$ *est holomorphe sur* $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$.

(ii) *Si* $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$, *le produit* $\prod_{\mathrm{p}}(1 - \mathrm{p}^{-\mathrm{s}})^{-1}$ *est convergent et égal à* $\zeta(\mathrm{s})$.

(iii) $\zeta'(\mathrm{s})/\zeta(\mathrm{s}) = -\sum_{\mathrm{p}} \sum_{\nu \geq 1} (\log \mathrm{p})\mathrm{p}^{-\nu \mathrm{s}}$.

•ζ ne s'annule pas sur $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$.

Théorème ζ *admet un prolongement méromorphe à* $\mathbf{C}$, *holomorphe en dehors d'un pôle simple en* $\mathrm{s} = 1$ *de résidu* 1.

L'équation fonctionnelle de la fonction ζ, Riemann (1858)

Théorème *La fonction ζ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\zeta(\mathrm{s}) = 2 \cdot (2\pi)^{\mathrm{s}-1} \cdot \Gamma(1-\mathrm{s}) \cdot \sin(\pi \mathrm{s}/2) \cdot \zeta(1-\mathrm{s}).$$

$$\xi(\mathrm{s}) = \xi(1-\mathrm{s}), \quad \text{avec } \xi(\mathrm{s}) = \pi^{-\mathrm{s}/2}\Gamma(\mathrm{s}/2)\zeta(\mathrm{s}).$$

•Hors de $0 \leq \mathrm{Re}(\mathrm{s}) \leq 1$ (*bande critique*), *zéros triviaux* en $-2\mathrm{n}$, $\mathrm{n} \in \mathbf{N}^*$.

•*Hyp. de Riemann* (1858) : $\zeta(\mathrm{s}) = 0$ et $0 \leq \mathrm{Re}(\mathrm{s}) \leq 1 \Rightarrow \mathrm{Re}(\mathrm{s}) = \frac{1}{2}$.

•Existence d'un prolongement = petit miracle.

La conjecture d'Artin

•Si $\rho : \mathrm{Aut}(\mathbf{C}) \to \mathbf{GL}_{\mathrm{d}}(\mathbf{C})$ morphisme de groupes, fonction L d'Artin

$$\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s}) = \prod_{\mathrm{p}} \frac{1}{1 + \mathrm{b}_{\mathrm{p},1}\mathrm{p}^{-\mathrm{s}} + \cdots + \mathrm{b}_{\mathrm{p},\mathrm{d}}\mathrm{p}^{-\mathrm{ds}}},$$

où $\mathrm{b}_{\mathrm{p},\mathrm{d}} \neq 0$ sauf pour un nombre fini de p,

les zéros de $1 + \mathrm{b}_{\mathrm{p},1}\mathrm{T} + \cdots + \mathrm{b}_{\mathrm{p},\mathrm{d}}\mathrm{T}^{\mathrm{d}}$ sont des racines de l'unité.

Si $\frac{1}{1+\mathrm{b}_{\mathrm{p},1}\mathrm{T}+\cdots+\mathrm{b}_{\mathrm{p},\mathrm{d}}\mathrm{T}^{\mathrm{d}}} = 1 + \mathrm{a}(\mathrm{p})\mathrm{T} + \mathrm{a}(\mathrm{p}^2)\mathrm{T}^2 + \cdots,$

alors $\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s}) = \sum \mathrm{a}_{\mathrm{n}}\mathrm{n}^{-\mathrm{s}}$, avec $\mathrm{a}_{\mathrm{n}} = \prod \mathrm{a}(\mathrm{p}^{\mathrm{r}_{\mathrm{p}}})$ si $\mathrm{n} = \prod \mathrm{p}^{\mathrm{r}_{\mathrm{p}}}$.

•$\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s})$ série de Dirichlet holomorphe sur $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > 1$.

•Si $\mathrm{d} = 1$ et $\rho(\mathrm{g}) = 1$ pour tout $\mathrm{g} \in \mathrm{Aut}(\mathbf{C})$, alors $\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s}) = \zeta(\mathrm{s})$.

Conjecture (Artin 1923) *si ρ est irréductible et non triviale,* $\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s})$ *admet un prolongement holomorphe à* $\mathbf{C}$.

•Argument probabiliste : devrait s'arrêter à $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) > \frac{1}{2}$.

•OK si $\mathrm{d} = 1$: $\mathrm{L}(\rho, \mathrm{s}) = \mathrm{L}(\chi, \mathrm{s})$ avec χ caractère de Dirichlet (Kronecker(1853)-Weber(1886)).

•Presque OK si $\mathrm{d} = 2$ (Khare-Wintenberger octobre 2008).

•Gigantesque programme (Langlands 1968) pour d quelconque.

La stratégie de la preuve du théorème des nombres premiers

Théorème $\pi(\mathrm{x}) = |\{\mathrm{p} \in \mathscr{P},\ \mathrm{p} \leq \mathrm{x}\}| \sim \mathrm{x}/\log \mathrm{x}.$

•Argument heuristique d'Euler (1707-83), tables de Gauss (1777-1855).

•Démonstration en 1896 (Hadamard et de la Vallée Poussin) suivant une stratégie de Riemann (1858).

•Démonstration élémentaire en 1949 (Erdös et Selberg).

•$\sum_{\mathrm{n}\leq \mathrm{x}} \mathrm{a_n}$ relié à $\sum \mathrm{a_n} \mathrm{n}^{-\mathrm{s}}$, mais $\sum_{\mathrm{p}\in\mathscr{P}} \mathrm{p}^{-\mathrm{s}}$ pas agréable.

•$-\zeta'(\mathrm{s})/\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{\mathrm{n}} \Lambda(\mathrm{n})\mathrm{n}^{-\mathrm{s}}$, et $\Lambda(\mathrm{n}) = \log \mathrm{p}$, si $\mathrm{n} = \mathrm{p}^{\nu}$, $= 0$ sinon.

•$\psi(\mathrm{x}) = \sum_{\mathrm{n}\leq \mathrm{x}} \Lambda(\mathrm{n}), \quad \psi_1(\mathrm{x}) = \int_0^{\mathrm{t}} \psi(\mathrm{t})\,\mathrm{dt} = \sum_{\mathrm{n}\leq \mathrm{x}} \Lambda(\mathrm{n})(\mathrm{x}-\mathrm{n})$

$*\pi(\mathrm{x}) \sim \mathrm{x}/\log \mathrm{x} \Leftrightarrow \psi(\mathrm{x}) \sim \mathrm{x} \Leftrightarrow \psi_1(\mathrm{x}) \sim \mathrm{x}^2/2.$

$*$Si $\mathrm{x} > 1$, alors $\psi_1(\mathrm{x}) = \dfrac{1}{2\mathrm{i}\pi} \displaystyle\int_{2-\mathrm{i}\infty}^{2+\mathrm{i}\infty} \frac{-\zeta'(\mathrm{s})}{\zeta(\mathrm{s})} \frac{\mathrm{x}^{\mathrm{s}+1}}{\mathrm{s}(\mathrm{s}+1)}\,\mathrm{ds}.$

$$*\psi_1(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{x}^2}{2} - \frac{\zeta'(0)}{\zeta(0)}\mathrm{x} + \frac{\zeta'(-1)}{\zeta(-1)} - \sum_{\zeta(\rho)=0,\,\mathrm{Im}(\rho)<2} \frac{\mathrm{v}_\rho(\zeta)\mathrm{x}^{\rho+1}}{\rho(\rho+1)}$$

et $\displaystyle\sum_{\zeta(\rho)=0,\,\mathrm{Im}(\rho)<2} \frac{\mathrm{v}_\rho(\zeta)}{\rho(\rho+1)}$ est absolument convergente.

$*\zeta$ ne s'annule pas pour $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) \geq 1$.

•Hypothèse de Riemann $\Rightarrow \psi_1(\mathrm{x}) - \mathrm{x}^2/2 = \mathrm{O}(\mathrm{x}^{3/2}) \Rightarrow$ terme d'erreur dans le théorème des nombres premiers.

Non annulation sur la droite $\mathrm{Re}(s) = 1$

Lemme *Si* $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$*, et si* $|z| < \inf(1, |\alpha|^{-1}, |\beta|^{-1}, |\alpha\beta|^{-1})$*, alors*

$$\frac{1 - \alpha\beta z^2}{(1 - z)(1 - \alpha z)(1 - \beta z)(1 - \alpha\beta z)} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + \cdots + \alpha^n)(1 + \cdots + \beta^n) z^n.$$

Proposition *Si* $t \in \mathbf{R}$*, alors* $F(s) = \zeta(2s)^{-1}\zeta(s)^2\zeta(s + it)\zeta(s - it)$ *est une série de Dirichlet à coefficients positifs.*

•Thèorème de Landau $\Rightarrow$ contradiction en $s = 1/2$, si $\zeta(1 + it) = 0$.

Une formule intégrale pour ψ_1

•Si $x > 1$, alors $\psi_1(x) = \dfrac{1}{2i\pi}\displaystyle\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds.$

$$*\sum_{n\geq 1} \left|\frac{\Lambda(n) n^{-s} x^{s+1}}{s(s+1)}\right| = \frac{|\zeta'(2)/\zeta(2)| x^3}{|s(s+1)|}, \text{ si } \mathrm{Re}(s) = 2$$

$$\text{et } \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \left|\frac{ds}{s(s+1)}\right| = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{|2+it||3+it|} < +\infty$$

$$\text{donc } \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \frac{-\zeta'(s)}{\zeta(s)} \frac{x^{s+1}}{s(s+1)}\, ds = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2i\pi}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} \Lambda(n) \frac{x^{s+1} n^{-s}}{s(s+1)}\, ds.$$

∗On conclut par un calcul de résidus.

La fonction ζ en dehors de la bande critique

La formule de Stirling et les équations fonctionnelles

$$\zeta(s) = 2 \cdot (2\pi)^{s-1} \cdot \Gamma(1-s) \cdot \sin(\pi s/2) \cdot \zeta(1-s)$$
$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \log(2\pi) + \frac{\pi}{2}\,\frac{\cos(\pi s/2)}{\sin(\pi s/2)} - \frac{\Gamma'(1-s)}{\Gamma(1-s)} - \frac{\zeta'(1-s)}{\zeta(1-s)}$$

Impliquent les majorations

$|\zeta(a+it)| \leq C(a)|t|^{(1/2)-a}$, si $a \leq -1$ et $|t| \geq 1$.

$|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq C + \log|s|$, si $\mathrm{Re}(s) \leq -1$ et $|s+2k| \geq 1/2$, si $k \in \mathbf{N}$.

La fonction ζ dans la bande critique

Proposition (i) $\sum_{\mathrm{n}\leq \mathrm{Im}(\rho)\leq \mathrm{n}+1} \mathrm{v}_\rho(\zeta) = \mathrm{O}(\log \mathrm{n})$.

(ii) *Il existe* $\mathrm{C} > 0$, *et* $\mathrm{t_n} \in [\mathrm{n}, \mathrm{n}+1]$, *pour tout* n *assez grand, tels que* $|\zeta'(\mathrm{s})/\zeta(\mathrm{s})| \leq \mathrm{C}(\log \mathrm{n})^2$, *si* $\mathrm{s} \in [2 + \mathrm{it_n}, -1 + \mathrm{it_n}]$.

Lemme $\mathrm{F}(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}+11)^{-12}(\mathrm{s}-1)\zeta(\mathrm{s})$ *est bornée dans*

$$\mathrm{B} = \{\mathrm{s},\ -10 \leq \mathrm{Re}(\mathrm{s}) \leq 2\}.$$

$*$Bornée par M sur $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) = 2$ et $\mathrm{Re}(\mathrm{s}) = -10$.

$*|\mathrm{F}(\mathrm{s})| \leq \mathrm{C}'\mathrm{e}^{\mathrm{c}|\mathrm{Im}(\mathrm{s})|}$, si $\mathrm{s} \in \mathrm{B} \Rightarrow \mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{s}^2}\mathrm{F}(\mathrm{s}) \to 0$ quand $|\mathrm{Im}(\mathrm{s})| \to +\infty$.

$*$Principe du maximum $\Rightarrow |\mathrm{e}^{\varepsilon \mathrm{s}^2}\mathrm{F}(\mathrm{s})| \leq \mathrm{e}^{100\varepsilon}\mathrm{M}$, pour tous $\mathrm{s} \in \mathrm{B}$ et $\varepsilon > 0$.

Lemme *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}$, $\mathrm{R} > 0$ *tel que* $\mathrm{D}(0,\mathrm{R}) \subset \Omega$, *et* h *holomorphe sur* Ω, *avec* $\mathrm{h}(0) = 0$. *Soit* $\mathrm{A} = \sup_{|\mathrm{s}|=\mathrm{R}} \mathrm{Re}(\mathrm{h}(\mathrm{s}))$. *Alors*

$$|\frac{\mathrm{h}^{(\mathrm{k})}(\mathrm{s})}{\mathrm{k}!}| \leq \frac{4\mathrm{A}\,\mathrm{R}}{(\mathrm{R}-|\mathrm{s}|)^{\mathrm{k}+1}},\ \text{si } \mathrm{k} \in \mathbf{N} \text{ et } |\mathrm{s}| < \mathrm{R}.$$

Lemme *Soient* Ω *un ouvert de* $\mathbf{C}$, $\mathrm{R} > 0$ *tel que* $\mathrm{D}(0,3\mathrm{R}) \subset \Omega$, *et* f *holomorphe sur* Ω, *avec* $\mathrm{f}(0) = 1$. *Soit* $\mathrm{M} = \sup_{\mathrm{s}\in\mathrm{D}(0,3\mathrm{R})} |\mathrm{f}(\mathrm{s})|$, *et soit* Y *l'ensemble des zéros de* f *dans* $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. *Alors :*

$$\sum_{\rho\in\mathrm{Y}} \mathrm{v}_\rho(\mathrm{f}) \leq \frac{\log \mathrm{M}}{\log 2} \quad \text{et} \quad |\frac{\mathrm{f}'(\mathrm{s})}{\mathrm{f}(\mathrm{s})} - \sum_{\rho\in\mathrm{Y}} \frac{\mathrm{v}_\rho(\mathrm{f})}{\mathrm{s}-\rho}| \leq \frac{4\mathrm{R}\log \mathrm{M}}{(\mathrm{R}-|\mathrm{s}|)^2},\ \textit{si } |\mathrm{s}| < \mathrm{R}.$$