REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES SURCONVERGENTES

par

Frédéric Cherbonnier & Pierre Colmez

Résumé. — Soit K un corps local complet de caractéristique 0, de corps résiduel parfait de caractéristique p. Nous démontrons que toutes les représentations p-adiques du groupe de Galois absolu de K sont surconvergentes, ainsi que Fontaine l'avait conjecturé.

Abstract. — Let K be a complete local field of characteristic 0 whose reisude field is perfect of characteristic p. We prove that all p-adic representations of the absolute Galois group of K are overconvergent, as was conjectured by Fontaine

Table des matières

Introduction

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la classification, introduite par Fontaine [**7**], des représentations p-adiques du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_K$ d'une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$ en termes de (φ,Γ)-modules. Le point essentiel de cette classification est que l'on peut reconstruire une représentation V à partir de son (φ,Γ)-module $D(V)$ et que l'on doit donc être capable de décrire directement sur ce module tous les invariants classiques attachés à V. On peut par exemple calculer la cohomologie galoisienne de V à partir de $D(V)$ (cf. [**10**]).

Notre résultat principal (corollaire III.5.2) est que toutes les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_K$ sont surconvergentes, ce qui avait été conjecturé dans [**2**]. La notion de surconvergence, étudiée en détail dans [**2**], est un peu trop technique pour être explicitée dans cette introduction. Signalons juste que la surconvergence ou la non surconvergence d'une représentation ne dépend que de sa restriction au noyau $\mathscr{H}_K$ du caractère cyclotomique et que l'on peut trouver des représentations de $\mathscr{H}_K$ qui ne sont pas surconvergentes. Les représentations de $\mathscr{H}_K$ obtenues par restriction de représentations de $\mathscr{G}_K$ vérifient des conditions de ramification assez spéciales d'après un résultat de Sen [**12**] ; elles sont "faiblement ramifiées". Les bornes sur la ramification données par le théorème de Sen semblent être précisément ce dont on a besoin pour prouver la surconvergence ; malheureusement, on peut construire un exemple de représentation faiblement ramifiée de $\mathscr{H}_K$ qui n'est pas surconvergente [**2**, chap.7]. Cette voie d'approche se révélant sans issue, la démonstration repose sur des techniques différentes utilisant l'action résiduelle de $\Gamma_K=\mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K$, techniques qui sont très largement inspirées de celles utilisées par Sen [**13**] pour démontrer que toute représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ a une décomposition de Hodge-Tate généralisée. La différence est que les anneaux utilisés dans cet article ont une structure un peu plus compliquée que le corps $\mathbf{C}_p$ apparaissant dans la situation considérée par Sen.

Le fait que toute représentation de $\mathscr{G}_K$ est surconvergente a un certain nombre d'applications qui seront détaillées ailleurs. C'est en particulier le point de départ pour espérer pouvoir décrire les invariants d'une représentation V définis à partir des anneaux $\mathbf{B}_{\rm cris},\mathbf{B}_{\rm st},\mathbf{B}_{\rm dR},\dots$ comme les modules $D_{\rm dR}(V),D_{\rm cris}(V)\dots$ ([**8**] et [**9**]) ou l'exponentielle de Bloch-Kato [**1**], en utilisant $D(V)$. Dans cette direction, signalons que l'on peut retrouver $D_{\rm dR}(V)$ et l'opérateur défini par Sen [**13**] généralisant la notion de décomposition de Hodge-Tate à partir de $D(V)$ ([**2**, chap.6]). D'autre part, si V est de de Rham, les applications $\mathrm{Log}_V^{(h)}$ définies dans [**5**], généralisant l'isomorphisme de Coleman [**4**] et "inverses" de l'application exponentielle construite par Perrin-Riou [**11**] dans le cas cristallin, ont une interprétation simple en termes de $D(V)$ (cf [**3**]).

Dans un autre ordre d'idée, on peut utiliser l'action infinitésimal de Γ_K pour associer à une représentation de $\mathscr{G}_K$ un module différentiel surconvergent muni d'un Frobenius et obtenir de cette façon une description des représentations de de Rham en termes d'équations différentielles p-adiques (Fontaine, travail en préparation).

Les résultats évoqués ci-dessus (du moins ceux concernant la surconvergence) sont en fait valables dans la situation plus générale où on remplace $\mathbf{Q}_p$ par le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans un corps parfait de caractéristique p. C'est cette situation générale qui est considérée dans l'article.

I. Rappels sur les (φ, Γ)-modules et les représentations p-adiques

Nous renvoyons à [**7**] pour les démonstrations des faits rappelés dans ce chapitre. Nous avons pris la liberté de changer les notations pour les rendre un peu plus homogènes. Par exemples, les anneaux que nous notons $\widetilde{\mathbf{E}}$, $\widetilde{\mathbf{A}}$, $\mathbf{A}$, $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{B}$ correspondent respectivement aux anneaux $\mathrm{Frac}(R)$, $W(\mathrm{Frac}(R))$, $\mathscr{O}_{\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}}$, $W(\mathrm{Frac}(R))[\frac{1}{p}]$ et $\widehat{\mathscr{E}^{\mathrm{nr}}}$ de [**7**].

I.1. Notations générales

Soient k_F un corps parfait de caractéristique p, $\mathscr{O}_F = W(k_F)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans k_F et $F = \mathscr{O}_F[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_F$. On se fixe une clôture algébrique $\overline{F}$ de F et toutes les extensions finies de F que nous aurons à considérer serons supposées être des sous-corps de $\overline{F}$. On note $\mathscr{G}_F$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$ et $\chi : \mathscr{G}_F \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique.

Si K est une extension finie de F et $n \in \mathbf{N}$, on pose $K_n = K(\mu_{p^n}) \subset \overline{F}$ et on note K_∞ l'extension cyclotomique de K réunion des K_n. On note aussi $\mathscr{G}_K$ le groupe de galois $\mathrm{Gal}(\overline{F}/K)$ et $\mathscr{H}_K$ le noyau de la restriction de χ à $\mathscr{G}_K$. On a $\mathscr{H}_K = \mathrm{Gal}(\overline{F}/K_\infty)$ et on pose $\Gamma_K = \mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

I.2. Le corps $\widetilde{\mathbf{E}}$ et certains de ses sous-anneaux.

Soit $\widehat{\overline{F}}$ le complété de $\overline{F}$ pour la topologie p-adique. Soit $\widetilde{\mathbf{E}}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\widehat{\overline{F}}$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$. On munit $\widetilde{\mathbf{E}}$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x + y = s$ où $s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m}$ et $x \cdot y = t$, avec $t^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{E}}$ un corps de caractéristique p algébriquement clos et complet pour la valuation $v_{\mathbf{E}}$ définie par $v_{\mathbf{E}}(x) = v_p(x^{(0)})$. On note $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'anneau des entiers de $\widetilde{\mathbf{E}}$.

Soit $\varepsilon = (1, \varepsilon^{(1)}, \dots, \varepsilon^{(n)} \dots)$ un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}$ tel que $\varepsilon^{(1)} \neq 1$, ce qui implique que si $n \geqslant 1$, alors $\varepsilon^{(n)}$ est une racine primitive p^n-ième de l'unité. On a $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon - 1) = \frac{p}{p-1}$ et on note $\mathbf{E}_F$ le sous-corps $k_F((\varepsilon - 1))$ de $\widetilde{\mathbf{E}}$.

On note $\mathbf{E}$ la clôture séparable de $\mathbf{E}_F$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}^+$ l'anneau de ses entiers. C'est un sous-corps dense de $\widetilde{\mathbf{E}}$ et la théorie du corps des normes ([**6**] et [**15**]) permet d'identifier $\mathrm{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_F)$ avec $\mathscr{H}_F$. Si K est une extension finie de F, on pose

$$\mathbf{E}_K = \mathbf{E}^{\mathscr{H}_K}, \quad \widetilde{\mathbf{E}}_K = \widetilde{\mathbf{E}}^{\mathscr{H}_K}, \quad \mathbf{E}_K^+ = (\mathbf{E}^+)^{\mathscr{H}_K} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{E}}_K^+ = (\widetilde{\mathbf{E}}^+)^{\mathscr{H}_K}.$$

Le corps $\mathbf{E}_K$ est une extension finie séparable de $\mathbf{E}_F$ de degré $\mathscr{H}_F/\mathscr{H}_K = [K_\infty : F_\infty]$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ est le complété de sa clôture radicielle. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{E}}_K^+$ et $\mathbf{E}_K^+$ sont les anneaux d'entiers respectifs de $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ et $\mathbf{E}_K$.

I.3. Le corps $\widetilde{\mathbf{B}}$ et certains de ses sous-anneaux.

Soit $\widetilde{\mathbf{A}} = W(\widetilde{\mathbf{E}})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}} = \widetilde{\mathbf{A}}[\frac{1}{p}] = \mathrm{Frac}(\widetilde{\mathbf{A}})$, ce qui fait de $\widetilde{\mathbf{B}}$ un corps muni d'une valuation discrète complet, d'anneau de valuation $\widetilde{\mathbf{A}}$ et de corps résiduel $\widetilde{\mathbf{E}}$. Si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$, on note $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}$. Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}$ s'écrit donc de manière unique sous la forme $\sum_{i=0}^{+\infty} p^i [x_i]$ et tout élément de $\widetilde{\mathbf{B}}$ sous la forme $\sum_{i \gg -\infty}^{+\infty} p^i [x_i]$.

Si $x = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i[x_i] \in \widetilde{\mathbf{B}}$ et $k \in \mathbf{Z}$, soit $w_k(x) = \inf_{i\leqslant k} v_{\mathbf{E}}(x_i)$. La fonction w_k vérifie les propriétés suivantes qui sont immédiates.

(i) $w_k(x) = +\infty$ si et seulement si $x \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$,

(ii) $w_k(x+y) \geqslant \inf(w_k(x), w_k(y))$ avec égalité si $w_k(x) \neq w_k(y)$.

(iii) $w_k(xy) \geqslant \inf_{i+j\leqslant k}(w_i(x)+w_j(y))$.

(iv) $w_k(\varphi(x)) = pw_k(x)$.

Si $r \in \mathbf{R}$ et $k \in \mathbf{N}$, on pose $U_{k,r} = \{x \in \widetilde{\mathbf{A}} \mid w_k(x) \geqslant r\}$ et on munit $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie définie en prenant les $U_{k,r}$ comme base de voisinage de 0. C'est aussi la topologie qui fait de l'application $x \to (x_k)_{k\in\mathbf{N}}$ un homéomorphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}^{\mathbf{N}}$ muni de la topologie produit ($\widetilde{\mathbf{E}}$ étant muni de la topologie définie par la valuation $v_{\mathbf{E}}$) et on munit $\widetilde{\mathbf{B}} = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}$ de la topologie de la limite inductive. L'action de $\mathscr{G}_F$ sur $\widetilde{\mathbf{E}}$ se prolonge en une action continue sur $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}$ qui commute à celle du morphisme de Frobenius φ.

Soit $\pi = [\varepsilon] - 1$. Soit $\mathbf{A}_F$ l'adhérence dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ de $\mathscr{O}_F[\pi, \frac{1}{\pi}]$. C'est l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n\pi^n$ où a_n est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_F$ tendant vers 0 quand n tend vers $-\infty$. L'anneau $\mathbf{A}_F$ est un anneau de valuation discrète complet de corps résiduel $\mathbf{E}_F$. Comme

$$\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad g(\pi) = (1+\pi)^{\chi(g)} - 1 \text{ si } g \in \mathscr{G}_F,$$

l'anneau $\mathbf{A}_F$ et son corps des fractions $\mathbf{B}_F = \mathbf{A}_F[\frac{1}{p}]$ sont stables par φ et $\mathscr{G}_F$.

On note $\mathbf{B}$ l'adhérence de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{B}_F$ contenue dans $\widetilde{\mathbf{B}}$ et $\mathbf{A} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{A}}$ de telle sorte que l'on a $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\frac{1}{p}]$, que $\mathbf{A}$ est un anneau de valuation discrète complet dont le corps des fractions est $\mathbf{B}$ et le corps résiduel est $\mathbf{E}$. L'anneau $\mathbf{A}$ et le corps $\mathbf{B}$ sont stables par φ et $\mathscr{G}_F$.

Si K est une extension finie de F, on pose

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{\mathscr{H}_K}, \quad \mathbf{B}_K = \mathbf{B}^{\mathscr{H}_K}, \quad \widetilde{\mathbf{A}}_K = \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathscr{H}_K} \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbf{B}}_K = \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathscr{H}_K}.$$

Si $K = F$, les deux définitions de $\mathbf{A}_K$ et $\mathbf{B}_K$ coïncident. Les anneaux $\mathbf{A}_K$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ sont des anneaux de valuation discrète complets de corps résiduels respectifs $\mathbf{E}_K$ et $\widetilde{\mathbf{E}}_K$ et de corps des fractions respectifs $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[\frac{1}{p}]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_K = \widetilde{\mathbf{A}}_K[\frac{1}{p}]$. D'autre part, $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}_K$) contient l'anneau $\varphi^{-\infty}(\mathbf{A}_K) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{A}_K)$ (resp. le corps $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{B}_K)$) comme sous-anneau (resp. sous-corps) dense. Le lien entre $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ et $\mathbf{A}_K$ sera analysé plus précisément au §2 du chapitre III.

Si L est une extension finie de K, $\mathbf{B}_L$ est une extension non ramifiée de $\mathbf{B}_K$ de degré $[L_\infty : K_\infty]$. Si l'extension L/K est de plus supposée galoisienne, alors les extensions $\widetilde{\mathbf{B}}_L/\widetilde{\mathbf{B}}_K$ et $\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K$ sont aussi galoisiennes de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbf{B}}_L/\widetilde{\mathbf{B}}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K) = \mathrm{Gal}(\mathbf{E}_L/\mathbf{E}_K) = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty) = \mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L$.

Lemme I.3.1. — *Soient K une extension finie de F et γ un élément d'ordre infini de Γ_K, alors $\mathbf{B}_K^{\gamma=1}$ est inclus dans $K_\infty \cap F^{\mathrm{nr}}$; en particulier, c'est une extension finie de F.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que $\mathbf{A}_K^{\gamma=1}$ est inclus dans $\mathscr{O}_{F^{\mathrm{nr}}}$ ou encore, utilisant le fait que $\mathbf{A}_K$ est complet pour la topologie p-adique, que $\mathbf{E}_K^{\gamma=1} \subset \overline{k}_F$. Supposons le contraire ; il existe alors $x \in \mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ non nul et tel que $v_{\mathbf{E}}(x) > 0$, ce qui fait que $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ contient $k_F((x))$ et l'extension $\mathbf{E}_K/\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$ est une extension finie. Comme par hypothèse, γ est d'ordre infini, le sous-groupe fermé Γ de Γ_K qu'il engendre est d'indice fini dans Γ_K et comme Γ agit trivialement sur $\mathbf{E}_K^{\gamma=1}$, ceci implique que Γ_K agit à travers un quotient fini sur $\mathbf{E}_K$, ce qui est absurde étant donné que $\sigma(\varepsilon)=\varepsilon^{\chi(\sigma)}\neq\varepsilon$ si $\sigma\neq 1$.

I.4. Le (φ,Γ_K)-module associé à une représentation de $\mathscr{G}_K$

Définition I.4.1. — (i) *On appelle $\mathbf{Z}_p$-représentation de $\mathscr{G}_K$, un $\mathbf{Z}_p$-module de type fini muni d'une action $\mathbf{Z}_p$-linéaire continue de $\mathscr{G}_K$.*

(ii) *On appelle représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ tout $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action linéaire continue de $\mathscr{G}_K$*

Définition I.4.2. — (i) *Si K est une extension finie de F, on appelle (φ,Γ_K)-module sur $\mathbf{A}_K$ (resp. $\mathbf{B}_K$) tout $\mathbf{A}_K$-module de rang fini (resp. tout $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel de dimension finie) muni d'une action semi-linéaire de Γ_K et d'une action de semi-linéaire φ commutant à celle de Γ_K.*

(ii) *On dit qu'un (φ,Γ_K)-module D sur $\mathbf{A}_K$ (resp. $\mathbf{B}_K$) est étale ou de pente 0, si D est engendré (comme $\mathbf{A}_K$-module) par $\varphi(D)$ (resp. si D contient un sous-$\mathbf{A}_K$-réseau étale).*

Si K est une extension finie de F et V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on pose

$$D(V)=(\mathbf{A}\underset{\mathbf{Z}_p}{\otimes}V)^{\mathscr{H}_K}.$$

L'action de φ sur $\mathbf{A}_K$ commutant à celle de $\mathscr{G}_K$, $D(V)$ est muni d'une action de φ qui commute à l'action résiduelle de $\mathscr{G}_K/\mathscr{H}_K=\Gamma_K$, ce qui fait de $D(V)$ un (φ,Γ_K)-module étale (car $\varphi(\mathbf{A})$ engendre $\mathbf{A}$) sur $\mathbf{A}_K$ ou $\mathbf{B}_K$ suivant que V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$.

Réciproquement, si D est un (φ,Γ_K)-module sur $\mathbf{A}_K$ ou $\mathbf{B}_K$, on pose

$$V(D)=(\mathbf{A}\underset{\mathbf{A}_K}{\otimes}D)^{\varphi=1}.$$

C'est une représentation $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ suivant que D est un $\mathbf{A}_K$-module ou un $\mathbf{B}_K$-espace vectoriel ; l'action de $\mathscr{G}_K$ sur $D(V)$ provenant de l'action de $\mathscr{G}_K$ sur $\mathbf{B}$. D'autre part, si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors $V(D(V))$ est canoniquement isomorphe à V en tant que représentation de $\mathscr{G}_K$. En d'autres termes, V est déterminée par son (φ,Γ_K)-module $D(V)$. En particulier, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on a $\dim_{\mathbf{B}_K}D(V)=\dim_{\mathbf{Q}_p}V$ et l'application naturelle de $\mathbf{B}\underset{\mathbf{B}_K}{\otimes}D(V)\longrightarrow\mathbf{B}\underset{\mathbf{Q}_p}{\otimes}V$ est un isomorphisme. Les coefficients de la matrice de cet isomorphisme dans des bases de V sur $\mathbf{Q}_p$ et $D(V)$ sur $\mathbf{B}_K$ s'appellent les périodes de la représentation V.

I.5. L'opérateur ψ.

Le corps $\mathbf{B}$ est une extension de degré p de $\varphi(\mathbf{B})$, ce qui nous permet de définir un opérateur $\psi:\mathbf{B}\to\mathbf{B}$ par la formule $\psi(x)=\frac{1}{p}\varphi^{-1}\big(\mathrm{Tr}_{\mathbf{B}/\varphi(\mathbf{B})}(x)\big)$. De manière explicite, on vérifie facilement que $1,[\varepsilon],\dots,[\varepsilon]^{p-1}$ forment une base de $\mathbf{B}$ sur $\varphi(\mathbf{B})$ et que l'on a $\psi(x_0+x_1[\varepsilon]+\cdots+x_{p-1}[\varepsilon]^{p-1})=\varphi^{-1}(x_0)$ si $x_0,\dots,x_{p-1}\in\varphi(\mathbf{B})$. L'opérateur ψ commute à l'action de $\mathscr{G}_K$ et on a $\psi(\varphi(x))=x$ si $x\in\mathbf{B}$ et $\psi(\mathbf{A})\subset\mathbf{A}$.

Comme ψ commute à l'action de $\mathscr{G}_K$, si V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, le module $D(V)$ hérite de l'action de ψ qui commute à celle de Γ_K et le $\mathbf{Z}_p[[\Gamma_K]]$-module $D(V)^{\psi=1}$ est très lié à la cohomologie galoisienne de V (cf. [CC97] et [H95]).

Lemme I.5.1. — *Si K est une extension finie de F, V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ et γ est un élément d'ordre infini de Γ_K, alors $1-\gamma$ est injectif sur $D(V)^{\psi=0}$.*

Démonstration. — Comme $\mathbf{B}_K$ est un corps, $D(V)^{\gamma=1}$ est un $\mathbf{B}_K^{\gamma=1}$-espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $\dim_{\mathbf{Q}_p} V$. En particulier, c'est un F-espace vectoriel de dimension finie (cf. lemme I.3.1). Comme cet espace est stable par φ qui agit de manière injective, on en déduit le fait que φ est une surjection de $D(V)^{\gamma=1}$ sur $D(V)^{\gamma=1}$. On peut donc écrire tout élément x de $D(V)^{\gamma=1}$ sous la forme $\varphi(y)$ et $\psi(x)=0$ implique $y=0$ et donc $x=0$, ce qui permet de conclure.

Remarque I.5.2. — Herr a montré [**10**] que $1-\gamma$ est en fait bijectif sur $D(V)^{\psi=0}$; nous montrerons un résultat plus précis au chapitre II (cf. proposition II.6.1).

II. Représentations surconvergentes

Comme on l'a vu plus haut, on peut reconstruire une représentation p-adique V de $\mathscr{G}_K$ à partir de son (φ,Γ_K)-module $D(V)$. Il est donc naturel de se demander si on peut reconstruire directement les autres invariants de V (comme $D_{\mathrm{cris}}(V)$ ou $D_{\mathrm{dR}}(V)$) à partir de $D(V)$ sans passer par la représentation V qui est à priori un objet beaucoup plus compliqué.

Le problème est que pour comparer $D(V)$ et $D_{\mathrm{dR}}(V)$ par exemple, il faut arriver à comparer les anneaux $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Or $\mathbf{B}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}$ qui, comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, est obtenu en localisant $\widetilde{\mathbf{A}}^+ = W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ et en complétant pour une certaine topologie, mais comme les deux topologies utilisées n'ont rien à voir entre elles, il n'y a aucun morphisme naturel de $\widetilde{\mathbf{B}}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ou de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}$. On peut quand même dans un premier temps s'intéresser aux représentations dont les périodes vivent dans un anneau contenu naturellement à la fois dans $\mathbf{B}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (i.e. sont surconvergentes).

II.1. Éléments surconvergents

Soit $\overline{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{r^- \mid r \in \mathbf{R}\}$. On munit $\overline{\mathbf{R}}$ d'une relation d'ordre total coïncidant avec l'ordre naturel sur $\mathbf{R}$ et tel que si $r_1 < r_2$ sont deux éléments de $\mathbf{R}$, alors $r_1 < r_2^- < r_2$. On note $\overline{\mathbf{R}}_+$ l'ensemble des éléments r de $\overline{\mathbf{R}}$ vérifiant $r \geqslant 0$. Si $r \in \mathbf{R}_+$, soit $\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger$ l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{A}}$ tels que l'on ait $w_k(x) + \frac{pr}{p-1}k \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{r^-}^\dagger$ l'ensemble des éléments x de $\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger$ tels que $w_k(x) + \frac{pr}{p-1}k$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$. On a en particulier $\widetilde{\mathbf{A}}_0^\dagger = \widetilde{\mathbf{A}}^+$. La raison de cette numérotation bizarre est que $\overline{\pi} = \varepsilon - 1$ et $v_{\mathbf{E}}(\varepsilon-1) = \frac{p}{p-1}$. Soit $\widetilde{\mathbf{B}}_r^\dagger = \mathbf{Q}_p \otimes \widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger$, ce qui fait que si $r \in \mathbf{R}_+$ (resp. $r \in \overline{\mathbf{R}}_+ - \mathbf{R}_+$), $\widetilde{\mathbf{B}}_r^\dagger$ est l'ensemble des éléments x de $\widetilde{\mathbf{B}}$ tels que la suite $w_k(x) + \frac{pr}{p-1}k$ est bornée inférieurement (resp. tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$). Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger = \bigcup_{r \in \mathbf{R}_+} \widetilde{\mathbf{B}}_r^\dagger$. Un élément de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ sera dit surconvergent. Finalement, on pose $\widetilde{\mathbf{A}}_\infty^\dagger = \bigcup_{r \in \overline{\mathbf{R}}_+} \widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \cap \widetilde{\mathbf{A}}$, ce qui fait que $\widetilde{\mathbf{A}}_\infty^\dagger$ est l'ensemble des éléments x de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tels qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ tel que $w_k(x) + \frac{pr}{p-1}k \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$ alors que $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ est l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}$ tels qu'il existe $r \in \mathbf{R}_+$ et $C \in \mathbf{R}$ tels que $w_k(x) + \frac{pr}{p-1}k \geqslant C$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. En particulier, $x \in \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ si et seulement si il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $[\overline{\pi}]^n x \in \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_\infty$.

Remarque II.1.1. — Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{B}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $\sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{E}}$ et on démontre que la série converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ si et seulement si la série $\sum\limits_{k\gg-\infty} p^k x_k^{(0)}$ converge dans $\widehat{\overline{F}}$ c'est-à-dire si et seulement si $k + v_{\mathbf{E}}(x_k)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ ou encore si et seulement si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{r^-}$ avec $r = \frac{p-1}{p}$. Plus généralement, l'ensemble $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ des éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}$ tels que $\varphi^{-n}(x)$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est égal à $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{r^-}$, où $r = (p-1)p^{n-1}$. D'autre part, $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_r \subset \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_s$ si $r \leqslant s$, ce qui fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ est aussi la réunion des $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger,n}$ pour $n \in \mathbf{N}$; autrement dit, $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ est l'ensemble des éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}$ tels qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\varphi^{-n}(x)$ converge dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. C'est cette description de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ qui est la plus utile pour faire le lien avec la théorie des représentations de de Rham [**3**].

Proposition II.1.2. — (i) *Si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_r$ sont des sous-anneaux de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stables par $\mathscr{G}_F$ et on a $\varphi(\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r) = \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{pr}$ et $\varphi(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_r) = \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_{pr}$.*

(ii) *Si α est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^+$ dont la réduction $\overline{\alpha}$ modulo p vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}) > 0$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est complet et séparé pour la topologie α-adique et $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est fermé dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ si $r \in \mathbf{R}_+$.*

(iii) *$\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ est un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable par $\mathscr{G}_F$ et φ.*

Démonstration. — (i) La stabilité de $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_r$ pour l'addition et le passage à l'opposé vient de ce que l'on a $w_k(x+y) \geqslant \inf(w_k(x), w_k(y))$ si $x, y \in \widetilde{\mathbf{A}}$ et $w_k(-x) = w_k(x)$ et celle pour la multiplication est une conséquence de l'inégalité $w_k(xy) \geqslant \inf_{i+j\leqslant k}(w_i(x) + w_j(y))$. D'autre part, on a $v_{\mathbf{E}}(\sigma(x)) = v_{\mathbf{E}}(x)$ si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ et $\sigma \in \mathscr{G}_F$ et donc $w_k(\sigma(x)) = w_k(x)$ si $k \in \mathbf{Z}$, $x \in \widetilde{\mathbf{B}}$ et $\sigma \in \mathscr{G}_F$, ce qui permet de montrer que $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_r$ sont stables par $\mathscr{G}_F$. Finalement, l'identité $w_k(\varphi(x)) = pw_k(x)$ permet de terminer la démonstration du (i).

(ii) Commençons par supposer que $\alpha = [\overline{\alpha}]$ et soit $s = v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha})$. On a alors $w_k(\alpha^i x) = w_k(x) + is$, ce qui implique que si $x \in \alpha^i \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, alors $w_k(x) \geqslant -\frac{pr}{p-1}k + is$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$ et donc $w_k(x) = +\infty$ et $x \in p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}$. Comme ceci est vrai quel que soit $k \in \mathbf{N}$, cela implique $x = 0$. La topologie α-adique est donc séparée. Maintenant, si $(a_i)_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ et $k \in \mathbf{N}$, la suite de terme général $w_k(\alpha^i a_i)$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$, ce qui montre que la série $\sum_{i=0}^{+\infty} \alpha^i a_i$ converge dans $\widetilde{\mathbf{A}}$ vers une limite a vérifiant $w_k(a) \geqslant \inf_{i\in\mathbf{N}} w_k(a_i) + is$. Il est alors clair que si $w_k(a_i) \geqslant -\frac{pr}{p-1}k$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, alors $w_k(a) \geqslant -\frac{pr}{p-1}k$ et que si $r > 0$ et $w_k(a_i) + \frac{pr}{p-1}k$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, alors $w_k(a) + \frac{pr}{p-1}k$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$, ce qui montre que $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est complet pour la topologie α-adique quel que soit $r \in \overline{\mathbf{R}}^*_+$ si $\alpha = [\overline{\alpha}]$. Maintenant, si $r > 0$, α est quelconque et β est un élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $0 < v_{\mathbf{E}}(\beta) < \inf(r, v_{\mathbf{E}}(\overline{\alpha}))$, on a $\frac{\alpha}{[\beta]} \in \widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ et comme $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est séparé et complet pour la topologie $[\beta]$-adique d'après ce qui précède, il l'est a fortiori pour la topologie α-adique. Si $r = 0$ et $\alpha = [\overline{\alpha}] + pu$, d'après ce qui précède, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_0 = \widetilde{\mathbf{A}}^+$ est complet pour la topologie $[\overline{\alpha}]$-adique et comme il l'est pour la topologie p-adique, il l'est aussi pour la topologie α-adique.

Finalement, si $r \in \mathbf{R}_+$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est défini comme l'intersection des $U_{k,rk}$ qui sont des fermés de $\widetilde{\mathbf{A}}$, ce qui prouve que $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ est fermé dans $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Remarque II.1.3. — On peut montrer que, si $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\alpha) = r > 0$, alors $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r^-}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$) est, en tant qu'anneau, le séparé complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{p}{[\alpha]}]$ pour la topologie p-adique (resp. $\frac{p}{[\alpha]}$-adique). Remarquons aussi que sous les mêmes hypothèses concernant α, $\widetilde{\mathbf{A}}$ est le séparé complété de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}[\frac{1}{[\alpha]}]$ pour la topologie p-adique.

(iii) $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \bigcup_{r \in \overline{\mathbf{R}}_+} \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r}$ est un sous-anneau de $\widetilde{\mathbf{B}}$ stable par $\mathscr{G}_F$ et φ d'après ce qui précède. Pour montrer que c'est un corps, nous aurons besoin du lemme suivant (le corollaire II.1.5 ci-dessous est inutile pour la démonstration, mais servira plus tard).

Lemme II.1.4. — *Si $r \in \mathbf{R}_+$, un élément $x = \sum_{k=0}^{+\infty} p^k [x_k]$ de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$.*

Démonstration. — Si x et x^{-1} appartiennent à $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$, alors $v_{\mathbf{E}}(\overline{x}) = v_{\mathbf{E}}(x_0) \geqslant 0$ et $v_{\mathbf{E}}(\overline{x^{-1}}) = -v_{\mathbf{E}}(x_0) \geqslant 0$ et donc $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$. Réciproquement, si $v_{\mathbf{E}}(x_0) = 0$, alors $[x_0]$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ et, quitte à diviser par $[x_0]$, on peut supposer $x_0 = 1$ auquel cas $x = 1 - u$ avec $u \in p\widetilde{\mathbf{A}} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ et $x^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ est un élément de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ puisque $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ est un sous-anneau fermé de $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Corollaire II.1.5. — (i) *Si $r \geqslant 1$, alors $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}$ est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$.*

Démonstration. — On a $\pi = [\varepsilon] - 1 = [\overline{\pi}] + p[\alpha_1] + p^2[\alpha_2] + \cdots$, où α_i est un polynôme en $\varepsilon^{p^{-i}} - 1$ à coefficients dans $\mathbf{Z}$ et sans terme constant, ce qui implique $v_{\mathbf{E}}(\alpha_i) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\varepsilon^{p^{-i}} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{i-1}}$. Ceci implique que si on écrit π sous la forme $[\overline{\pi}](1 + p[a_1] + p^2[a_2] + \cdots)$, alors $v_{\mathbf{E}}(a_1) = v_{\mathbf{E}}(\alpha_1) - v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -1$ et $v_{\mathbf{E}}(a_i) \geqslant -v_{\mathbf{E}}(\overline{\pi}) \geqslant -i$ si $i \geqslant 2$ et donc $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]} \in \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{\frac{p-1}{p}}$, ce qui permet d'utiliser le lemme précédent pour conclure.

Revenons à la démonstration du fait que $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ est un corps. Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} - \{0\}$, il existe $n \in \mathbf{Z}$, $r \in \mathbf{N}$ tels que $x \in p^{-n}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ et donc puisse s'écrire sous la forme $p^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} p^k [x_k]$ avec $v_{\mathbf{E}}(x_k) \geqslant -\frac{pr}{p-1}k$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Soit k_0 le plus petit entier tel que $x_k \neq 0$. On a alors $x = p^{k_0 - n}[x_{k_0}]u$ avec $u = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} p^k [y_k]$, où $y_k = \frac{y_{k+k_0}}{y_{k_0}}$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(y_k) \geqslant -\frac{pr}{p-1}(k + k_0) - v_{\mathbf{E}}(x_{k_0}) \geqslant -\frac{ps}{p-1}k$, où l'on a posé $s = r + k_0 + \frac{p-1}{p}\sup(0, v_{\mathbf{E}}(x_{k_0}))$. On déduit alors du lemme II.1.4, le fait que u est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{s} \subset \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ et, comme p et $[x_{k_0}]$ sont inversibles dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ (p l'est par construction et, si $t = \frac{p-1}{p} v_{\mathbf{E}}(x_0) > 0$ alors $\frac{1}{[x_{k_0}]} = \frac{1}{p}\frac{p}{[x_{k_0}]} \in \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{t}$), cela montre que x est inversible dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ et permet de conclure.

On munit $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger} = \bigcup_{r \in \overline{\mathbf{R}}_+} \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r}$ de la topologie de la limite inductive, ayant muni chaque $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} p^{-n}\mathbf{A}^{\dagger}_{r}$ de la topologie de la limite inductive et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ de la topologie π-adique pour lequel il est complet d'après le (ii) de la proposition II.1.2. On définit des sous-anneaux $\mathbf{A}^{\dagger}$, $\mathbf{B}^{\dagger}$, et, si $r \in \overline{\mathbf{R}}_+ \cup \{\infty\}$, $\mathbf{A}^{\dagger}_{r}$, $\mathbf{B}^{\dagger}_{r}$ de $\mathbf{B}$ en posant

$$\mathbf{A}^{\dagger} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}, \quad \mathbf{B}^{\dagger} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}, \quad \mathbf{A}^{\dagger}_{r} = \mathbf{A} \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r} \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{\dagger}_{r} = \mathbf{B} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r},$$

anneaux que l'on munit des topologies induites par les topologies respectives de $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}, \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}, \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{r}$. L'anneau $\mathbf{A}^{\dagger}_{0} = \widetilde{\mathbf{A}}^{+} \cap \mathbf{A}$ sera en général noté $\mathbf{A}^{+}$. Si on utilise le fait que $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{B}$) est un sous-anneau (resp. un sous-corps) fermé de $\widetilde{\mathbf{A}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}$) contenant π et stable par $\mathscr{G}_F$ et φ, on obtient la proposition suivante.

Proposition II.1.6. — (i) $\mathbf{B}^\dagger$ *est un corps stable par* $\mathscr{G}_F$ *et* φ.

(ii) *Si* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, *les anneaux* $\mathbf{A}_r^\dagger$ *et* $\mathbf{B}_r^\dagger$ *sont stables par* $\mathscr{G}_F$ *et* $x \in \mathbf{A}_r^\dagger$ *(resp.* $x \in \mathbf{B}_r^\dagger$*) si et seulement si* $\varphi(x) \in \mathbf{A}_{pr}^\dagger$ *(resp.* $\varphi(x) \in \mathbf{B}_{pr}^\dagger$*),*

(iii) *Si* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$, *alors* $\mathbf{A}_r^\dagger$ *est séparé et complet pour la topologie* π*-adique.*

II.2. L'anneau $\mathbf{B}_F^\dagger$

Si K est une extension finie de F, on pose

$$\mathbf{A}_K^\dagger = (\mathbf{A}^\dagger)^{\mathscr{H}_K},\ \mathbf{B}_K^\dagger = (\mathbf{B}^\dagger)^{\mathscr{H}_K} \text{ et, si } r \in \overline{\mathbf{R}}_+,\ \mathbf{A}_{r,K}^\dagger = (\mathbf{A}_r^\dagger)^{\mathscr{H}_K} \text{ et } \mathbf{B}_{r,K}^\dagger = (\mathbf{B}_r^\dagger)^{\mathscr{H}_K}.$$

L'anneau $\mathbf{A}_{0,K}^\dagger$ sera en général noté $\mathbf{A}_K^+$. Si K est une extension non ramifiée de F, Les anneaux $\mathbf{A}_{r,K}^\dagger$ ont une description en termes de fonctions analytiques sur certaines couronnes, ce qui les rend assez maniables. Si K est une extension finie de F, considérons les anneaux de séries de Laurent suivants :

(i) l'algèbre $\mathscr{A}_K^{[0,1)}$ des séries entières à coefficients dans $\mathscr{O}_K$.

(ii) l'algèbre $\mathscr{A}_K^{[1,1)}$ des séries de Laurent de la forme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n T^n$ dont les coefficients sont dans $\mathscr{O}_K$ et vérifient $\lim\limits_{n\to-\infty} a_n = 0$.

(iii) Si $0 < \rho < 1$, l'algèbre $\mathscr{A}_K^{[\rho,1)}$ (resp. $\mathscr{A}_K^{(\rho,1)}$) des fonctions analytiques sur la couronne $\rho \leqslant |T| < 1$ (resp. $\rho < |T| < 1$) majorées en norme par 1 sur cette couronne.

Proposition II.2.1. — *Si* K *est une extension non ramifiée de* F, *alors l'application qui à* F *associe* $F(\pi)$ *induit un isomorphisme*

(i) *de* $\mathscr{A}_K^{[1,1)}$ *sur* $\mathbf{A}_K$,

(ii) *de* $\mathscr{A}_K^{[0,1)}$ *sur* $\mathbf{A}_K^+$

(iii) *de* $\mathscr{A}_K^{[\rho(r),1)}$ *sur* $\mathbf{A}_{r-}^\dagger$ *et de* $\mathscr{A}_K^{(\rho(r),1)}$ *sur* $\mathbf{A}_r^\dagger$ *si* $r \geqslant \frac{p-1}{p}$ *et* $\rho(r) = p^{-\frac{1}{r}}$.

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont des évidences et le (iii) se reformule de la manière suivante.

Lemme II.2.2. — *Soient* K *une extension finie non ramifiée de* F *et* $r \in \overline{\mathbf{R}}_+$ *vérifiant* $r \geqslant \frac{p-1}{p}$. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour* $x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n \pi^n \in \mathbf{A}_K$.

(i) $x \in \mathbf{A}_{r,K}^\dagger$,

(ii) $rv_p(a_n) + n \geqslant 0$ *quel que soit* $n \in \mathbf{Z}$ *(resp.* $rv_p(a_n) + n \geqslant 0$ *quel que soit* $n \in \mathbf{Z}$ *et* $\lim\limits_{n\to-\infty} rv_p(a_n) + n = +\infty$*) si* $r \in \mathbf{R}$ *(resp. si* $r \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$*).*

Démonstration. — Remarquons tout d'abord que $x = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n \pi^n \in \mathbf{A}_{r,K}^\dagger$ si et seulement si $x' = \sum_{n<0} a_n \pi^n \in \mathbf{A}_{r,K}^\dagger$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $y_k = p^{-k} \sum_{n<0,\ v_p(a_n)=k} a_n \pi^n$ et $n_k = \inf\{n < 0 \mid v_p(a_n) = k\}$. On a donc $y_k = [\overline{\pi}]^{n_k} u$ où

$$u = \frac{a_{n_k}}{p^k}\Big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\Big)^{n_k}\Big(1 + \sum_{n>n_k, v_p(a_n)=v_p(a_{n_k})} \frac{a_n}{a_{n_k}} \pi^{n-n_k}\Big)$$

est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}_{\frac{p-1}{p}}$. On en déduit les formules $w_0(y_k) = v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_k) = n_k \frac{p}{p-1}$ et $w_i(y_k) \geqslant v_{\mathbf{E}}(\overline{y}_k) - i$ si $i \geqslant 1$. D'autre part, comme $x = \sum_{i=0}^{+\infty} p^i y_i$, on a $w_k(x) \geqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant k} w_k(p^i y_i) = \inf_{0\leqslant i\leqslant k} w_{k-i}(y_i)$ avec égalité si $w_k(y_k) < w_{k-i}(y_i)$ quel que soit $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Lemme II.2.3. — *Soient $s \geqslant 0$ et $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}, (v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ deux suites de nombres réels vérifiant les conditions suivantes*

(a) $v_k \geqslant \inf_{0\leqslant i\leqslant k} u_i + s(k-i)$

(b) $v_k = u_k$ *si* $u_k < u_i + s(k-i)$ *quel que soit* $0 \leqslant i \leqslant k-1$.

Alors on a

(i) $u_k \geqslant 0$ *quel que soit* $k \in \mathbf{N} \Leftrightarrow v_k \geqslant 0$ *quel que soit* $k \in \mathbf{N}$

Si de plus $s > 0$, alors

(ii) $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = +\infty \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to+\infty} v_k = +\infty$.

Démonstration. — (i) L'implication $\Rightarrow$ est immédiate et la contraposée de l'implication réciproque se démontre en remarquant que si i est le plus petit entier tel que $u_i < 0$, alors $v_i = u_i$.

(ii) L'implication $\Rightarrow$ est immédiate puisque $v_k \geqslant u_k$. Supposons que u_k ne tend pas vers $+\infty$ et notons ℓ la limite inférieure de la suite $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$. Si $\ell = -\infty$ et $\psi(i)$ est une suite d'entiers tendant vers $+\infty$ tels que $u_{\psi(i)} < u_k$ quel que soit $k < \psi(i)$, on a $v_{\psi(i)} = u_{\psi(i)}$, ce qui prouve que $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ne tend pas non plus vers $+\infty$. Si ℓ est fini et $(u_{\psi(i)})_{i\in\mathbf{N}}$ est une suite extraite de $(u_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tendant vers ℓ, un petit argument utilisant le fait que $s(k-i) \geqslant s$ si $k \geqslant i+1$ et $s > 0$, montre que $v_{\psi(i)} = u_{\psi(i)}$ si i est assez grand, ce qui montre que $(v_k)_{k\in\mathbf{N}}$ ne tend pas non plus vers $+\infty$ et termine la démonstration du lemme.

Corollaire II.2.4. — *Si $r \geqslant \frac{p-1}{p}$ et $x \in \mathbf{A}_K$, alors $x \in \mathbf{A}^{\dagger}_{r,K}$ si et seulement si $v_{\mathbf{E}}(y_i) + \frac{pr}{p-1} i \geqslant 0$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$ (resp. $v_{\mathbf{E}}(y_i) + \frac{pr}{p-1} i \geqslant 0$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$ et $v_{\mathbf{E}}(y_i) + \frac{pr}{p-1} i$ tend vers $+\infty$ quand i tend vers $+\infty$) si $r \in \mathbf{R}$ (resp. $r \in \overline{\mathbf{R}} - \mathbf{R}$).*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le lemme précédent à $s = \frac{pr}{p-1} - 1$ et aux suites $v_k = w_k(x') + \frac{pr}{p-1} k$ et $u_k = v_{\mathbf{E}}(y_k) + \frac{pr}{p-1} k$.

Pour terminer la démonstration du lemme II.2.2, il suffit d'utiliser la formule $v_{\mathbf{E}}(y_k) = \inf_{v_p(a_n)=k} n \frac{p}{p-1}$ qui implique en particulier que "$w_k(y_k) + \frac{pr}{p-1} k \geqslant 0$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$" équivaut à "$n + r v_p(a_n) \geqslant 0$ quel que soit $n < 0$". D'autre part, la condition $\lim\limits_{k\to+\infty} v_{\mathbf{E}}(y_k) + \frac{pr}{p-1} k = +\infty$ équivaut à $\inf_{v_p(a_n)=k} n + r v_p(a_n)$ tend vers $+\infty$ quand k tend vers $+\infty$ et donc (car il n'y a qu'un nombre fini de $n < 0$ tels que $v_p(a_n) = k$) aussi à la condition $\lim\limits_{n\to-\infty} r v_p(a_n) + n = +\infty$, ce qui permet de conclure.

II.3. Généralités sur les représentations surconvergentes

Une représentation surconvergente est une représentation dont le (φ, Γ)-module est engendré par des éléments surconvergents. De manière précise, on a la définition suivante.

Définition II.3.1. — *Si V est une $\mathbf{Z}_p$-représentation ou une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, on pose*

$$D^{\dagger}(V) = (\mathbf{A}^{\dagger} \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}_K} \quad \text{et} \quad D^{\dagger}_r(V) = (\mathbf{A}^{\dagger}_r \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathscr{H}_K} \text{ si } r \in \mathbf{R}_+.$$

Comme $\mathbf{B}^\dagger$ est un corps, si V est une représentation p-adique, on a $\dim_{\mathbf{B}_K^\dagger} D^\dagger(V) \leqslant \dim_{\mathbf{Q}_p} V$ et on dit que V est surconvergente si on a égalité, ce qui est équivalent au fait que $D_r^\dagger(V)$ contient une base de $D(V)$ sur $\mathbf{B}_K$ si r est assez grand.

Remarquons que la propriété de surconvergence ne dépend que de la restriction à $\mathscr{H}_K$. Les représentations surconvergentes sont étudiées en détails dans [**2**] et le théorème suivant rassemble une bonne partie des résultats obtenus dans [**2**].

Théorème II.3.2. — (i) *La catégorie des représentations surconvergentes de $\mathscr{G}_K$ est stable par induction ; autrement dit, si L est une extension finie de K et V est une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$, alors V est surconvergente si et seulement si elle est surconvergente en tant que représentation de $\mathscr{G}_L$.*

(ii) *V est surconvergente si et seulement si $D(V)^{\psi=1}$ est formé d'éléments surconvergents (i.e. est inclus dans $D^\dagger(V)$).*

(iii) *Si V est surconvergente et γ_K est un générateur de Γ_K, alors $\gamma_K - 1$ admet un inverse continu sur $D^\dagger(V)^{\psi=0}$.*

(iv) *La catégorie des représentations surconvergentes est stable par extension et contient les représentations abéliennes.*

Pour la commodité du lecteur, nous avons reproduit dans la suite de ce chapitre, les démonstrations (un peu modifiées) des résultats (i) et (iii), résultats dont nous aurons besoin dans le chapitre suivant pour montrer que toutes les représentations de $\mathscr{G}_K$ sont surconvergentes. Le point le plus délicat est le (iii). La démonstration que nous allons en donner diffère de celle de [**2**] sur la manière de dévisser la situation. Dans [**2**] le dévissage se fait en regardant la représentation modulo p puis mod p^2 etc ..., alors qu'ici on se ramène au cas de la représentation triviale de $\mathscr{G}_F$, ce qui permet de raccourcir largement la démonstration.

II.4. Stabilité par induction

La stabilité par induction de la catégorie des représentations surconvergentes se ramène, modulo le théorème de Hilbert 90, à la proposition suivante.

Proposition II.4.1. — *Si L est une extension finie de K, alors $\mathbf{B}_L^\dagger$ est une extension de $\mathbf{B}_K^\dagger$ de degré $[L_\infty : K_\infty]$ et si L/K est galoisienne, il en est de même de $\mathbf{B}_L^\dagger/\mathbf{B}_K^\dagger$ et $\mathrm{Gal}(\mathbf{B}_L^\dagger/\mathbf{B}_K^\dagger) = \mathrm{Gal}(L_\infty/K_\infty)$.*

Démonstration. — Il suffit de prouver que si K est une extension finie de F, alors l'application naturelle de $\mathbf{B}_F \otimes_{\mathbf{B}_F^\dagger} \mathbf{B}_K^\dagger$ dans $\mathbf{B}_K$ est bijective, ce qui permettra de déduire la proposition de l'énoncé analogue pour $\mathbf{B}_L/\mathbf{B}_K$. Comme $\mathrm{Tr}_{K_\infty/F_\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger) \subset \mathbf{B}_F^\dagger$, un argument standard faisant intervenir la forme quadratique $\mathrm{Tr}_{K_\infty/F_\infty}(x^2)$ permet de montrer qu'une famille d'éléments de $\mathbf{B}_K^\dagger$ qui est liée sur $\mathbf{B}_F$ l'est déjà sur $\mathbf{B}_F^\dagger$. On en déduit l'injectivité. Pour démontrer la surjectivité, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme II.4.2. — *Si $P \in \mathbf{A}^\dagger[X]$ est unitaire et a un discrimant non divisible par p, alors les racines de P appartiennent à $\mathbf{A}^\dagger$.*

Démonstration. — L'hypothèse selon laquelle le discriminant de P n'est pas divisible par p implique que l'extension de $\mathbf{B}$ engendrée par une racine de P est non ramifiée et donc égale à $\mathbf{B}$; on en déduit le fait que les racines de P appartiennent à $\mathbf{A}$. Il suffit donc de vérifier qu'elles appartiennent aussi à $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$.

Soit d le degré de P. Quitte à remplacer P par $\pi^{Nd}P(\frac{X}{\pi^N})$ pour N assez grand, on peut supposer que la réduction $\overline{P}$ de P modulo p appartient à $\widetilde{\mathbf{E}}^+[X]$. Soit $\overline{\alpha}\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$ une racine de $\overline{P}$ et $\alpha\in\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$ dont la réduction modulo p est $\overline{\alpha}$ (on peut prendre pour α le représentant de Teichmüller $[\overline{\alpha}]$ de $\overline{\alpha}$). Par hypothèse, on a $\overline{P'(\alpha)}\neq 0$, ce qui fait que $\frac{P'(\alpha)}{[\overline{P'(\alpha)}]}$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger$. Soit $r\in\mathbf{R}_+$ tel que $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_r$ contienne α, tous les coefficients de P et $\frac{[\overline{P'(\alpha)}]}{P'(\alpha)}$. Si $n=\frac{p-1}{p}v_{\mathbf{E}}(\overline{P'(\alpha)})$, on peut écrire $P'(\alpha)$ sous la forme $\pi^n\frac{P'(\alpha)}{[\overline{P'(\alpha)}]}\big(\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}\big)^{-n}$ et comme $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_1$, on a $P'(\alpha)=\pi^n u$, où u est inversible dans $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_s$ si $s\geqslant\sup(r,1)$. On a de plus $P(\alpha)\in\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_s\cap p\widetilde{\mathbf{A}}$ et comme $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_s\cap p\widetilde{\mathbf{A}}$ est inclus dans $\pi^{(p-1)p^{k-1}s}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{p^ks}$, on peut trouver $k\geqslant 2$ tel que $P(\alpha)\in\pi^{2n+1}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{p^ks}$ et comme $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{p^ks}$ est séparé et complet pour la topologie π-adique, le lemme de Hensel implique que l'équation $P(x)=0$ a une unique solution appartenant à $\alpha+\pi^{2n+1}\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_{p^ks}$. On en déduit le résultat.

Revenons à la démonstration de la surjectivité. Soit $\overline{x}$ un générateur de $\mathbf{E}_K^+$ en tant que $\mathbf{E}_F^+$-algèbre et soit $\overline{P}\in\mathbf{E}_F^+[X]$ son polynôme minimal. Il résulte du lemme de Hensel que si $P\in\mathbf{A}_F[X]$ est n'importe quel polynôme unitaire dont la réduction modulo p est $\overline{P}$, alors P a une unique racine x dans $\mathbf{A}_K$ dont la réduction modulo p est $\overline{x}$ et $\mathbf{A}_K=\mathbf{A}_F[x]$. Comme l'image de $\mathbf{A}_F^\dagger$ modulo p contient $\mathbf{E}_F^+$ (c'est immédiat), on peut choisir P appartenant à $\mathbf{A}_F^\dagger[X]$ et le lemme II.4.2 montre qu'alors $x\in\mathbf{A}_K^\dagger$. On en déduit l'inégalité $[\mathbf{B}_K^\dagger:\mathbf{B}_F^\dagger]\geqslant[K_\infty:F_\infty]$, ce qui permet de conclure.

II.5. Action de Γ sur $D^\dagger(V)^{\psi=0}$: le cas de la représentation triviale

Proposition II.5.1. — *Si $m\geqslant 1$, γ_m est un générateur de Γ_{F_m} et $r\geqslant(p-1)p^{m-1}$, alors $\tau_m=\gamma_m-1$ induit une bijection de $\varphi(\pi)^a\big(\mathbf{A}^\dagger_{r,F}\big)^{\psi=0}$ sur $\varphi(\pi)^{a+p^{m-1}}\big(\mathbf{A}^\dagger_{r,F}\big)^{\psi=0}$ quel que soit $a\in\mathbf{Z}$.*

Démonstration. — L'injectivité vient de ce que le noyau de τ_m agissant sur $\mathbf{A}_F$ est $\mathscr{O}_F$ (cf. lemme I.3.1) et donc son intersection avec $(\mathbf{A}_F)^{\psi=0}$ est réduite à $\{0\}$.

Comme γ_m est un générateur de Γ_{F_m} et $m\geqslant 1$, on a $v_p(\chi(\gamma_m)-1)=m$ et on peut écrire $\chi(\gamma_m)-1$ sous la forme $p^m u$ avec $u\in\mathbf{Z}_p^*$. Tout élément z de $\mathbf{A}_F^{\psi=0}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i z_i$ avec $z_i\in\varphi(\mathbf{A}_F)$ (cf. formule décrivant ψ, chapitre I §5), ce qui nous permet de définir une application $f_m:\mathbf{A}_F^{\psi=0}\to\mathbf{A}_F^{\psi=0}$ par la formule

$$f_m(\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i z_i)=-\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\frac{z_i}{1-[\varepsilon]^{p^m iu}}$$

et un petit calcul utilisant le fait que $\gamma_m([\varepsilon]^i)=[\varepsilon]^{i\chi(\gamma_m)}=[\varepsilon]^i[\varepsilon]^{p^m iu}$ montre que l'on a

$$f_m(\tau_m(z))=z-\sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\frac{\tau_m(z_i)}{[\varepsilon]^{-p^m iu}-1}.\tag{II.5.1.1}$$

La démonstration de la proposition II.5.1 repose sur le fait que f_m est presque un inverse de τ_m. Il s'agit donc de vérifier que $z - f_m(\tau_m(z))$ est petit en un sens à préciser, ce qui nécessitera un certain nombre de lemmes préparatoires.

Lemme II.5.2. — (i) *Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $r \geqslant (p-1)p^{m-1}$, alors $\frac{[\varepsilon]^{p^m a}-1}{\pi^{p^m}}$ et $\frac{[\varepsilon]^{p^m a}-1}{\varphi(\pi)^{p^{m-1}}}$ sont des unités de $\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$.*

(ii) *Si $r \geqslant (p-1)p^{m-1}$ et $k \in \mathbf{Z}$, alors $\frac{\tau_m(\pi^k)}{\pi^k} \in \pi^{p^m-1}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$.*

Démonstration. — $\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p} = 1 + \frac{p}{\pi} + \cdots + \frac{p}{\pi^{p-1}}$ appartient à $\mathbf{A}^{\dagger}_{p-1,F}$ comme on le voit en utilisant le lemme II.2.2 et comme son image dans $\mathbf{E}_F$ est égale à 1, c'est une unité de $\mathbf{A}^{\dagger}_{p-1,F}$ d'après le lemme II.1.4. On en déduit le fait que

$$\frac{[\varepsilon]^{p^m}-1}{\pi^{p^m}} = \frac{\varphi^m(\pi)}{\pi^{p^m}} = \varphi^{m-1}\big(\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}\big)\varphi^{m-2}\big(\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}\big)^p \cdots \big(\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}\big)^{p^{m-1}}$$

est une unité de de $\mathbf{A}^{\dagger}_{(p-1)p^{m-1},F}$ ce qui permet de démontrer le (i), compte-tenu du fait que $\frac{[\varepsilon]^{p^m a}-1}{[\varepsilon]^{p^m}-1} = a + \sum_{i=1}^{+\infty}\binom{a}{i+1}([\varepsilon]^{p^m}-1)^i$ est une unité de $\mathbf{A}^+_F = \mathbf{A}^{\dagger}_{0,F}$ et donc, a fortiori, de $\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$.

(ii) Si $k=1$, on a $\tau_m(\pi) = \gamma_m([\varepsilon]-1) - ([\varepsilon]-1) = [\varepsilon]([\varepsilon]^{p^m u}-1)$ et le résultat suit du (i). D'autre part,

$$\frac{\tau_m(\pi^k)}{\pi^k} = \Big(\frac{\gamma_m(\pi)}{\pi}\Big)^k - 1 = \sum_{j=1}^{+\infty}\binom{k}{j}\Big(\frac{\gamma_m(\pi)}{\pi}-1\Big)^j = \sum_{j=1}^{+\infty}\binom{k}{j}\Big(\frac{\tau_m(\pi)}{\pi}\Big)^j,$$

ce qui permet de ramener le cas k quelconque au cas $k=1$ puisque $\mathbf{A}^{\dagger}_r$ est complet pour la topologie π-adique.

Corollaire II.5.3. — *Si $r \geqslant (p-1)p^{m-1}$ et $a \in \mathbf{Z}$, l'image de $\pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$ par τ_m est incluse dans $\pi^{a+p^m-1}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$.*

Démonstration. — Comme τ_m est continue, que $\pi^{a+p^m-1}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$ est complet et $X = \pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F} \cap \mathscr{O}_F[\pi,\pi^{-1}]$ est dense dans $\pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$, il suffit de vérifier que l'image de tout élément de X par τ_m est dans $\pi^{a+p^m-1}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$. Or $X = \pi^a\mathscr{O}_F[\pi, \frac{p}{\pi^{(p-1)p^{n-1}}}]$ est engendré sur $\mathscr{O}_F$ par les $e_{i,j} = \pi^{a+i}\Big(\frac{p}{\pi^{(p-1)p^{n-1}}}\Big)^j$ et le lemme précédent montre que l'on a $\tau_m(e_{i,j}) = \pi^{p^m-1}e_{i,j}x_{i,j}$, avec $x_{i,j} \in \mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$. Ceci permet de conclure.

Corollaire II.5.4. — *Si $r \geqslant (p-1)p^{m-1}$ et $z \in \varphi(\pi)^a\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}$, alors*

$$z - f_m(\tau_m(z)) \in \varphi(\pi)^{a+(p-1)p^{m-1}-1}\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}.$$

Démonstration. — On peut écrire z sous la forme $z = \sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\varphi(z_i)$ avec $z_i \in \pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{p^{-1}r,F}$ et donc $\tau_m(z_i) \in \pi^{a+p^m-1}\mathbf{A}^{\dagger}_{p^{-1}r,F}$. Or on a, d'après la formule (II.5.1.1),

$$z - f_m(\tau_m(z)) = \sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\frac{\varphi(\tau_m(z_i))}{[\varepsilon]^{-p^m iu}-1} = \sum_{i=1}^{p-1}[\varepsilon]^i\varphi\Big(\frac{\tau_m(z_i)}{[\varepsilon]^{-p^{m-1}iu}-1}\Big)$$

et le résultat suit du fait que $\frac{[\varepsilon]^{-p^{m-1}iu}-1}{\pi^{p^{m-1}}}$ est une unité de $\mathbf{A}^{\dagger}_{p^{-1}r,F}$ d'après le lemme II.5.2.

Revenons à la démonstration de la proposition II.5.1. Il s'agit de montrer que si $x \in \varphi(\pi)^{a+p^{m-1}}\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}$, l'équation $\tau_m(y) = x$ a une solution dans $\varphi(\pi)^a\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}$ ou encore, utilisant le fait que f_m est injective, que l'application qui à y associe $g_x(y) = y - f_m(\tau_m(y) - x)$ a un point fixe. Comme $\frac{[\varepsilon]^{p^m iu}-1}{\varphi(\pi)^{p^{m-1}}}$ est une unité de $\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$ (lemme II.5.2), on a $f_m(x) \in \varphi(\pi)^a\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}$ et le lemme précédent montre que g_x est une application de $\varphi(\pi)^a\Big(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\Big)^{\psi=0}$ dans lui-même contractante pour la topologie $\varphi(\pi)$-adique, topologie pour laquelle ce module est complet, ce qui permet de conclure.

II.6. Action de Γ_K sur $D^{\dagger}(V)^{\psi=0}$: le cas général

Proposition II.6.1. — *Si γ_K est un générateur de Γ_K et V est une représentation surconvergente de $\mathscr{G}_K$, alors $\tau_K = \gamma_K - 1$ admet un inverse continu sur $D^{\dagger}(V)^{\psi=0}$, inverse qui sera noté $\tau_K^{-1} : D^{\dagger}(V)^{\psi=0} \longrightarrow D^{\dagger}(V)^{\psi=0}$. Plus précisément, si T est un réseau de V stable par $\mathscr{G}_K$, il existe $c(K,T) \in \mathbf{N}$ et $r(K,T) \in \mathbf{R}_+$ tels que, quels que soient $r \geqslant r(K,T)$ et $a \in \mathbf{Z}$, on ait*

$$\tau_K^{-1}\Big(\big(\pi^a D^{\dagger}_r(T)\big)^{\psi=0}\Big) \subset \big(\pi^{a-c(K,T)}D^{\dagger}_r(T)\big)^{\psi=0}.$$

Cette proposition admet le corollaire suivant que nous utiliserons de manière intensive dans le chapitre III.

Corollaire II.6.2. — *Si K est une extension finie de F, il existe $c(K) \in \mathbf{N}$ et $r(K) \in \mathbf{R}_+$ tels que, quels que soient $r \geqslant r(K)$ et $a \in \mathbf{Z}$, on ait*

$$\tau_K^{-1}\Big(\big(\pi^a \mathbf{A}^{\dagger}_{r,K}\big)^{\psi=0}\Big) \subset \big(\pi^{a-c(K)}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,K}\big)^{\psi=0}.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le théorème précédent à la représentation triviale de $\mathscr{G}_K$.

Revenons à la démonstration de la proposition II.6.1. On se ramène grâce à la proposition II.4.1 au cas où $K = F$ en remplaçant V par $\mathrm{Ind}_K^F V$. Soit T un réseau de V stable par $\mathscr{G}_K$. Comme on a supposé V surconvergente, on peut trouver une base $e_1, \dots, e_d$ de $D(T)$ sur $\mathbf{A}_F$ constituée d'éléments surconvergents. Il existe alors $r_0 \in \mathbf{R}_+^*$, que l'on peut supposer supérieur ou égal à $\frac{p-1}{p}$, tel que $e_i \in D^{\dagger}_{r_0}(V)$ quel que soit $1 \leqslant i \leqslant d$.

Si $\gamma \in \Gamma_K$, soit U_γ la matrice de γ dans la base $e_1, \dots, e_d$, ce qui fait que $\gamma \to U_\gamma$ est un cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0,F})$. La continuité implique qu'il existe $m \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $U_\gamma \in 1 + \pi \mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0,F})$ si $\gamma \in \Gamma_{K_m}$. Remarquons que si $f = [K_m : K]$, on peut prendre $\gamma_{K_m} = \gamma_K^f$ comme générateur de Γ_{K_m} et comme on a

$$\tau_K^{-1} = (\gamma_K - 1)^{-1} = (1 + \gamma_K + \dots + \gamma_K^{f-1})\tau_{K_m}^{-1},$$

on voit que l'on peut déduire l'énoncé de la proposition II.6.1 pour V considérée comme représentation de $\mathscr{G}_K$ de l'énoncé obtenu en considérant V comme une représentation de $\mathscr{G}_{K_m}$. Ceci permet, quitte à remplacer K par K_m, de supposer que $U = U_{\gamma_K} \in 1 + \pi \mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0,F})$ et $\chi(\gamma_K) \in 1 + p\mathbf{Z}_p$.

Soit $m = v_p(\chi(\gamma_K) - 1)$ de telle sorte que $K = F_m$ et γ_K est un générateur de Γ_{F_m} et soit $c = p^{m-1}$. Comme $\varphi^k(\pi \mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}) \subset \varphi(\pi)^{p^{k-1}}\mathbf{A}^{\dagger}_{p^k r,F}$ si $r \geqslant 1$ car $\frac{\varphi^k(\pi)}{\varphi(\pi)^{p^{k-1}}} = \frac{\varphi^k(\pi)}{\pi^{p^k}}\big(\frac{\pi^p}{\varphi(\pi)}\big)^{p^{k-1}}$

est une unité de $\mathbf{A}^{\dagger}_{p^k r,F}$ d'après le lemme II.5.2, on peut, quitte à remplacer r_0 par $p^m r_0$ et $e_1,\ldots,e_d$ par $\varphi^m(e_1),\ldots,\varphi^m(e_d)$, ce qui change U en $\varphi^m(U)$, supposer que $e_1,\ldots,e_d \in \varphi(D(T))$ et $U \in 1+\varphi(\pi)^{c+1}\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0,F})$. Comme on avait supposé $r_0 \geqslant \frac{p-1}{p}$ au début, on a maintenant $r_0 \geqslant (p-1)p^{m-1}$, ce qui nous permettra d'utiliser la proposition II.5.1.

On s'est donc ramené à démontrer la proposition II.6.1 en supposant de plus qu'il existe une base $e_1,\ldots,e_d$ de $D(T)$ sur $\mathbf{A}_F$ formée d'éléments de $D^{\dagger}_{r_0}(T) \cap \varphi(D(T))$ telle que si l'on note D le sous-$\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0,F}$-module de $D(T)$ engendré par $e_1,\ldots,e_d$, alors $\tau_K(e_i) \in \varphi(\pi)^{c+1}D$ quel que soit $1 \leqslant i \leqslant d$, où $c = p^{m-1}$ et $m = v_p(\chi(\gamma_K)-1) \geqslant 1$.

Plaçons nous donc sous les hypothèses ci-dessus et, si $r \geqslant r_0$, notons D_r le sous-$\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}$-module de $D(T)$ engendré par $e_1,\ldots,e_d$.

Lemme II.6.3. — *L'élément $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i$ de D_r appartient à $D_r^{\psi=0}$ si et seulement si $x_i \in \left(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\right)^{\psi=0}$ quel que soit $1 \leqslant i \leqslant d$.*

Démonstration. — On a $\psi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\psi(x)) = 0$ et comme on a supposé $e_i \in \varphi(D(T))$, on a $\varphi(\psi(x)) = \sum_{i=1}^d \varphi(\psi(x_i))e_i$, ce qui, compte-tenu du fait que les e_i forment une famille libre sur $\mathbf{B}_F$, permet de conclure.

Proposition II.6.4. — *τ_K induit une bijection de $\varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ sur $\varphi(\pi)^{a+c} D_r^{\psi=0}$ quels que soient $r \geqslant r_0$ et $a \in \mathbf{Z}$.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'on a

$$\tau_K\Big(\sum_{i=1}^d z_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^d \tau_K(z_i)e_i + \sum_{i=1}^d \gamma(z_i)\tau_K(e_i), \tag{II.6.3.1}$$

et comme $\tau_K(e_i) \in \varphi(\pi)^{c+1}D_r$, ceci implique, compte-tenu de la proposition II.5.1, que l'image de $\varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ par τ_K est incluse dans $\varphi(\pi)^{a+c}D_r^{\psi=0}$ et ce, quels que soient $r \geqslant r_0$ et $a \in \mathbf{Z}$. D'autre part, le lemme I.5.1 montre que τ_K induit une injection de $\varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ dans $\varphi(\pi)^{a+c}D_r^{\psi=0}$.

Il reste à vérifier la surjectivité. Si $z = \sum_{i=1}^d z_i e_i \in \varphi(\pi)^{a+c}D_r^{\psi=0}$, d'après le lemme précédent, on a $z_i \in \varphi(\pi)^{a+c}\left(\mathbf{A}^{\dagger}_{r,F}\right)^{\psi=0}$. Ceci permet, utilisant la proposition II.5.1, de définir une application $f : \varphi(\pi)^{a+c}D_r^{\psi=0} \to \varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ par la formule $f(z) = \sum_{i=1}^d \tau_K^{-1}(z_i)e_i$. Comme pour la proposition II.5.1, le point de départ de la démonstration est que f est presque un inverse de τ_K. En effet, utilisant la formule (II.6.3.1), on obtient

$$z - f(\tau_K(z)) = -f\Big(\sum_{i=1}^d \gamma(z_i)\tau_K(e_i)\Big),$$

ce qui, utilisant le fait que $\tau_K(e_i) \in \varphi(\pi)^{c+1}D_r$ permet de montrer que l'application g définie par $g(y) = y - f(\tau_K(y) - x)$ est contractante sur $\varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ pour la topologie $\varphi(\pi)$-adique et comme $\varphi(\pi)^a D_r^{\psi=0}$ est complet pour cette topologie, cela montre qu'elle y a un (unique) point fixe y solution de l'équation $\tau_K(y) = x$ et permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition II.6.1. Soit $v_1,\ldots,v_d$ une base de T sur $\mathbf{Z}_p$. Si M est la matrice de $e_1,\ldots,e_d$ dans la base $v_1,\ldots,v_d$, alors $M \in \mathrm{M}_d(\mathbf{A}^{\dagger}_{r_0}) \cap \mathrm{GL}_d(\mathbf{A})$ puisque l'on a supposé que $e_1,\ldots,e_d$ est une base de $D(T)$ sur $\mathbf{A}_F$ constituée d'éléments de $D^{\dagger}_{r_0}(T)$. Comme $\mathbf{B}^{\dagger}$ est un corps, cela implique que $M^{-1} \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^{\dagger}) \cap \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}^{\dagger})$ et il existe $b \in \mathbf{N}$ et

$r_1 \geqslant r_0$ tels que $M^{-1} \in \pi^{-b}\mathrm{M}_d(\mathbf{A}^\dagger_{r_1})$. On en déduit le fait que si $r \geqslant r_1$ et $x = \sum_{i=1}^d x_i e_i \in D^\dagger_r(T)$, alors $x_i \in \pi^{-b}\mathbf{A}^\dagger_{r,F} \subset \varphi(\pi)^{-b}\mathbf{A}^\dagger_{r,F}$. On obtient donc les inclusions $\varphi(\pi)^b\mathbf{A}^\dagger_{r,F} \subset D_r \subset \mathbf{A}^\dagger_{r,F}$ si $r \geqslant r_1$. La proposition II.6.4 montre qu'alors l'image de $\varphi(\pi)^a D^\dagger_r(T)^{\psi=0}$ par τ_K^{-1} est incluse dans $\varphi(\pi)^{a+c+b}D^\dagger_r(T)^{\psi=0}$ et comme $\frac{\varphi(\pi)}{\pi^p}$ est une unité de $\mathbf{A}^\dagger_r$ d'après le lemme II.5.2, on peut prendre $r(K,T) = r_1$ et $c(K,T) = p(c+b+1)$.

III. Cohomologie galoisienne et représentations surconvergentes

III.1. Énoncé des résultats

Soit $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger) = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \varphi^{-n}(\mathbf{B}^\dagger)$; c'est un sous-anneau dense de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$.

Théorème III.1.1. — *Si K est une extension finie de F et d un entier $\geqslant 1$, les applications naturelles*

$$H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger_K))) \xrightarrow{\iota_1} H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K)) \xrightarrow{\iota_2} H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)),$$

induites par l'inflation de Γ_K à $\mathscr{G}_K$ et les inclusions $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger_K) \subset \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K \subset \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, sont des bijections.

Les techniques de démonstration sont très analogues à celles employées par Sen [**13**] pour démontrer le résultat suivant.

***Proposition III.1.2* (Sen)**. — *Si $d \geqslant 1$, les applications naturelles*

$$H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(K_\infty)) \longrightarrow H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widehat{K}_\infty)) \longrightarrow H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\widehat{\overline{F}})),$$

induites par l'inflation de Γ_K à $\mathscr{G}_K$ et les inclusions $K_\infty \subset \widehat{K}_\infty \subset \widehat{\overline{F}}$, sont des bijections.

La démonstration de Sen repose en particulier sur la décomposition (due à Tate [**14**]) de $\widehat{K}_\infty$ sous la forme $K \oplus X$ où X est un sous-K-espace vectoriel fermé de $\widehat{K}_\infty$ sur lequel $\gamma_K - 1$ a un inverse continu, où γ_K est un générateur topologique de Γ_K. Dans la situation du théorème III.1.1, les rôles de K, K_∞, $\widehat{K}_\infty$ et $\widehat{\overline{F}}$ sont joués respectivement par $\mathbf{B}^\dagger_K$, $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger_K)$, $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et le point crucial de la démonstration est la décomposition de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K$ sous la forme $\mathbf{B}^\dagger_K \oplus X$, où X est un sous $\mathbf{B}^\dagger_K$-espace vectoriel fermé de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger_K$ sur lequel $\gamma_K - 1$ admet un inverse continu. L'existence de la décomposition est obtenue en utilisant les techniques de [**5**] introduites pour décomposer de manière analogue les modules $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{H}_K}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\mathscr{H}_K}$ etc…et l'existence de l'inverse continu de $\gamma_K - 1$ est une conséquence des résultats de [**2**] rappelés au chapitre précédent.

III.2. Décomposition des anneaux $\widetilde{\mathbf{A}}_K$, $\widetilde{\mathbf{A}}^\dagger_K$

Soit $I = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0,1[$. Si $m \in \mathbf{N}$ (resp. $m \geqslant 1$), soit $I_m = \{i \in I \mid v_p(i) \geqslant -m\}$ (resp. $I^*_m = \{i \in I \mid v_p(i) = -m\}$), ce qui fait que I est la réunion croissante pour $m \in \mathbf{N}$ des I_m et la réunion disjointe de $I_0 = \{0\}$ et des I^*_m pour $m \geqslant 1$.

Lemme III.2.1. — *Si $K = F$, les ε^i pour $i \in I$ forment une base de $\widetilde{\mathbf{E}}^+_F/(\varepsilon-1)\widetilde{\mathbf{E}}^+_F$ sur k_F.*

Démonstration. — $\widetilde{\mathbf{E}}_F$ étant le complété de la clôture radicielle de $\mathbf{E}_F = k_F((\varepsilon-1))$, tout élément de $\widetilde{\mathbf{E}}^+_F$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i\in p^{-\infty}\mathbf{N}} (\varepsilon-1)^i \overline{a}_i$, où $\overline{a}_i$ est une suite d'éléments de k_F telle que l'ensemble $\{i \leqslant C,\ \overline{a}_i \neq 0\}$ soit fini quel que soit $C \in \mathbf{R}$. On en déduit le fait que les $(\varepsilon-1)^i$ pour $i\in I$ forment une base de $\widetilde{\mathbf{E}}_F^+/(\varepsilon-1)\widetilde{\mathbf{E}}_F^+$ sur k_F et la matrice faisant passer de $(\varepsilon-1)^i$ aux ε^i étant triangulaire avec des 1 sur la diagonale, on en déduit le résultat.

Corollaire III.2.2. — *Tout élément de $\widetilde{\mathbf{E}}_F$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\sum_{i\in I}\varepsilon^i\overline{a}_i(x),$$

où la suite des $\overline{a}_i(x)$ est une suite d'éléments de $\mathbf{E}_F$ tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies.

Proposition III.2.3. — *Tout élément x de $\widetilde{\mathbf{E}}_F$ s'écrit de manière unique sous la forme*

$$x=\mathrm{R}_0(x)+\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{R}_m^*(x),$$

où $\mathrm{R}_0(x)\in\mathbf{E}_F$ et, si $m\geqslant 1$, $\mathrm{R}_m^*(x)\in\varphi^{-m}(\mathbf{E}_F^{\psi=0})$.

Démonstration. — $1,\varepsilon,\ldots,\varepsilon^{p-1}$ est une base de $\mathbf{E}_F$ sur $\varphi(\mathbf{E}_F)$ dans laquelle ψ est donné par la formule $\psi(a_0+a_1\varepsilon+\cdots+a_{p-1}\varepsilon^{p-1})=\varphi^{-1}(a_0)$. On en déduit le fait que si $m\geqslant 1$, on a $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_F)=\varphi^{1-m}(\mathbf{E}_F)\oplus\varphi^{-m}(\mathbf{E}_F^{\psi=0})$ et que les ε^i pour $i\in I$ et $v_p(i)\geqslant 1-m$ (resp. $v_p(i)=-m$) forment une base de $\varphi^{1-m}(\mathbf{E}_F)$ (resp. $\varphi^{-m}(\mathbf{E}_F^{\psi=0})$) sur $\mathbf{E}_F$. On doit donc poser

$$\mathrm{R}_0(x)=\overline{a}_0(x)\quad\text{et}\quad\mathrm{R}_m^*(x)=\sum_{i\in I_m^*}\varepsilon^i\overline{a}_i(x).$$

Proposition III.2.4. — *Si K est une extension finie de F, tout élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ peut s'écrire de manière unique sous la forme*

$$x=\mathrm{R}_0(x)+\sum_{m=1}^{+\infty}\mathrm{R}_m^*(x),\tag{III.2.4.1}$$

où $\mathrm{R}_0(x)\in\mathbf{A}_K$ et, si $m\geqslant 1$, $\mathrm{R}_m^*(x)\in\varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{\psi=0})$.

Démonstration. — Commençons par supposer $K=F$ et choisissons une section s de la projection de $\mathscr{O}_F$ sur k_F. Si $F=\sum_{n\geqslant n_0}\overline{a}_n(\varepsilon-1)^n\in\mathbf{E}_F$, posons $s(F)=\sum_{n\geqslant n_0}s(\overline{a}_n)\pi^n\in\mathbf{A}_F$. Si $y\in\widetilde{\mathbf{A}}_F$, son image $\overline{y}$ modulo p appartient à $\widetilde{\mathbf{E}}_F$ et on peut lui appliquer le corollaire III.2.2. Ceci nous permet, si $x\in\widetilde{\mathbf{A}}_F$ de définir par récurrence une suite d'éléments x_n de $\widetilde{\mathbf{A}}_F$ en posant $x_0=x$ et, si $n\geqslant 1$,

$$x_n=\frac{1}{p}\Big(x_{n-1}-\sum_{i\in I}[\varepsilon^i]s(\overline{a}_i(\overline{x}_{n-1}))\Big).$$

On a alors $x=\sum_{i\in I}[\varepsilon^i]a_i(x)$, où l'on a posé $a_i(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}p^ns(\overline{a}_i(\overline{x}_n))\in\mathbf{A}_F$, ce qui nous permet de définir $\mathrm{R}_0(x)$ et $\mathrm{R}_m^*(x)$ par les formules

$$\mathrm{R}_0(x)=a_0(x)\quad\text{et}\quad\mathrm{R}_m^*(x)=\sum_{i\in I_m^*}[\varepsilon^i]a_i(x)$$

et comme $[\varepsilon^i]\in\varphi^{-m}(\mathbf{A}_F^{\psi=0})$ si et seulement si $i\in I_m^*$, la décomposition obtenue ci-dessus convient, ce qui montre l'existence.

Si on a $\sum_{m=0}^{+\infty} a_m = 0$ avec $a_0 \in \mathbf{A}_F$ et, si $m \geqslant 1$, $a_m \in \varphi^{-m}(\mathbf{A}_F^{\psi=0})$, alors réduisant modulo p et utilisant la proposition III.2.3, on en déduit le fait que tous les a_m sont divisibles par p, puis par une récurrence immédiate, qu'ils sont tous nuls ; d'où l'unicité d'une telle décomposition.

Supposons maintenant que K est une extension finie quelconque de F et soit $e_1, \dots, e_d$ une base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_F$ qui est donc aussi une base de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ sur $\widetilde{\mathbf{A}}_F$. On peut écrire un élément x de $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^d x_i e_i$ et comme $\varphi^m(e_1), \dots, \varphi^m(e_d)$ est aussi une base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_F$, on en déduit le fait que $\varphi^m(\sum_{i=1}^d x_i e_i) \in \mathbf{A}_K$ si et seulement si $\varphi^m(x_i) \in \mathbf{A}_F$ pour $1 \leqslant i \leqslant d$. En particulier, $\sum_{i=1}^d x_i e_i \in \varphi^{-m}(\mathbf{A}_K^{\psi=0})$ si et seulement si

$$\psi(\varphi^m(\sum_{i=1}^d x_i e_i)) = \sum_{i=1}^d \psi(\varphi^m(x_i)\varphi^m(e_i)) = \sum_{i=1}^d \psi(\varphi^m(x_i))\varphi^{m-1}(e_i)$$

est nul, ce qui, compte-tenu du fait que $\varphi^{m-1}(e_1), \dots, \varphi^{m-1}(e_d)$ est une base de $\mathbf{A}_K$ sur $\mathbf{A}_F$, est équivalent à ce que $x_i \in \varphi^{-m}(\mathbf{A}_F^{\psi=0})$ si $1 \leqslant i \leqslant d$. Tout ceci montre que l'on doit (et peut) poser

$$\mathrm{R}_0(x) = \sum_{i=1}^d \mathrm{R}_0(x_i) e_i \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_m^*(x) = \sum_{i=1}^d \mathrm{R}_m^*(x_i) e_i.$$

Remarque III.2.5. — On pourrait être tenté de déduire de la proposition précédente le même énoncé en remplaçant $\widetilde{\mathbf{A}}_K$ par $\widetilde{\mathbf{A}}$ et $\mathbf{A}_K$ par $\mathbf{A}$, puisque $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{K}} = \bigcup_K \widetilde{\mathbf{A}}_K$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{A}}$. Ce n'est pas possible car en réduisant modulo p, on aurait un énoncé analogue à la proposition III.2.3 en remplaçant $\widetilde{\mathbf{E}}_F$ par $\widetilde{\mathbf{E}}$ et $\mathbf{E}_F$ par $\mathbf{E}$, or ce dernier corps est dense dans $\widetilde{\mathbf{E}}$. Le problème est que les applications R_0 et R_m^* sur $\widetilde{\mathbf{A}}_{\overline{K}}$ sont continues pour la topologie p-adique mais pas pour la topologie naturelle de $\widetilde{\mathbf{A}}$.

Si $m \in \mathbf{N}$, on pose $\mathrm{R}_m = \mathrm{R}_0 + \sum_{i=1}^m \mathrm{R}_i^*$.

Proposition III.2.6. — *Si $m \in \mathbf{N}$, alors*

(i) $\mathrm{R}_0 \circ \varphi^m = \varphi^m \circ \mathrm{R}_m$.

(ii) R_m *et les* R_k^* *pour* $k \geqslant m+1$ *sont* $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K)$*-linéaires.*

(iii) *Si* $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_K$, *alors* $x = \lim_{m \to +\infty} \mathrm{R}_m(x)$.

Démonstration. — Le (i) résulte immédiatement de l'unicité de la décomposition donnée dans la proposition III.2.4 et le (ii) résulte de cette unicité et du fait que $\varphi(x)y \in \mathbf{A}_K^{\psi=0}$ si $x \in \mathbf{A}_K$ et $y \in \mathbf{A}_K^{\psi=0}$. Quant au (iii), c'est une conséquence de la convergence de la série (III.2.4.1).

Proposition III.2.7. — *Si K est une extension finie de F, il existe $n_0(K) \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$ et $n \geqslant n_0(K)$, $a \in \mathbf{Z}$, $x \in \pi^a \widetilde{\mathbf{A}}_{r,K}^\dagger$ et $m \in \mathbf{N}$, alors*

$$\mathrm{R}_0(x) \in \pi^a \mathbf{A}_{n,K}^\dagger \quad \text{et} \quad \mathrm{R}_m^*(x) \in \pi^a \varphi^{-m}((\mathbf{A}_{p^m n,K}^\dagger)^{\psi=0}).$$

Démonstration. — On déduit le cas $a \in \mathbf{Z}$ quelconque du cas $a = 0$ et de la $\mathbf{B}_K$-linéarité des applications R_0 et R_m^*. Supposons donc $a = 0$.

Dans le cas $K = F$, si on reprend la démonstration de la proposition III.2.4, on voit que si $x \in \widetilde{\mathbf{A}}_F^+$, alors $a_i(x) \in \mathbf{A}_F^+$ quel que soit $i \in I$ et donc que l'image de $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+ = \widetilde{\mathbf{A}}_{0,F}^\dagger$ par les applications R_0 et R_m^* est incluse dans $\widetilde{\mathbf{A}}_F^+$. D'autre part, si $n \in \mathbf{N}$, $\widetilde{\mathbf{A}}_{n,F}^\dagger$ est l'intersection des $[\overline{\pi}]^{-kn} \widetilde{\mathbf{A}}_F^+ + p^{k+1} \widetilde{\mathbf{A}}_F$ pour $k \in \mathbf{N}$ et comme $\frac{\pi}{[\overline{\pi}]}$ est une unité de $\widetilde{\mathbf{A}}_{n,F}^\dagger$ si $n \geqslant 1$, on peut aussi voir $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F}$ comme l'intersection des $\pi^{-kn}\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{F} + p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{F}$ pour $k \in \mathbf{N}$. Comme $\pi^{-kn} \in \mathbf{A}_F$ et les applications R_0 et R^*_m sont $\mathbf{A}_F$-linéaires et envoient $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{F}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}_{F}$ dans eux-mêmes, elles aussi $\pi^{-kn}\widetilde{\mathbf{A}}^{+}_{F} + p^{k+1}\widetilde{\mathbf{A}}_{F}$ et $\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F}$ dans eux-mêmes. On a donc $\mathrm{R}_0(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F}) \subset \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F} \cap \mathbf{A}_F = \mathbf{A}^{\dagger}_{n,F}$ et, si $m \geqslant 1$,

$$\mathrm{R}^*_m(\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F}) \subset \varphi^{-m}(\mathbf{A}_F^{\psi=0}) \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,F} = \varphi^{-m}(\mathbf{A}_F^{\psi=0}) \cap \widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{p^m n,F}) = \varphi^{-m}((\mathbf{A}^{\dagger}_{p^m n,K})^{\psi=0}),$$

ce qui montre que l'on peut prendre $n_0(F) = 0$.

Dans le cas général, on a $[\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{K} : \widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{F}] = [\widetilde{\mathbf{B}}_{K} : \widetilde{\mathbf{B}}_{F}]$. On peut donc prendre la base $e_1, \dots, e_d$ de $\varphi(\mathbf{B}_K)$ sur $\varphi(\mathbf{B}_F)$ utilisée dans la démonstration de la proposition III.2.4, de telle sorte que les e_i forment une base de $\varphi(\mathbf{A}^{\dagger}_{K})$ sur $\mathbf{A}^{\dagger}_{F}$ et il suffit de prendre pour $n_0(K)$ le plus petit n tel que les e_i forment une base de $\mathbf{A}^{\dagger}_{n,K}$ sur $\mathbf{A}^{\dagger}_{n,F}$.

Corollaire III.2.8. — *Soient K une extension finie de F, γ_K un générateur de Γ_K et $c(K)$ l'entier défini au corollaire II.6.2. Il existe $n(K) \in \mathbf{N}$ tel que si $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant n(K)$ et $a \in \mathbf{Z}$, tout élément x de $\pi^a\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{r,K}$ peut s'écrire sous la forme $x = x_0 + (1-\gamma_K)(y)$ avec $x_0 \in \pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{n,K}$ et $y \in \pi^{a-c(K)}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,K}$.*

Démonstration. — D'après le corollaire II.6.2, $\tau_K = \gamma_K - 1$ est inversible sur $(\mathbf{A}^{\dagger}_{K})^{\psi=0}$ et il existe $r(K) \in \mathbf{R}^+$ tel que, pour tout $r \geqslant r(K)$ et tout $a \in \mathbf{Z}$,

$$\tau_K^{-1}((\pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{r,K})^{\psi=0}) \subset \pi^{a-c(K)}\mathbf{A}^{\dagger}_{r,K}.$$

Montrons que l'on peut prendre pour $n(K)$ n'importe quel entier supérieur ou égal à $r(K)$ et $n_0(K)$ et

$$x_0 = \mathrm{R}_0(x) \quad \text{et} \quad y = \sum_{m=1}^{+\infty} \varphi^{-m}\big(\tau_K^{-1}\big(\varphi^m\big(\mathrm{R}^*_m(x)\big)\big)\big).$$

D'après la proposition III.2.7, on a $x_0 \in \pi^a\mathbf{A}^{\dagger}_{n,K}$ et si $m \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\varphi^{-m}\big(\tau_K^{-1}\big(\varphi^m\big(\mathrm{R}^*_m(x)\big)\big)\big) &\in \varphi^{-m}\Big(\tau_K^{-1}\Big(\big(\varphi^m(\pi^a)\mathbf{A}^{\dagger}_{p^m n,K}\big)^{\psi=0}\Big)\Big)\\ &\subset \varphi^{-m}\Big(\pi^{-c(K)}\varphi^m(\pi^a)\mathbf{A}^{\dagger}_{p^m n,K}\Big)\\ &\subset \varphi^{-m}\Big(\varphi^m(\pi^{a-c(K)})\mathbf{A}^{\dagger}_{p^m n,K}\Big) \subset \pi^{a-c(K)}\widetilde{\mathbf{A}}^{\dagger}_{n,K},\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

III.3. Descente de $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{K}$

Proposition III.3.1. — (i) $H^1(K_\infty, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger})) = \{1\}$.

(ii) *L'application d'inflation de Γ_K à $\mathscr{G}_K$ induit une bijection de $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}_{K}))$ sur $H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^{\dagger}))$.*

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) puisque celui-ci implique que le terme suivant dans la suite d'inflation-restriction est trivial. Pour démontrer le (i), nous aurons besoin d'un certain nombre de lemmes préliminaires.

Lemme III.3.2. — *Soit $\mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}$ l'idéal maximal de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ (i.e. l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{E}}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x) > 0$). Alors*

(i) *$H^1(K_\infty, \mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}}) = 0$.*

(ii) *Si* $d \geqslant 1$, *alors* $H^1(K_\infty, 1+\mathrm{M}_d(\mathfrak{m}_{\widetilde{\mathbf{E}}})) = 1$.

Démonstration. — cf. [**5**, chap. IV].

Le (i) de ce lemme admet le corollaire immédiat suivant dont nous aurons besoin dans la suite. Si $s \in \mathbf{R}$, soit $\mathfrak{a}_s$ l'ensemble des éléments x de $\widetilde{\mathbf{E}}$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x) \geqslant \frac{ps}{p-1}$.

Corollaire III.3.3. — *Si K est une extension finie de F et $\sigma \to c_\sigma$ est un cocycle continu de $\mathscr{G}_{K_\infty}$ dans $\mathfrak{a}_s$, alors quel que soit $\eta > 0$, il existe $c \in \mathfrak{a}_{s-\eta}$ tel que l'on ait $c_\sigma = (\sigma-1)c$, quel que soit $\sigma \in \mathscr{H}_K$.*

Si $M \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}})$, on note $v_{\mathbf{E}}(M)$ l'inf. des images des coefficients de M par $v_{\mathbf{E}}$ et $[M] \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ la matrice dont les coefficients sont les représentants de Teichmüller des coefficients de M.

Lemme III.3.4. — *Soient $r \in \mathbf{R}_+$, $k \geqslant 1$ et $\sigma \to U_\sigma$ un 1-cocycle continu de $\mathscr{H}_K$ dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger) \cap 1 + p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$. Alors quel que soit $\eta > 0$, il existe $V \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}})$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(V) \geqslant -\frac{p(r+\eta)}{p-1}k$ tel que le cocycle $\sigma \to (1+p^k[V])^{-1}U_\sigma\sigma(1+p^k[V])$ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger) \cap 1 + p^{k+1}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$*

Démonstration. — Si $s \in \mathbf{R}$, soit $\mathfrak{a}_s$ l'idéal fractionnaire de $\widetilde{\mathbf{E}}$ des éléments x vérifiant $v_{\mathbf{E}}(x) \geqslant s$. L'image $\sigma \to V_\sigma$ de $\sigma \to U_\sigma - 1$ dans $p^k\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})/p^{k+1}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}) = \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}})$ est un cocycle à valeurs dans $\mathrm{M}_d(\mathfrak{a}_{-kr})$ et le corollaire III.3.3 implique qu'il existe $V \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}})$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(V) \geqslant -\frac{p(r+\eta)}{p-1}k$ tel que l'on ait $V_\sigma = (\sigma-1)V$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{H}_K$. Le cocycle $\sigma \to (1+p^k[V])^{-1}U_\sigma\sigma(1+p^k[V])$ est par construction à valeurs dans $1 + p^{k+1}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ et comme $1+p^k[V]$ et $(1+p^k[V])^{-1} = 1 - p^k[V] + p^k([V]^2) - \dots$ appartiennent à $\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger)$, on en déduit le fait que le cocycle $\sigma \to V_\sigma$ est aussi à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger)$, ce qui permet de conclure.

Corollaire III.3.5. — *Soient $r \in \mathbf{R}_+$, et $\sigma \to U_\sigma$ un 1-cocycle continu de $\mathscr{H}_K$ dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger) \cap 1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$. Alors quel que soit $\eta > 0$, il existe $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger) \cap 1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ tel que le cocycle $\sigma \to M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial.*

Démonstration. — Soit η_k une suite strictement croissante d'éléments de $]0, \eta[$. Utilisant le lemme précédent, on construit par récurrence pour $k \geqslant 1$ une suite de matrices $V_k \in \mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{E}})$ vérifiant $v_{\mathbf{E}}(V_k) \geqslant -k(r+\eta_k)$ telle que,si on pose $M_k = 1 + p^k[V_k]$, le cocycle

$$\sigma \to (M_1 \dots M_k)^{-1}U_\sigma\sigma(M_1 \dots M_k)$$

soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta_k}^\dagger) \cap 1 + p^{k+1}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$. Le produit infini $\prod_{k=1}^{+\infty} M_k$ converge dans $1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ vers une matrice M telle que le cocycle $\sigma \to M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial. D'autre part, chacun des termes du produit appartient à $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger)$ qui est fermé dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ et donc $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+\eta}^\dagger)$, ce qui permet de conclure.

Revenons à la démonstration de la proposition III.3.1. Soit $\sigma \to U_\sigma$ un cocycle continu de $\mathscr{H}_K$ dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)$. Comme $\mathscr{H}_K$ est compact, il existe $r \in \mathbf{R}_+$ tel que l'on ait $U_\sigma \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_r^\dagger)$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{H}_K$ et il existe une extension finie galoisienne L de K telle que U_σ appartienne à $1+\pi\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger)$ si $\sigma \in \mathscr{H}_L$. D'après le (ii) du lemme III.3.2, il existe une matrice $M_0 \in \mathrm{GL}_d(W(\widetilde{\mathbf{E}}^+))$ telle que le cocycle $\sigma \to M_0^{-1}U_\sigma\sigma(M_0)$ soit à valeurs dans $1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ et donc à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_r^\dagger) \cap 1 + p\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}})$ si $\sigma \in \mathscr{H}_L$. Le corollaire précédent montre qu'il existe $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{r+1}^\dagger)$ tel que l'on ait $M^{-1}M_0^{-1}U_\sigma\sigma(M_0M) = 1$ quel que soit $\sigma \in \mathscr{H}_L$ et donc que la restriction de $\sigma \to U_\sigma$ à $\mathscr{H}_L$ est cohomologue au cocycle trivial. On en déduit le fait que $\sigma \to U_\sigma$ est cohomologue à un cocycle provenant par inflation d'un cocycle sur $\mathscr{H}_K/\mathscr{H}_L = \mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbf{B}}_L^\dagger/\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger)$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)^{\mathscr{H}_L} = \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_L^\dagger)$. On termine la démonstration en utilisant la trivialité de $H^1(\mathrm{Gal}(\widetilde{\mathbf{B}}_L^\dagger/\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger), \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_L^\dagger))$, trivialité qui découle du théorème de Hilbert 90 appliqué à l'extension galoisienne finie $\widetilde{\mathbf{B}}_L^\dagger/\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$ (cf. proposition II.4.1).

III.4. La décomplétion ou le passage de $\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$ à $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger)$

Ce paragraphe est consacré à la démonstration de la bijectivité de ι_1, c'est-à-dire à la démonstration de la proposition suivante.

Proposition III.4.1. — *L'inclusion de $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger)$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger$ induit un isomorphisme de $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger)))$ sur $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger))$.*

Lemme III.4.2. — *Soient K une extension finie de F et γ un générateur de Γ_K. Si $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K)$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{A}-1) > 0$, où $\overline{A}$ désigne l'image de A dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{E}_K)$, si $i \in \mathbf{N}$ est tel que $p^i v_{\mathbf{E}}(\overline{A}-1) > c(K)$, où $c(K)$ est l'entier défini au corollaire II.6.2 et si $B \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$ vérifie $\mathrm{R}_i(B) = 1$ et $A\gamma(B) = BA$, alors $B = 1$.*

Démonstration. — Quitte à remplacer A par $\varphi^i(A)$ et B par $\varphi^i(B)$, on peut supposer $v_{\mathbf{E}}(\overline{A}-1) > c(K)$ et $\mathrm{R}_0(B) = 1$. Supposons $B \neq 1$ et soit k le plus petit entier tel que $B \notin 1 + p^{k+1}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$. On peut alors écrire $B = 1 + p^k B_1$ où B_1 est telle que sa réduction $\overline{B}_1$ modulo p est non nulle et vérifie $\mathrm{R}_0(\overline{B}_1) = 0$.

La relation $A\gamma(B) = BA$ implique, en regardant modulo p^{k+1}, la relation $\gamma(\overline{B}_1) = \overline{A}^{-1}\overline{B}_1\overline{A}$. Si on applique $\varphi^m \circ \mathrm{R}_m^*$ à cette relation, que l'on pose $C_m = \varphi^m \circ \mathrm{R}_m^*(\overline{B}_1)$ et $D_m = \varphi^m(\overline{A})$, utilisant la $\mathbf{B}_K$-linéarité de R_m^* et le fait que $A \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K)$, on obtient la relation $\gamma(C_m) - C_m = D_m^{-1}C_m D_m - C_m$. Or $v_{\mathbf{E}}(\gamma(C_m) - C_m) \leqslant c(K) + v_{\mathbf{E}}(C_m)$ puisque C_m est tué par ψ (cf. corollaire II.6.2) et comme

$$v_{\mathbf{E}}(D_m^{-1}C_m D_m - C_m) \geqslant v_{\mathbf{E}}(C_m) + v_{\mathbf{E}}(D_m - 1) = v_{\mathbf{E}}(C_m) + p^m v_{\mathbf{E}}(\overline{A}-1) > v_{\mathbf{E}}(C_m) + c(K),$$

ceci implique $v_{\mathbf{E}}(C_m) = +\infty$ et donc $C_m = 0$ quel que soit $m \in \mathbf{N}$ et par conséquent $\overline{B}_1 = 0$, ce qui conduit à une contradiction et permet de conclure.

Proposition III.4.3. — *Soit $\sigma \to V_\sigma$ un cocycle continu sur Γ_K à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K)$ et $C \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K)$ tel que le cocycle $\sigma \to W_\sigma = C^{-1}V_\sigma\sigma(C)$ soit à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K))$; alors $C \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K))$.*

Démonstration. — Γ_K étant compact, Il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que W_σ soit à coefficients dans $\varphi^{-k}(\mathbf{B}_K)$ quel que soit $\sigma \in \Gamma_K$. Appliquant R_m pour $m \geqslant k$ à l'identité $V_\sigma\sigma(C) = CW_\sigma$ et utilisant la $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K)$-linéarité de R_m, on obtient la relation $V_\sigma\sigma(C_m) = C_m W_\sigma$, où l'on a posé $C_m = \mathrm{R}_m(C)$. Comme C_m tend vers C quand m tend vers $+\infty$, il existe $m_0 \in \mathbf{N}$ tel que C_m soit inversible et $CC_m^{-1} \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$ si $m \geqslant m_0$. Utilisant alors les deux relations obtenues pour éliminer W_σ, on obtient la relation $CC_m^{-1}V_\sigma = V_\sigma\sigma(CC_m^{-1})$. Le cocycle $\sigma \to V_\sigma$ étant continu, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que V_{γ_n} appartienne à $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K)$ et vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{V}_{\gamma_n} - 1) > 0$. Comme d'autre part, on a $\mathrm{R}_m(CC_m^{-1}) = 1$ par construction (cela résulte de la $\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K)$-linéarité de R_m), on peut appliquer le lemme III.4.2 au corps K_n et à $A = V_{\gamma_n}$ et $B = CC_m^{-1}$ pour conclure au fait que $C = C_m$ si m est assez grand et donc $C \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-m}(\mathbf{B}_K))$, ce qu'il fallait démontrer.

Passons à la démonstration de l'injectivité de ι_1. Soient $\sigma \to U_\sigma$ et $\sigma \to U'_\sigma$ des cocycles sur Γ_K à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$ cohomologues dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger)$, c'est-à-dire tels qu'il existe $A \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger)$ tel que l'on ait $A^{-1}U_\sigma\sigma(A) = U'_\sigma$ quels que soit $\sigma \in \Gamma_K$. Comme Γ_K est topologiquement engendré par un nombre fini d'éléments (il est en fait topologiquement cyclique), il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que nos deux cocycles soient à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-k}(\mathbf{B}_K^\dagger))$. Quitte à remplacer U_σ et U'_σ par $\varphi^k(U_\sigma)$ et $\varphi^k(U'_\sigma)$, on peut supposer que les deux cocycles sont à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$ et on déduit de la proposition III.4.3 le fait que $A \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K))$ et comme $A \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger)$, ceci implique que $A \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$ et donc que nos deux cocycles sont cohomologues dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$; on en déduit l'injectivité.

Pour démontrer la surjectivité de ι_1, nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme III.4.4. — *Soient K une extension finie de F, γ_K une générateur de Γ_K, $c(K)$ et $n(K)$ les entiers définis au corollaire III.2.8, $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geqslant n(K)$ et $k \geqslant 3$. Si*

$$U \in 1 + \pi^{2c(K)}\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_{n,K}^\dagger) + \pi^{kc(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger),$$

il existe $M \in 1 + \pi^{(k-1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$ telle que

$$M^{-1}U\gamma_K(M) \in 1 + \pi^{2c(K)}\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_{n,K}^\dagger) + \pi^{(k+1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger).$$

Démonstration. — Supposons que la matrice U vérifie la condition du lemme. On peut donc l'écrire sous la forme d'une somme $U = 1 + U_1 + U_2$ où U_1 et U_2 appartiennent aux ensembles mentionnés. D'après le corollaire III.2.8, on peut écrire U_2 sous la forme

$$U_2 = \mathrm{R}_0(U_2) + (1-\gamma_K)(V)$$

avec

$$\mathrm{R}_0(U_2) \in \pi^{kc(K)}M_d(\mathbf{A}_{n,K}^\dagger) \quad \text{et} \quad V \in \pi^{(k-1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger).$$

Un calcul brutal, utilisant le fait que $2(k-1) \geqslant k+1$ puisque l'on a supposé $k \geqslant 3$, montre que

$$(1+V)^{-1}U\gamma_K(1+V) = (1 - V + V^2 \cdots)(1 + U_1 + U_2)(1 + \gamma_K(V))$$

est congru à $1+U_1+\mathrm{R}_0(U_2)$ modulo $\pi^{(k+1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$, ce qui montre que $M = 1+V$ convient.

Corollaire III.4.5. — *Si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $n \geqslant n(K)$ et $U \in 1 + \pi^{3c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$, il existe $M \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$ telle que*

$$M^{-1}U\gamma_K(M) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_{n,K}^\dagger).$$

Démonstration. — Le lemme précédent permet de construire par récurrence une suite de matrices M_k pour $k \geqslant 3$ telle que $M_k \in 1+\pi^{(k-1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$ et si l'on pose $U_k = (M_3 \cdots M_k)^{-1}U\gamma_K(M_3 \cdots M_k)$, alors $U_k \in 1+\pi^{2c(K)}\mathrm{M}_d(\mathbf{A}_{n,K}^\dagger)+\pi^{(k+1)c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$. Le produit infini $\prod_{k=3}^{+\infty} M_m$ converge donc dans $1 + \pi^{2c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$ vers une matrice qui répond à la question.

Revenons à la démonstration de la surjectivité de ι_1. Soit $\sigma \to U_\sigma$ un cocycle continu de Γ_K dans $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}_K^\dagger)$. Par continuité, il existe $m \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{N}$ vérifiant $n \geqslant n(K)$ tel que $U_\sigma \in 1 + \pi^{3c(K)}\mathrm{M}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_{n,K}^\dagger)$ si $\sigma \in \Gamma_{K_m}$. Soit γ_m un générateur de Γ_{K_m}. D'après le corollaire précédent, il existe $A \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{A}}_K^\dagger)$ telle que si $U' = A^{-1}U_{\gamma_m}\gamma_m(A)$, alors $U' \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$. Soit $\sigma \to V_\sigma$ le cocycle sur Γ_K défini par $V_\sigma = A^{-1}U_\sigma\sigma(A)$. On s'est débrouillé pour que

$V_{\gamma_m} \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ et donc $V_\sigma \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{A}_K^\dagger)$ quel que soit $\sigma \in \Gamma_{K_m}$ à cause de la relation de cocycle et de la continuité.

Soit γ un générateur de Γ_K. La relation de cocycle et la commutativité de Γ_K impliquent les relations

$$U_{\sigma\gamma} = U_\sigma \sigma(U_\gamma) = U_\gamma \gamma(U_\sigma) \quad \text{et} \quad U_\gamma^{-1} U_\sigma \sigma(U_\gamma) = \gamma(U_\sigma),$$

si $\sigma \in \Gamma_K$. On tire alors de la proposition III.4.3 appliquée au cocycle $\sigma \to V_\sigma$ sur Γ_{K_m} et $C = V_\gamma$, le fait que V_γ a ses coefficients dans $\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K)$ et comme ses coefficients appartiennent aussi à $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, ceci implique que $V_\gamma \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$, puis, comme γ est un générateur de Γ_K, que $\sigma \to V_\sigma$ est un cocycle sur Γ_K à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$ et comme $\sigma \to V_\sigma$ est cohomologue à $\sigma \to U_\sigma$ par construction, ceci permet de démontrer la surjectivité de ι_1 et termine la démonstration de la proposition III.4.1.

III.5. Application aux représentations p-adiques

Proposition III.5.1. — *Si K est une extension finie de F et $\sigma \to U_\sigma$ est un cocycle continu sur $\mathscr{G}_K$ à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger)$ tel que le cocycle $\sigma \to M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial sur $\mathscr{H}_K$ et donc à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$.*

Démonstration. — $\mathbf{Q}_p$ étant un sous-corps de $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ et l'application naturelle de $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger)))$ dans $H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger))$ étant une bijection d'après le thórème III.1.1, il existe $M_0 \in \mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger)$ tel que le cocycle $\sigma \to M_0^{-1}U_\sigma\sigma(M_0)$ soit trivial sur $\mathscr{H}_K$ et à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger))$ et quitte à remplacer M_0 par $\varphi^k(M_0)$, on peut supposer que le cocycle $\sigma \to M_0^{-1}U_\sigma\sigma(M_0)$ est à valeurs dans $\mathrm{GL}_d(\mathbf{B}_K^\dagger)$. Comme d'autre part l'image de $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p))$ dans $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}))$ est triviale (c'est une autre manière d'exprimer le fait que $V(D(V)) = V$ si V est une représentation p-adique de $\mathscr{H}_K$), il existe $N \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B})$ tel que le cocycle $\sigma \to N^{-1}U_\sigma\sigma(N)$ soit trivial sur $\mathscr{H}_K$. On en tire le fait que $N^{-1}M_0 \in \widetilde{\mathbf{B}}_K$ et la proposition III.4.3 appliquée à $C = N^{-1}M_0$ et $V_\sigma = N^{-1}U_\sigma\sigma(N)$ permet de montrer que $N^{-1}M_0 \in \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K))$. Il existe donc $k \in \mathbf{N}$ tel que $M = \varphi^k(M_0) \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B})$ et M est un élément de $\mathrm{GL}_d(\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger) \cap \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}) = \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger)$ tel que le cocycle $\sigma \to M^{-1}U_\sigma\sigma(M)$ soit trivial sur $\mathscr{H}_K$, ce qui permet de conclure.

Corollaire III.5.2. — *Si K est une extension finie de F, toute représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$ est surconvergente.*

Démonstration. — Soit V une représentation p-adique de $\mathscr{G}_K$. Soit $e_1, \dots, e_d$ une base de V sur $\mathbf{Q}_p$ et $U_\tau \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$ la matrice de l'action de τ dans cette base. Comme $\mathscr{G}_K$ agit trivialement sur $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$, les matrices U_τ vérifient la relation de cocycle $U_{\sigma\tau} = U_\sigma U_\tau = U_\sigma\sigma(U_\tau)$ et on peut utiliser la proposition précédente pour exhiber $M \in \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}^\dagger)$ telle que le cocycle $M^{-1}U_\tau\tau(M)$ soit trivial sur $\mathscr{H}_K$, ce qui fait que les colonnes de M forment une base de $D(V)$ constituée d'éléments surconvergents et permet de conclure.

Remarque III.5.3. — Dans une version précédente de cet article, nous avions énoncé une version plus forte du théorème III.1.1 incluant le fait que l'inflation induit une bijection de $H^1(\Gamma_K, \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}_K^\dagger)))$ sur $H^1(\mathscr{G}_K, \mathrm{GL}_d(\varphi^{-\infty}(\mathbf{B}^\dagger)))$. La démonstration était une variante de celle de la proposition III.5.1 exposée ci-dessus reposant sur la trivialité de $H^1(\mathscr{H}_K, \mathrm{GL}_d(\mathbf{B}))$, trivialité qui a de grandes chances d'être fausse.

Références

[1] S. Bloch, K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, *The Grothendieck Festschrift*, vol. I, 333–400, Prog. Math. **86**, Birkhaüser 1990.

[2] F. Cherbonnier, Représentations p-adiques surconvergentes, thèse de l'université d'Orsay, 1996.

[3] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc **12**, 241-268, 1999.

[4] R. Coleman, Division values in local fields, Invent. Math. **53** (1979), 91–116.

[5] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485-571.

[6] J-M. Fontaine et J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288** (1979) 367–370.

[7] Représentations p-adiques des corps locaux, *The Grothendieck Festschrift*, vol. II, Birkhauser, Boston 249–309, 1991.

[8] J-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques* exp. II, Astérisque **223** (1994), 59–102.

[9] J-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables. *Périodes p-adiques*, exp. III, Astérisque **223** (1994) 113–184.

[10] L. Herr, Cohomologie Galoisienne des corps p-adiques, thèse de l'université d'Orsay, 1995.

[11] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994) 81–149.

[12] S. Sen, Ramification in p-adic Lie extensions, Invent. Math. **17** (1972), 44–50.

[13] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. Math. **62** (1980), 89–116.

[14] J. Tate, p-divisible groups, in *Proc. of a conf. on local fields*, Nuffic Summer School at Driebergen, 158–183, Springer 1967.

[15] J-P. Wintenberger, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux ; applications, Ann. Sci. E.N.S. **16** (1983), 59–89.

Frédéric Cherbonnier, 33 Rue de Poissy, 75005 Paris, France
E-mail : `frederic.cherbonnier@francetelecom.fr`

Pierre Colmez, Département de mathématiques et informatique, École Normale supérieure, U.R.A. 762 du C.N.R.S., 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France • Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@dmi.ens.fr`