

---

# COMPLÉTÉS UNIVERSELS DE REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

*par*

Pierre Colmez & Gabriel Dospinescu

---

**Résumé.** — Soit  $\Pi$  une représentation unitaire de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , topologiquement de longueur finie. Nous décrivons la sous-représentation  $\Pi^{\mathrm{an}}$  de ses vecteurs localement analytiques, et sa filtration par rayon d'analyticité, en termes du  $(\varphi, \Gamma)$ -module qui lui est associé via la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique, et nous en déduisons que le complété universel de  $\Pi^{\mathrm{an}}$  n'est autre que  $\Pi$ .

**Abstract.** — Let  $\Pi$  be a unitary representation of  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , topologically of finite length. We describe the sub-representation  $\Pi^{\mathrm{an}}$  made of its locally analytic vectors, and its filtration by radius of analyticity, in terms of the  $(\varphi, \Gamma)$ -module attached to  $\Pi$  via the  $p$ -adic local Langlands correspondence, and we deduce that the universal completion of  $\Pi^{\mathrm{an}}$  is  $\Pi$  itself.

## Table des matières

Introduction.....	2
0.1. Notations.....	2
0.2. Complétions unitaires et vecteurs localement analytiques.....	3
0.3. Un raffinement du foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$ .....	5
0.4. Description de $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ en termes de $(\varphi, \Gamma)$ -modules.....	6
0.5. Description de $\Pi^{(h)}$ .....	8
Remerciements.....	9
I. Anneaux de fonctions analytiques.....	10
I.1. Topologies sur les anneaux.....	10
I.2. Quelques calculs.....	11
I.3. Actions de $\varphi, \psi, \Gamma$ .....	12
II. $(\varphi, \Gamma)$ -modules.....	12
II.1. $(\varphi, \Gamma)$ -modules et faisceaux $P^+$ -équivariants sur $\mathbf{Z}_p$ .....	12
II.2. Surconvergence.....	13
II.3. Dualité.....	14
II.4. Les modules $D^{\mathrm{nr}}, D^{\sharp}$ et $D^{\natural}$ .....	16
III. L'image du foncteur $\Pi \mapsto D(\Pi)$ .....	16

III.1. Représentations de $G$ .....	17
III.2. Le foncteur $\Pi \mapsto D(\Pi)$ .....	18
III.3. Le résultat principal.....	19
III.4. Paires $G$ -compatibles.....	20
III.5. Le sous-module $\tilde{D}^+$ de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .....	24
III.6. Dualité.....	25
III.7. Un modèle de $\Pi_\delta(D)$ .....	26
III.8. Presque exactitude de $D \rightarrow \Pi_\delta(D)$ .....	28
III.9. Invariants sous $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	30
III.10. Reconstruction de $\Pi$ .....	32
III.11. Reconstruction de $D$ .....	35
III.12. Compatibilité avec la réduction modulo $p$ .....	37
IV. Représentations localement analytiques.....	38
IV.1. Groupes uniformes.....	39
IV.2. Coefficients de Mahler.....	39
IV.3. Complétions de l'algèbre des mesures de $H$ .....	40
IV.4. Le foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$ .....	41
IV.5. De $H$ à $H^p$ .....	43
IV.6. Exactitude du foncteur $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$ .....	45
IV.7. Cohérence.....	46
V. Vecteurs analytiques des représentations unitaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .....	48
V.1. Préliminaires.....	48
V.2. Vecteurs analytiques et surconvergence.....	49
V.3. Relèvement à $D^{(0,rb]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .....	52
V.4. Vecteurs propres de $\psi$ .....	54
V.5. L'action de $G$ sur $T^\alpha D_0^{\dagger,b} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .....	55
V.6. Fin de la preuve du th. V.3.....	58
VI. Le module $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et l'espace $\Pi_\delta(D)^{\mathrm{an}}$ .....	59
VI.1. Continuité de l'action de $w_\delta$ .....	60
VI.2. L'action de $G$ sur $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .....	61
VI.3. Description de $\Pi^{\mathrm{an}}$ via $D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .....	63
VII. Complétés unitaires universels.....	65
VII.1. Réseaux invariants minimaux.....	65
VII.2. Le complété universel de $\mathrm{LA}(\mathbf{Z}_p)$ .....	66
VII.3. Cohérence et complétion universelle.....	67
VII.4. Functorialité.....	68
VII.5. Le complété universel de $\Pi^{\mathrm{an}}$ .....	69
Références.....	71

## Introduction

### 0.1. Notations

Soit  $p$  un nombre premier. On fixe une clôture algébrique  $\overline{\mathbf{Q}}_p$  de  $\mathbf{Q}_p$ , et on note  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$  le groupe de Galois absolu de  $\mathbf{Q}_p$ . On note  $\Gamma$  le groupe de Galois  $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$  de l'extension cyclotomique. Le caractère cyclotomique  $\chi : \mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$  induit un isomorphisme de groupes topologiques  $\Gamma \simeq \mathbf{Z}_p^*$ , dont l'inverse  $a \mapsto \sigma_a$  est caractérisé par  $\sigma_a(\zeta) = \zeta^a$  pour  $a \in \mathbf{Z}_p^*$  et  $\zeta \in \mu_{p^\infty}$ .

On fixe une extension finie  $L$  de  $\mathbf{Q}_p$ , et on note  $\mathcal{O}_L$  l'anneau de ses entiers et  $k_L$  son corps résiduel. Soit  $\widehat{\mathcal{F}}(L)$  l'ensemble des caractères continus  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow L^*$ , et, pour  $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$ , notons  $w(\delta)$  son *poids*, défini par  $w(\delta) = \delta'(1)$ , dérivée<sup>(1)</sup> de  $\delta$  en 1. Si  $\delta$  est *unitaire* (i.e. si  $\delta$  est à valeurs dans  $\mathcal{O}_L^*$ ), la théorie locale du corps de classes associée à  $\delta$  un caractère continu de  $\mathcal{G}_{\mathbf{Q}_p}$ , que l'on note encore  $\delta$ . Le poids de Hodge-Tate généralisé de ce caractère galoisien est alors  $w(\delta)$ . On note juste  $x \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$  le caractère induit par l'inclusion de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $L$ , et  $|x|$  le caractère envoyant  $x \in \mathbf{Q}_p^*$  sur  $p^{-v_p(x)}$ . Pour fixer les idées, le caractère  $x|x|$  correspond au caractère cyclotomique  $\chi$  et son poids est 1 ; on le note  $\chi$  la plupart du temps.

Soit  $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Si  $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$ , on note  $\text{Rep}_L(\delta)$  la catégorie dont les objets sont les  $L$ -espaces de Banach  $\Pi$ , munis d'une action continue de  $G$  telle que

- $\Pi$  a pour caractère central  $\delta$ .
- L'action de  $G$  est *unitaire*, i.e. il existe une valuation  $v_\Pi$  sur  $\Pi$ , qui définit la topologie de  $\Pi$  et telle que  $v_\Pi(g \cdot v) = v_\Pi(v)$  pour tous  $g \in G$  et  $v \in \Pi$ .
- $\Pi$  est *résiduellement de longueur finie*, i.e. si  $v_\Pi$  est comme ci-dessus, la réduction mod  $p$  de la boule unité  $\Pi_0$  de  $\Pi$  pour  $v_\Pi$  est un  $\mathcal{O}_L[G]$ -module de longueur finie.

Un morphisme entre deux objets  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  de  $\text{Rep}_L(\delta)$  est une application  $L$ -linéaire, continue et  $G$ -équivariante.

On note  $\text{Rep}_L(G)$  la catégorie des représentations de  $G$  unitaires, résiduellement de longueur finie, admettant un caractère central ; c'est la réunion des  $\text{Rep}_L(\delta)$  pour  $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$ .

**Remarque 0.1.** — (i)  $\text{Rep}_L(\delta)$  est vide quand  $\delta$  n'est pas unitaire.

(ii) Il découle des travaux de Barthel-Livné [2] et Breuil [5] que tout objet de  $\text{Rep}_L(\delta)$  est une représentation de Banach *admissible* (au sens de [27]) de  $G$ .

(iii) Tout objet  $\Pi$  de  $\text{Rep}_L(\delta)$  est topologiquement de longueur finie, car  $\Pi_0/p\Pi_0$  l'est. En fait, on peut décrire  $\text{Rep}_L(\delta)$  de manière équivalente comme la catégorie des  $L$ -représentations de Banach unitaires et admissibles de  $G$ , à caractère central et topologiquement de longueur finie (cf. [25] pour  $p \geq 5$  et [13] pour le cas général). Cette hypothèse de finitude pour  $\Pi_0/p\Pi_0$  sert à assurer que le  $(\varphi, \Gamma)$ -module attaché à  $\Pi$  par la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique est de dimension finie.

**0.2. Complétions unitaires et vecteurs localement analytiques.** — Si  $\delta \in \widehat{\mathcal{F}}(L)$  et si  $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$ , on note  $\Pi^{\text{an}}$  l'espace des vecteurs localement analytiques [28, 20] de  $\Pi$ . C'est l'espace des vecteurs  $v \in \Pi$  dont l'application orbite

$$o_v : G \rightarrow \Pi, \quad g \mapsto g \cdot v$$

<sup>(1)</sup> $\delta$  est automatiquement localement analytique, donc la définition a un sens.

est localement analytique. C'est une sous-représentation de  $\Pi$  et, d'après un résultat général de Schneider et Teitelbaum [28, th. 7.1], le sous-espace  $\Pi^{\text{an}}$  est dense<sup>(2)</sup> dans  $\Pi$ .

L'espace  $\Pi^{\text{an}}$  a une topologie naturelle, induite par l'injection  $\Pi^{\text{an}} \rightarrow \mathcal{C}^{\text{an}}(G, \Pi)$ , envoyant  $v \in \Pi^{\text{an}}$  sur  $o_v$ . Cette topologie est nettement plus forte que celle induite par l'inclusion  $\Pi^{\text{an}} \subset \Pi$ . Le résultat principal de cet article est alors le suivant (rappelons que  $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ) :

**Théorème 0.2.** — *Si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ , alors  $\Pi$  est le complété unitaire universel de  $\Pi^{\text{an}}$ , i.e. pour toute  $L$ -représentation  $W$ , de Banach unitaire, l'application naturelle  $\text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\Pi, W) \rightarrow \text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\Pi^{\text{an}}, W)$ , induite par l'injection  $\Pi^{\text{an}} \rightarrow \Pi$ , est un isomorphisme.*

**Remarque 0.3.** — La notion de complété universel a été dégagée par Emerton [19]. Le théorème ci-dessus répond, dans le cas de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , à l'une de ses questions, à savoir si le même énoncé est valable pour  $\mathbf{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$  ou, plus généralement, pour un groupe réductif déployé sur  $\mathbf{Q}_p$  (l'application  $\text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\Pi, W) \rightarrow \text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\Pi^{\text{an}}, W)$  est injective pour tout groupe de Lie  $p$ -adique  $G$  et toute représentation de Banach admissible  $\Pi$  de  $G$ , car  $\Pi^{\text{an}}$  est dense dans  $\Pi$  dans ces cas [28]).

(ii) Dans l'autre sens, la situation est nettement plus compliquée : si  $\Pi$  est une représentation localement analytique admissible de  $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  admettant un complété unitaire universel  $\widehat{\Pi}$ , la sous-représentation  $\widehat{\Pi}^{\text{an}}$  de  $\widehat{\Pi}$  n'est pas forcément égale à  $\Pi$ . Le cas des composantes de Jordan-Hölder de la série principale analytique est assez éclairant. Si  $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow L^*$  sont des caractères continus (et donc localement analytiques), on note  $\text{Ind}^{\text{an}}(\delta_1 \otimes \delta_2)$  l'espace des fonctions  $\phi : G \rightarrow L$ , localement analytiques, telles que  $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} g\right) = \delta_1(a)\delta_2(d)\phi(g)$  pour tous  $a, d \in \mathbf{Q}_p^*$ ,  $b \in \mathbf{Q}_p$  et  $g \in G$ , que l'on munit de l'action de  $G$  définie par  $(h \cdot \phi)(g) = \phi(gh)$ ; si  $\delta_2 = x^k \delta_1$  avec  $k \in \mathbf{N}$ , alors  $\text{Ind}^{\text{an}}(\delta_1 \otimes \delta_2)$  contient une sous-représentation  $W(\delta_1, \delta_2)$  de dimension  $k + 1$  et le quotient  $\text{St}^{\text{an}}(\delta_1, \delta_2)$  est une *steinberg analytique*. En utilisant les résultats de [6, 11, 12, 19, 22], on voit qu'il peut, en particulier, se passer les phénomènes suivants :

- $\widehat{\Pi} = 0$  et donc  $\widehat{\Pi}^{\text{an}} = 0$  : c'est le cas si le caractère central n'est pas unitaire (ce qui équivaut à  $v_p(\delta_1(p)) + v_p(\delta_2(p)) \neq 0$ ) ou s'il est unitaire mais  $v_p(\delta_1(p)) > 0$ .
- $\widehat{\Pi}$  n'est pas admissible (c'est le cas des steinberg analytiques avec  $k \geq 1$ ).
- $\widehat{\Pi}$  est non nul et admissible, mais  $\widehat{\Pi}^{\text{an}}$  est strictement plus grand que  $\Pi$  : c'est le cas si  $\Pi = \text{Ind}^{\text{an}}(\delta_1 \otimes \delta_2)$ , si le caractère central est unitaire, et si  $v_p(\delta_2(p)) > 0$  et  $w(\delta_2) - w(\delta_1) \notin \mathbf{N}$ .

<sup>(2)</sup>Nous donnons une nouvelle preuve de cette densité pour les objets de  $\text{Rep}_L(\delta)$ , en utilisant la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules (cf. cor. 0.13).

Mentionnons un corollaire immédiat du th. 0.2, qui ne semble pas facile à démontrer directement :

**Corollaire 0.4.** — *Le foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{\text{an}}$  de la catégorie  $\text{Rep}_L(\delta)$  dans la catégorie des  $L$ -représentations localement analytiques admissibles de  $G$  est pleinement fidèle.*

**Remarque 0.5.** — (i) En utilisant ce corollaire et les résultats de [15], on déduit que  $\Pi^{\text{an}}$  admet un caractère infinitésimal pour tout objet absolument irréductible  $\Pi$  de  $\text{Rep}_L(G)$  (cela n'est pas une conséquence formelle du résultat principal de loc.cit., car  $\Pi^{\text{an}}$  peut fort bien ne pas être irréductible si  $\Pi$  est absolument irréductible).

(ii) Comme nous l'a fait remarquer Paškūnas, ce corollaire n'est pas vrai pour des représentations de Banach unitaires admissibles d'un groupe de Lie  $p$ -adique quelconque : si  $G = \mathbf{Z}_p$  et  $\Pi = \mathcal{C}(G, L)$ , les endomorphismes de  $\Pi$  sont les mesures sur  $\mathbf{Z}_p$ , alors que ceux de  $\Pi^{\text{an}}$  sont les distributions. Il semble raisonnable de penser qu'il reste vrai si on se restreint aux représentations absolument irréductibles et donc que  $\Pi^{\text{an}}$  admet un caractère infinitésimal si  $\Pi$  est irréductible.

La suite de cette introduction explique les étapes de la preuve du th. 0.2, dont la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique [10] pour  $G$  est l'ingrédient clé.

**0.3. Un raffinement du foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{\text{an}}$ .** — Dans ce §, on considère un groupe de Lie  $p$ -adique  $G$  arbitraire, un sous-groupe  $H$  de  $G$  qui est un pro- $p$ -groupe uniforme, et une  $L$ -représentation de Banach admissible  $\Pi$  de  $G$ , pas forcément unitaire. On choisit un système minimal de générateurs topologiques  $h_1, \dots, h_d$  de  $H$  et on note

$$b^\alpha = (h_1 - 1)^{\alpha_1} \cdots (h_d - 1)^{\alpha_d} \in \mathbf{Z}_p[H]$$

pour  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{N}^d$ . Pour tout entier  $h \geq 1$ , on note  $r_h = \frac{1}{p^{h-1}(p-1)}$  et (en posant  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$ )

$$\Pi_H^{(h)} = \{v \in \Pi, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} p^{-r_h |\alpha|} b^\alpha v = 0\}.$$

Alors  $\Pi_H^{(h)}$  est naturellement un banach qui ne dépend pas du choix des générateurs  $h_1, \dots, h_d$  et qui est stable par  $H$ . Par ailleurs, les  $b^\alpha v$  sont les coefficients de Mahler de  $o_v$  :

$$o_v(h_1^{x_1} \cdots h_d^{x_d}) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} \binom{x_1}{\alpha_1} \cdots \binom{x_d}{\alpha_d} \cdot b^\alpha v, \quad \text{pour tout } (x_1, \dots, x_d) \in \mathbf{Z}_p^d.$$

Il résulte donc du théorème d'Amice [1] que  $\Pi^{\text{an}}$  est la limite inductive des  $\Pi_H^{(h)}$ , et cela pour tout sous-groupe  $H$  de  $G$  qui est un pro- $p$ -groupe uniforme. Le résultat suivant (cor IV.14 et prop. IV.11) peut, au langage près, se trouver dans [28].

**Théorème 0.6.** — Soient  $H$  un pro- $p$  sous-groupe uniforme de  $G$  et  $h \geq 1$ .

(i) Le foncteur  $\Pi \mapsto \Pi_H^{(h)}$  de la catégorie des  $L$ -représentations de Banach admissibles de  $G$  dans la catégorie des  $L$ -banach est exact.

(ii) On a  $\Pi_H^{(h+1)} = \Pi_{H^p}^{(h)}$  pour toute représentation de Banach  $\Pi$  de  $G$ .

On dit que  $\Pi$  est *cohérente* (ou  $H$ -cohérente si on veut préciser le sous-groupe  $H$  de référence) s'il existe  $h_0$  tel que, pour tout  $h \geq h_0$ , on ait

$$\Pi_H^{(h+1)} = \sum_{H^p \subset gHg^{-1}} g \cdot \Pi_H^{(h)}.$$

Comme  $g \cdot \Pi_H^{(h)} = \Pi_{gHg^{-1}}^{(h)}$  et  $\Pi_{H_1}^{(h)} \subset \Pi_{H_2}^{(h)}$  si  $H_2 \subset H_1$ , on déduit du théorème précédent que le terme de droite est toujours contenu dans celui de gauche. Le même théorème permet de montrer que la cohérence est une propriété stable par extensions, ce qui joue un rôle important dans la preuve du th. 0.2. Notre intérêt pour la notion de cohérence vient du résultat suivant :

**Proposition 0.7.** — Si  $\Pi$  est  $H$ -cohérente, alors  $\Pi^{\text{an}}$  admet un complété unitaire universel. Plus précisément, si  $\Pi_0^{(h)}$  est la boule unité de  $\Pi_H^{(h)}$  et  $\mathcal{L}_h = \sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(h)}$ , alors pour tout  $h$  assez grand on a un isomorphisme de  $L[G]$ -modules de Banach

$$\widehat{\Pi^{\text{an}}} \simeq L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim \mathcal{L}_h / p^n \mathcal{L}_h).$$

Au vu de la proposition précédente, le th. 0.2 est une conséquence du résultat suivant et de la densité de  $\Pi^{\text{an}}$  dans  $\Pi$  :

**Théorème 0.8.** — Si  $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ , alors :

(i)  $\Pi$  est cohérente.

(ii) Si  $\Pi_0$  est un  $\mathcal{O}_L$ -réseau de  $\Pi$ , ouvert, borné et  $G$ -stable, alors  $\mathcal{L}_h$  est commensurable avec  $\Pi_0 \cap \Pi^{\text{an}}$  pour tout  $h$  assez grand.

La preuve de ce théorème utilise de manière cruciale la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules. Plus précisément, si  $D$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module attaché à  $\Pi$  par la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique, on décrit l'espace  $\Pi^{(h)}$  (et même la boule unité  $\Pi_0^{(h)}$ ) directement en termes de  $D$ . Cela demande d'étendre et de raffiner bon nombre de résultats des chap. II, IV et V de [10], et les paragraphes suivants expliquent de quelle manière plus en détail.

**0.4. Description de  $\text{Rep}_L(\delta)$  en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.** — Soient  $\mathcal{R}$  l'anneau de Robba<sup>(3)</sup>,  $\mathcal{E}^\dagger$  le sous-anneau de  $\mathcal{R}$  des éléments bornés (c'est un corps) et  $\mathcal{E}$  le

<sup>(3)</sup>Il s'agit de l'anneau des séries de Laurent  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n$  à coefficients dans  $L$ , qui convergent sur une couronne du type  $0 < v_p(T) \leq r$ , où  $r$  dépend de la série.

complété de  $\mathcal{E}^\dagger$  pour la valuation  $p$ -adique. On munit ces anneaux d'actions continues de  $\Gamma$  et d'un frobenius  $\varphi$ , commutant entre elles, en posant  $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$  et  $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$  si  $a \in \mathbf{Z}_p^*$ .

Si  $\Lambda \in \{\mathcal{E}, \mathcal{E}^\dagger, \mathcal{R}\}$ , on note  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\Lambda)$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\Lambda$ . Ce sont des  $\Lambda$ -modules libres de type fini  $D$ , munis d'actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$ , continues, semi-linéaires, qui commutent et telles que  $\varphi$  soit de pente nulle. Ces catégories sont toutes équivalentes à la catégorie des  $L$ -représentations de  $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$  (cf. [21, 8, 23]); en particulier elles sont équivalentes entre elles, et on note  $D^\dagger \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E}^\dagger)$ ,  $D_{\text{rig}} \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{R})$  les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules attachés à  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , de telle sorte que  $D = \mathcal{E} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D^\dagger$  et  $D_{\text{rig}} = \mathcal{R} \otimes_{\mathcal{E}^\dagger} D^\dagger$ .

Si  $\delta$  est un caractère unitaire et si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , on peut construire [10, chap. II] un faisceau  $G$ -équivariant  $U \rightarrow D \boxtimes_\delta U$  sur  $\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  (muni de l'action usuelle définie par  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$ ), dont les sections sur  $\mathbf{Z}_p$  sont  $D$  (i.e.  $D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p = D$ ). Par ailleurs, si  $U$  est un ouvert compact de  $\mathbf{P}^1$ , l'extension par 0 induit une inclusion de  $D \boxtimes_\delta U$  dans l'espace  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  des sections globales. Les formules décrivant l'action de  $G$  sont très compliquées (et inutiles dans la plupart des situations) en général, mais on a par exemple, pour  $z \in D = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$ ,  $a \in \mathbf{Z}_p^*$  et  $b \in \mathbf{Z}_p$ ,

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \varphi(z), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \sigma_a(z), \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1+T)^b \cdot z.$$

On dispose aussi [10, chap. IV] d'un foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$ , contravariant, exact, de  $\text{Rep}_L(\delta)$  dans  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ . On note  $\mathcal{C}_L(\delta)$  son image essentielle. Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , on note  $\check{D}$  le dual de Cartier de  $D$  : si  $D$  est attaché à une représentation galoisienne  $V$ , alors  $\check{D}$  est attaché à  $V^* \otimes \chi$ . Le résultat suivant fait le lien entre les constructions précédentes et décrit  $\text{Rep}_L(\delta)$  (à des morceaux de dimension finie près) en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, ce qui est fondamental pour la preuve du th. 0.2.

**Théorème 0.9.** — *Soit  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  un caractère unitaire. Alors :*

- (i)  $\mathcal{C}_L(\delta)$  est stable par sous-quotients.
- (ii) Si  $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ , alors  $\check{D} \in \mathcal{C}_L(\delta^{-1})$ .
- (iii) Il existe un foncteur covariant  $D \rightarrow \Pi_\delta(D)$  de  $\mathcal{C}_L(\delta^{-1})$  dans  $\text{Rep}_L(\delta)$  tel que, pour tout  $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ , on ait une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow 0.$$

- (iv) Les foncteurs  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  et  $D \rightarrow \Pi_\delta(\check{D})$  induisent des anti-équivalences quasi-inverses exactes entre  $\text{Rep}_L(\delta)/S$  et  $\mathcal{C}_L(\delta)$ , où  $S$  est la sous-catégorie de  $\text{Rep}_L(\delta)$  formée des représentations de dimension finie.

Ce théorème admet des versions entière et de torsion qui sont fort utiles; il est essentiellement démontré dans [10], mais il n'est pas facile de l'en extraire sous cette

forme. Nous reprenons et étendons les arguments de loc.cit pour l'obtenir sous cette forme, mieux adaptée aux applications éventuelles (cf. [13] par exemple).

**0.5. Description de  $\Pi^{(h)}$ .** — Soit  $\mathcal{E}^{(0,r_b]}$  le sous-anneau de  $\mathcal{E}^\dagger$  des fonctions analytiques bornées sur la couronne  $0 < v_p(T) \leq r_b$ . On note  $D^{(0,r_b]}$  le plus grand sous- $\mathcal{E}^{(0,r_b]}$ -module de type fini  $M$  de  $D$  tel que  $\varphi(M) \subset \mathcal{E}^{(0,r_{b+1}]}$   $\otimes_{\mathcal{E}^{(0,r_b]}}$   $M$  (son existence est un résultat standard de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules). Le théorème de surconvergence [8, 4] montre que  $D^{(0,r_b]}$  est libre de rang  $\dim_{\mathcal{E}}(D)$  sur  $\mathcal{E}^{(0,r_b]}$  et engendre  $D$ , si  $b$  est assez grand. Comme  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Z}_p = D$  et comme  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{Z}_p \cup \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{Z}_p$ , l'application  $z \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} z)$  est une injection de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $D \times D$ , ce qui permet de définir le module

$$D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) \cap (D^{(0,r_b]} \times D^{(0,r_b]}).$$

Il est muni de la topologie induite par l'inclusion dans  $D^{(0,r_b]} \times D^{(0,r_b]}$ , le module  $D^{(0,r_b]}$  étant muni de sa topologie naturelle.

**Proposition 0.10.** — *Soit  $D \in \mathcal{C}_L(\delta^{-1})$ . Si  $b$  est assez grand, le sous- $L$ -espace vectoriel  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est stable sous l'action de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ , et  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  agit continûment pour la topologie naturelle de  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . De plus,  $\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^*$  est un sous-module fermé de  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .*

Soit  $K_m = 1 + p^m \text{M}_2(\mathbf{Z}_p)$  avec  $m \geq 1$  (resp.  $m \geq 2$  si  $p = 2$ ). C'est un pro- $p$ -groupe uniforme de dimension 4, auquel les constructions du § 0.3 s'appliquent. Pour simplifier les notations, on note simplement  $\Pi^{(b)} = \Pi_{K_m}^{(b-m)}$  pour  $b > m$  (le th. 0.6 montre que le terme de droite ne dépend pas du choix de  $m < b$ ). Le résultat technique principal de l'article est alors la description de  $\Pi^{(b)}$ , pour tout  $b$  assez grand, si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ . Le th. 0.9 implique en particulier que tout objet de  $\text{Rep}_L(G)$  est de la forme  $\Pi_{\delta}(D)$  à des représentations de dimension finie près, et pour une représentation de la forme  $\Pi_{\delta}(D)$ , on a le résultat suivant.

**Théorème 0.11.** — *Soit  $D \in \mathcal{C}_L(\delta^{-1})$ . L'inclusion de  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  induit, si  $b$  est assez grand, une suite exacte de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -modules topologiques*

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D^{(0,r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_{\delta}(D)^{(b)} \rightarrow 0.$$

Les méthodes utilisées pour l'étude de  $\Pi^{(b)}$  sont sensiblement différentes de celles de [10, chap. V] : les arguments de bidualité de loc.cit. sont remplacés par une étude directe des rayons d'analyticité des vecteurs de  $\Pi_{\delta}(D)$ , à travers l'étude de la croissance des coefficients de Mahler de  $o_v$ . Cette étude est grandement facilitée par la prop. V.10, qui est aussi utilisée dans la preuve du cor. 0.16 ci-dessous.

Une conséquence immédiate du th. 0.11 est la généralisation suivante du résultat principal du chap. V de [10].

**Corollaire 0.12.** — *Si  $D \in \mathcal{C}_L(\delta^{-1})$ , le sous-faisceau  $U \mapsto D^\dagger \boxtimes_\delta U$  du faisceau  $U \mapsto D \boxtimes_\delta U$  est stable par  $G$ , qui agit continûment pour la topologie naturelle de  $D^\dagger$ , et on a une suite exacte de  $G$ -modules topologiques*

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_\delta(D)^{\text{an}} \rightarrow 0.$$

Mentionnons que l'action de  $G$  sur le faisceau  $U \mapsto D^\dagger \boxtimes_\delta U$  s'étend par continuité en une action sur un faisceau  $U \mapsto D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta U$ , et les sections globales  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  de ce faisceau fournissent (chap. VI) une extension de  $\Pi_\delta(D)^{\text{an}}$  par  $(\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^{\text{an}})^*$  qui est très utile [12, 14, 16] pour l'étude de  $\Pi_\delta(D)^{\text{an}}$ .

Une autre conséquence est le résultat suivant qui renforce le théorème de Schneider et Teitelbaum sur la densité des vecteurs localement analytiques.

**Corollaire 0.13.** — *Si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  il existe  $m_0 \geq 2$  tel que  $\Pi^{(b)}$  soit dense dans  $\Pi^{\text{an}}$  (et donc aussi dans  $\Pi$ ) pour tout  $b > m_0$ .*

En utilisant le fait que les orbites des éléments de  $\Pi^{(b)}$  sont somme de leur série de Taylor sur  $K_{b-1}$ , et le cor. 0.13, on en déduit le résultat suivant.

**Corollaire 0.14.** — *Soient  $\Pi_1, \Pi_2 \in \text{Rep}_L(G)$  et soit  $f : \Pi_1^{\text{an}} \rightarrow \Pi_2^{\text{an}}$  une application continue, linéaire et  $\mathfrak{gl}_2$ -équivariante. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact  $H$  de  $G$  tel que  $f$  soit  $H$ -équivariante.*

**Question 0.15.** — Les cor. 0.13 et 0.14 sont-ils valables pour les représentations de Banach admissibles, topologiquement de longueur finie, d'un groupe de Lie  $p$ -adique quelconque ?

Signalons aussi un sous-produit de la preuve, pour lequel nous ne connaissons pas de démonstration plus simple. Une telle démonstration simplifierait considérablement l'étude de  $\Pi_\delta(D)^{\text{an}}$ .

**Corollaire 0.16.** — *Soient  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  et  $v \in \Pi$ . Si les applications  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$  et  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} v$  sont localement analytiques (de  $\mathbf{Q}_p$  dans  $\Pi$ ), alors  $v \in \Pi^{\text{an}}$ .*

*Remerciements.* — GD voudrait remercier R. Liu et le BICMR de Pékin pour leur hospitalité pendant la rédaction d'une partie de cet article, ainsi que V. Paškūnas pour des discussions éclairantes. Le deux auteurs remercient le rapporteur pour ses questions et remarques pertinentes.

## I. Anneaux de fonctions analytiques

Ce chapitre peu éclairant introduit un certain nombre d'anneaux de séries de Laurent et établit certains résultats techniques dont on aura besoin dans le chap. V. Rappelons que  $L$  est une extension finie de  $\mathbf{Q}_p$ , dont on note  $\mathcal{O}_L$  l'anneau des entiers. Pour  $b \in \mathbf{N}^*$  on note  $n_b = p^{b-1}(p-1)$  et  $r_b = \frac{1}{n_b}$ .

**I.1. Topologies sur les anneaux.** — On munit l'anneau

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} = \left\{ \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n, a_n \in \mathcal{O}_L \text{ et } \lim_{n \rightarrow -\infty} v_p(a_n) = \infty \right\}$$

de la topologie faible, dont une base de voisinages de 0 est constituée des  $p^n \mathcal{O}_{\mathcal{E}} + T^m \mathcal{O}_L[[T]]$ , avec  $m, n \in \mathbf{N}$ . On munit son corps des fractions  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}[1/p] = \cup_{n \geq 0} p^{-n} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  de la topologie limite inductive.

Si  $a \geq b \geq 1$ , on note  $\mathcal{E}^{[r_a, r_b]}$  l'anneau des  $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n$ , analytiques sur la couronne  $r_a \leq v_p(T) \leq r_b$ , définies sur  $L$ , que l'on munit de la valuation

$$v^{[r_a, r_b]}(f) = \inf_{r_a \leq v_p(x) \leq r_b} v_p(f(x)) = \inf_{n \in \mathbf{Z}} (v_p(a_n) + \min(nr_a, nr_b)).$$

On note  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$  l'anneau de valuation de  $\mathcal{E}^{[r_a, r_b]}$ , et on pose  $\mathcal{E}^{]0, r_b[} = \lim_{\leftarrow a \geq b} \mathcal{E}^{[r_a, r_b]}$  (c'est l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne  $0 < v_p(T) \leq r_b$ , définies sur  $L$ ). Soit  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  le complété de  $\mathcal{O}_L[[T]]\left[\frac{p}{T^{n_b}}\right]$  pour la topologie  $p$ -adique. La preuve du résultat suivant est laissée au lecteur.

**Lemme I.1.** — (i)  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  est l'anneau des séries de Laurent  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathcal{O}_L[[T, T^{-1}]]$  telles que la suite<sup>(4)</sup>  $([v_p(a_k)] + kr_b)_{k \leq 0}$  est positive et tend vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow -\infty$ .

(ii)  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$  est l'anneau des séries de Laurent  $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k T^k \in L[[T, T^{-1}]]$  telles que la suite  $(v_p(a_k) + \min(kr_b, kr_b))_{k \in \mathbf{Z}}$  est positive et tend vers  $+\infty$  quand  $k \rightarrow \pm\infty$ .

On note  $\mathcal{E}^{(0, r_b]} = \mathcal{E}^{]0, r_b[} \cap \mathcal{E}$  (c'est le sous-anneau de  $\mathcal{E}^{]0, r_b[}$  formé des fonctions analytiques bornées) et  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$  le réseau de  $\mathcal{E}^{(0, r_b]}$  formé des séries à coefficients dans  $\mathcal{O}_L$ . On déduit du lemme I.1 que  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}\left[\frac{1}{T}\right]$  et que  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  est séparé et complet pour la topologie  $T$ -adique. Cela munit  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$  d'une topologie naturelle et  $\mathcal{E}^{(0, r_b]}$  de la topologie limite inductive, en écrivant  $\mathcal{E}^{(0, r_b]} = \cup_{k \geq 0} p^{-k} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$ .

Enfin, l'anneau de Robba  $\mathcal{R}$  est la réunion des  $\mathcal{E}^{]0, r_b[}$ , muni de la topologie limite inductive et le corps  $\mathcal{E}^{\dagger} = \cup_{b \geq 1} \mathcal{E}^{(0, r_b]}$  est le sous-anneau de  $\mathcal{R}$  des éléments bornés. Il est dense dans  $\mathcal{R}$  et  $\mathcal{E}$  s'identifie au complété de  $\mathcal{E}^{\dagger}$  pour la valuation  $p$ -adique. Si  $\Lambda \in \{\mathcal{E}, \mathcal{R}\}$ , on pose  $\Lambda^+ = \Lambda \cap L[[T]]$ .

<sup>(4)</sup>On note  $[ ]$  la partie entière.

**I.2. Quelques calculs...** — Les lemmes techniques suivants seront utilisés dans l'étude des vecteurs localement analytiques des représentations unitaires admissibles de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .

**Lemme I.2.** — On a  $p\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{E}^{\dagger} \subset \cup_{n \geq 1} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, n}$ .

*Démonstration.* — Soit  $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n \in p\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \cap \mathcal{E}^{\dagger}$ . Il existe  $b$  tel que  $f$  converge sur  $0 < v_p(T) \leq r_b$ . On a donc  $\lim_{k \rightarrow \infty} v_p(a_{-k}) - kr_b = \infty$ . En particulier, il existe  $b_1$  tel que si  $k \geq nb_1$ , alors  $v_p(a_{-k}) \geq 1 + kr_b$ . Puisque  $v_p(a_{-k}) \geq 1$  pour tout  $k$ , on en déduit que  $[v_p(a_{-k})] \geq kr_{b+b_1}$  pour tout  $k \geq 0$ , donc  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b+b_1}$  (lemme I.1).

**Lemme I.3.** — (i)  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]} \subset \frac{1}{p} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ .

(ii) Si  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$  satisfait  $v^{[r_a, r_b]}(f) \geq N$  pour un  $N \in \mathbf{N}$ , alors  $f \in \frac{1}{p} T^{Nn_b} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ .

*Démonstration.* — (i) C'est une conséquence immédiate du lemme I.1.

(ii) Si  $r_a \leq v_p(x) \leq r_b$ , on a

$$v_p(f(x)) - Nn_b v_p(x) \geq v^{[r_a, r_b]}(f) - Nn_b r_b \geq 0,$$

donc  $T^{-Nn_b} f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]} \cap \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$  et on conclut en utilisant le (i).

**Lemme I.4.** — (i) Si  $(f_k)_k$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  qui converge vers 0 pour la topologie  $p$ -adique, alors la série  $\sum_{k \geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k f_k$  converge dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$ .

(ii) Si  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$ , alors il existe une suite  $(f_k)_k$  comme dans (i) et telle que

$$pf = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k f_k.$$

*Démonstration.* — (i) Il suffit de constater que

$$v^{[r_a, r_b]} \left( \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k f_k \right) \geq v^{[r_a, r_b]}(f_k)$$

et que, par hypothèse, la dernière quantité est positive et tend vers  $\infty$  pour  $k \rightarrow \infty$ .

(ii) Posons  $pf = \sum_{k \in \mathbf{Z}} b_k T^k$  et, pour  $k \geq 0$ , posons  $g_k = \sum_{j=0}^{n_a-1} p^k b_{kn_a+j} T^j$ . Alors  $g_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$  tend vers 0 pour la topologie  $p$ -adique (car  $v_p(b_k) + kr_a \geq 1$  pour tout  $k$  et  $\lim_{k \rightarrow +\infty} v_p(b_k) + kr_a = +\infty$ ) et on a

$$\sum_{k \geq 0} b_k T^k = \sum_{k \geq 0} \left(\frac{T^{n_a}}{p}\right)^k g_k.$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que  $\sum_{k \leq 0} b_k T^k \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ . Cela découle du lemme I.1.

**I.3. Actions de  $\varphi, \psi, \Gamma$ .** — On munit les anneaux  $\mathcal{E}^+, \mathcal{R}^+, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}, \mathcal{E}^\dagger, \mathcal{R}$  d'actions continues de  $\Gamma = \text{Gal}(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p)$  et d'un Frobenius  $\varphi$ , commutant entre elles, en posant  $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$  et  $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$  si  $a \in \mathbf{Z}_p^*$ . L'opérateur  $\varphi$  ne laisse pas stable les anneaux  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$  et  $\mathcal{E}^{]0, r_b]}$ ; il les envoie respectivement dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b+1}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_{b+1}]}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_{a+1}, r_{b+1}]}$  et  $\mathcal{E}^{]0, r_{b+1}]}$ . Ces anneaux sont, en revanche, stables sous l'action de  $\Gamma$ .

Le corps  $\mathcal{E}$  est une extension de degré  $p$  de  $\varphi(\mathcal{E})$ , ce qui permet de définir un inverse à gauche  $\psi$  de  $\varphi$  par la formule

$$\psi(f) = p^{-1} \varphi^{-1}(\text{Tr}_{\mathcal{E}/\varphi(\mathcal{E})} f).$$

Alors  $\psi$  laisse stable  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  et  $\mathcal{E}^\dagger$ , s'étend par continuité à  $\mathcal{R}$ , et envoie les anneaux  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b+1}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_{b+1}]}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_{a+1}, r_{b+1}]}$  et  $\mathcal{E}^{]0, r_{b+1}]}$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}, \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$  et  $\mathcal{E}^{]0, r_b]}$  respectivement. De plus,  $\psi$  commute à  $\Gamma$  et  $\psi(\sum_{i=0}^{p-1} (1+T)^i \varphi(f_i)) = f_0$  (tout élément de  $\mathcal{E}$  ou  $\mathcal{R}$  peut s'écrire sous cette forme, et une telle écriture est unique).

Le résultat suivant est parfaitement classique.

**Lemme I.5.** —  $\frac{\varphi^n(T)}{T^{p^n}}$  est une unité de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  si  $b > n$ .

*Démonstration.* — Voir le lemme II.5.2 de [8].

## II. $(\varphi, \Gamma)$ -modules

Ce chapitre est aussi préliminaire. On rappelle quelques résultats standard de la théorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et on établit deux résultats techniques qui seront utilisés dans l'étude des vecteurs localement analytiques de la représentation  $\Pi_\delta(D)$ .

**II.1.  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et faisceaux  $P^+$ -équivariants sur  $\mathbf{Z}_p$ .** — Soit  $A$  un anneau topologique, commutatif, muni d'un endomorphisme continu  $\varphi$  et d'une action continue de  $\Gamma$ , qui commutent. Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $A$  est un  $A$ -module de type fini muni d'un endomorphisme semi-linéaire  $\varphi$  et d'une action semi-linéaire de  $\Gamma$ , commutant entre elles.

Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  est dit *étale* si  $\varphi(D)$  engendre  $D$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ . Un  $(\varphi, \Gamma)$ -module  $D$  sur  $\mathcal{E}$  est dit *étale* s'il admet un  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$  et qui est étale en tant que  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ .

On note  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  (resp.  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ ) la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ , qui sont de torsion (resp. libres) comme  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module. Enfin, on note  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  la catégorie des  $(\varphi, \Gamma)$ -modules étales sur  $\mathcal{E}$ .

Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale. Alors  $D$  est muni d'une action de  $P^+$  donnée par  $\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = (1+T)^b \varphi^k \circ \sigma_a(z)$ , si  $k \in \mathbf{N}$ ,  $a \in \mathbf{Z}_p^*$  et  $b \in \mathbf{Z}_p$ , et d'un inverse à gauche

$\psi$  de  $\varphi$  qui commute à l'action de  $\Gamma$  et qui est définie par  $\psi(\sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(x_i)) = x_0$ . On utilise ces données pour associer à  $D$  un faisceau  $U \mapsto D \boxtimes U$  sur  $\mathbf{Z}_p$  (où  $U$  décrit les ouverts compacts de  $\mathbf{Z}_p$ ), équivariant sous l'action de  $P^+$ , où  $P^+$  agit sur  $\mathbf{Z}_p$  par la formule  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot x = ax + b$  habituelle. De manière précise :

- $D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D$  et  $D \boxtimes \emptyset = 0$ ,
- $D \boxtimes (i + p^k \mathbf{Z}_p) = \begin{pmatrix} p^k & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} D \subset D$
- La restriction  $\text{Res}_{i+p^k \mathbf{Z}_p} : D \boxtimes \mathbf{Z}_p \rightarrow D \boxtimes (i + p^k \mathbf{Z}_p)$  est définie par la formule  $\text{Res}_{i+p^k \mathbf{Z}_p} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \varphi^k \circ \psi^k \circ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

**Remarque II.1.** — Soit  $\mathcal{C}$  le faisceau sur  $\mathbf{Z}_p$  des fonctions continues à valeurs dans  $L$  et soit  $\mathcal{D}_0$  le faisceau des mesures (i.e le dual de  $\mathcal{C}$ ). Le dictionnaire d'analyse fonctionnelle  $p$ -adique fournit une suite exacte  $0 \rightarrow \mathcal{D}_0 \rightarrow D \rightarrow \mathcal{C} \boxtimes \chi^{-1} \rightarrow 0$  de faisceaux  $P^+$ -équivariants sur  $\mathbf{Z}_p$  si  $D = \mathcal{E}$  est le  $(\varphi, \Gamma)$ -module trivial (la torsion par  $\chi^{-1}$  signifie que l'action de  $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  est multipliée par  $\chi(a)^{-1}$ ).

**II.2. Surconvergence.** — Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ . Si  $b \in \mathbf{N}^*$ , on note  $D^{\dagger, b}$  le plus grand sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ -module  $M$  de type fini de  $D$  tel que  $\varphi(M) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b+1} \cdot M$  (le tout à l'intérieur de  $D$ ). On renvoie à [4, prop. 4.2.6] pour une preuve du résultat suivant :

**Proposition II.2.** — Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , il existe  $m(D)$  tel que  $D^{\dagger, m(D)}$  soit libre de rang  $\text{rg}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}(D)$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, m(D)}$ , et  $D^{\dagger, b} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b} \otimes_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, m(D)}} D^{\dagger, m(D)}$  pour tout  $b \geq m(D)$ .

La prop. II.2 permet de définir, pour  $a \geq b \geq m(D)$ , des modules  $D^{(0, r_b]}$ ,  $D^{[r_a, r_b]}$ ,  $D^{]0, r_b]}$ ,  $D^{\dagger}$  et  $D_{\text{rig}}$ , en tensorisant  $D^{\dagger, m(D)}$  par  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}$ ,  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{[r_a, r_b]}$ ,  $\mathcal{E}^{]0, r_b]}$ ,  $\mathcal{E}^{\dagger}$ ,  $\mathcal{R}$  respectivement. Ils ne dépendent pas du choix de  $m(D)$  et ils sont libres de même rang que  $D$  sur les anneaux correspondants. Le choix d'une base permet de munir ces modules de topologies naturelles (induites par celles des anneaux de séries de Laurent, voir le § I.1), qui ne dépendent pas du choix de la base.

Tous les modules définis ci-dessus sont munis d'une action de  $\Gamma$ , les modules  $D^{\dagger}$  et  $D_{\text{rig}}$  sont aussi munis d'actions de  $\varphi$  et  $\psi$  commutant à celle de  $\Gamma$  et vérifiant  $\psi \circ \varphi = \text{id}$ . Le sous-faisceau  $U \mapsto D^{\dagger} \boxtimes U$  de  $U \mapsto D \boxtimes U$  est donc stable par  $P^+$ , et il s'étend en un faisceau  $U \mapsto D_{\text{rig}} \boxtimes U$ . Par contre,  $\varphi$  ne préserve pas les autres modules : il envoie  $D^{\dagger, b}$  dans  $D^{\dagger, b+1}$ ,  $D^{[r_a, r_b]}$  dans  $D^{[r_{a+1}, r_{b+1}]}$ , et  $D^{]0, r_b]}$  dans  $D^{]0, r_{b+1}]}$ . De manière analogue,  $\psi$  laisse stable  $D^{\dagger}$  et  $D_{\text{rig}}$ , mais il envoie (pour  $a \geq b \geq m(D)$ )  $D^{\dagger, b+1}$  dans  $D^{\dagger, b}$ ,  $D^{[r_{a+1}, r_{b+1}]}$  dans  $D^{[r_a, r_b]}$ , et  $D^{]0, r_{b+1}]}$  dans  $D^{]0, r_b]}$ .

Nous aurons besoin de l'estimée plus précise ci-dessous.

**Lemme II.3.** — Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ . Il existe  $l(D) \geq 1$  tel que, pour tous  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $k \in \mathbf{N}^*$  et  $b \geq m(D) + k$ ,

$$\psi^k(T^a D^{\dagger, b}) \subset T^{\lfloor \frac{a}{p^k} \rfloor - l(D)} D^{\dagger, b-k}.$$

*Démonstration.* — Si  $a \in \mathbf{Z}$  et si  $c = \lfloor \frac{a}{p^k} \rfloor$ , le lemme I.5 montre que

$$\psi^k(T^a D^{\dagger, b}) \subset \psi^k(T^{p^k c} D^{\dagger, b}) = \psi^k(\varphi^k(T)^c D^{\dagger, b}) = T^c \psi^k(D^{\dagger, b}).$$

On peut donc se contenter de traiter le cas  $a = 0$ . Fixons une base  $e_1, \dots, e_d$  de  $D^{\dagger, m(D)}$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, m(D)}$ ; c'est aussi une base de  $D^{\dagger, b}$  sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  pour tout  $b \geq m(D)$ .

Soit  $l \geq 1$  tel que  $p$  divise  $l$  et  $\psi((1+T)^j e_i) \in T^{-l} D^{\dagger, m(D)}$  pour  $(i, j) \in [1, d] \times [0, p-1]$ . Alors  $\psi(D^{\dagger, b}) \subset T^{-l} D^{\dagger, b-1}$  pour tout  $b > m(D)$ , car  $\psi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}) \subset \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b-1}$  et donc

$$D^{\dagger, b} = \sum_{i=1}^d \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b} \cdot e_i = \sum_{i=1}^d \sum_{j=0}^{p-1} (1+T)^j \varphi(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b-1}) e_i.$$

Posons  $l(D) = 2l$  et montrons par récurrence sur  $k$  que  $\psi^k(D^{\dagger, b}) \subset T^{-l(D)} D^{\dagger, b-k}$  pour  $b \geq m(D) + k$ . Pour  $k = 1$ , on vient de le faire. Pour passer de  $k$  à  $k+1$ , on utilise l'hypothèse de récurrence et le lemme I.5, ce qui donne pour  $b > m(D) + k$

$$\psi^{k+1}(D^{\dagger, b}) \subset \psi(\varphi(T)^{-\frac{l(D)}{p}} D^{\dagger, b-k}) = T^{-\frac{l(D)}{p}} \psi(D^{\dagger, b-k}).$$

On conclut en utilisant l'inclusion  $\psi(D^{\dagger, b-k}) \subset T^{-\frac{l(D)}{2}} D^{\dagger, b-k-1}$  (second paragraphe) et l'inégalité  $l(D) \geq \frac{l(D)}{2} + \frac{l(D)}{p}$ .

**II.3. Dualité.** — Le module  $\Omega_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}^1$  des  $\mathcal{O}_L$ -différentielles continues de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$  est naturellement un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale libre de rang 1, une base étant  $\frac{dT}{1+T}$  et les actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$  étant<sup>(5)</sup>

$$\sigma_a\left(\frac{dT}{1+T}\right) = a \frac{dT}{1+T}, \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*, \quad \text{et} \quad \varphi\left(\frac{dT}{1+T}\right) = \frac{dT}{1+T}.$$

Si  $D$  est un objet de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , (resp.  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , resp.  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ ), on note  $\check{D}$  le  $(\varphi, \Gamma)$ -module des morphismes  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -linéaires de  $D$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \frac{dT}{1+T}$  (resp.  $\mathcal{E} \frac{dT}{1+T}$ , resp.  $(\mathcal{E}/\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \frac{dT}{1+T}$ ), les actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$  étant définies par<sup>(6)</sup>

$$\langle \sigma_a(x), \sigma_a(y) \rangle = \sigma_a(\langle x, y \rangle), \quad \text{si } a \in \mathbf{Z}_p^*, \quad \text{et} \quad \langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \varphi(\langle x, y \rangle),$$

<sup>(5)</sup>La formule  $\varphi\left(\frac{dT}{1+T}\right) = p \frac{dT}{1+T}$ , qui semblerait naturelle, ne fournit pas un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale.

<sup>(6)</sup>La condition «  $D$  étale » est précisément ce qu'il faut pour garantir l'existence et l'unicité d'un tel  $\varphi$  sur  $\check{D}$ , si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ .

l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $\check{D} \times D$  étant l'accouplement naturel. Le foncteur  $D \rightarrow \check{D}$  est involutif et exact. Par extension des scalaires et functorialité, l'accouplement  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induit des accouplements (pour  $a \geq m(D)$ )

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{D}^{(0, r_a]} \times D^{(0, r_a]} \rightarrow \mathcal{E}^{(0, r_a]} \frac{dT}{1+T}, \quad \langle \cdot, \cdot \rangle : \check{D}^{\dagger, a} \times D^{\dagger, a} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, a} \frac{dT}{1+T},$$

et  $\langle \cdot, \cdot \rangle : \check{D}_{\text{rig}} \times D_{\text{rig}} \rightarrow \mathcal{R} \frac{dT}{1+T}$ .

L'application résidu

$$\text{rés}_0 : \mathcal{O}_L[[T, T^{-1}]]dT \rightarrow \mathcal{O}_L, \quad \text{rés}_0\left(\left(\sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n T^n\right) dT\right) = a_{-1}$$

induit une application  $\text{rés}_0 : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \frac{dT}{1+T} \rightarrow \mathcal{O}_L$  et donc des applications  $\text{rés}_0 : \mathcal{E} \frac{dT}{1+T} \rightarrow L$  et  $\text{rés}_0 : \mathcal{E} / \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \frac{dT}{1+T} \rightarrow L / \mathcal{O}_L$ .

Si  $\check{z} \in \check{D}$  et  $z \in D$ , on pose

$$\{\check{z}, z\} = \text{rés}_0(\langle \sigma_{-1} \cdot \check{z}, z \rangle).$$

On obtient ainsi un accouplement à valeurs dans  $L / \mathcal{O}_L$  (resp.  $\mathcal{O}_L$ , resp.  $L$ ) si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  (resp.  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , resp.  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ ). Cet accouplement est parfait, i.e. l'application  $\iota$  qui envoie  $x$  sur  $\iota(x) = (y \mapsto \{x, y\})$  identifie  $\check{D}$  et  $D^*$  (le dual étant muni de la topologie de la convergence simple). On définit par la même formule un accouplement parfait  $\{ \cdot, \cdot \}$  entre  $\check{D}_{\text{rig}}$  et  $D_{\text{rig}}$ .

Le résultat suivant sera utilisé dans l'étude des vecteurs localement analytiques des objets de  $\text{Rep}_L(G)$ .

**Lemme II.4.** — Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ ,  $a_1, a_2 \in \mathbf{Z}$  et  $b > \max(m(D), m(\check{D}))$ , alors

$$\{T^{a_1} \check{D}^{\dagger, b}, T^{a_2} D^{\dagger, b}\} \subset \{x \in \mathcal{O}_L, v_p(x) \geq (a_1 + a_2)r_b\}.$$

*Démonstration.* — Soient  $\check{z} \in \check{D}^{\dagger, b}$ ,  $z \in D^{\dagger, b}$ . Puisque  $\frac{\sigma_{-1}(T)}{T}$  est inversible dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ , il existe  $f \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  tel que

$$\left(\frac{\sigma_{-1}(T)}{T}\right)^{a_1} \langle \sigma_{-1}(\check{z}), z \rangle = f \frac{dT}{1+T}.$$

Puisque  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ -linéaire, on a

$$\{T^{a_1} \check{z}, T^{a_2} z\} = \text{rés}_0\left(T^{a_1+a_2} f \frac{dT}{1+T}\right).$$

En écrivant  $f = \sum_{n \in \mathbf{Z}} b_n T^n$ , un petit calcul montre que

$$\text{rés}_0\left(T^{a_1+a_2} f \frac{dT}{1+T}\right) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j b_{-1-(a_1+a_2)-j},$$

la convergence de la série étant assurée par l'inégalité  $v_p(b_n) \geq -nr_b$ , si  $n \leq 0$ . Cette inégalité permet aussi de montrer que

$$v_p\left(\text{rés}_0\left(T^{a_1+a_2} f \frac{dT}{1+T}\right)\right) \geq (a_1 + a_2)r_b,$$

si  $a_1 + a_2 \geq 0$ ; le cas  $a_1 + a_2 < 0$  étant trivial, cela permet de conclure.

**II.4. Les modules  $D^{\text{nr}}$ ,  $D^\sharp$  et  $D^\natural$ .** — Les modules ci-dessous font l'objet d'une étude détaillée dans [9, chap. II].

**Définition II.5.** — (i) Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \cup \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  on note  $D^{\text{nr}} = \bigcap_{n \geq 1} \varphi^n(D)$  et

$$D^{++} = \{x \in D \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi^n(x) = 0\}, \quad D^+ = D^{++} \oplus D^{\text{nr}}.$$

(ii) Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ , on note  $D^\natural$  et  $D^\sharp$  les orthogonaux respectifs de  $\check{D}^+$  et  $\check{D}^{++}$ , pour l'accouplement  $\{, \}$ . Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , on pose  $D^? = \varprojlim_k (D/p^k D)^?$ , pour  $? \in \{\natural, \sharp\}$ .

On étend ces définitions aux  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{E}$ , en choisissant des réseaux stables par  $\varphi$  et  $\Gamma$  et en tensorisant par  $L$  (les objets obtenus ne dépendent pas des choix).

**Proposition II.6.** — Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \cup \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ , alors :

(i)  $D^{\text{nr}}$  et  $D^\sharp/D^\natural$  sont des  $\mathcal{O}_L$ -modules de type fini. Si  $D$  est de torsion, alors  $\check{D}^{\text{nr}}$  est le dual de  $D^\sharp/D^\natural$ .

(ii)  $D^\natural$  et  $D^\sharp$  sont des sous  $\mathcal{O}_L[[T]]$ -modules compacts de  $D$ , qui engendrent  $D$  et sur lesquels  $\psi$  est surjectif.

(iii) Si  $D$  est de torsion ou si  $D$  est irréductible de rang  $\geq 2$ , alors  $D^\sharp/D^\natural$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de longueur finie.

*Démonstration.* — Toutes les références sont à [9]. Le (i) suit de la prop. II.2.2 et de la prop. II.5.19. Le (ii) découle de la prop. II.6.3. Enfin, (iii) est le cor. II.5.21.

On déduit de la proposition ci-dessus que si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , alors  $D^{\text{nr}}$  et  $D^\sharp/D^\natural$  sont des  $L$ -espaces vectoriels de dimension finie et que  $\check{D}^{\text{nr}}$  est le  $L$ -dual de  $D^\sharp/D^\natural$ . De plus, si  $D$  est irréductible de dimension  $\geq 2$ , alors  $D^\natural = D^\sharp$  car  $\check{D}^{\text{nr}} = 0$ . Cela est faux si  $D$  est de dimension 1, car dans ce cas  $D^\sharp/D^\natural$  est un  $L$ -espace vectoriel de dimension 1 puisque  $\check{D}^{\text{nr}}$  est de dimension 1.

### III. L'image du foncteur $\Pi \mapsto D(\Pi)$

Dans ce chapitre on démontre le théorème 0.9 de l'introduction (ainsi que les versions entière et de torsion de ce théorème). Beaucoup des arguments qui suivent sont tirés de [9] et des chap. II et IV de [10] mais nous avons explicité certains résultats implicites dans [10] (comme ceux du § III.10 qui ne sont rédigés que dans le cas de torsion dans [10] ou bien ceux du § III.12 sur la compatibilité à la réduction modulo  $p$ ), rajouté des sorites sur les invariants par  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , simplifié la démonstration de résultats clefs comme les th. III.21 et III.49, et introduit la notion de paire  $G$ -compatible qui rend la présentation des résultats plus agréable.

**III.1. Représentations de  $G$ .** — Si  $A$  est un anneau commutatif et si  $H$  est un groupe topologique, une  $A$ -représentation de  $H$  est un  $A[H]$ -module à gauche. Une telle représentation  $\Pi$  est dite *lisse* si le stabilisateur de tout  $v \in \Pi$  est ouvert dans  $H$  et *lisse admissible* si de plus  $\Pi^K$  est un  $A$ -module de type fini pour tout sous-groupe ouvert compact  $K$  de  $H$ .

Nous aurons besoin des catégories suivantes de représentations de  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  :

- $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  est la catégorie des  $\mathcal{O}_L$ -représentations lisses de  $G$ , de longueur finie et ayant un caractère central<sup>(7)</sup>. Tout  $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  est de torsion comme  $\mathcal{O}_L$ -module, et admissible d'après les travaux de Barthel-Livné [2] et Breuil [5].
- $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$  est la catégorie des  $\mathcal{O}_L$ -représentations  $\Pi$  de  $G$ , ayant un caractère central et telles que  $\Pi$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module séparé et complet pour la topologie  $p$ -adique (i.e.  $\Pi = \varprojlim \Pi/p^n\Pi$ ), sans  $p$ -torsion et tel que  $\Pi/p^n\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  pour tout  $n$ .
- $\mathrm{Rep}_L(G)$  est la catégorie des  $L$ -représentations de Banach de  $G$  qui admettent un  $\mathcal{O}_L$ -réseau ouvert, borné, stable par  $G$  et appartenant à  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , et donc  $\mathrm{Rep}_L(G)$  est la catégorie des  $L$ -représentations de Banach de  $G$ , qui sont unitaires, admissibles au sens de [27], résiduellement de longueur finie<sup>(8)</sup> et à caractère central.

Si  $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , resp.  $\mathrm{Rep}_L(G)$ ), on note  $\Pi^*$  le dual de Pontryagin (resp. le  $\mathcal{O}_L$  ou  $L$ -dual continu) de  $\Pi$ , que l'on munit de la topologie faible (i.e. celle de la convergence simple) et de l'action évidente de  $G$ .

Si  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  est un caractère unitaire, on note  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(\delta)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$ , resp.  $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ ) la sous-catégorie de  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , resp.  $\mathrm{Rep}_L(G)$ ) des représentations sur lesquelles  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$  agit par multiplication par  $\delta(a)$ . Par définition,  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , resp.  $\mathrm{Rep}_L(G)$ ) est la réunion des  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(\delta)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$ , resp.  $\mathrm{Rep}_L(\delta)$ ), pour  $\delta$  unitaire.

Si  $\eta_1, \eta_2$  sont des caractères continus de  $\mathbf{Q}_p^*$ , à valeurs dans  $k_L^*$  (resp.  $\mathcal{O}_L^*$ ), on note  $\mathrm{Ind}(\eta_1 \otimes \eta_2)$  l'espace des fonctions  $\phi : G \rightarrow k_L$  (resp.  $\phi : G \rightarrow L$ ), continues, telles que  $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} g\right) = \eta_1(a)\eta_2(d)\phi(g)$  pour tous  $a, d \in \mathbf{Q}_p^*$ ,  $b \in \mathbf{Q}_p$  et  $g \in G$ , que l'on munit de l'action de  $G$  définie par  $(h \cdot \phi)(g) = \phi(hg)$ . Alors  $\mathrm{Ind}(\eta_1 \otimes \eta_2)$  est un objet de  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(\eta_1\eta_2)$  (resp.  $\mathrm{Rep}_L(\eta_1\eta_2)$ ). Le résultat suivant est parfaitement classique.

**Proposition III.1.** — (i) *Si  $\eta_1 \neq \eta_2$ , la représentation  $\mathrm{Ind}(\eta_1 \otimes \eta_2)$  est irréductible (resp. topologiquement irréductible).*

<sup>(7)</sup>Qui n'est pas forcément unique.

<sup>(8)</sup>La condition « résiduellement de longueur finie » implique « topologiquement de longueur finie » de manière évidente ; ces deux conditions sont en fait équivalentes (cf. [25] pour  $p \geq 5$  et [13] pour le cas général).

(ii) Si  $\eta_1 = \eta_2$ , la fonction  $g \mapsto \eta_1 \circ \det g$  engendre une sous-représentation de dimension 1 sur laquelle  $G$  agit à travers le caractère  $\eta_1 \circ \det g$ , et le quotient est une représentation irréductible (resp. topologiquement irréductible) de  $G$ , de la forme  $\text{St} \otimes (\eta_1 \circ \det g)$ , où  $\text{St}$  est la steinberg (resp. la steinberg continue).

Les composantes de Jordan-Hölder des  $\text{Ind}(\eta_1 \otimes \eta_2)$  sont dites *ordinaires*; les objets absolument irréductibles de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  ou  $\text{Rep}_L(G)$  qui ne sont pas ordinaires sont dits *supersinguliers*. Il n'est pas très facile de construire des  $L$ -représentations supersingulières par de purs procédés de théorie des représentations, mais les th. III.4 et III.15 et la prop. III.33 en donnent une classification complète en termes de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules.

**III.2. Le foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$ .** — On note  $P = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_p^* & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  le sous-groupe *mirabolique* de  $G$  et  $P^+$  le sous-semi-groupe  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  de  $P$ .

Soit  $\Pi$  un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$ . Si  $W \subset \Pi$  est un sous- $\mathcal{O}_L$ -module de type fini, stable sous l'action de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  et qui engendre  $\Pi$  comme  $G$ -module (un tel  $W$  existe car  $\Pi$  est de longueur finie, cf. [10, lemme III.1.6]), on note :

- $D_W^\natural(\Pi)$  le dual de Pontryagin de  $P^+ \cdot W$ .
- $D_W^+(\Pi)$  l'ensemble des  $\mu \in \Pi^*$  nuls sur  $g \cdot W$  pour tout  $g \in P - P^+$ .

$D_W^+(\Pi)$  est stable par  $P^+$  car  $P - P^+$  est stable par multiplication par  $g^{-1}$  si  $g \in P^+$ ; il admet donc une structure naturelle<sup>(9)</sup> de  $(\varphi, \Gamma)$ -module sur  $\mathcal{O}_L[[T]]$ . On définit alors

$$D(\Pi) = \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[[T]]} D_W^+(\Pi)$$

et on montre [10, th. IV.2.13] que  $D(\Pi) \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  (la seule difficulté est de vérifier que  $D(\Pi)$  est de longueur finie). De plus,  $D(\Pi)$  ne dépend pas du choix de  $W$  et  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  est un foncteur exact contravariant de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  dans  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ .

Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , on pose

$$D(\Pi) = \varprojlim_n D(\Pi/p^n\Pi).$$

Enfin, si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ , on choisit un  $\mathcal{O}_L$ -réseau ouvert  $\Pi_0$ , borné et stable par  $G$ , et on pose  $D(\Pi) = L \otimes_{\mathcal{O}_L} D(\Pi_0)$  (cela ne dépend pas du choix de  $\Pi_0$ ). On obtient ainsi des foncteurs exacts contravariants  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G) \rightarrow \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et  $\text{Rep}_L(G) \rightarrow \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

**Remarque III.2.** — Il est clair que le foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  tue les objets de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  (ou  $L$ ) mais, comme on le verra (th. III.4), c'est la seule information que

<sup>(9)</sup>Les actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$  sont celles de  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ; la structure de  $\mathcal{O}_L[[T]]$ -module est induite par l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et l'isomorphisme standard  $\mathcal{O}_L[[T]] \simeq \mathcal{O}_L \left[ \left[ \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \right]$ .

l'on perd en utilisant ce foncteur, ce qui est assez remarquable car la construction de  $D(\Pi)$  n'utilise que peu d'information sur  $\Pi$ .

**III.3. Le résultat principal.** — Soit  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  un caractère unitaire et soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale<sup>(10)</sup>. Les constructions de [10, chap. II] fournissent un faisceau  $G$ -équivariant sur  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ , dont l'espace des sections sur  $U$  est noté  $D \boxtimes_\delta U$ . Par construction, on a  $D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p = D$  (et la restriction du faisceau à  $\mathbf{Z}_p$  muni de l'action de  $P^+$  est le faisceau du § II.1) et le caractère central du  $G$ -module  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est  $\delta$ . De plus, si  $U$  est un ouvert compact de  $\mathbf{Q}_p$ , l'extension par 0 permet de considérer  $D \boxtimes_\delta U$  comme un sous-module de  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . Le module  $D \boxtimes_\delta U$  est alors stable sous l'action du stabilisateur de  $U$ ; en particulier,  $D = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$  est stable par  $1 + p\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p)$  puisque ce groupe stabilise  $\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{P}^1$ .

Si  $w = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , l'application  $z \rightarrow (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz))$  induit une injection de  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $D \times D$ , ce qui permet de munir  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  d'une structure de  $G$ -module topologique ( $D$  étant muni de la topologie faible). Plus précisément, si on note  $w_\delta$  la restriction de l'action de  $w$  à  $D^{\psi=0} = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ , alors  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  s'identifie au sous-ensemble de  $D \times D$  des  $(z_1, z_2)$  vérifiant  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_2 = w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_1)$ .

**Remarque III.3.** — Comme  $G$  est engendré par  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $w$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 1+p\mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et comme  $\mathbf{P}^1 = \mathbf{Z}_p \cup w \cdot p\mathbf{Z}_p$ , l'action de  $G$  sur  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est complètement décrite par les formules suivantes.

- Si  $z \in D = D \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p$ , si  $a \in \mathbf{Z}_p^*$  et si  $b \in \mathbf{Z}_p$ , on a

$$\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \varphi(z), \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \sigma_a(z), \quad \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = (1+T)^b \cdot z.$$

- Si  $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , on a  $wz = (z_2, z_1)$ ,  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z) = \delta(p)\psi(z_2)$  et, si  $b \in p\mathbf{Z}_p$ ,  $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z) = u_b(\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2))$ , où<sup>(11)</sup>

$$u_b = \delta(1+b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ w_\delta \circ \begin{pmatrix} (1+b)^{-2} & b(1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ w_\delta \circ \begin{pmatrix} 1 & (1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sur  $D \boxtimes_\delta p\mathbf{Z}_p$ .

Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  (resp.  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , resp.  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ ), le module  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est l'extension d'un banach par le dual d'un banach (resp. de la boule unité d'un banach par le dual de la boule unité d'un banach, resp. d'un module discret par un module compact). Il n'est, en général, pas possible de trouver une telle extension où les deux termes sont stables par  $G$ , et on dit que  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible si c'est le cas. On dispose alors de deux éléments  $\Pi_1, \Pi_2$  de  $\text{Rep}_L(G)$  (resp.  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ , resp.  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$ ) et d'une suite exacte  $0 \rightarrow \Pi_1^* \rightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$ .

<sup>(10)</sup>Cela signifie que  $D$  est un objet d'une des catégories  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ ,  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  ou  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

<sup>(11)</sup>La formule de [10, pag. 325] comporte quelques fautes de frappe.

Soit  $\mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta) \subset \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{ét}}$  l'image de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)$  par le foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$ . On définit de manière analogue les catégories  $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$  et  $\mathcal{C}_L(\delta)$ . Il résulte du th. III.4 ci-dessous que les objets de ces catégories sont exactement les  $(\varphi, \Gamma)$ -modules  $D$  tels que  $(D, \delta^{-1})$  soit  $G$ -compatible.

**Théorème III.4.** — *Si  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  est un caractère unitaire, alors :*

- (i)  $\mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta)$  est stable par sous-quotients.
- (ii) Si  $D \in \mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta)$ , alors  $\check{D} \in \mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta^{-1})$ .
- (iii) Il existe un foncteur covariant  $D \rightarrow \Pi_{\delta}(D)$  de  $\mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta^{-1})$  dans  $\text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)$  tel que pour tout  $D \in \mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta^{-1})$  on ait une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_{\delta}(D) \rightarrow 0.$$

(iv) Les foncteurs  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  et  $D \rightarrow \Pi_{\delta}(\check{D})$  induisent des anti-équivalences quasi-inverses exactes entre  $\text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)/S$  et  $\mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta)$ , où  $S$  est la sous-catégorie de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)$  formée des représentations de type fini comme  $\mathcal{O}_L$ -module.

(v) Les résultats précédents restent valables si on remplace  $\mathcal{C}_{\text{tors}}$  par  $\mathcal{C}_{\mathcal{O}_L}$  (resp.  $\mathcal{C}_L$ ) et  $\text{Rep}_{\text{tors}}$  par  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L}$  (resp.  $\text{Rep}_L$ ) et  $\mathcal{O}_L$  par  $\mathcal{O}_L$  (resp.  $L$ ) dans la définition de  $S$ .

**Remarque III.5.** — La suite exacte  $0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_{\delta}(D) \rightarrow 0$  ne détermine pas uniquement  $\Pi_{\delta}(D)$  et  $\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})$  mais presque (en fait, si  $D \in \mathcal{C}_{\text{tors}}(\delta)$  (resp.  $D \in \mathcal{C}_L(\delta)$ ) n'a pas de sous-quotient isomorphe à  $k_{\mathcal{E}}(\eta)$  (resp.  $\mathcal{E}(\eta)$ ), avec  $\delta = \eta^2$  ou  $\delta = \eta^2 \chi^{-2}$ , alors  $\Pi_{\delta}(D)$  et  $\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})$  sont uniquement déterminés par la suite exacte). Nous donnerons une construction explicite de ces représentations (cf. def. III.9) ce qui permet de restaurer l'unicité dans tous les cas.

La preuve de ce théorème occupe la quasi-totalité de ce chapitre. Les (i), (ii) et (iii) s'obtiennent en mélangeant le cor. III.22, les prop. III.29 et III.44, ainsi que les th. III.45 et III.49. Pour le (iv), il faut en plus utiliser la prop. III.31.

**III.4. Paires  $G$ -compatibles.** — Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale. L'application  $x \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x)_{n \geq 0}$  induit un isomorphisme

$$D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p \cong \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in D \text{ et } \psi(x_{n+1}) = x_n\},$$

et on munit  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  de la topologie induite par la topologie produit sur  $D^{\mathbf{N}}$ .

**Remarque III.6.** — Comme on passe de  $\mathbf{P}^1$  à  $\mathbf{Q}_p$  en n'enlevant qu'un point, la restriction à  $\mathbf{Q}_p$  est presque injective [10, prop. II.1.14] :

$$\text{Ker}(\text{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p) = \{(0, z_2), z_2 \in D^{\text{nr}}\}.$$

Si  $? \in \{\natural, \sharp\}$ , on pose

$$D^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p = (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p) \cap (D^?)^{\mathbf{N}}.$$

Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}) \cup \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ , c'est un sous-module compact de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ .

**Proposition III.7.** — Soit  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ .

(i) Si  $M$  est un sous  $\mathcal{O}_L$ -module fermé de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ , stable par  $P$ , il existe un sous-objet  $D_1$  de  $D$  tel que

$$D_1^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p \subset M \subset D_1^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p.$$

En particulier,  $M \subset D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  et  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p \subset M$ , si  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$  engendre  $D$  en tant que  $(\varphi, \Gamma)$ -module.

(ii)  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)$  est isomorphe à  $D^{\sharp}/D^{\natural}$  et est de type fini sur  $\mathcal{O}_L$ .

(iii) Le foncteur  $D \mapsto D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  est exact.

*Démonstration.* — Le (i) correspond au th. III.3.8 de [9] (noter que le caractère  $\delta$  ne joue aucun rôle quand on considère la restriction à  $P$ ). Le (ii) correspond aux prop. III.3.1 et cor. III.3.2 de [9], et le (iii) au th. III.3.5 de [9].

On définit des sous- $B$ -modules [fermés si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ ] de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  par :

$$D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = \text{Res}_{\mathbf{Q}_p}^{-1}(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p), \quad (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} = \text{Res}_{\mathbf{Q}_p}^{-1}(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p).$$

On pose  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , et<sup>(12)</sup> on définit  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  comme le saturé du  $\mathcal{O}_L$ -module  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ .

**Remarque III.8.** —  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  et  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  sont de type fini (sur  $\mathcal{O}_L$  ou  $L$  suivant les cas) et sont nuls si  $D^{\natural} = D^{\sharp}$ . En effet,  $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  est saturé, et donc  $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  aussi, ce qui fait que  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \subset D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et que  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  est un quotient de  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ . Or, par définition,  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$  induit une injection de  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  dans  $(D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p) \cong D^{\sharp}/D^{\natural}$  (cf. (ii) de la prop. III.7).

**Proposition-définition III.9.** —  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible si et seulement si le module  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ . Dans ce cas, on pose

$$\Pi_{\delta}(D) = (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1).$$

*Démonstration.* — Que  $(D, \delta)$  soit  $G$ -compatible si et seulement si  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$  résulte de [10, lemme II.2.5].

<sup>(12)</sup>Le sous-module  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  n'est pas forcément saturé  $p$ -adiquement, voir la rem. VII.4.28 de [10].

**Remarque III.10.** — (i) Si  $f : D_1 \rightarrow D_2$  est un morphisme dans une des catégories  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}, \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}), \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , alors  $f$  induit un morphisme équivariant du faisceau attaché à  $(D_1, \delta)$  dans le faisceau attaché à  $(D_2, \delta)$  (cela résulte de la construction du faisceau  $D \rightarrow D \boxtimes_{\delta} U$ ). En particulier,  $f$  induit des morphismes de  $G$  (resp.  $B$ )-modules topologiques  $f : D_1 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D_2 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  (resp.  $f : D_1 \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p \rightarrow D_2 \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ ). Si  $? \in \{\sharp, \natural\}$ , alors  $f$  envoie  $D_1^?$  dans  $D_2^?$  et donc  $f$  envoie  $D_1^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  dans  $D_2^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  et  $D_1^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $D_2^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . Il en résulte que si  $(D_1, \delta)$  et  $(D_2, \delta)$  sont  $G$ -compatibles, alors  $f$  induit un morphisme  $G$ -équivariant de  $\Pi_{\delta}(D_1)$  dans  $\Pi_{\delta}(D_2)$ .

(ii) Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et si  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  n'est pas saturé (ce qui se produit rarement, mais voir [10, rem. VII.4.28] pour un exemple), il n'y a pas de morphisme naturel  $\Pi_{\delta}(D) \rightarrow \Pi_{\delta}(D/\pi_L)$ , mais seulement un morphisme  $(D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow \Pi_{\delta}(D/\pi_L)$ .

(iii) Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  et si  $D_0$  est un réseau stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$  dans  $D$ , alors  $(D_0, \delta)$  est  $G$ -compatible et  $\Pi_{\delta}(D_0)$  est un réseau ouvert, borné et  $G$ -stable dans  $\Pi_{\delta}(D)$ .

**Proposition III.11.** — Si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, alors  $\Pi_{\delta}(D)$  est un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$ ,  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$  ou  $\text{Rep}_L(G)$ , suivant que  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}, D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , ou  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

*Démonstration.* — Cf. [10, lemme II.2.10] : la seule difficulté est de prouver que les objets obtenus sont (résiduellement) de longueur finie (voir la prop. III.28 pour une justification de cette finitude).

**Remarque III.12.** — Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible.

(i) Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , alors  $D^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est compact, si  $? \in \{\natural, \sharp\}$ . En effet,  $z \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z)$  permet d'identifier  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  à un sous-module fermé de  $D^{\natural} \times D^{\natural}$ , ce qui prouve qu'il est compact. Le même argument montre que  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  est compact, et la rem. III.8 permet d'en déduire le résultat pour  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .

(ii) Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  est non nul, alors  $\Pi_{\delta}(D)$  n'est pas de type fini comme  $\mathcal{O}_L$ -module. En effet  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est compact et donc son intersection  $M$  avec  $D = D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Z}_p$  aussi, ainsi que l'image  $\bar{M}$  de  $M$  dans  $k_L \otimes D$ . Il en résulte que  $(k_L \otimes D)/\bar{M}$  est de dimension infinie sur  $k_L$  et donc que l'image de  $D$  dans  $\Pi_{\delta}(D)$  n'est pas de type fini sur  $\mathcal{O}_L$ .

(iii) Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  est non nul, alors  $\Pi_{\delta}(D)$  est de dimension infinie sur  $L$  (cela résulte du (ii) en tensorisant par  $L$ ).

**Proposition III.13.** — Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale et soient  $\delta, \eta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  des caractères unitaires. Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible, il en est de même de

$(D(\eta), \delta\eta^2)$  et on a un isomorphisme de  $G$ -modules de Banach

$$\Pi_{\delta\eta^2}(D(\eta)) \simeq \Pi_{\delta}(D) \otimes (\eta \circ \det).$$

*Démonstration.* — C'est une conséquence de l'isomorphisme (cf. [10, prop. II.1.11])  $D(\eta) \boxtimes_{\delta\eta^2} \mathbf{P}^1 \cong (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) \otimes (\eta \circ \det)$ .

**Proposition III.14.** — Si  $\Lambda \in \{k_{\mathcal{E}}, \mathcal{E}\}$  et si  $D$  est de rang 1 sur  $\Lambda$ , alors  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible pour tout  $\delta$ . Plus précisément, si  $\delta_1, \delta_2$  sont deux caractères unitaires :

(i) On a un isomorphisme de  $G$ -modules topologiques

$$\Lambda(\delta_1)^{\sharp} \boxtimes_{\delta_1\delta_2\chi^{-1}} \mathbf{P}^1 \cong (\text{Ind}(\delta_1 \otimes \delta_2\chi^{-1}))^* \otimes (\delta_1\delta_2\chi^{-1} \circ \det).$$

(ii) L'application  $z \mapsto \phi_z$ , avec  $\phi_z(g) = \text{res}_0(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wgz) \frac{dT}{1+T})$ , induit un isomorphisme de  $G$ -modules topologiques

$$\Pi_{\delta_1\delta_2\chi^{-1}}(\Lambda(\delta_1)) \cong \text{Ind}(\delta_2 \otimes \delta_1\chi^{-1}).$$

*Démonstration.* — Il s'agit d'une traduction de l'analyse fonctionnelle sur  $\mathbf{Z}_p$  : voir la rem. II.1.1 de [10] ou la prop. 4.9 de [12].

**Théorème III.15.** — (i) Si  $D$  est de rang 2 et si  $\delta_D$  est le caractère  $\chi^{-1} \det D$ , alors  $(D, \delta_D)$  est  $G$ -compatible et si  $D$  est absolument irréductible, alors  $\delta_D$  est l'unique caractère  $\delta$  de  $\mathbf{Q}_p^*$  tel que  $(D, \delta)$  soit  $G$ -compatible.

(ii) Si  $D$  est absolument irréductible de rang  $\geq 3$ , alors  $(D, \delta)$  n'est  $G$ -compatible pour aucun choix de  $\delta$ .

*Démonstration.* — La  $G$ -compatibilité de  $(D, \delta_D)$  est le résultat principal du chap. IV de [10] (à part le cas où  $p = 2$  et  $\overline{D}^{\text{ss}}$  est la somme de deux caractères égaux pour lequel on a besoin des résultats de [13]). Le reste de l'énoncé est une conséquence de [25] si  $p \geq 5$ , et de [13] en général.

**Remarque III.16.** — La  $G$ -compatibilité de  $(D, \delta_D)$  est valable, plus généralement, pour une déformation d'un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de rang 2, i.e. pour un  $(\varphi, \Gamma)$ -module de rang 2 sur  $A \otimes_L \mathcal{E}$  où  $A$  est une  $L$ -algèbre artinienne. Ce genre de considération joue d'ailleurs un grand rôle dans la démonstration de la  $G$ -compatibilité de  $(D, \delta_D)$  pour  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

**Proposition III.17.** — (i) Soit  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ . Alors  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible si et seulement si  $(D/p^k D, \delta)$  est  $G$ -compatible pour tout  $k \geq 0$ .

(ii) Une paire  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible si et seulement si  $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ .

(iii) Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, le module  $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est le plus grand sous-module compact de  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  stable par  $G$ .

*Démonstration.* — Ces énoncés sont contenus dans la prop. II.2.6 de [10] (et sa preuve).

**III.5. Le sous-module  $\tilde{D}^+$  de  $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .** — On note  $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$  le complété de la clôture radicielle de  $\mathbf{F}_p((T))$ . Il est muni d'actions continues de  $\varphi$  et  $\Gamma$  (on a  $\varphi(T) = T^p$  et  $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$ ). Soit  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p} = W(\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p})$  l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans  $\tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ . Si  $x \in \tilde{\mathbf{E}}_{\mathbf{Q}_p}$ , on note  $[x]$  le représentant de Teichmüller de  $x$  dans  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ . L'anneau  $\tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$  est naturellement muni d'actions de  $\varphi$  et  $\Gamma$ , que l'on étend par  $\mathcal{O}_L$ -linéarité à l'anneau  $\tilde{\mathcal{O}}_\mathcal{E} := \mathcal{O}_L \otimes_{\mathbf{Z}_p} \tilde{\mathbf{A}}_{\mathbf{Q}_p}$ . Si  $b \in \mathbf{Q}_p$  et  $n \geq 1$  est tel que  $p^n b \in \mathbf{Z}_p$ , on pose

$$[(1+T)^b] = \varphi^{-n}((1+T)^{p^n b}) = \varphi^{-n} \left( \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p^n b}{k} T^k \right) \in \tilde{\mathcal{O}}_\mathcal{E}.$$

Cela ne dépend pas du choix de  $n$  et on a  $[(1+T)^{b+c}] = [(1+T)^b] \cdot [(1+T)^c]$  si  $b, c \in \mathbf{Q}_p$ .

Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale, on pose  $\tilde{D} = \tilde{\mathcal{O}}_\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} D$ , que l'on munit d'une action du mirabolique  $P$  en posant, si  $k \in \mathbf{Z}$ ,  $a \in \mathbf{Z}_p^*$ ,  $b \in \mathbf{Q}_p$ ,

$$\begin{pmatrix} p^k a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tilde{z} = [(1+T)^b] \varphi^k(\sigma_a(\tilde{z})).$$

Cette action laisse stable le sous-module  $\tilde{D}^+$  de  $\tilde{D}$ , formé des  $x \in \tilde{D}$  tels que la suite  $(\varphi^n(x))_{n \in \mathbf{N}}$  soit bornée dans  $\tilde{D}$ .

**Proposition III.18.** — *Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{ét}} \cup \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{E})$ , alors  $\tilde{D}/\tilde{D}^+$  est un  $\mathcal{O}_L[B]$ -module (resp. un  $L[B]$ -module topologique) de longueur égale à celle de  $D$ . En particulier, si  $D$  est irréductible, il en est de même de  $\tilde{D}/\tilde{D}^+$  comme  $B$ -module (topologique).*

*Démonstration.* — C'est une reformulation de [9, prop. IV.5.6] et de sa preuve.

**Remarque III.19.** — La démonstration de [9, prop. IV.5.6] repose sur le fait que  $\tilde{D}/\tilde{D}^+$  est le dual de  $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$  (cf. [9, prop. IV.5.4]), ce qui permet d'utiliser le (i) de la prop. III.7 (i.e. [9, th. III.3.8]) pour déterminer la longueur de  $\tilde{D}/\tilde{D}^+$ .

Soit  $I_n = [0, 1[\cap(p^{-n}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Q})$  et soit  $I$  la réunion croissante des  $I_n$ . C'est un système de représentants de  $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$  et on montre [9, lemme IV.1.2] que tout élément  $z$  de  $\tilde{D}$  s'écrit, de manière unique, sous la forme  $z = \sum_{i \in I} [(1+T)^i] z_i$ , avec  $z_i \in D$  et  $\lim_{i \in I} z_i = 0$ . D'après [10, lemme II.1.16], la suite de terme général

$$\sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_i \in D \boxtimes_\delta p^{-n} \mathbf{Z}_p \subset D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$$

converge dans  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  et on note  $i(z)$  sa limite. On montre [9, lemme IV.2.2] que  $i : \tilde{D} \rightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est une injection  $P$ -équivariante, qui envoie  $\tilde{D}^+$  dans  $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  car  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \tilde{D}^+ \subset D^\natural$ . (Tout ceci ne suppose pas que  $(D, \delta)$  soit  $G$ -compatible.)

**III.6. Dualité.** — Si  $D$  est un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale, on étend [10, th. II.1.13] l'accouplement  $\{ , \}$  sur  $\check{D} \times D$  en un accouplement  $G$ -équivariant et parfait  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$  sur  $(\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$ , en posant

$$\{(\check{z}_1, \check{z}_2), (z_1, z_2)\}_{\mathbf{P}^1} = \{\check{z}_1, z_1\} + \{\psi(\check{z}_2), \psi(z_2)\}.$$

Dans cet accouplement,  $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} U$  et  $D \boxtimes_{\delta} V$  sont orthogonaux si  $U$  et  $V$  sont des ouverts compacts de  $\mathbf{P}^1$  tels que  $U \cap V = \emptyset$  (on se ramène à [9, prop. III.2.3] en utilisant la  $G$ -équivariance).

**Lemme III.20.** — Soit  $D$  un  $(\varphi, \Gamma)$ -module étale et  $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$  un caractère unitaire. Alors l'orthogonal de  $\check{D}^+$  dans  $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  est inclus dans  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

*Démonstration.* — Le cas  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  se déduit par tensorisation par  $L$ ; on suppose donc que  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ . Soit  $N$  l'orthogonal de  $\check{D}^+$  dans  $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Il est stable par  $P$ , car  $\check{D}^+$  l'est.

Supposons que  $D$  est de torsion. Si  $x = (x_1, x_2) \in N$ , alors pour tout  $y \in D^+ \subset \check{D}^+$  on a  $\{x_1, y\} = \{x, y\}_{\mathbf{P}^1} = 0$ , donc  $x_1$  est orthogonal à  $D^+$  et  $x_1 \in \check{D}^{\natural}$ . En appliquant ceci à  $\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x$  pour tout  $n \geq 0$ , on obtient  $x \in \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  et donc  $N \subset \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

Supposons maintenant que  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et soient  $D_k = D/p^k D$  et  $c$  tel que  $p^c$  tue le conoyau de  $\check{D}^+ \rightarrow \check{D}_k^+$  pour tout  $k$  (l'existence de  $c$  découle de [9, lemme IV.5.1]). Donc, si  $x \in N$ , alors  $p^c x \pmod{p^k}$  est orthogonal à  $\check{D}_k^+$  et, d'après le cas de torsion, on a  $p^c x \pmod{p^k} \in \check{D}_k^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . En passant à la limite projective on obtient  $p^c x \in (\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  et donc  $x \in \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , ce qui permet de conclure.

**Théorème III.21.** — Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible, alors  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  est l'orthogonal de  $\check{D}^+$  et de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

*Démonstration.* — En utilisant le lemme III.20 et l'inclusion  $\check{D}^+ \subset D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , il suffit de montrer que  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est orthogonal à  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Quitte à remplacer  $D$  par  $D/p^k D$  et à passer à la limite, on peut supposer que  $D$  est de torsion.

Soit  $M$  l'orthogonal de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . Alors  $M$  est fermé (c'est un orthogonal) dans  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  (lemme III.20), et donc  $M$  est compact (rem. III.12). Il s'ensuit que  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(M)$  est un sous  $P$ -module compact de  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ , et comme  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$  contient  $\check{D}^{++}$  (car  $M$  contient  $\check{D}^{++} \subset \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ ), qui engendre  $\check{D}$ , on en déduit (cf. (i) de la prop. III.7) que  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(M) = \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  et donc (rem. III.6)  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset M + (0, \check{D}^{\text{nr}})$ . Ainsi,  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  est lui-même compact<sup>(13)</sup> car  $(0, \check{D}^{\text{nr}})$  est de longueur finie sur  $\mathcal{O}_L$

<sup>(13)</sup> Cela n'a rien de trivial à cet instant, car nous ne savons pas encore que  $(\check{D}, \delta^{-1})$  est  $G$ -compatible. C'est d'ailleurs ce que nous cherchons à montrer...

(prop. II.6). Le même argument montre alors que  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\check{M}) = D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ , si  $\check{M}$  est l'orthogonal de  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

On a donc  $\check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \subset M + (0, \check{D}^{\text{nr}})$  et  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \subset \check{M} + (0, D^{\text{nr}})$ , et il reste à voir que  $M + (0, \check{D}^{\text{nr}})$  est orthogonal à  $\check{M} + (0, D^{\text{nr}})$ . Or, on a vu que  $\check{M} + (0, D^{\text{nr}}) \subset D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et, par définition,  $M$  est orthogonal à  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , donc  $M$  est orthogonal à  $\check{M} + (0, D^{\text{nr}})$ . En faisant la même chose avec  $\check{M}$  et en utilisant le fait que  $D^{\text{nr}}$  est orthogonal à  $\check{D}^{\text{nr}}$  car  $\check{D}^{\text{nr}} \subset \check{D}^+$  et  $D^{\text{nr}} \subset D^{\natural}$ , cela permet de conclure.

**Corollaire III.22.** — *Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible. Alors :*

- (i)  $(\check{D}, \delta^{-1})$  est  $G$ -compatible.
- (ii) On a un isomorphisme de  $G$ -modules topologiques  $\Pi_{\delta}(D)^* \simeq \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  et  $\check{D}^+$  est dense<sup>(14)</sup> dans  $\Pi_{\delta}(D)^*$ .
- (iii) On a une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})^* \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_{\delta}(D) \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Cela découle du théorème précédent et du fait que  $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$  est  $G$ -équivariant (pour le (i)) et parfait (pour le reste).

**III.7. Un modèle de  $\Pi_{\delta}(D)$ .** — L'application  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  est  $B$ -équivariante et son noyau est inclus dans  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  par définition de ce module. Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  et si  $? \in \{\natural, \sharp\}$ , on pose  $(D^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_{\text{b}} = (D_0^? \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p) \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ , pour n'importe quel réseau  $D_0$  de  $D$ , stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$ .

**Proposition III.23.** — *Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible. Posons  $X = D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et  $X = (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_{\text{b}}$  si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ . Alors  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$  induit une suite exacte*

$$0 \rightarrow (0, D^{\text{nr}}) \rightarrow (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow X \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — L'exactitude à gauche est immédiate, celle au milieu résulte de la rem. III.6. Par définition,  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}((D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}) \subset X$ . Pour démontrer la surjectivité, on peut supposer que  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ . Alors  $(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  est compact (rem. III.12) donc son image par  $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$  est un sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module compact de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ , qui contient  $\check{D}^+$ ; le (i) de la prop. III.7 permet donc de montrer que cette image contient  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ .

**Corollaire III.24.** — *L'application  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} : D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D^{\natural}$  est surjective.*

<sup>(14)</sup>Rappelons que tous les deux sont munis de la topologie faible.

*Démonstration.* — D'après la proposition III.23 il suffit de prouver la surjectivité de l'application  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} : X \rightarrow D^\natural$ . Le cas  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  se déduit du cas  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  en tensorisant par  $L$ . Le cas  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  découle de l'isomorphisme  $X \simeq \varprojlim_{\psi} D^\natural$  et du fait que  $\psi$  est surjectif sur  $D^\natural$ .

**Corollaire III.25.** — Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible telle que  $\check{D}^{\text{nr}} = 0$ .

(i) Si  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ , on a un isomorphisme  $\Pi_\delta(D)^* \simeq \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$  de  $B$ -modules compacts.

(ii) Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , on a un isomorphisme  $\Pi_\delta(D)^* \simeq (\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p)_b$  de  $B$ -modules topologiques.

*Démonstration.* — Cela découle du cor. III.22 et de la prop. III.23.

**Corollaire III.26.** — Si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , alors l'inclusion de  $\check{D}$  dans  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  induit une suite exacte de  $B$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \check{D}/\check{D}^+ \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow D^\natural/D^\natural \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — Commençons par le cas de torsion. Alors  $D^\natural/D^\natural$  est le dual (de Pontryagin) de  $\check{D}^{\text{nr}}$  et  $\check{D}/\check{D}^+$  est le dual de  $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$  (rem. III.19). En utilisant le th. III.21, on voit que la suite exacte demandée est obtenue en dualisant la suite exacte

$$0 \rightarrow (0, \check{D}^{\text{nr}}) \rightarrow \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \rightarrow \check{D}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$$

de la prop. III.23, ce qui permet de conclure.

Supposons que  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  et posons  $D_k = D/p^k D$ . Alors  $D^\natural/D^\natural$  est la limite projective des  $D_k^\natural/D_k^\natural$  et  $\check{D}/\check{D}^+$  est la limite projective des  $\check{D}_k/\check{D}_k^+$  ([9, lemme IV.5.3] pour ce dernier). L'application naturelle  $\check{D}_{k+1} \rightarrow \check{D}_k$  est surjective, car  $D_{k+1}$  se surjecte sur  $D_k$ . Il en est donc de même de l'application  $\check{D}_{k+1}/\check{D}_{k+1}^+ \rightarrow \check{D}_k/\check{D}_k^+$ . Ainsi, en passant à la limite dans

$$0 \rightarrow \check{D}_k/\check{D}_k^+ \rightarrow \Pi_\delta(D_k) \rightarrow D_k^\natural/D_k^\natural \rightarrow 0$$

on obtient bien une suite exacte

$$0 \rightarrow \check{D}/\check{D}^+ \rightarrow \varprojlim \Pi_\delta(D_k) \rightarrow D^\natural/D^\natural \rightarrow 0.$$

On a  $\Pi_\delta(L \otimes D) = L \otimes \Pi_\delta(D)$  puisque  $\Pi_\delta(D)$  est le quotient de  $\varprojlim \Pi_\delta(D_k)$  par son  $\mathcal{O}_L$ -module de torsion; on en déduit le résultat pour un objet de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

**Remarque III.27.** — Dans le cas  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , il résulte de la preuve ci-dessus qu'il faut modifier la suite exacte de la proposition en remplaçant  $\Pi_\delta(D)$  par  $\varprojlim \Pi_\delta(D_k)$ .

**Proposition III.28.** — Si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , alors  $\Pi_\delta(D)$  est un  $B$ -module (topologiquement) de longueur finie, et donc aussi un  $G$ -module (topologiquement) de longueur finie.

*Démonstration.* — C'est une conséquence du cor. III.26, de la finitude de la longueur de  $\tilde{D}/\tilde{D}^+$  (prop. III.18) et de celle de  $D^\sharp/D^\natural$  (prop. II.6).

**III.8. Presque exactitude de  $D \rightarrow \Pi_\delta(D)$ .** — Si  $(D_1, \delta)$  et  $(D_2, \delta)$  sont des paires  $G$ -compatibles (noter que  $\delta$  est le même dans les deux paires) et si  $f : D_1 \rightarrow D_2$  est un morphisme de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, la rem. III.10 montre que  $f$  induit un morphisme  $G$ -équivariant continu  $f : \Pi_\delta(D_1) \rightarrow \Pi_\delta(D_2)$ .

**Proposition III.29.** — Soit  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  une suite exacte dans une des catégories  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ ,  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ ,  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ . Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible, alors  $(D_1, \delta)$  et  $(D_2, \delta)$  sont des paires  $G$ -compatibles.

*Démonstration.* — Pour montrer que  $(D_1, \delta)$  est  $G$ -compatible, il suffit (prop. III.17) de montrer que  $^{(15)} D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ , ce qui résulte de ce que  $D_1^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \cap (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$  par exactitude du foncteur  $D \rightarrow D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$  (prop. III.7).

Pour montrer que  $(D_2, \delta)$  est  $G$ -compatible, on dualise la suite exacte  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  et on obtient une suite exacte  $0 \rightarrow \check{D}_2 \rightarrow \check{D} \rightarrow \check{D}_1 \rightarrow 0$ . On conclut alors en utilisant ce que l'on vient de démontrer et le cor. III.22.

**Remarque III.30.** — La réciproque de la prop. III.29 est presque toujours fautive, la  $G$ -compatibilité étant une contrainte très forte.

**Proposition III.31.** — Soit  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  (resp.  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , resp.  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ ). Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible, les groupes de cohomologie du complexe  $0 \rightarrow \Pi_\delta(D_1) \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow \Pi_\delta(D_2) \rightarrow 0$  sont des  $\mathcal{O}_L$ -modules de longueur finie (resp. de type fini sur  $\mathcal{O}_L$ , resp. de dimension finie sur  $L$ ).

*Démonstration.* — Commençons par traiter le cas de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules sur  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ . La suite  $0 \rightarrow D_1 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow D_2 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow 0$  étant trivialement exacte, il suffit de prouver que la cohomologie du complexe  $0 \rightarrow D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow 0$  a les propriétés de finitude requises. L'exactitude du foncteur  $D \rightarrow D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$  et le fait que  $\Delta^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p / \Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$  soit un sous-quotient de  $\Delta^\sharp / \Delta^\natural$ , et donc un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini si  $\Delta \in \{D_1, D, D_2\}$ , entraînent la finitude des groupes de cohomologie du

<sup>(15)</sup>Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , remplacer  $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p$  par  $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p)_b$ .

complexe  $0 \rightarrow D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \rightarrow D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$ . Les suites exactes (pour  $\Delta \in \{D_1, D, D_2\}$ )

$$0 \rightarrow (0, \Delta^{\text{nr}}) \rightarrow (\Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow \Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$$

fournies par la prop. III.23 et la finitude des  $\mathcal{O}_L$ -modules  $\Delta^{\text{nr}}$  montrent que les groupes de cohomologie du complexe  $0 \rightarrow (D_1^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow (D_2^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \rightarrow 0$  sont de type fini sur  $\mathcal{O}_L$ .

- Si  $D_1, D, D_2$  sont des objets de  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ , cela permet de conclure.
- Si  $D_1, D, D_2$  sont des objets de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ , on conclut en utilisant la finitude de  $\Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 / (\Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  (rem. III.8).
- Si  $D_1, D, D_2$  sont des objets de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , il suffit de remplacer dans la démonstration  $\Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  par  $(\Delta^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{b}}$ , si  $\Delta = D_1, D, D_2$  et  $?\in\{\natural, \sharp\}$ .

**Remarque III.32.** — Si  $D_1, D, D_2$  sont des objets de  $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$  ou de  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , il résulte de la preuve que la suite  $0 \rightarrow \Pi_\delta(D_1) \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow \Pi_\delta(D_2) \rightarrow 0$  est exacte si  $D_j^{\text{nr}} = 0$  et  $\check{D}_j^{\text{nr}} = 0$  pour  $j = 1, 2$ . En effet, dans ce cas  $\Delta^{\text{nr}}$  et  $\Delta^\natural / \Delta^\natural \cong (\check{\Delta}^{\text{nr}})^*$  sont nuls si  $\Delta \in \{D_1, D, D_2\}$ , et donc les groupes de cohomologie du complexe sont nuls.

**Proposition III.33.** — Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ .

- (i) Si  $\Pi_\delta(D)$  est irréductible, alors  $D$  est irréductible.
- (ii) Si  $D$  est de dimension  $\geq 2$ , les assertions suivantes sont équivalentes :
  - a)  $D$  est irréductible.
  - b)  $\Pi_\delta(D)$  est topologiquement irréductible comme  $G$ -module.
  - c)  $\Pi_\delta(D)$  est topologiquement irréductible comme  $B$ -module,  $B$  étant le Borel supérieur.

*Démonstration.* — (i) Si  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  est une suite exacte dans  $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , la prop. III.31 et l'irréductibilité de  $\Pi_\delta(D)$  montrent qu'une des représentations  $\Pi_\delta(D_1)$  et  $\Pi_\delta(D_2)$  est de dimension finie sur  $L$ . La rem. III.12 permet d'en déduire que  $D_1 = 0$  ou  $D_2 = 0$ , et donc que  $D$  est irréductible.

(ii) Supposons que  $D$  est irréductible et montrons le c). Comme  $\dim_{\mathcal{E}} D \geq 2$ , on a  $D^\natural = D^\sharp$  et donc  $\Pi_\delta(D) \simeq \check{D} / \check{D}^+$  en tant que  $B$ -modules topologique (cor. III.26). On conclut en utilisant la prop. III.18. L'implication b) $\Rightarrow$ a) ayant été prouvée dans le (i), cela permet de conclure puisque l'implication c) $\Rightarrow$ b) est triviale.

**Remarque III.34.** — Les conclusions de la proposition sont en défaut en rang 1.

- (i) La représentation  $\Pi_\delta(D)$  n'est jamais topologiquement irréductible comme  $B$ -module : il y a un quotient de dimension 1 puisque la représentation obtenue est une induite d'un caractère de  $B$  (prop. III.14).

(ii) Si  $D = \mathcal{E}(\eta)$ , et si  $\delta = \eta^2$ , alors  $\Pi_\delta(D)$  n'est pas topologiquement irréductible comme  $G$ -module (il y a un sous-objet de dimension 1). Par contre, si  $\delta \neq \eta^2$ , alors  $\Pi_\delta(D)$  est topologiquement irréductible.

**Remarque III.35.** — Si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible avec  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et si  $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$  est exacte, les groupes de cohomologie de  $0 \rightarrow \Pi_\delta(D_1) \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow \Pi_\delta(D_2) \rightarrow 0$  sont des  $G$ -modules dont les composantes de Jordan-Hölder sont parmi celles de  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . Comme, par ailleurs (prop. III.31), elles sont de type fini (sur  $\mathcal{O}_L$  ou  $L$ ), la suite  $0 \rightarrow \Pi_\delta(D_1) \rightarrow \Pi_\delta(D) \rightarrow \Pi_\delta(D_2) \rightarrow 0$  est exacte si  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  n'a pas de composante de Jordan-Hölder de dimension finie (sur  $k_L$  ou sur  $L$ ). En regroupant les résultats des prop. III.1, III.14, III.33 et du cor. III.22, on voit que c'est le cas si et seulement si  $D$  n'a pas de composante de Jordan-Hölder de la forme  $k_{\mathcal{E}}(\eta)$  ou  $L(\eta)$ , avec  $\delta = \eta^2$  ou  $\delta = \eta^2 \chi^{-2}$ .

**III.9. Invariants sous  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .** — Dans ce § on étudie les  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -invariants d'une représentation de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  ou  $\text{Rep}_L(G)$ .

**Lemme III.36.** — Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(G)$ , alors  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de longueur finie.

*Démonstration.* — Soit  $K_m = 1 + p^m \text{M}_2(\mathbf{Z}_p)$ . Comme  $\Pi$  est admissible, il suffit de montrer que  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} \subset \Pi^{K_m}$  pour  $m$  assez grand. Soit  $\delta$  un caractère central de  $\Pi$  et soit  $n \geq 1$  tel que  $\delta$  soit trivial sur  $1 + p^n \mathbf{Z}_p$ . Si  $x \in 1 + p^{n+1} \mathbf{Z}_p$ , il existe  $y \in 1 + p^n \mathbf{Z}_p$  tel que  $x = y^2$ . Si  $v \in \Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ , alors

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix} v = \delta(y)v = v.$$

Comme  $K_{n+1} \subset \begin{pmatrix} 1+p^{n+1}\mathbf{Z}_p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , on voit que l'on peut prendre  $m = n + 1$ .

**Corollaire III.37.** — Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$  (resp.  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ ), alors  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module libre de type fini (resp. un  $L$ -espace vectoriel de dimension finie).

*Démonstration.* — On peut supposer que  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ . Dans ce cas, le résultat est une conséquence du lemme précédent et du fait que  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module saturé de  $\Pi$ .

**Remarque III.38.** — La démonstration ci-dessus utilise juste l'admissibilité. Or on a supposé que les représentations sont de longueur finie et toute composante de Jordan-Hölder de  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est de dimension au plus 2 sur  $k_L$  ou  $L$  car le sous-groupe engendré par  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et le centre est d'indice 2 dans  $G$ . Cela prouve, non seulement que  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  a les propriétés de finitude du lemme III.36 et du cor. III.37, mais aussi que  $(\Pi^*)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  a les mêmes propriétés.

**Proposition III.39.** — Soit  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$ . Si  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$ , le  $\mathcal{O}_L$ -module  $((L/\mathcal{O}_L) \otimes \Pi)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est de type fini, et donc inclus dans la  $p^n$ -torsion de  $(L/\mathcal{O}_L) \otimes \Pi$  si  $n$  est assez grand.

*Démonstration.* — Notons  $H$  le groupe  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et  $\Pi_n$  la  $p^n$ -torsion de  $(L/\mathcal{O}_L) \otimes \Pi$ . Alors  $\Pi_n \cong \Pi/p^n\Pi$  est un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  et donc  $\Pi_n^H$  est de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  (lemme III.36). Il s'agit de prouver qu'il existe  $n_0 \in \mathbf{N}$  tel que  $((L/\mathcal{O}_L) \otimes \Pi)^H = \Pi_{n_0}^H$ . Dans le cas contraire, il existe une partie infinie  $I$  de  $\mathbf{N}$  et, pour tout  $n \in I$ , un vecteur  $v_n \in \Pi_n^H$  n'appartenant pas à  $\Pi_{n-1}$ . On peut donc trouver  $x_n \in \Pi - p\Pi$  tel que  $v_n = p^{-n}x_n \pmod{\Pi}$  et  $gx_n - x_n \in p^n\Pi$  pour tout  $g \in H$ . Pour  $n \in I \cap ]j, \infty]$  on a  $x_n \pmod{p^j} \in \Pi_j^H$ , qui est un ensemble fini (lemme III.36). Par extraction diagonale, on obtient ainsi l'existence d'une sous-suite  $(y_n)_n$  de  $(x_n)_{n \in I}$  qui converge  $p$ -adiquement vers un  $\alpha \in \Pi$ . En passant à la limite dans la congruence  $gx_n - x_n \in p^n\Pi$ , on obtient  $\alpha \in \Pi^H = 0$ . Mais cela contredit le fait que  $y_n \notin p\Pi$  pour tout  $n$ , ce qui permet de conclure.

**Lemme III.40.** — Soit  $M$  un  $\mathcal{O}_L$ -module tué par une puissance de  $p$  et muni d'une action  $\mathcal{O}_L$ -linéaire de  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Alors  $M/M^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  n'a pas de  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -invariants non triviaux.

*Démonstration.* — Il faut montrer que si  $x \in M$  et  $(g-1)(h-1)x = 0$  pour tous  $g, h \in \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , alors  $(g-1)x = 0$  pour tout  $g \in \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Pour  $h = g^n$ , on obtient  $g^{n+1}(x) - g^n(x) = g(x) - x$ , et donc  $g^n(x) = n(g(x) - x) + x$  pour tous  $g \in \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et  $n \geq 0$ . Par hypothèse il existe  $n$  qui tue  $M$ . On a alors  $g^n(x) = x$  pour tout  $g \in \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . On conclut en utilisant le fait que  $g \rightarrow g^n$  est bijective sur les sous-groupes unipotents de  $G$ , sous-groupes qui engendrent  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .

**Corollaire III.41.** — Si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ , alors  $\Pi/\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  n'a pas de  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ -invariants non triviaux.

*Démonstration.* — C'est une conséquence formelle du lemme III.40.

**Lemme III.42.** — (i) Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(G) \cup \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(G)$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini, alors  $\Pi = \Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ .

(ii) Si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  est de dimension finie sur  $L$ , alors  $\Pi = \Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ .

*Démonstration.* — Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(G)$ , cela découle de [10, lemme III.1.5]. Les autres cas s'en déduisent.

**Proposition III.43.** — Si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$  (resp.  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ ), alors

$$\Pi_{\delta}(D)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = (D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) / (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$$

et c'est la plus grande sous-représentation de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  (resp. de dimension finie sur  $L$ ) de  $\Pi_{\delta}(D)$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}} \cup \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ . D'après la prop. III.17,  $X := (D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) / (D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  est un sous- $\mathcal{O}_L[G]$ -module de  $\Pi_{\delta}(D)$ , et il est de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  d'après la rem. III.8. On déduit du lemme III.42 que  $X \subset \Pi_{\delta}(D)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ .

Pour montrer l'inclusion inverse, soit  $Y$  le sous- $\mathcal{O}_L$ -module des  $z \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dont l'image dans  $\Pi_{\delta}(D)$  est invariante par  $\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Si  $z \in Y$ , alors  $((\frac{1}{0} \frac{1}{1}) - 1)x \in D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , pour  $x \in \{z, wz\}$ , et en appliquant  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$  on obtient  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz) \in \frac{1}{T} D^{\natural}$  car  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(((\frac{1}{0} \frac{1}{1}) - 1)x) = T \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}x$ . Donc  $Y$  est compact. Comme  $Y$  est stable par  $G$ , on obtient  $Y \subset D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  d'après le (ii) de la prop. III.17, ce qui permet de conclure.

**III.10. Reconstruction de  $\Pi$ .** — Le but de ce § est d'expliquer comment reconstruire  $\Pi$  à partir de  $D(\Pi)$  (éventuellement à des morceaux près de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  ou  $L$ ).

On reprend les notations du § III.2. Soit  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)$  et soit  $W$  comme dans loc.cit. La restriction à  $P^+ \cdot W$  induit une injection de  $D_W^+(\Pi)$  dans  $D_W^{\natural}(\Pi)$ , dont l'image est d'indice fini dans  $D_W^{\natural}(\Pi)$  (cf. [10, lemme IV.1.4]). On a donc un isomorphisme de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -modules  $D(\Pi) \simeq \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[[T]]} D_W^{\natural}(\Pi)$ , ce qui permet de définir une application  $\beta_{\mathbf{Z}_p} : \Pi^* \rightarrow D(\Pi)$ , composée des

$$\Pi^* \rightarrow D_W^{\natural}(\Pi) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes_{\mathcal{O}_L[[T]]} D_W^{\natural}(\Pi) \simeq D(\Pi),$$

la première flèche étant la restriction à  $P^+ \cdot W$ , et la deuxième  $x \mapsto 1 \otimes x$ . On définit

$$\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \rightarrow D(\Pi) \oplus D(\Pi), \quad \beta_{\mathbf{P}^1}(x) = (\beta_{\mathbf{Z}_p}(x), \beta_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot x)).$$

Comme leurs noms l'indiquent,  $\beta_{\mathbf{Z}_p}$  et  $\beta_{\mathbf{P}^1}$  ne dépendent pas du choix de  $W$  et sont fonctorielles par fonctorialité de  $\Pi \mapsto D(\Pi)$ .

Soient maintenant  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$  et  $D = D(\Pi)$ . On note  $\Pi_n$  le sous-module de  $p^n$ -torsion de  $(L/\mathcal{O}_L) \otimes \Pi$  et on pose  $D_n = D(\Pi_n) \simeq D/p^n$ . Alors  $\Pi^* = \varprojlim \Pi_n^*$  et  $D = \varprojlim D_n$ . Les applications  $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi_n^* \rightarrow D_n \oplus D_n$  sont compatibles, d'où une application continue  $\beta_{\mathbf{P}^1} : \Pi^* \rightarrow D \oplus D$ . Le cas  $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$  s'en déduit en prenant un réseau appartenant à  $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$ .

- Proposition III.44.** — Soit  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(\delta) \cup \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta) \cup \text{Rep}_L(\delta)$  et soit  $D = D(\Pi)$ .
- (i)  $(D, \delta^{-1})$  est une paire  $G$ -compatible.
  - (ii)  $\beta_{\mathbf{P}^1}$  est un morphisme  $G$ -équivariant  $\Pi^* \rightarrow D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , de noyau  $(\Pi^*)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ .
  - (iii)  $\beta_{\mathbf{P}^1}$  envoie l'orthogonal de  $\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  dans  $D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

*Démonstration.* — Le cas  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(\delta)$  est le contenu du th. IV.4.7 de [10]. Le cas  $\Pi \in \text{Rep}_L(\delta)$  se déduit du cas  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$ . Supposons donc que  $\Pi \in \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$  et considérons les objets  $D_n, \Pi_n$  introduits ci-dessus de sorte que  $D \simeq \varprojlim D_n$  et  $\Pi^* \simeq \varprojlim \Pi_n^*$ . Puisque chacune des paires  $(D_n, \delta^{-1})$  est  $G$ -compatible, le module  $(D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} \simeq \varprojlim (D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)$  est stable par  $G$ , donc  $(D, \delta^{-1})$  est  $G$ -compatible. Un argument identique démontre le (ii) à partir du cas de torsion.

Passons à la preuve du (iii). Soit  $H = \text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)$ . Si  $\tilde{\Pi} = \Pi/\Pi^H$ , on a  $D(\tilde{\Pi}) \simeq D(\Pi)$  (puisque  $\Pi^H$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini d'après le lemme III.42, donc tué par le foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$ ) et  $\tilde{\Pi}^H = 0$  (lemme III.41). De plus,  $\tilde{\Pi}^*$  est l'orthogonal de  $\Pi^H$ , et on est ramné à prouver que  $\beta_{\mathbf{P}^1}(\tilde{\Pi}^*) \subset D(\tilde{\Pi})^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Autrement dit, on peut supposer que  $\Pi^H = 0$ .

Notons  $Z_n$  l'orthogonal de  $\Pi_n^H$  dans  $\Pi_n^*$ , de telle sorte que la suite exacte

$$0 \rightarrow \Pi_n^H \rightarrow \Pi_n \rightarrow \Pi_n/\Pi_n^H \rightarrow 0$$

nous donne une exacte de  $\mathcal{O}_L$ -modules profinis  $0 \rightarrow Z_n \rightarrow \Pi_n^* \rightarrow (\Pi_n^H)^* \rightarrow 0$ . En passant à la limite projective, on obtient

$$0 \rightarrow \varprojlim Z_n \rightarrow \Pi^* \rightarrow (\varinjlim \Pi_n^H)^* \rightarrow 0.$$

La prop. III.39 montre qu'il existe  $N$  tel que  $p^N$  tue  $(\varinjlim \Pi_n^H)^*$ ; on en déduit que donc  $p^N \Pi^* \subset \varprojlim Z_n$ . Comme  $\beta_{\mathbf{P}^1}(Z_n) \subset D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  d'après le cas de torsion, on obtient

$$\beta_{\mathbf{P}^1}(p^N \Pi^*) \subset \varprojlim (D_n^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) = (D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$$

et donc  $\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi^*) \subset D^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , ce qui permet de conclure.

**Théorème III.45.** — Si  $\Pi \in \text{Rep}_{\text{tors}}(\delta) \cup \text{Rep}_{\mathcal{O}_L}(\delta)$  (resp.  $\text{Rep}_L(\delta)$ ), la transposée  $\beta_{\mathbf{P}^1}^*$  de  $\beta_{\mathbf{P}^1}$  induit un morphisme  $G$ -équivariant

$$\beta_{\mathbf{P}^1}^* : \Pi_\delta(\check{D}(\Pi)) \rightarrow \Pi/\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)},$$

dont les noyau et conoyau sont de type fini sur  $\mathcal{O}_L$  (resp. de dimension finie sur  $L$ ). Plus précisément,  $\text{Coker}(\beta_{\mathbf{P}^1}^*)$  est un quotient de  $((\Pi^*)^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)})^*$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $\Pi$  est une  $\mathcal{O}_L$ -représentation. Soit  $\tilde{\Pi} = \Pi/\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ . La prop. III.44 montre que  $\beta_{\mathbf{P}^1}(\tilde{\Pi}^*) \subset D(\tilde{\Pi})^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 = \Pi_\delta(\check{D}(\Pi))^*$

(la dernière égalité suit du cor. III.22). Puisque le noyau de  $\beta_{\mathbf{P}^1}$  est un sous- $\mathcal{O}_L$ -module de  $(\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ , le conoyau de  $\beta_{\mathbf{P}^1}^*$  est un quotient de  $((\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)})^*$ , qui est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini (rem. III.38).

Pour conclure, il nous reste à prouver que  $\mathrm{Coker}(\beta_{\mathbf{P}^1})$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini. Comme  $\tilde{\Pi}^*$  est compact,  $M = \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}(\beta_{\mathbf{P}^1}(\tilde{\Pi}^*))$  est un sous- $P$ -module compact de  $D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$ . De plus,  $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(M)$  engendre  $D(\Pi)$  (car  $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\beta_{\mathbf{P}^1}(\Pi_n^*)) = \beta_{\mathbf{Z}_p}(\Pi_n^*)$  engendre  $D(\Pi_n)$  par construction même) donc  $M = D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{Q}_p$  (cf. (i) de la prop. III.7). On en déduit (rem. III.6) que  $D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset \beta_{\mathbf{P}^1}(\tilde{\Pi}^*) + (0, D(\Pi)^{\mathrm{nr}})$ , et donc  $\mathrm{Coker}(\beta_{\mathbf{P}^1})$  est un quotient de  $(0, D(\Pi)^{\mathrm{nr}})$  ce qui permet de conclure puisque  $D(\Pi)^{\mathrm{nr}}$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini.

**Corollaire III.46.** — *Tout objet de  $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}(G)$  ou de  $\mathrm{Rep}_L(G)$  est de longueur finie comme  $B$ -module (topologique).*

*Démonstration.* — C'est une conséquence immédiate du th. III.45 et de la prop. III.28.

**Corollaire III.47.** — *Soit  $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$  supersingulière, de caractère central  $\delta$ . Alors  $D(\Pi)$  est absolument irréductible de dimension  $\geq 2$  et on a des isomorphismes topologiques de  $G$ -modules*

$$\Pi^* \simeq D(\Pi)^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1, \quad \Pi \simeq \Pi_\delta(\check{D}(\Pi)).$$

*Démonstration.* — Comme  $\Pi$  est irréductible de dimension infinie, on a  $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$  et  $(\Pi^*)^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)} = 0$ . Le th. III.45 fournit une suite exacte  $0 \rightarrow K \rightarrow \Pi_\delta(\check{D}(\Pi)) \rightarrow \Pi \rightarrow 0$ , avec  $\dim_L(K) < \infty$ .

L'irréductibilité de  $D(\Pi)$  est une conséquence du (i) de la prop. III.33.

Si  $\dim_{\mathcal{E}}(D(\Pi)) = 1$ , il découle du th. III.45 et de la prop. III.14 que  $\Pi$  est ordinaire, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc  $\dim_{\mathcal{E}} D(\Pi) \geq 2$  et, puisque  $D(\Pi)$  est irréductible, on a  $\check{D}(\Pi)^\natural = \check{D}(\Pi)^\natural$ . La prop. III.43 permet de conclure que  $K = 0$ , et donc  $\Pi \simeq \Pi_\delta(\check{D}(\Pi))$ . On conclut en utilisant le cor. III.22.

**Remarque III.48.** — On déduit du cor. III.47 que si  $\Pi_1, \Pi_2$  sont supersingulières, de même caractère central et si  $D(\Pi_1) \simeq D(\Pi_2)$ , alors  $\Pi_1 \simeq \Pi_2$ . Cette propriété d'injectivité du foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  est démontrée par voie très détournée dans [25] (voir la preuve du th. 10.4 de loc.cit.), mais l'approche de loc.cit. fournit plus d'informations. On y prouve que si  $p \geq 5$  et si  $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(\delta)$  est supersingulière, alors  $D(\Pi)$  est de dimension 2 sur  $\mathcal{E}$  et  $\delta = \chi^{-1} \det \check{D}(\Pi)$ . En particulier, l'image par le foncteur  $\Pi \mapsto D(\Pi)$  suffit à retrouver le caractère central, ce qui est assez surprenant car le  $(\varphi, \Gamma)$ -module attaché à un  $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$  n'utilise que la restriction au mirabolique. Ce résultat est étendu à  $p$  quelconque dans [13].

**III.11. Reconstruction de  $D$ .** — Le but de ce paragraphe est de démontrer que l'on peut récupérer  $D$  à partir de  $\Pi_\delta(D)$  quand  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible. On note  $K = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  le sous-groupe compact maximal de  $G$  et  $Z$  son centre.

**Théorème III.49.** — Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible, avec  $D$  dans une des catégories  $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ ,  $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$  ou  $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ . Alors on a un isomorphisme canonique de  $(\varphi, \Gamma)$ -modules  $D(\Pi_\delta(D)) \simeq \check{D}$ .

*Démonstration.* — Le cas  $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$  se déduit du cas  $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$  en tensorisant par  $L$ . Supposons que  $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$  et posons  $D_n = D/p^n \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ . On déduit de la prop. III.31 que l'application naturelle  $D \rightarrow D_n$  induit un isomorphisme  $D(\Pi_\delta(D))/p^n \Pi_\delta(D) = D(\Pi_\delta(D_n))$  pour tout  $n$ , ce qui montre qu'il suffit de traiter le cas  $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ , ce que l'on supposera dans la suite.

Soit  $W$  l'image de  $\tilde{W} = \sum_{g \in K} g \cdot D^\sharp \subset D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $\Pi_\delta(D)$ .

**Lemme III.50.** —  $W$  est un sous- $KZ$ -module de  $\Pi_\delta(D)$ , de longueur finie comme  $\mathcal{O}_L$ -module et  $W$  engendre  $\Pi_\delta(D)$  comme  $\mathcal{O}_L[G]$ -module.

*Démonstration.* — Il est clair que  $W$  est stable par  $KZ$ . Soient  $z_1, \dots, z_d \in D^\sharp$  tels que  $D^\sharp = \cup_{i=1}^d (D^+ + z_i)$ . Puisque  $D^+ \subset D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  et  $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ , on a  $gD^+ \subset D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  pour tout  $g \in G$ . Si  $v_i$  est l'image de  $z_i$  dans  $\Pi_\delta(D)$ , on conclut que  $W$  est le sous- $\mathcal{O}_L[K]$ -module de  $\Pi_\delta(D)$  engendré par  $v_1, \dots, v_d$ . Comme  $\Pi_\delta(D)$  est lisse, le  $\mathcal{O}_L$ -module  $W$  est de longueur finie.

Montrons enfin que  $W$  engendre  $\Pi_\delta(D)$  comme  $\mathcal{O}_L[G]$ -module. Il suffit de vérifier que  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \sum_{g \in G} g \cdot D^\sharp$  et comme  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D + w \cdot D$ , il suffit de prouver l'inclusion  $D \subset \sum_{g \in G} g \cdot D^\sharp$ . Or, si  $z \in D$ , alors  $z_{n,i} := \psi^n((1+T)^{-i}z) \in D^\sharp$  pour tout  $n$  assez grand, uniformément en  $i \in \mathbf{Z}_p$ , et

$$z = \sum_{i=0}^{p^n-1} (1+T)^i \varphi^n(z_{n,i}) = \sum_{i=0}^{p^n-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_{n,i},$$

ce qui permet de conclure.

Rappelons que  $D_W^+$  est l'orthogonal de  $\sum_{g \in P-P^+} g \cdot W$  dans  $\Pi_\delta(D)^* = \check{D}^\sharp \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . L'isomorphisme  $\mathcal{O}_\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_L[[T]]} D_W^+ \cong \check{D}$  que l'on cherche à établir est une conséquence de la platitude de  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{O}_L[[T]]$  et des deux lemmes suivants.

**Lemme III.51.** — On a  $D_W^+ \subset \check{D}^{++}$ .

*Démonstration.* — Si  $\check{z} \in D_W^+$ , alors  $\{\check{z}, gkD^\sharp\}_{\mathbf{P}^1} = 0$  pour tout  $g \in P-P^+$  et  $k \in K$ , donc  $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(k^{-1}g^{-1}\check{z})$  est orthogonal à  $D^\sharp$ . On en déduit que  $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(gz) \in \check{D}^{++}$  pour tout  $g \in M := \{zkh^{-1}, z \in Z, k \in K, h \in P-P^+\}$ . Si  $n \geq 1$  et  $0 \leq i < p^n$  est

un multiple de  $p$ , alors<sup>(16)</sup>  $\begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w \in M$ . On en déduit que, pour tout  $0 \leq i < p^n$  multiple de  $p$ , l'on a

$$\psi^n((1+T)^{-i} \operatorname{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\check{z})) \in \check{D}^{++}.$$

En faisant  $n \rightarrow \infty$  dans l'égalité

$$\operatorname{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w\check{z}) = \sum_{i < p^n, p|i} (1+T)^i \varphi^n(\psi^n((1+T)^{-i} \operatorname{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w\check{z}))),$$

on obtient  $\operatorname{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w\check{z}) = 0$ , i.e.  $\check{z} \in \check{D}$ . De plus,  $\varphi(\check{z}) = \operatorname{Res}_{\mathbf{Z}_p}(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \check{z}) \in \check{D}^{++}$ , donc  $\check{z} \in \check{D}^{++}$ , ce qui permet de conclure.

**Lemme III.52.** — *Si  $n$  est assez grand,  $\varphi^n(T)\check{D}^{++} \subset D_W^+$ .*

*Démonstration.* — Il s'agit de prouver que  $\varphi^n(T)\check{D}^{++}$  est orthogonal à  $g \cdot \check{W}$ , si  $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  avec  $v_p(a) < 0$  ou  $v_p(b) < 0$ . De manière équivalente, il s'agit de vérifier que  $\check{D}^{++}$  est orthogonal à  $(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot g \cdot \check{W}$ . L'argument est différent suivant que  $v_p(a) \geq 0$  ou  $v_p(a) < 0$ .

• Si  $v_p(a) \geq 0$ , on a  $v_p(b) < 0$ . Or il existe un treillis<sup>(17)</sup>  $M$  de  $D$  tel que  $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \check{W}$  soit inclus dans  $D + wM + (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$  pour tout  $a \in \mathbf{Z}_p^*$ . Choisissons  $n$  assez grand pour que  $(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot wM \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . En écrivant  $(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot g$  sous la forme  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , on voit que

$$(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot g \cdot \check{W} \subset (D \boxtimes_\delta (b + \mathbf{Z}_p)) + (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1),$$

qui est orthogonal à  $\check{D}^{++}$  car  $D \boxtimes_\delta (b + \mathbf{Z}_p)$  l'est puisque  $\mathbf{Z}_p \cap (b + \mathbf{Z}_p) = \emptyset$  et  $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  l'est puisque  $\check{D}^{++}$  est inclus dans  $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

• Si  $v_p(a) < 0$ , on écrit  $(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot g$  sous la forme  $g \cdot (\begin{pmatrix} 1 & -a^{-1}p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1)$ , et on choisit  $n$  assez grand pour que  $(\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot \check{W} \subset (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$  pour tout  $c \in p^n \mathbf{Z}_p$ . Les arguments ci-dessus montrent qu'alors  $\check{D}^{++}$  est orthogonal à  $(\begin{pmatrix} 1 & -p^n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1) \cdot g \cdot \check{W}$ .

Ceci permet de conclure.

**Remarque III.53.** — Le module  $W$  utilisé dans la preuve du th. III.49 est raisonnablement naturel, et garde un sens si  $D$  n'est pas de torsion. Cela semble un bon candidat si on veut écrire  $\Pi_\delta(D)$  comme quotient d'une induite de  $KZ$  à  $G$ .

<sup>(16)</sup>Pour  $i = 0$  cela découle de l'identité  $\begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w = \begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & p^{-n} \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$ , et si  $i \neq 0$ , de l'identité (avec  $N = n - 2v_p(i)$ )

$$\begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot w = \begin{pmatrix} 1/i & 0 \\ 0 & 1/i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -i^2 p^{N-n} & 0 \\ p^N & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^N & 1/i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}.$$

<sup>(17)</sup>Un treillis est un sous- $\mathcal{O}_L[[T]]$ -module compact de  $D$  dont l'image modulo  $p^n$  est ouverte dans  $D/p^n D$  pour tout  $n \in \mathbf{N}$  (il suffit qu'elle le soit dans  $k_L \otimes D$ ).

**III.12. Compatibilité avec la réduction modulo  $p$ .** — Dans ce § nous étendons un résultat de Berger [3] sur la compatibilité entre la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique et celle modulo  $p$ .

Si  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  et si  $D_0$  est un  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de  $D$  stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$ , on note  $\overline{D}_0 = D_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$  et  $\overline{D}^{\text{ss}}$  la semi-simplifiée de  $\overline{D}_0$  (qui ne dépend pas du choix de  $D_0$ ). De même, si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  et si  $\Pi_0$  est un réseau ouvert, borné et  $G$ -invariant, on note  $\overline{\Pi}_0 = \Pi_0 \otimes_{\mathcal{O}_L} k_L$  et  $\overline{\Pi}^{\text{ss}}$  la semi-simplifiée de  $\overline{\Pi}_0$  (qui, à nouveau, ne dépend pas du choix de  $\Pi_0$ ). Rappelons que, par définition de  $\text{Rep}_L(G)$ , la représentation  $\overline{\Pi}^{\text{ss}}$  est de longueur finie. Remarquons aussi que, si  $(D, \delta)$  est  $G$ -compatible, il en est de même de  $(\overline{D}^{\text{ss}}, \delta)$  (cela résulte du (i) de la prop. III.17 et de la prop. III.29).

**Proposition III.54.** — *Soit  $(D, \delta)$  une paire  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et soit  $D_0$  un  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de  $D$  stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$ . Si  $\overline{D}_0$  n'a pas de composante de Jordan-Hölder isomorphe à  $k_{\mathcal{E}}(\eta)$ , avec  $\eta^2 = \delta$  ou  $\eta^2\chi^{-2} = \delta \bmod \mathfrak{m}_L$ , alors*

$$\overline{\Pi}_{\delta}(\overline{D}_0) = \Pi_{\delta}(\overline{D}_0) \quad \text{et} \quad \overline{\Pi}_{\delta}(\overline{D})^{\text{ss}} = \Pi_{\delta}(\overline{D}^{\text{ss}}).$$

*Démonstration.* —  $(D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) / (D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$  est un  $G$ -module de longueur finie sur  $\mathcal{O}_L$  dont les composantes de Jordan-Hölder sont parmi celles de  $\overline{D}_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = \overline{D}_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  (le foncteur  $D \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est trivialement exact). L'hypothèse sur les composantes de Jordan-Hölder de  $\overline{D}_0$  implique que  $\overline{D}_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  n'a pas de composante de dimension finie sur  $k_L$  (cf. rem. III.35), et donc que  $(D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)_{\text{ns}} = D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . On en déduit que  $\overline{\Pi}_{\delta}(\overline{D}_0) = \Pi_{\delta}(\overline{D}_0)$ . L'isomorphisme  $\overline{\Pi}_{\delta}(\overline{D})^{\text{ss}} = \Pi_{\delta}(\overline{D}^{\text{ss}})$  est, lui-aussi, une conséquence de la rem. III.35.

Sans l'hypothèse sur les composantes de Jordan-Hölder de la prop. III.54, la situation est plus problématique mais on a quand même le résultat suivant.

**Proposition III.55.** — *Si  $(D, \delta)$  est une paire  $G$ -compatible, avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et si  $\check{D} \cong D \otimes \delta^{-1}$ , alors  $\overline{\Pi}_{\delta}(\check{D})^{\text{ss}} = \Pi_{\delta}(\overline{D}^{\text{ss}})$ .*

*Démonstration.* — Nous allons constamment utiliser le corollaire III.22 dans la suite. Soit  $D_0$  un réseau stable dans  $D$  et soit  $\Pi_0 = \Pi_{\delta}(D_0)$ . Alors  $\Pi_0$  est un réseau ouvert,  $G$ -invariant, et dans  $\Pi = \Pi_{\delta}(D)$ . L'hypothèse d'autodualité de  $D$  fournit un isomorphisme  $\check{D}_0 \simeq D_0 \otimes \delta^{-1}$ , donc

$$\Pi_{\delta^{-1}}(\check{D}_0) \simeq \Pi_{\delta^{-1}}(D_0 \otimes \delta^{-1}) \simeq \Pi_0 \otimes \delta^{-1},$$

le dernier isomorphisme étant une conséquence de la proposition III.13. On obtient donc une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \Pi_0^* \otimes \delta \rightarrow D_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi_0 \rightarrow 0.$$

En réduisant modulo  $\mathfrak{m}_L$ , on obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \overline{\Pi}_0^\vee \otimes \delta \rightarrow \overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \overline{\Pi}_0 \rightarrow 0.$$

Soit  $\pi = \Pi_\delta(\overline{D}_0)$ . Les mêmes arguments que ci-dessus fournissent une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow \pi^\vee \otimes \delta \rightarrow \overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \pi \rightarrow 0.$$

En utilisant le fait que les composantes de Jordan-Hölder de  $\overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , de dimension finie sur  $k_L$ , sont invariantes par  $W \mapsto W^\vee \otimes \delta$ , on en déduit qu'il y en a le même nombre de chaque dans  $\pi$  et dans  $\overline{\Pi}_0$ , à savoir la moitié du nombre de ces composantes dans  $\overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  car  $\pi$  et  $\pi^\vee \otimes \delta$  en contiennent le même nombre, ainsi que  $\overline{\Pi}_0$  et  $\overline{\Pi}_0^\vee \otimes \delta$ . Comme les composantes de Jordan-Hölder de dimension infinie d'un dual d'un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  sont compactes alors que celles d'un objet de  $\text{Rep}_{\text{tors}}(G)$  sont discrètes, on en déduit les égalités

$$\overline{\Pi}^{\text{ss}} = \overline{\Pi}_0^{\text{ss}} = \pi^{\text{ss}}.$$

Il nous reste donc à prouver que  $\pi^{\text{ss}} = \Pi_\delta(\overline{D}^{\text{ss}})$ . Comme ci-dessus, cela revient à comprendre comment les composantes de dimension finie de  $\overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  se répartissent (notons que  $(\overline{D}_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)^{\text{ss}} = \overline{D}^{\text{ss}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  par exactitude de  $D \mapsto D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ ). Or l'hypothèse d'auto-dualité implique, comme ci-dessus, que  $\pi^{\text{ss}}$  et  $\Pi_\delta(\overline{D}^{\text{ss}})$  en contiennent le même nombre de chaque, ce qui permet de conclure.

**Remarque III.56.** — Les hypothèses de la prop. III.55 sont satisfaites si  $D$  est de rang 2 et si  $\delta = \chi^{-1} \det D$  et, quitte à étendre les scalaires de  $L$  à son extension quadratique non ramifiée, il y a deux possibilités :

- $\overline{D}^{\text{ss}}$  est irréductible et  $\overline{\Pi}_\delta(D)^{\text{ss}}$  est supersingulière ;
- $\overline{D}^{\text{ss}} = k_{\mathcal{E}}(\delta_1) \oplus k_{\mathcal{E}}(\delta_2)$  et

$$\overline{\Pi}_\delta(D)^{\text{ss}} = (\text{Ind}_B^G(\delta_1 \otimes \chi^{-1}\delta_2))^{\text{ss}} \oplus (\text{Ind}_B^G(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1))^{\text{ss}}.$$

Dans le premier cas  $\overline{\Pi}_\delta(D)^{\text{ss}}$  est irréductible, dans le second elle est de longueur 2, sauf si  $\delta_1\delta_2^{-1} = \chi^{\pm 1}$  où elle est de longueur 3 si  $p \geq 5$ , et de longueur 4 si  $p = 2, 3$  (car alors  $\chi = \chi^{-1}$  modulo  $p$ ).

#### IV. Représentations localement analytiques

Dans ce chapitre, on revisite les travaux de Schneider et Teitelbaum [28] sur les représentations localement analytiques en étudiant de plus près la filtration naturelle par rayon d'analyticité (on fera attention que cette notion est légèrement différente de celle à laquelle on penserait naturellement (cf. rem. IV.15)). On donne aussi (th. IV.6)

une description, par dualité, des vecteurs localement analytiques d'une représentation de Banach.

**IV.1. Groupes uniformes.** — On renvoie à [17] pour les preuves des résultats énoncés ci-dessous. Posons  $\kappa = 1$  si  $p > 2$  et  $\kappa = 2$  sinon. Dans ce chapitre,  $H$  est un pro- $p$ -groupe uniforme, i.e. un pro- $p$ -groupe topologiquement de type fini, sans  $p$ -torsion et tel que  $[H, H] \subset H^{p^\kappa}$ .

Si  $i \geq 0$ , soit  $H_i = \{g^{p^i} | g \in H\} = H^{p^i}$ . Alors  $H_i$  est un sous-groupe ouvert distingué de  $H$ , et  $(H_i)_{i \geq 0}$  est un système fondamental de voisinages ouverts de 1. En posant  $\omega(1) = \infty$  et  $\omega(g) = i$  si  $g \in H_{i-\kappa} \setminus H_{i-\kappa+1}$ , on obtient une  $p$ -valuation (au sens de Lazard) satisfaisant l'hypothèse HYP de [28], ce qui nous permet d'utiliser directement les résultats de loc.cit. Si  $h_1, h_2, \dots, h_d$  est un système minimal de générateurs topologiques de  $H$ , alors  $\omega(h_i) = \kappa$  pour tout  $i$ , et l'application  $\mathbf{Z}_p^d \rightarrow H$  définie par  $(x_1, x_2, \dots, x_d) \mapsto h_1^{x_1} h_2^{x_2} \cdots h_d^{x_d}$  est un homéomorphisme. De plus, on a

$$\omega(h_1^{x_1} h_2^{x_2} \cdots h_d^{x_d}) = \kappa + \min_{1 \leq i \leq d} v_p(x_i)$$

pour tous  $x_1, \dots, x_d \in \mathbf{Z}_p$ .

On utilise les notations standard pour les  $d$ -uplets :  $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$ ,  $\binom{\alpha}{\beta} = \prod_i \binom{\alpha_i}{\beta_i}$ ,  $h^\alpha = \prod_i h_i^{\alpha_i}$ , etc. On écrit  $\alpha \leq \beta$  si  $\alpha_i \leq \beta_i$  pour tout  $i$ . Si  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbf{N}^d$ , on note

$$b^\alpha = (h_1 - 1)^{\alpha_1} (h_2 - 1)^{\alpha_2} \cdots (h_d - 1)^{\alpha_d} \in \mathbf{Z}_p[H].$$

**IV.2. Coefficients de Mahler.** — L'espace  $\mathcal{C}(H)$  des fonctions continues sur  $H$ , à valeurs dans  $L$ , est une  $L$ -représentation de Banach de  $H$ , si on le munit de la norme sup et de l'action de  $H$  définie par  $(g \cdot \phi)(x) = \phi(xg)$ . Si  $\phi \in \mathcal{C}(H)$ , on note

$$a_\alpha(\phi) = (b^\alpha \phi)(1) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-\beta} \binom{\alpha}{\beta} \phi(h^\beta)$$

ses coefficients de Mahler, relativement au choix des coordonnées  $h_1, \dots, h_d$  sur  $H$ . Soit  $\phi_\alpha \in \mathcal{C}(H)$  l'application définie par  $\phi_\alpha(h^x) = \binom{x}{\alpha}$  pour  $x \in \mathbf{Z}_p^d$ . Un théorème classique de Mahler montre que  $(\phi_\alpha)_{\alpha \in \mathbf{N}^d}$  est une base orthonormale de  $\mathcal{C}(H)$ , et pour tout  $\phi \in \mathcal{C}(H)$

$$\phi = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} a_\alpha(\phi) \cdot \phi_\alpha.$$

**Définition IV.1.** — Pour tout  $h \in \mathbf{N}^*$  on note

$$\text{LA}^{(h)}(H) = \{\phi \in \mathcal{C}(H), \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} (v_p(a_\alpha(\phi)) - r_h |\alpha|) = \infty\}.$$

C'est un banach pour la valuation  $v^{(h)}$  définie par

$$v^{(h)}(\phi) = \inf_{\alpha} (v_p(a_{\alpha}(\phi)) - r_h |\alpha|).$$

D'après le théorème d'Amice [1], l'espace  $\mathcal{C}^{\text{an}}(H)$  des fonctions localement analytiques sur  $H$  est la limite inductive des espaces  $\text{LA}^{(h)}(H)$ .

**IV.3. Complétions de l'algèbre des mesures de  $H$ .** — Le but de ce paragraphe est de rappeler un certain nombre de constructions et résultats de [28], et d'établir quelques estimées techniques dont on aura besoin plus loin.

Soit  $\Lambda(H)$  le dual faible de  $\mathcal{C}(H)$ ; on a aussi  $\Lambda(H) = L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varinjlim \mathcal{O}_L[H/H^p^n])$ . C'est une algèbre (pour le produit de convolution) topologique localement compacte, et le § IV.2 montre que tout élément de  $\Lambda(H)$  s'écrit de manière unique  $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_{\alpha} b^{\alpha}$ , avec  $(c_{\alpha})_{\alpha}$  une suite bornée dans  $L$ . La valeur de  $\lambda$  en  $\phi \in \mathcal{C}(H)$  est donnée par

$$\langle \lambda, \phi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_{\alpha} a_{\alpha}(\phi).$$

On note  $\mathcal{D}_{1/p}(H)$  le complété de  $\Lambda(H)$  pour la valuation d'algèbre (i.e.  $v_{1/p}(\lambda\mu) \geq v_{1/p}(\lambda) + v_{1/p}(\mu)$ ) :

$$v_{1/p}(\sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\alpha}) = \inf_{\alpha} (v_p(c_{\alpha}) + \kappa |\alpha|)$$

et, si  $h \in \mathbf{N}^*$ , on définit<sup>(18)</sup>

$$\mathcal{D}_h(H) = \left\{ \sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\alpha} \in \mathcal{D}_{1/p}(H), \inf_{\alpha} (v_p(c_{\alpha}) + r_h |\alpha|) > -\infty \right\},$$

que l'on munit d'une valuation d'algèbre  $v^{(h)}$  en posant

$$v^{(h)}(\sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\alpha}) = \inf_{\alpha} (v_p(c_{\alpha}) + r_h |\alpha|).$$

Enfin, on note  $\mathcal{D}(H)$  le dual topologique (fort) de  $\mathcal{C}^{\text{an}}(H)$ . C'est aussi la limite projective des  $\mathcal{D}_h(H)$ . L'accouplement

$$\langle \lambda, \phi \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_{\alpha} a_{\alpha}(\phi)$$

identifie  $\mathcal{D}_h(H)$  au dual topologique de  $\text{LA}^{(h)}(H)$ , ce qui permet de définir une topologie faible sur  $\mathcal{D}_h(H)$ . Dans la suite on munit<sup>(19)</sup>  $\mathcal{D}_h(H)$  de cette topologie faible. La différence avec la topologie forte (qui, elle, est induite par la valuation  $v^{(h)}$ ) est que

<sup>(18)</sup>Rappelons que  $r_h = \frac{1}{p^{h-1}(p-1)}$ .

<sup>(19)</sup>L'algèbre  $\mathcal{D}_h(H)$  peut aussi être munie d'une topologie d'algèbre de Banach en utilisant la valuation  $v^{(h)}$ . C'est d'ailleurs ce qui est fait dans [28]. Cette topologie est trop forte pour les applications que nous avons en vue.

$p^{-r_h|\alpha|}b^\alpha$  tend vers 0 pour la topologie faible dans  $\mathcal{D}_h(H)$ , mais pas pour la topologie forte.

**Proposition IV.2.** — *La multiplication dans  $\Lambda(H)$  s'étend par continuité à  $\mathcal{D}_h(H)$  et l'inclusion naturelle  $\Lambda(H) \rightarrow \mathcal{D}_h(H)$  est plate. De plus, l'inclusion  $\Lambda(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)$  est fidèlement plate.*

*Démonstration.* — Tout ceci est démontré dans le chap. 4 de [28]. Pour faciliter la comparaison, notons que l'on utilise comme  $p$ -valuation celle introduite dans le § IV.1, et que si l'on pose  $s_h = p^{-r_h\kappa^{-1}} \in ]\frac{1}{p}, 1[ \cap p^{\mathbf{Q}}$ , alors  $p^{-v^{(h)}}$  correspond à  $\|\cdot\|_{s_h}$  de loc.cit, donc  $\mathcal{D}_h(H)$  correspond à  $D_{<s_h}(H, L)$  de loc.cit.

**Lemme IV.3.** — (i) *Soit  $h'_1, \dots, h'_d$  un autre système minimal de générateurs topologiques de  $H$  et soit  $b'^\alpha = (h'_1 - 1)^{\alpha_1} \dots (h'_d - 1)^{\alpha_d}$ . Il existe des  $c_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}_L$  tels que  $b'^\alpha = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta} b^\beta$  et  $v_p(c_{\alpha,\beta}) \geq \max(0, \kappa(|\alpha| - |\beta|))$ .*

(ii) *Pour tout  $x \in H$  il existe des  $c_{\alpha,\beta,x} \in \mathcal{O}_L$  tels que  $xb^\alpha = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta,x} b^\beta$  et  $v_p(c_{\alpha,\beta,x}) \geq \max(0, \kappa(|\alpha| - |\beta|))$ .*

(iii) *Il existe des  $c_{\alpha,\beta} \in \mathcal{O}_L$  tels que*

$$(h_1^p - 1)^{\alpha_1} \dots (h_d^p - 1)^{\alpha_d} = \sum_{\beta} c_{\alpha,\beta} b^\beta$$

et  $v_p(c_{\alpha,\beta}) \geq \max(0, r_1(p|\alpha| - |\beta|))$ .

*Démonstration.* — (i) L'existence des  $c_{\alpha,\beta}$  et le fait qu'ils appartiennent à  $\mathcal{O}_L$  suivent du fait que  $b'^\alpha \in \mathcal{O}_L[H] \subset \mathcal{O}_L[[H]]$ . L'inégalité  $v_p(c_{\alpha,\beta}) \geq \max(0, \kappa(|\alpha| - |\beta|))$  découle du fait que  $v_{1/p}(g-1) \geq \kappa$  pour tout  $g \in H$ . La preuve du (ii) est identique et laissée au lecteur.

(iii) Puisque  $v^{(1)}$  est une valuation d'algèbre sur  $\Lambda(H)$ , on a

$$\inf_{\beta} (v_p(c_{\alpha,\beta}) + r_1|\beta|) \geq \sum_{i=1}^d \alpha_i v^{(1)}(h_i^p - 1).$$

Or

$$v^{(1)}(h_i^p - 1) = v^{(1)}\left(\sum_{k=1}^p \binom{p}{k} (h_i - 1)^k\right) = \inf_{k \leq p} v_p\left(\binom{p}{k}\right) + kr_1 = pr_1,$$

ce qui permet de conclure.

**IV.4. Le foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$ .** — Soit  $\Pi$  une  $L$ -représentation de Banach de  $H$  et soit  $v_\Pi$  une valuation sur  $\Pi$  qui définit sa topologie. Si  $h \geq 1$  on définit

$$\Pi^{(h)} = \{v \in \Pi \mid \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_\Pi(b^\alpha v) - r_h|\alpha| = \infty\},$$

et l'on munit de la valuation  $v^{(h)}$  définie par

$$v^{(h)}(v) = \inf_{\alpha \in \mathbf{N}^d} (v_{\Pi}(b^{\alpha}v) - r_h|\alpha|).$$

Alors  $\Pi^{(h)}$  est un  $L$ -banach, qui ne dépend pas du choix de  $v_{\Pi}$  (la valuation  $v^{(h)}$  en dépend de manière évidente, mais changer  $v_{\Pi}$  remplace  $v^{(h)}$  par une valuation équivalente).

Les  $b^{\alpha}v$  sont les coefficients de Mahler de la fonction  $o_v : H \rightarrow \Pi$  définie par  $o_v(g) = g \cdot v$ , et le théorème d'Amice montre que le sous-espace  $\Pi^{\text{an}}$  des vecteurs localement analytiques est la limite inductive des  $\Pi^{(h)}$ .

**Proposition IV.4.** — *L'espace  $\Pi^{(h)}$  et la valuation  $v^{(h)}$  ne dépendent pas du choix du système minimal de générateurs topologiques  $h_1, \dots, h_d$  de  $H$ , que l'on utilise pour définir  $b^{\alpha}$ .*

*Démonstration.* — Soit  $h'_1, \dots, h'_d$  un autre système minimal de générateurs topologiques et soit  $c_{\alpha, \beta}$  comme dans le lemme IV.3. Soient  $v \in \Pi^{(h)}$ ,  $M \in \mathbf{R}$  et  $N$  tels que  $v_{\Pi}(b^{\alpha}v) - r_h|\alpha| \geq M$  pour tout  $|\beta| \geq N$ . Si  $|\alpha| \geq N$ , alors (en utilisant le lemme IV.3)

$$\inf_{|\beta| < N} (v_{\Pi}(c_{\alpha, \beta}b^{\beta}v) - r_h|\alpha|) \geq \inf_{|\beta| < N} v_{\Pi}(b^{\beta}v) + \kappa(|\alpha| - N) - r_h|\alpha|,$$

quantité qui dépasse  $M$  si  $|\alpha|$  est assez grand, et

$$\inf_{|\beta| \geq N} (v_{\Pi}(c_{\alpha, \beta}b^{\beta}v) - r_h|\alpha|) \geq M + r_h(|\beta| - |\alpha|) + \max(0, \kappa(|\alpha| - |\beta|)) \geq M.$$

Comme  $b^{\alpha}v = \sum_{\beta} c_{\alpha, \beta}b^{\beta}v$ , on déduit des inégalités précédentes que l'on a  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_{\Pi}(b^{\alpha}v) - r_h|\alpha| = \infty$  et (en prenant  $N = 0$  et  $M = v^{(h)}(v)$ )

$$\inf_{\alpha} (v_{\Pi}(b^{\alpha}v) - r_h|\alpha|) \leq \inf_{\alpha} (v_{\Pi}(b^{\alpha}v) - r_h|\alpha|).$$

Le résultat s'en déduit par symétrie.

**Proposition IV.5.** — *On a  $\mathcal{C}(H)^{(h)} = \text{LA}^{(h)}(H)$ .*

*Démonstration.* — Il est immédiat de vérifier que  $\mathcal{C}(H)^{(h)} \subset \text{LA}^{(h)}(H)$ . Réciproquement, supposons que  $\phi \in \text{LA}^{(h)}(H)$ . On veut montrer que

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} \inf_{x \in H} v_p((b^{\alpha}\phi)(x) - r_h|\alpha|) = \infty.$$

Si  $c_{\alpha, \beta, x}$  est comme dans le lemme IV.3, alors

$$(b^{\alpha}\phi)(x) = (xb^{\alpha}\phi)(1) = \sum_{\beta} c_{\alpha, \beta, x}a_{\beta}(\phi).$$

On conclut en utilisant le lemme IV.3, comme dans la preuve de la prop. IV.4.

**Théorème IV.6.** — (i) Si  $v \in \Pi$ , alors  $v \in \Pi^{(h)}$  si et seulement si la fonction  $g \mapsto l(g \cdot v)$  appartient à  $\text{LA}^{(h)}(H)$  pour tout  $l \in \Pi^*$ .

(ii) Si  $l_1, \dots, l_r$  engendrent  $\Pi^*$  comme  $\Lambda(H)$ -module, alors  $v \mapsto \iota(v)$ , où  $\iota(v) \in \text{LA}^{(h)}(H)^r$  est la fonction  $g \mapsto (l_1(g \cdot v), \dots, l_r(g \cdot v))$ , est un plongement fermé de  $\Pi^{(h)}$  dans  $\text{LA}^{(h)}(H)^r$ .

*Démonstration.* — Par définition,  $v \in \Pi^{(h)}$  si et seulement si la suite  $x_\alpha = p^{-r_h|\alpha|} b^\alpha v$  tend vers 0 dans  $\Pi \otimes_L L(p^{r_h})$ . Le lemme (surprenant) IV.7 ci-dessous montre que cela arrive si et seulement si  $p^{-r_h|\alpha|} l(b^\alpha v)$  tend vers 0 pour tout  $l \in \Pi^*$ . On conclut la preuve du (i) en remarquant que  $l(b^\alpha v) = a_\alpha(o_{l,v})$ , où  $o_{l,v} : H \rightarrow L$  est la fonction  $g \mapsto l(gv)$ .

Pour prouver le (ii), notons que  $\Pi$  est admissible (car  $\Pi^*$  est de type fini comme  $\Lambda(H)$ -module). Puisque  $l_1, \dots, l_r$  engendrent  $\Pi^*$  comme  $\Lambda(H)$ -module, l'application transposée

$$\iota : \Pi \rightarrow \mathcal{C}(H)^r, \quad v \mapsto (g \mapsto (l_1(g \cdot v), \dots, l_r(g \cdot v)))$$

est un plongement fermé [27]. Il découle de la prop. IV.5 que  $\iota$  envoie  $\Pi^{(h)}$  dans  $\text{LA}^{(h)}(H)^r$  et il nous reste à montrer que l'application  $\iota$  ainsi obtenue est un plongement fermé. Supposons que les  $v_n \in \Pi^{(h)}$  sont tels que  $\iota(v_n) \rightarrow f$  dans  $\text{LA}^{(h)}(H)^r$ . Alors  $\iota(v_n) \rightarrow f$  dans  $\mathcal{C}(H)^r$ , et donc il existe  $v \in \Pi$  tel que  $f = \iota(v)$ . Ainsi  $\iota(v) = f \in \text{LA}^{(h)}(H)^r$ . Autrement dit, les  $g \mapsto l_i(gv)$  appartiennent à  $\text{LA}^{(h)}(H)$  pour tout  $i$ . Comme  $l_1, \dots, l_r$  engendrent  $\Pi^*$  en tant que  $\Lambda(H)$ -module, et comme  $\text{LA}^{(h)}(H)$  est un  $\Lambda(H)$ -module, il s'ensuit que  $g \mapsto l(gv)$  appartient à  $\text{LA}^{(h)}(H)$  pour tout  $l \in \Pi^*$ . Le (i) permet de conclure que  $v \in \Pi^{(h)}$ .

**Lemme IV.7.** — Dans un espace localement convexe sur un corps sphériquement complet une suite converge vers 0 si et seulement si elle converge faiblement vers 0.

*Démonstration.* — Voir par exemple [26, th. 5.5.2].

**Corollaire IV.8.** —  $\Pi^{(h)}$  est stable sous l'action de  $H$ .

**IV.5. De  $H$  à  $H^p$ .** — Le but de ce § est d'étudier la variation de la filtration par rayon d'analyticité quand on remplace  $H$  par un sous-groupe (prop. IV.11).

**Proposition IV.9.** — Soit  $\phi \in \text{LA}^{(h)}(H^p)$  et soit  $\tilde{\phi} \in \mathcal{C}(H)$  l'extension par 0 de  $\phi$ . Alors  $\tilde{\phi} \in \text{LA}^{(h+1)}(H)$ .

*Démonstration.* — Il s'agit de montrer que  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_p(a_\alpha(\tilde{\phi})) - r_{h+1}|\alpha| = \infty$ . Si  $\beta \in \mathbf{N}^d$ , on a  $h^\beta \in H^p$  si et seulement si  $p$  divise  $\beta$  (i.e.  $p$  divise chaque  $\beta_i$ ). On en

déduit que<sup>(20)</sup>

$$\begin{aligned} a_\alpha(\tilde{\phi}) &= \sum_{p\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-p\beta} \binom{\alpha}{p\beta} \phi(h^{p\beta}) = \sum_{p\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-p\beta} \binom{\alpha}{p\beta} \cdot \sum_{\gamma} a_\gamma(\phi) \binom{\beta}{\gamma} \\ &= \sum_{\gamma} a_\gamma(\phi) \cdot c_{\alpha,\gamma}, \quad \text{avec } c_{\alpha,\gamma} = \sum_{p\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-p\beta} \binom{\alpha}{p\beta} \binom{\beta}{\gamma}. \end{aligned}$$

On conclut comme dans la preuve de la prop. IV.4, en utilisant le lemme ci-dessous :

**Lemme IV.10.** — Si  $c_{\alpha,\gamma} = \sum_{p\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-p\beta} \binom{\alpha}{p\beta} \binom{\beta}{\gamma}$ , alors

$$v_p(c_{\alpha,\gamma}) > \frac{|\alpha|}{p} - d - |\gamma|.$$

*Démonstration.* — Soit  $f_k = \psi(T^k)$  pour  $k \in \mathbf{N}$ . Alors  $f_k \in \mathbf{Z}_p[T]$  et

$$f_k(T^p - 1) = \frac{1}{p} \sum_{\zeta^p=1} (\zeta T - 1)^k = \sum_{pj \leq k} (-1)^{k-pj} \binom{k}{pj} T^{pj}.$$

On en déduit que pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^d$  on a

$$\sum_{p\beta \leq \alpha} (-1)^{\alpha-p\beta} \binom{\alpha}{p\beta} T^\beta = \prod_{i=1}^d f_{\alpha_i}(T_i - 1).$$

En dérivant cette relation  $\gamma$ -fois et en évaluant en 1, on obtient :

$$c_{\alpha,\gamma} = \frac{1}{\gamma!} \frac{d^\gamma}{dT^\gamma} (\psi(T_1^{\alpha_1}) \cdots \psi(T_d^{\alpha_d}))(0) = b_{\alpha_1,\gamma_1} \cdots b_{\alpha_d,\gamma_d},$$

où  $\psi(T^k) = \sum_{i \leq k/p} b_{k,i} T^i$ . Le résultat découle alors du lemme I.8 de [11], qui fournit l'inégalité  $v_p(b_{k,i}) > \frac{k}{p} - 1 - i$ .

**Proposition IV.11.** — Si  $\Pi_1$  est la restriction de  $\Pi$  à  $H^p$ , alors  $\Pi^{(h+1)} = \Pi_1^{(h)}$ .

*Démonstration.* — On note  $h'_i = h_i^p$  et  $b'^\alpha = (h'_1 - 1)^{\alpha_1} \cdots (h'_d - 1)^{\alpha_d}$ . Alors  $h'_1, \dots, h'_d$  forment un système minimal de générateurs topologiques de  $H^p$ . Commençons par montrer l'inclusion  $\Pi^{(h+1)} \subset \Pi_1^{(h)}$ . La prop. IV.4 montre qu'il suffit de prouver que  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_\Pi(b'^\alpha v) - r_h |\alpha| = \infty$  pour tout  $v \in \Pi^{(h+1)}$ . La preuve est identique à celle de la prop. IV.4, en utilisant le lemme IV.3.

Soit maintenant  $v \in \Pi_1^{(h)}$  et soient  $(g_i)_{i \in I}$  tels que  $H = \prod_{i \in I} H^p g_i$ . Soit enfin  $l \in \Pi^*$  et notons  $\phi : H \rightarrow L$  l'application  $g \rightarrow l(gv)$ . Puisque  $H^p$  est distingué dans  $H$  et  $v \in \Pi_1^{(h)}$ , on montre comme dans la preuve du cor. IV.8 que  $(g_i \phi)|_{H^p} \in \text{LA}^{(h)}(H^p)$ . Si  $\phi_i$  est l'extension par zéro de  $(g_i \phi)|_{H^p}$ , la prop. IV.9 montre que  $\phi_i \in \text{LA}^{(h+1)}(H)$ .

<sup>(20)</sup> Attention au fait que les coefficients de Mahler de  $\phi$  sont calculés par rapport à  $(h_1^p, \dots, h_d^p)$ . On a donc  $\phi(h^{p\beta}) = \sum_{\gamma} a_\gamma(\phi) \binom{\beta}{\gamma}$ .

On en déduit que  $\phi = \sum_{i \in I} g_i^{-1} \cdot \phi_i \in \text{LA}^{(h+1)}(H)$ , puisque  $\text{LA}^{(h+1)}(H)$  est stable par  $H$ . Le th. IV.6 permet de conclure que  $v \in \Pi^{(h+1)}$ .

**Remarque IV.12.** — On déduit de la preuve de la prop. IV.11 que, si on décompose  $H$  sous la forme  $H = \coprod_{i \in I} H^p g_i$ , l'application  $\phi \mapsto ((g_i \cdot \phi)|_{H^p})_{i \in I}$  induit un isomorphisme de  $L$ -banach

$$\text{LA}^{(h+1)}(H) \simeq \bigoplus_{i \in I} \text{LA}^{(h)}(H^p, L).$$

**IV.6. Exactitude du foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$ .** — A partir de maintenant, on suppose que  $\Pi$  une représentation de Banach *admissible* de  $H$ . Cela signifie que  $\Pi^*$  est un  $\Lambda(H)$ -module de type fini (et donc de présentation finie, puisque  $\Lambda(H)$  est noethérien). Le choix d'une surjection  $\Lambda(H)^r \rightarrow \Pi^*$  induit un plongement fermé  $\iota : \Pi \rightarrow \mathcal{C}(H, L)^r$ , ainsi qu'une surjection  $\sigma : \mathcal{D}_h(H)^r \rightarrow \mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ . On munit  $\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$  de la topologie quotient, induite par  $\sigma$  (l'espace  $\mathcal{D}_h(H)$  ayant la topologie faible définie dans le § IV.3). La topologie faible de  $\Pi^*$  est alors la topologie quotient induite par la surjection  $\Lambda(H)^r \rightarrow \Pi^*$ .

Si  $v \in \Pi^{(h)}$  et si  $\lambda = \sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\alpha} \in \mathcal{D}_h(H)$ , la série  $\sum_{\alpha} c_{\alpha} b^{\alpha}$  converge dans  $\Pi^{(h)}$ . Cela permet de munir  $\Pi^{(h)}$  (et donc  $(\Pi^{(h)})^*$ ) d'une structure de  $\mathcal{D}_h(H)$ -module. L'application naturelle  $\Pi^* \rightarrow (\Pi^{(h)})^*$  induit une application continue <sup>(21)</sup>  $\mathcal{D}_h(H)$ -linéaire  $\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^* \rightarrow (\Pi^{(h)})^*$ . Par passage à la limite on obtient aussi une application  $\mathcal{D}(H)$ -linéaire  $\mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^* \rightarrow (\Pi^{\text{an}})^*$ .

**Proposition IV.13.** — (i) *L'application  $\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^* \rightarrow (\Pi^{(h)})^*$  est un isomorphisme de  $L$ -espaces vectoriels topologiques.*

(ii) *L'application  $\mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^* \rightarrow (\Pi^{\text{an}})^*$  est un isomorphisme de  $L$ -espaces vectoriels topologiques.*

*Démonstration.* — La preuve est fortement inspirée de la preuve du th. 7.1 de [28] (qui est précisément la partie (ii) de la proposition). Le (ii) se déduit du (i) par passage à la limite, et pour le (i) il suffit de montrer la bijectivité de l'application en question.

Commençons par la surjectivité. Le plongement fermé  $\Pi^{(h)} \rightarrow (\text{LA}^{(h)}(H))^r$  du th. IV.6 se dualise en une surjection  $\mathcal{D}_h(H)^r \rightarrow (\Pi^{(h)})^*$ . Par construction, cette surjection se factorise par la surjection  $\mathcal{D}_h(H)^r \rightarrow \mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ , ce qui permet de conclure.

Pour démontrer l'injectivité, compte tenu du théorème de Hahn-Banach et de la dualité de Schikhof [27], il suffit de prouver la surjectivité de l'application transposée  $\Pi^{(h)} \rightarrow (\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*)^*$ . L'application naturelle  $\Pi^* \rightarrow \mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$  est continue

<sup>(21)</sup>On munit dans la suite  $\Pi^*$  et  $(\Pi^{(h)})^*$  de la topologie faible de dual de Banach.

( $\Pi^*$  est muni de la topologie faible), d'image dense, car  $\Lambda(H) \rightarrow \mathcal{D}_h(H)$  a ces propriétés. Cela montre que si  $F \in (\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*)^*$ , alors il existe un unique  $v \in \Pi$  tel que  $F(1 \otimes l) = l(v)$  pour tout  $l \in \Pi^*$ . La continuité de  $F$  combinée au fait que  $p^{-|\alpha|r_h} b^\alpha$  tend vers 0 dans  $\mathcal{D}_h(H)$  pour la topologie faible montrent que  $p^{-r_h|\alpha|} l(b^\alpha v)$  tend vers 0 pour tout  $l \in \Pi^*$ . On déduit du th. IV.6 que  $v \in \Pi^{(h)}$  et on conclut en utilisant la densité de l'image de  $\Pi^* \rightarrow \mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ .

Pour démontrer le (ii), posons  $M = \mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ . Puisque  $\Pi^*$  est un  $\Lambda(H)$ -module de présentation finie,  $M$  est un  $\mathcal{D}(H)$ -module coadmissible [28], et donc  $M$  est isomorphe à la limite inverse des  $\mathcal{D}_h(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ . Le (ii) se déduit donc de (i) et de l'isomorphisme  $\Pi^{\text{an}} \simeq \varinjlim_h \Pi^{(h)}$  fourni par le théorème d'Amice.

**Corollaire IV.14.** — *Le foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$  est exact de la catégorie des  $L$ -représentations de Banach admissibles de  $H$  dans la catégorie des  $L$ -banach.*

*Démonstration.* — C'est une conséquence directe du théorème de l'image ouverte, de la proposition précédente et de la platitude de  $\mathcal{D}_h(H)$  sur  $\Lambda(H)$  (prop. IV.2).

**Remarque IV.15.** — Il serait plus naturel d'étudier le foncteur  $\Pi \mapsto \Pi_h$ , où  $\Pi_h$  est l'espace des vecteurs  $v \in \Pi$  tels que la fonction  $x \mapsto h^x \cdot v$  soit analytique sur  $x_0 + p^h \mathbf{Z}_p^d$  pour tout  $x_0 \in \mathbf{Z}_p^d$ . La raison pour ne pas prendre ce point de vue est que ce foncteur n'est pas exact, ce qui est désagréable pour les applications. En effet, si  $\text{LA}_h(H) = \mathcal{C}(H)_h$ , le théorème d'Amice [1] montre que  $\phi \in \text{LA}_h(H)$  si et seulement si

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_p(a_\alpha(\phi)) - \sum_{i=1}^d v_p\left(\left[\frac{\alpha_i}{p^h}\right]!\right) = \infty,$$

donc le dual topologique de  $\text{LA}_h(H)$  est l'algèbre à puissances divisées partielles<sup>(22)</sup>. Or cette algèbre n'est pas plate sur  $\Lambda(H)$  si  $d \geq 2$ . On remarquera toutefois que  $\text{LA}_h(H)^*$  est en fait très proche de  $\mathcal{D}_{<h+1}(H)$  puisque  $v_p\left(\left[\frac{n}{p^h}\right]!\right) \sim nr_{h+1}$ , et donc  $\Pi^{(h+1)}$  est très semblable à  $\Pi_h$ .

**IV.7. Cohérence.** — On suppose à partir de maintenant que  $G = \text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$  et on note  $K = \text{GL}_n(\mathbf{Z}_p)$  et  $Z$  le centre de  $G$ . Soit  $H = 1 + p^\kappa \text{M}_n(\mathbf{Z}_p)$ ; c'est un pro- $p$ -groupe uniforme de dimension  $n^2$  (rappelons que  $\kappa = 1$  si  $p > 2$  et  $\kappa = 2$  si  $p = 2$ ). Si  $g \in G$ , on note  $d(g, 1)$  le plus petit entier  $m$  tel que  $H^{p^m} \subset gHg^{-1}$ . Puisque  $KZ$  normalise  $H$  et  $H^{p^m}$ ,  $d(g, 1)$  ne dépend que de  $KZgKZ$ .

**Proposition IV.16.** — *Soit  $\Pi$  une  $L$ -représentation de Banach de  $G$ . Alors  $\Pi^{(h)}$  est stable par  $K$  et  $g \cdot \Pi^{(h)} \subset \Pi^{(h+n)}$  si  $d(g, 1) \leq n$ .*

<sup>(22)</sup> Ses éléments sont de la forme  $\sum_{\alpha \in \mathbf{N}^d} c_\alpha \frac{1}{\left[\frac{\alpha}{p^h}\right]!} b^\alpha$  où  $(c_\alpha)_\alpha$  est une suite bornée de  $L$ .

*Démonstration.* — La première assertion se démontre comme le cor. IV.8, en utilisant le fait que  $H$  est distingué dans  $K$ . La seconde découle de la prop. IV.11.

D'après la décomposition de Cartan, on a  $G = \sqcup_{t \in T^+} KtK$ , où  $T^+$  est l'ensemble des matrices  $\text{diag}(p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_n})$ , avec  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \in \mathbf{Z}$ . Pour tout entier positif  $m$ , on note  $T_m^+$  le sous-ensemble de  $T^+$  formé des matrices  $\text{diag}(p^{a_1}, p^{a_2}, \dots, p^{a_n})$  avec  $a_1 - a_n \leq m$ . Le résultat suivant permet de montrer que  $d(g, 1)$  est la distance entre les sommets représentés par  $g$  et  $1$  dans l'immeuble de Bruhat-Tits de  $\text{PGL}_n$ .

**Lemme IV.17.** — *On a  $d(g, 1) \leq m$  si et seulement si  $g \in KT_m^+K$ . En particulier,  $d(g, 1) = 0$  si et seulement si  $g \in KZ$ .*

*Démonstration.* — Soit  $g = k_1tk_2$ , avec  $k_1, k_2 \in K$  et  $t = \text{diag}(p^{a_1}, \dots, p^{a_n}) \in T^+$ . Puisque  $H$  et  $H^{p^m}$  sont distingués dans  $K$ , on a  $g^{-1}H^{p^m}g \subset H$  si et seulement si  $t^{-1}H^{p^m}t \subset H$ . On conclut en utilisant les égalités  $t(x_{ij})_{i,j}t^{-1} = (p^{a_i - a_j}x_{ij})_{i,j}$  et  $H^{p^m} = 1 + p^{m+\kappa}\text{M}_n(\mathbf{Z}_p)$ .

**Lemme IV.18.** — *On a  $d(g, 1) \leq l + m$  si et seulement si l'on peut écrire  $g = g_1g_2$ , avec  $d(g_1, 1) \leq l$  et  $d(g_2, 1) \leq m$ .*

*Démonstration.* — Si  $H^{p^m} \subset g_1Hg_1^{-1}$  et  $H^{p^n} \subset g_2Hg_2^{-1}$ , alors  $H^{p^{m+n}} \subset g_1g_2H(g_1g_2)^{-1}$ , donc  $d(g_1g_2, 1) \leq d(g_1, 1) + d(g_2, 1)$  pour tous  $g_1, g_2 \in G$ . Dans l'autre sens, il suffit d'utiliser le lemme IV.17 et l'égalité  $T_l^+ \cdot T_m^+ = T_{l+m}^+$ .

Si  $W$  est un sous- $L[KZ]$ -module d'un  $L[G]$ -module  $\Pi$  et si  $h \in \mathbf{N}$ , on pose

$$W^{[h]} = \sum_{d(g,1) \leq h} g \cdot W;$$

c'est un sous- $L[KZ]$ -module de  $\Pi$ . Notons que  $g \cdot W$  et  $d(g, 1)$  ne dépendent que de l'image de  $g$  dans  $S := G/KZ$ .

**Lemme IV.19.** — *L'ensemble  $\{s \in S, d(s, 1) \leq h\}$  est fini.*

*Démonstration.* — Soit  $T_{h,0}^+$  l'ensemble des  $t = \text{diag}(p^{a_1}, \dots, p^{a_n}) \in T_h^+$  tels que  $a_n = 0$ . Alors  $T_{h,0}^+$  est un ensemble fini et  $T_{h,0}^+Z \supset T_h^+$ . Si  $I_h$  est un système de représentants de  $K/K_h$  (avec  $K_h = 1 + p^h\text{M}_n(\mathbf{Z}_p)$ ), alors

$$KT_h^+K \subset \bigcup_{t \in T_{h,0}^+, k \in I_h} kK_h tKZ \subset \bigcup_{t \in T_{h,0}^+, k \in I_h} ktKZ,$$

la dernière inclusion étant une conséquence du fait que  $t^{-1}K_h t \subset K$  pour tout  $t \in T_{h,0}^+$ . On conclut en utilisant le lemme IV.17.

On suppose maintenant que  $\Pi$  est une  $L$ -représentation de Banach admissible de  $G$ , ayant un caractère central. Le sous-espace  $\Pi^{(h)}$  de  $\Pi$  (défini en considérant  $\Pi$  comme

une représentation du pro- $p$ -groupe uniforme  $H$ ) est stable par  $KZ$ , puisque  $KZ$  normalise  $H$ .

**Définition IV.20.** — On dit que la représentation  $\Pi$  est *cohérente* s'il existe  $m(\Pi)$  tel que  $\Pi^{(h+k)} = (\Pi^{(h)})^{[k]}$ , pour tous  $h \geq m(\Pi)$  et  $k \in \mathbf{N}$ .

**Remarque IV.21.** — (i) L'inclusion  $(\Pi^{(h)})^{[k]} \subset \Pi^{(h+k)}$  est vraie pour n'importe quelle représentation de Banach  $\Pi$  (cela découle de la prop. IV.11).

(ii) Le lemme IV.18 montre que  $W^{[k+1]} = (W^{[k]})^{[1]}$ . Pour montrer que  $\Pi$  est cohérente, il suffit donc de vérifier que  $\Pi^{(h+1)} = (\Pi^{(h)})^{[1]}$  pour tout  $h$  assez grand.

(iii) Si  $\Pi$  est cohérente, alors  $\Pi^{(h)}$  engendre  $\Pi^{\text{an}}$ , en tant que représentation de  $G$ , pour tout  $h$  assez grand (cela découle de ce que  $\Pi^{\text{an}}$  est la réunion des  $\Pi^{(h)}$ ). On peut se demander si une propriété de ce genre est automatiquement vérifiée pour une représentation de Banach admissible de  $G$  (au moins dans le cas de longueur finie). C'est le cas pour  $G = \text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  (cf. th. VII.11).

**Proposition IV.22.** — Soit  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$  une suite exacte de représentations de Banach admissibles de  $G$ . Si  $\Pi$  est cohérente, alors  $\Pi_2$  l'est aussi; réciproquement, si  $\Pi_1$  est cohérente, alors  $\Pi$  est cohérente si et seulement si  $\Pi_2$  l'est.

*Démonstration.* — C'est une conséquence de l'exactitude du foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{(h)}$ .

## V. Vecteurs analytiques des représentations unitaires de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Ce chapitre étend (et raffine) à toutes les paires  $G$ -compatibles les résultats de [10, chap. V], concernant l'espace  $\Pi_\delta(D)^{\text{an}}$  des vecteurs localement analytiques de la représentation  $\Pi_\delta(D)$ . L'approche est assez différente de celle de [10] même si le noyau technique (à savoir le § V.5 et, en particulier, la prop. V.18) est le même.

**V.1. Préliminaires.** — On fixe dans la suite une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ , avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et un réseau  $D_0$  de  $D$ , stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$ . On note  $\Pi = \Pi_\delta(D)$  et  $\Pi_0 = \Pi_\delta(D_0)$ . Alors  $\Pi_0$  est un réseau de  $\Pi$ , ouvert, borné et stable par  $G$ . On munit  $\Pi$  de la valuation  $v_\Pi$ , à valeurs dans  $v_p(L)$ , faisant de  $\Pi_0$  la boule unité de  $\Pi$ .

On renvoie au chap. I pour les anneaux de fonctions analytiques utilisés dans la suite. Rappelons que  $\Lambda(\Gamma)$  est l'anneau des mesures à valeurs dans  $\mathcal{O}_L$  sur  $\Gamma$ . Si  $R$  est un anneau de séries de Laurent (comme  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}$ , etc.), on peut remplacer la variable  $T$  par  $\gamma - 1$  où  $\gamma$  est un générateur topologique de  $\Gamma$  (ou plutôt de l'image inverse de  $1 + p^\kappa \mathbf{Z}_p$  dans  $\Gamma$ , où  $\kappa = 1$  si  $p > 2$  et  $2$  si  $p = 2$ ) pour construire un anneau  $R(\Gamma)$  (on renvoie le lecteur au n° 3 du § V.1 de [10] pour les détails).

Rappelons que  $m(D_0)$  est un entier assez grand, qui ne dépend que de  $D_0$ . Il est en particulier choisi tel que la prop. II.2 s'applique à  $D_0$ , et donc  $D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset D_0^{(0, r_m(D_0))} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  (cf. [9, cor. II.7.2]). Comme  $D_0^\natural$  est compact, il existe  $l_1 = l_1(D_0)$  tel que  $D_0^\natural \subset T^{-l_1} D_0^{\dagger, m(D_0)}$ , donc  $D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset (T^{-l_1} D_0^{\dagger, m(D_0)}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , où l'on note

$$X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \cap (X \times X)$$

pour  $X \in \{D^{(0, r_b]}, D^\dagger\}$  (pareil avec  $D_0$  si  $X \in \{T^a D_0^{\dagger, b}, D_0^{(0, r_b]}\}$ ). Quitte à augmenter encore  $l_1$  et  $m(D_0)$ , on peut supposer qu'ils sont aussi associés à  $(\check{D}_0, \delta^{-1})$ , et que l'involution  $i_\delta$  de  $\mathcal{O}_L[\Gamma]$  qui envoie  $\sigma_a$  sur  $\delta(a)\sigma_{\frac{1}{a}}$  s'étend en une involution continue de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{(0, r_b]}(\Gamma)$ ,  $\mathcal{R}(\Gamma)$  pour  $b \geq m(D_0)$  (voir [10, lemme V.2.3]).

**V.2. Vecteurs analytiques et surconvergence.** — Si  $m \geq 2$ , on note  $K_m$  le sous-groupe  $1 + p^m M_2(\mathbf{Z}_p)$  de  $G$ ,

$$a_m^+ = \begin{pmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad a_m^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1+p^m \end{pmatrix}, \quad u_m^+ = \begin{pmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad u_m^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p^m & 1 \end{pmatrix}$$

et, pour  $\alpha \in \mathbf{N}^4$ , on note

$$b_m^\alpha = (a_m^+ - 1)^{\alpha_1} \cdot (a_m^- - 1)^{\alpha_2} \cdot (u_m^+ - 1)^{\alpha_3} \cdot (u_m^- - 1)^{\alpha_4} \in \mathbf{Z}_p[K_m].$$

Alors  $(a_m^+, a_m^-, u_m^+, u_m^-)$  est un système minimal de générateurs topologiques du pro- $p$  groupe uniforme  $K_m$ .

**Définition V.1.** — Si  $b \geq m + 1$ , soit

$$\Pi^{(b)} = \{v \in \Pi, \lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_\Pi(b_m^\alpha \cdot v) - p^m r_b \cdot |\alpha| = \infty\},$$

que l'on munit de la valuation

$$v^{(b)}(v) = \inf_{\alpha \in \mathbf{N}^4} (v_\Pi(b_m^\alpha \cdot v) - p^m r_b \cdot |\alpha|),$$

qui en fait un banach.

**Remarque V.2.** — (i) Le théorème d'Amice [1] montre que, pour tout  $m$ , on a un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques

$$\varinjlim_b \Pi^{(b)} \simeq \Pi^{\text{an}}.$$

(ii) Puisque  $p^m r_b = r_{b-m}$ , l'espace  $\Pi^{(b)}$  n'est autre que l'espace  $\Pi_{K_m}^{(b-m)}$  de l'introduction (ou, avec les notations du chapitre précédent, l'espace  $\Pi^{(b-m)}$  correspondant au sous-groupe  $H = K_m$  de  $G$ ). Il résulte de la prop. IV.11 que l'espace  $\Pi^{(b)}$  ne dépend pas du choix de  $m \leq b - 1$  (la valuation  $v^{(b)}$  en dépend, mais les valuations obtenues en faisant varier  $m$  sont toutes équivalentes).

Le th. V.3 ci-dessous décrit le  $L$ -banach  $\Pi^{(b)}$  en fonction de  $D$ . Nous commençons par préciser un peu les topologies sur les espaces divers et variés apparaissant dans ce théorème. On dispose d'une pléiade d'anneaux de séries de Laurent (voir le chap. I), chacun ayant une topologie naturelle. Cela induit une topologie naturelle sur les modules libres de type fini sur ces anneaux (et qui ne dépend pas des choix de bases). En appliquant cette discussion aux modules  $D_0^{\dagger, b}$ ,  $D_0^{(0, r_b]}$ ,  $D^{(0, r_b]}$ ,  $D^\dagger$ ,  $D_{\text{rig}}$ , etc, on obtient des topologies sur ces modules.

Si  $X \in \{D_0^{(0, r_b]}, D^{(0, r_b]}, D^\dagger\}$ , on munit  $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  de la topologie induite par l'inclusion  $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset X \times X$ . Cette topologie est plus forte que celle induite par l'inclusion  $X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  (ou  $X \subset D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ ). Comme  $D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est fermé dans  $D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , il est aussi fermé dans  $D_0^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  pour  $b > m(D_0)$ , donc  $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est fermé dans  $D^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  et dans  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . On munit alors  $(D_0^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D_0^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$  et  $(X \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$  de la topologie quotient, pour  $X \in \{D^{(0, r_b]}, D^\dagger\}$ .

On fixe une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ , avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  et on note  $\Pi = \Pi_\delta(D)$  et  $\check{\Pi} = \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})$ .

**Théorème V.3.** — *Il existe  $c = c(D, \delta)$  tel que pour tout  $b \geq c$  :*

(i) *Le sous-module  $D^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  de  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ , qui agit continûment.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -modules de Banach*

$$(D^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \simeq \Pi^{(b)},$$

*et donc une suite exacte de  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ -modules topologiques*

$$0 \rightarrow \check{\Pi}^* \rightarrow D^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi^{(b)} \rightarrow 0.$$

Avant de passer à la preuve du th. V.3, qui occupe les §§ V.3-V.6, donnons-en quelques conséquences. Le résultat suivant découle formellement du th. V.3 et de la rem. V.2.

**Corollaire V.4.** — (i) *Le sous-module  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  de  $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ , qui agit continûment.*

(ii) *On a un isomorphisme canonique de  $G$ -modules topologiques*

$$(D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \simeq \Pi^{\text{an}},$$

*et donc une suite exacte de  $G$ -modules topologiques*

$$0 \rightarrow \check{\Pi}^* \rightarrow D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi^{\text{an}} \rightarrow 0.$$

Le th. V.3 fournit un raffinement du théorème de Schneider et Teitelbaum pour les objets de  $\text{Rep}(\delta)$ .

**Corollaire V.5.** — Si  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  il existe  $m_0 \geq 2$  tel que  $\Pi^{(b)}$  soit dense dans  $\Pi^{\text{an}}$  (et donc aussi dans  $\Pi$ ) pour tout  $b \geq m_0 + 1$ .

*Démonstration.* — Disons que  $\Pi$  est *bonne* si elle satisfait le corollaire. Trivialement, toute représentation de dimension finie est bonne. Si  $\Pi = \Pi_\delta(D)$  pour une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ , alors  $\Pi$  est bonne : cela découle du th. V.3, du cor. V.4 et de la densité de  $D^{(0, r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  (qui découle de celle de  $D^{(0, r_b]}$  dans  $D^\dagger$ , elle-même conséquence de la densité de  $\mathcal{E}^{(0, r_b]}$  dans  $\mathcal{E}^\dagger$ ).

En utilisant le th. III.45, le cor. III.37 et ce que l'on vient de démontrer, nous pouvons conclure dans le cas général grâce au lemme suivant qui est une conséquence de l'exactitude des foncteurs  $\Pi \mapsto \Pi^{(b)}$  et  $\Pi \mapsto \Pi^{\text{an}}$  (prop. IV.14).

**Lemme V.6.** — Soit  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\text{Rep}_L(G)$ , avec  $\Pi_1$  bonne. Si une des  $\Pi$  et  $\Pi_2$  est bonne, alors l'autre l'est aussi.

**Corollaire V.7.** — Soient  $\Pi_1, \Pi_2 \in \text{Rep}_L(G)$  et soit  $f : \Pi_1^{\text{an}} \rightarrow \Pi_2^{\text{an}}$  une application continue, linéaire et  $\mathfrak{gl}_2$ -équivariante. Alors il existe un sous-groupe ouvert compact  $H$  de  $G$  tel que  $f$  soit  $H$ -équivariante.

*Démonstration.* — D'après le corollaire V.5, il existe  $b_1 \geq 3$  tel que  $\Pi_1^{(b_1)}$  soit dense dans  $\Pi_1^{\text{an}}$ . La boule unité  $X_{b_1}$  de  $\Pi_1^{(b_1)}$  est bornée dans  $\Pi_1^{\text{an}}$  et  $f$  étant continue, on en déduit que  $f(X_{b_1})$  est une partie bornée de  $\Pi_2^{\text{an}}$ . Comme  $\Pi_2^{\text{an}}$  est la limite inductive des  $\Pi_2^{(b)}$ , les applications de transition étant injectives et compactes, on en déduit qu'il existe  $b \geq b_1$  tel que  $f(X_{b_1}) \subset \Pi_2^{(b)}$ . Ainsi,  $f(\Pi_1^{(b_1)}) \subset \Pi_2^{(b)}$ .

Soient  $H = K_b$  et  $v \in \Pi_1^{(b_1)}$ , et soit  $h_1, \dots, h_4$  un système minimal de générateurs topologiques de  $H$ . Comme  $v \in \Pi_1^{(b)}$ , la remarque IV.15 montre que l'application  $o_v : x \mapsto h^x \cdot v$  est analytique sur  $\mathbf{Z}_p^4$ . On peut donc écrire

$$h^x \cdot v = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} \frac{\partial^\alpha o_v}{\partial x^\alpha}(0) x^\alpha$$

pour  $x \in \mathbf{Z}_p^4$ . Chaque terme  $\frac{\partial^\alpha o_v}{\partial x^\alpha}(0)$  s'écrit  $P_\alpha(a^+, a^-, u^+, u^-)v$ , où  $a^+, a^-, u^+, u^-$  désignent l'action infinitésimale de  $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_p^* \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{Z}_p & 1 \end{pmatrix}$  et  $P_\alpha \in L[X, Y, Z, T]$ . En appliquant  $f$  et en utilisant l'hypothèse on obtient

$$f(h^x \cdot v) = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} f(P_\alpha(a^+, a^-, u^+, u^-)v) x^\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} P_\alpha(a^+, a^-, u^+, u^-) f(v) x^\alpha = h^x \cdot f(v).$$

On conclut que  $f(hv) = hf(v)$  pour  $h \in H$  et  $v \in \Pi_1^{(b_1)}$ . Comme  $f$  est continue et  $\Pi_1^{(b_1)}$  est dense dans  $\Pi_1^{\text{an}}$ , on en déduit que  $f$  est  $H$ -équivariante, ce qui permet de conclure.

Le corollaire suivant est un sous-produit de la preuve du th. V.3.

**Corollaire V.8.** — Soit  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$ . Si  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$  et  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} v$  sont localement analytiques sur  $\mathbf{Q}_p$ , alors  $v \in \Pi^{\text{an}}$ .

*Démonstration.* — Commençons par le cas où  $\Pi = \Pi_\delta(D)$  pour une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ . La preuve de la prop. V.10 ci-dessous n'utilise que la croissance des coefficients de Mahler des applications  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$  et  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} v$ . Elle montre que  $v$  admet un relèvement à  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . Le corollaire V.4 permet alors de conclure.

Passons au cas général. Disons que  $v \in \Pi$  est *presqu'analytique* si  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} v$  et  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} v$  sont localement analytiques, et que  $\Pi$  est *bonne* si tout vecteur presqu'analytique est localement analytique (notons que tout vecteur localement analytique est trivialement presqu'analytique). On déduit du th. III.45, du cor. III.37 et du premier paragraphe l'existence d'un morphisme  $\beta_\Pi : \Pi_1 \rightarrow \Pi/\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ , dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie, et tel que  $\Pi_1$  soit bonne. On conclut en utilisant le lemme suivant :

**Lemme V.9.** — Soit  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\text{Rep}_L(G)$ .

- (i) Si  $\Pi_1$  est de dimension finie et si  $\Pi$  ou  $\Pi_2$  est bonne, alors l'autre l'est aussi.
- (ii) Si  $\Pi_2$  est de dimension finie et si  $\Pi_1$  est bonne, alors  $\Pi$  est bonne.

*Démonstration.* — (i) Supposons d'abord que  $\Pi$  est bonne et soit  $v \in \Pi_2$  presqu'analytique. Soit  $\hat{v} \in \Pi$  un relèvement de  $v$ . Notons  $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1 \in \mathcal{O}_L[G]$ . Comme  $v$  est presqu'analytique, il existe  $r > 0$  tel que  $p^{-rn} T^n(v)$  tende vers 0 dans  $\Pi_2$ , ce qui veut dire qu'il existe  $x_n \in \Pi_1$  tels que  $p^{-rn} T^n(\hat{v}) - x_n \rightarrow 0$  dans  $\Pi$ . Puisque  $\Pi_1$  est de dimension finie, elle est tuée par  $T$  (lemme III.42) et donc  $p^{-rn} T^{n+1}(\hat{v}) \rightarrow 0$  dans  $\Pi$ . Le théorème d'Amice entraîne que  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{v}$  est localement analytique. On obtient de même que  $x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & 1 \end{pmatrix} \hat{v}$  est localement analytique, et donc  $\hat{v}$  est localement analytique (car  $\Pi$  est bonne) et son image  $v$  dans  $\Pi_2$  l'est aussi. Cela montre que  $\Pi_2$  est bonne.

Le reste de l'énoncé est une conséquence de l'exactitude du foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{\text{an}}$ .

**V.3. Relèvement à  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .** — La proposition ci-dessous montre que tout  $v \in \Pi^{(b)}$  se relève à  $D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ . Rappelons que  $l_1$  est choisi tel que  $D_0^\dagger \subset T^{-l_1} D_0^{\dagger,b}$  (cf. § V.1).

**Proposition V.10.** — Soient  $b > m > m(D_0)$  et  $v \in \Pi^{(b)}$ . Alors  $v$  admet un relèvement à  $(p^s T^{s'} D_0^{\dagger,b}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset D^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , avec  $s = v^{(b)}(v)$  et  $s' = -(p^m n_b + l_1)$ .

*Démonstration.* — On peut supposer que  $v^{(b)}(v) \geq 0$ , quitte à multiplier  $v$  par une puissance de  $p$ . Notons  $\xi = (u_m^+)^{n_b}$ ,  $\mu = (u_m^-)^{n_b}$  et

$$a_k = \min(v_\Pi(\xi^k v), v_\Pi(\mu^k v)),$$

de telle sorte que  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k - p^m k = \infty$  et  $a_k \geq p^m k + v^{(b)}(v)$  pour tout  $k$  (par définition de  $\Pi^{(b)}$  et  $v^{(b)}$ ).

Soient  $X = D_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et  $Y = D_0^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , de telle sorte que  $\Pi_0 = X/Y$  est la boule unité de  $\Pi$  pour la valuation  $v_{\Pi}$ . Alors  $p^{a_0} \Pi_0 \subset \Pi_0$ , car  $a_0 \geq 0$ , et  $v \in p^{a_0} \Pi_0$ , puisque  $v_{\Pi}(v) \geq a_0$ . Ainsi,  $v$  possède un relèvement  $z = (z_1, z_2) \in p^{a_0} X$ . Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme V.11.** — *Il existe une suite  $(y_n)_{n \geq 0}$  d'éléments de  $Y$  telle que pour tout  $n \geq 1$*

$$\xi^n z - \sum_{k=0}^{n-1} p^{a_k} \xi^{n-k-1} y_k \in p^{a_n} X.$$

*Démonstration.* — On construit la suite en question par récurrence. Noter que  $X$  et  $Y$  sont stables par  $\xi$  et  $\eta$  (car ils sont stables par  $G$ ), et que  $p^n X \cap Y = p^n Y$  (pour  $n \geq 0$ ), car  $Y$  est un sous- $\mathcal{O}_L$ -module saturé de  $X$  par définition.

Supposons d'abord que  $n = 1$ . Si  $a_1 < a_0$ , on prend  $y_0 = 0$ , supposons donc que  $a_1 \geq a_0$ . Comme  $v_{\Pi}(\xi v) \geq a_1 \geq 0$ , on a  $\xi z \in (p^{a_1} X + Y) \cap p^{a_0} X \subset p^{a_1} X + p^{a_0} Y$ , ce qui montre l'existence de  $y_0$ . Supposons avoir trouvé  $y_0, \dots, y_{n-1}$  et écrivons

$$\xi^n z = \sum_{k=0}^{n-1} p^{a_k} \xi^{n-k-1} y_k + p^{a_n} u$$

pour un  $u \in X$ . Si  $a_n > a_{n+1}$ , on prend  $y_n = 0$ . Sinon, en appliquant  $\xi$  à l'égalité précédente on obtient  $p^{a_n} \xi u \in \xi^{n+1} z + Y \subset p^{a_{n+1}} X + Y$  (la deuxième inclusion suit de  $v_{\Pi}(\xi^{n+1} v) \geq a_{n+1}$ ). On en déduit que  $p^{a_n} \xi u \in p^{a_{n+1}} X + p^{a_n} Y$  et on choisit  $y_n \in Y$  tel que  $p^{a_n} \xi u - p^{a_n} y_n \in p^{a_{n+1}} X$ . Cela permet de conclure.

Revenons à la preuve de la proposition. En appliquant  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$  à la relation du lemme V.11, et en utilisant le fait que  $\xi$  agit par multiplication par  $\varphi^m(T)^{n_b}$ , on obtient  $z_1 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \in p^{a_n} D_0$ , avec

$$A_k = \frac{p^{a_k}}{\varphi^m(T)^{(k+1)n_b}} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k) = p^{a_k - p^m k} \frac{1}{\varphi^m(T)^{n_b}} \left( \frac{p^{p^m}}{\varphi^m(T)^{n_b}} \right)^k \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k)$$

Le lemme I.5 montre que  $\frac{1}{\varphi^m(T)^{n_b}} \in T^{-p^m n_b} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ . Puisque  $p \in T^{n_b} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ , on en déduit que  $\frac{p^{p^m}}{\varphi^m(T)^{n_b}} \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ . En utilisant aussi le fait que  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y_k) \in D_0^{\dagger} \subset T^{-l_1} D_0^{\dagger, b}$ , on obtient enfin

$$A_k \in p^{a_k - p^m k} T^{-l_1 - p^m n_b} D_0^{\dagger, b}.$$

Puisque  $a_k - p^m k$  tend vers  $\infty$  et est minoré par  $v^{(b)}(v)$ , et puisque  $D_0^{\dagger, b}$  est complet pour la topologie  $p$ -adique, le paragraphe précédent montre que  $\sum_{k \geq 0} A_k$  converge dans  $p^{v^{(b)}(v)} T^{-l_1 - p^m n_b} D_0^{\dagger, b}$ . La relation  $z_1 - \sum_{k=0}^{n-1} A_k \in p^{a_n} D_0$  montre

que  $\sum_{k \geq 0} A_k$  tend vers  $z_1$  dans  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ . On en déduit que  $\sum_{k \geq 0} A_k$  tend vers  $z_1$  dans  $p^{v^{(b)}(v)}T^{-l_1-p^m n_b}D_0^{\dagger, b}$ , et donc que  $z_1 \in p^{v^{(b)}(v)}T^{-l_1-p^m n_b}D_0^{\dagger, b}$ . Les mêmes arguments [remplacer dans ce qui précède  $\xi$  par  $\mu$  et  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$  par  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot)$ ] donnent la même estimée pour  $z_2$ , ce qui permet de conclure.

**Remarque V.12.** — Supposons que  $D^{\natural} = D^{\sharp}$  (c'est par exemple le cas si  $D$  est irréductible de dimension  $\geq 2$ ), de telle sorte que l'inclusion de  $\tilde{D}$  dans  $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  induise un isomorphisme de  $B$ -modules de Banach  $\Pi \simeq \tilde{D}/\tilde{D}^+$  (cor. III.26). En posant  $X = \tilde{D}_0$  et  $Y = \tilde{D}_0^+$ , on vérifie sans mal que le lemme V.11 s'applique encore (le point est que  $X$  et  $Y$  sont stables par  $\xi$  et  $\mu$ , et  $Y \cap p^n X = p^n Y$  pour  $n \geq 0$ ). Le reste de la preuve s'applique et montre que tout  $v \in \Pi^{(b)}$  admet un relèvement à  $\tilde{D}^{(0, r_b]}$  (cf. [4] pour la définition de ce module). Par contre, l'image dans  $\Pi$  d'un élément de  $\tilde{D}^{(0, r_b]}$  n'est pas toujours localement analytique.

Il nous reste à montrer que l'image de  $D^{(0, r_b]} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $\Pi$  est contenue dans  $\Pi^{(b)}$ , si  $m$  et  $b$  sont assez grands. Cela va demander un certain nombre d'estimées techniques, auxquelles sont dédiées les §§ V.4 et V.5 ci-dessous.

**V.4. Vecteurs propres de  $\psi$ .** — Si  $\alpha \in \mathcal{O}_L^*$ , on pose

$$\mathcal{C}_0^{\alpha} = (1 - \alpha \cdot \varphi)D_0^{\psi=\alpha} \subset D_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{Z}_p^*.$$

La proposition suivante est une version de la prop. V.2.1<sup>(23)</sup> de [10]. Voir V.1 pour les objets  $i_{\delta}$ ,  $\Lambda(\Gamma)$ , etc.

**Proposition V.13.** — Soit  $P \in \mathcal{O}_L[X]$  tel que  $P(\psi) = 0$  sur  $D_0^{\natural}/D_0^{\natural}$ . Soit  $\alpha \in \mathcal{O}_L^*$  tel que  $\alpha$  et  $\beta := (\delta(p)\alpha)^{-1}$  ne soient pas des racines de  $P$  et  $\alpha^{-1}$  et  $\beta^{-1}$  ne soient pas des valeurs propres de  $\varphi$  sur  $D^{\text{nr}}$ . Alors  $w_{\delta}(\mathcal{C}_0^{\alpha}) \cap \mathcal{C}_0^{\beta}$  est d'indice fini dans  $\mathcal{C}_0^{\beta}$ .

*Démonstration.* — On commence par montrer que  $w_{\delta}(\mathcal{C}_0^{\alpha}) \otimes_{\mathcal{O}_L} L = \mathcal{C}_0^{\beta} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ . Soit  $z \in D_0^{\psi=\alpha}$  et soit  $z' = P(\alpha)z = P(\psi)z$ . Comme  $D_0^{\psi=\alpha} \subset D_0^{\natural}$  et  $P(\psi)D_0^{\natural} \subset D_0^{\natural}$  par hypothèse, on a  $z' \in D_0^{\natural}$ , donc  $(\alpha^{-n}z')_{n \geq 0} \in D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ . Comme  $D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  se surjecte sur  $D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$  (lemme III.6), il existe  $x = (x_1, x_2) \in D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  tel que  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left( \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right) = \alpha^{-n}z'$  pour tout  $n \geq 0$ . Alors (ibid.)  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x - \alpha^{-1}x \in \text{Ker}(\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}) = (0, D_0^{\text{nr}})$  et un petit calcul montre que ceci entraîne  $\psi(x_2) - \beta x_2 \in D_0^{\text{nr}}$ . Comme  $\beta^{-1}$  n'est pas valeur

<sup>(23)</sup>Cette proposition n'est vraie qu'après tensorisation par  $L$ , le problème étant que  $D_0^{\psi=1}$  n'est pas toujours contenu dans  $D_0^{\natural}$ , même sous les hypothèses de loc.cit. Comme le montre la suite, cela ne change rien aux arguments.

propre de  $\varphi \in \text{End}_L(D^{\text{nr}})$ , il existe  $u \in D^{\text{nr}}$  tel que  $\beta\varphi(u) - u = \psi(x_2) - \beta x_2$ . Alors  $x_2 + \varphi(u) \in D_0^{\psi=\beta} \otimes_{\mathcal{O}_L} L$  et donc  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2 + \varphi(u)) \in \mathcal{C}_0^\beta \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ . Comme

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_2) = w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x_1)) = P(\alpha)w_\delta((1 - \alpha\varphi)(z))$$

et  $P(\alpha) \neq 0$ , on conclut que  $w_\delta(\mathcal{C}_0^\alpha \otimes_{\mathcal{O}_L} L) \subset \mathcal{C}_0^\beta \otimes_{\mathcal{O}_L} L$ . Par symétrie et puisque  $w_\delta$  est une involution, cette inclusion est une égalité.

Comme  $\mathcal{C}_0^\alpha$  et  $\mathcal{C}_0^\beta$  sont des  $\Lambda(\Gamma)$ -modules de type fini [9, cor. VI.1.3] et comme  $w_\delta$  est  $i_\delta$ -semi-linéaire, le paragraphe précédent montre l'existence d'une constante  $c = c(P, \alpha, D_0)$  telle que  $w_\delta(\mathcal{C}_0^\beta) \subset p^{-c}\mathcal{C}_0^\alpha$ . Soit alors  $x \in \mathcal{C}_0^\beta$ . On vient de voir qu'il existe  $y \in D_0^{\psi=\alpha}$  tel que  $w_\delta(x) = p^{-c}(1 - \alpha\varphi)y$ . Si  $y'$  est un autre choix, alors  $y - y' \in D_0^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$ . Comme  $w_\delta(x) \in D_0$ , on a  $y \pmod{p^c} \in (D_0/p^c D_0)^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$ . De plus, si  $y \pmod{p^c} = 0$ , alors  $x \in w_\delta(\mathcal{C}_0^\alpha) \cap \mathcal{C}_0^\beta$ . Ainsi, l'application  $x \mapsto y \pmod{p^c}$  induit une injection de  $\mathcal{C}_0^\beta / (\mathcal{C}_0^\beta \cap w_\delta(\mathcal{C}_0^\alpha))$  dans le quotient de  $(D_0/p^c D_0)^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$  par l'image de  $D_0^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$ . Comme ce quotient est fini (car  $(D_0/p^c D_0)^{\varphi=\frac{1}{\alpha}}$  est contenu dans  $(D_0/p^c D_0)^{\text{nr}}$ , qui est fini), cela permet de conclure.

**Remarque V.14.** — (i) Comme  $D_0^\sharp/D_0^\natural$  est un  $\mathcal{O}_L$ -module de type fini, on peut toujours trouver un polynôme non nul  $P$  comme dans la proposition précédente. Si  $D$  n'a pas de composante de Jordan-Hölder de rang 1, on peut même prendre  $P$  de la forme  $p^N$  car alors  $D_0^\sharp/D_0^\natural$  est de torsion.

(ii) Soient  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$  et  $\delta$  formant une paire  $G$ -compatible, et soit  $\check{\Pi} = \Pi_{\delta^{-1}}(\check{D})$ . Si  $\alpha \in \mathcal{O}_L^*$ , notons  $\check{\Pi}^*(\alpha)$  l'ensemble des  $\mu \in \check{\Pi}^*$  vérifiant  $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu = \alpha^{-1} \mu$ . La preuve de la prop. V.13 montre que, pour tout  $\alpha \in \mathcal{O}_L^*$ , l'application  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$  envoie  $\check{\Pi}^*(\alpha)$  sur un sous- $L$ -espace vectoriel de codimension finie de  $\mathcal{C}^\alpha = (1 - \alpha\varphi)D^{\psi=\alpha}$ ; en particulier  $\check{\Pi}^*(\alpha)$  est un  $\Lambda(\Gamma)[\frac{1}{p}]$ -module de type fini dont le quotient par son sous-module de torsion est libre de rang égal à celui de  $D$ . Plus précisément, si  $\alpha$  n'est pas valeur propre de  $\varphi$  sur  $D^{\text{nr}}$  et si  $(\delta(p)\alpha)^{-1}$  n'est pas valeur propre de  $\psi$  sur  $D^\sharp/D^\natural$ , ce qui est le cas pour tout  $\alpha$  si  $D$  n'a pas de composante de Jordan-Hölder de rang 1, alors  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$  (resp.  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}$ ) induit un isomorphisme de  $\check{\Pi}^*(\alpha)$  sur  $D^{\psi=\alpha}$  (resp.  $\mathcal{C}^\alpha$ ) et donc  $\check{\Pi}^*(\alpha)$  est un  $\Lambda(\Gamma)[\frac{1}{p}]$ -module libre de rang égal à celui de  $D$ .

**V.5. L'action de  $G$  sur  $T^a D_0^{\dagger,b} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .** — Le but de ce § est de contrôler l'action de  $G$  sur les modules  $(T^a D_0^{\dagger,b}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , plus précisément de démontrer la prop. V.19 ci-dessous. La plupart des arguments sont adaptés de [10, chap. V]. On fixe une base  $e_1, e_2, \dots, e_d$  de  $D_0^{\dagger,m(D_0)}$  sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,m(D_0)}$  (c'est aussi une base de  $D_0^{\dagger,b}$  sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}$  pour tout  $b \geq m(D_0)$ ). Les constantes  $c, c_1, c_2, \dots, m_1, m_2, \dots$  ci-dessous ne dépendent que de  $D_0$ ,  $\delta$  et du choix de la base  $e_1, e_2, \dots, e_d$ .

**Proposition V.15.** — *Il existe  $m_1 \geq m(D_0)$  tel que  $w_\delta$  laisse stable  $D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$  pour tout  $b \geq m_1$ .*

*Démonstration.* — On choisit  $P, \alpha$  et  $\beta$  comme dans la prop. V.13 et on note  $M$  le  $\Lambda(\Gamma)$ -module  $w_\delta(\mathcal{C}_0^\alpha) \cap \mathcal{C}_0^\beta$ . On choisit ensuite  $m_1 \geq m(D_0)$  tel que pour tout  $b \geq m_1$  :

- $\mathcal{C}_0^?$  est inclus dans  $D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$  et  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathcal{C}_0^? = D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$ , si  $? \in \{\alpha, \beta\}$  (un tel  $m_1$  existe, c.f. [10, cor. V.1.13]).

- L'inclusion de  $M$  dans  $\mathcal{C}_0^\beta$  induit un isomorphisme

$$\mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} M = \mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} \mathcal{C}_0^\beta$$

(cette condition est automatique car  $\mathcal{C}_0^\beta/M$  est tué par une puissance de  $\sigma_{1+p} - 1$  puisqu'il de longueur finie sur  $\mathcal{O}_L$  d'après la prop. V.13, et  $\sigma_{1+p} - 1$  est inversible dans  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma)$ ).

Alors  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma) \otimes_{\Lambda(\Gamma)} M = D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$  et  $w_\delta(M) \subset \mathcal{C}_0^\alpha \subset D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{Z}_p^*$  (par définition de  $M$ ), ce qui permet de conclure, en utilisant la  $i_\delta$ -semi-linéarité de  $w_\delta$ .

**Corollaire V.16.** — *Si  $b > m_1$ , alors  $D_0^{(0,r_b]} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$  et  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  est stable par  $G$ .*

*Démonstration.* — Cf. [10, lemme II.1.10] : c'est une conséquence formelle des formules donnant l'action de  $G$  sur  $D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  (cf. rem. III.3), de la prop. V.15 et des inclusions  $\psi(D_0^{(0,r_b]}) \subset D_0^{(0,r_b-1]}$ ,  $\varphi(D_0^{(0,r_b-1]}) \subset D_0^{(0,r_b]}$  et  $\sigma_a(D_0^{(0,r_b]}) \subset D_0^{(0,r_b]}$  qui impliquent que  $D_0^{(0,r_b]}$  est stable par  $\mathrm{Res}_p \mathbf{Z}_p = \varphi \circ \psi$ .

Si  $b \geq m > m_1$ , on note  $\tau_m = \sigma_{1+p^m} - 1$  et

$$M_m^{\dagger,b} = (1+T)\varphi^m(D_0^{\dagger,b}) \quad \text{et} \quad M_m^{(0,r_b]} = (1+T)\varphi^m(D_0^{(0,r_b]}).$$

Remarquons que  $\begin{pmatrix} 1+p^m & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1$  agit comme  $\tau_m$  sur  $D_0$  et  $\begin{pmatrix} 1 & p^m \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - 1$  agit par multiplication par  $\varphi^m(T)$ . Le résultat suivant ([10, prop. V.1.14] et sa preuve) compare les deux actions, ce qui est fondamental pour la suite. Rappelons que l'on a fixé une base  $(e_i)_i$  du  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}$ -module  $D_0^{\dagger,b}$ , et que  $\Gamma_m = \chi^{-1}(1+p^m \mathbf{Z}_p)$ . Si  $m \geq 2$ , on définit des anneaux  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ , etc, en remplaçant simplement la variable  $T$  par  $\tau_m$ .

**Proposition V.17.** — *Il existe  $m_2 > m_1$  tel que pour tous  $b \geq m \geq m_2$  on ait*

(i)  $\tau_m$  est bijectif sur  $M_m^{(0,r_b]}$  et  $\tau_m^a$  induit une bijection de  $M_m^{\dagger,b}$  sur  $\varphi^m(T)^a \cdot M_m^{\dagger,b}$ , pour tout  $a \in \mathbf{Z}$ .

(ii)  $M_m^{\dagger,b}$  (resp.  $M_m^{(0,r_b]}$ ) est un  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$  (resp.  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0,r_b]}(\Gamma_m)$ )-module libre de base  $((1+T)\varphi^m(e_i))_i$ .

On fixe un tel  $m_2$  et on le note simplement  $m$ . Voir le § V.2 pour les notations  $K_m$ ,  $a_m^+$ ,  $a_m^-$ ,  $b_m^\alpha$ , etc.

**Lemme V.18.** — Il existe une constante  $c \geq 1$  telle que :

- (i)  $w_\delta(\tau_m^a M_m^{\dagger,b}) \subset \tau_m^{a-c} M_m^{\dagger,b}$  pour tous  $b \geq m$  et  $a \in \mathbf{Z}$ .
- (ii)  $(g-1)^n (\tau_m^a M_m^{\dagger,b}) \subset \tau_m^{n+a-c} M_m^{\dagger,b}$  pour tous  $b \geq m$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 0$  et  $g \in K_m$ .

*Démonstration.* — (i) Notons  $f_i := (1+T)\varphi^m(e_i) \in D_0^{(0,r_{2m}]}$ . Alors (prop. V.15)  $w_\delta(f_i) \in D_0^{(0,r_{2m}]} = D_0^{\dagger,2m}[\frac{1}{T}]$ . On fixe  $c'$  tel que

$$w_\delta(f_i) \in \varphi^m(T)^{-c'+l(D_0)} D_0^{\dagger,2m}$$

pour  $1 \leq i \leq d$  (voir le lemme II.3 pour  $l(D_0)$ ). Comme  $w_\delta$  commute à  $\text{Res}_{1+p^m \mathbf{Z}_p}$  (car  $1+p^m \mathbf{Z}_p$  est stable par  $w$ ), il existe  $g_i \in D_0$  tels que  $w_\delta(f_i) = (1+T)\varphi^m(g_i)$ . Alors  $\varphi^m(g_i) \in \varphi^m(T)^{-c'+l(D_0)} D_0^{\dagger,2m}$ , donc  $g_i \in T^{-c'} D_0^{\dagger,m}$  (utiliser le lemme II.3 et l'identité  $g_i = \psi^m(\varphi^m(g_i))$ ) et donc finalement  $w_\delta(f_i) \in \varphi^m(T)^{-c'} M_m^{\dagger,m} = \tau_m^{-c'} M_m^{\dagger,m}$  (prop. V.17).

Soient enfin  $b \geq m$ ,  $a \in \mathbf{Z}$  et notons  $X = M_m^{\dagger,b}$ . Comme les  $e_i$  forment une base de  $D_0^{\dagger,b}$  sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}$ , les  $f_i$  forment une base de  $X$  sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$  (prop. V.17). En utilisant la  $i_\delta$ -semi-linéarité de  $w_\delta$  et le fait que  $w_\delta(f_i) \in \tau_m^{-c'} X$ , on obtient  $w_\delta(\tau_m^a X) \subset \tau_m^{a-c'} X$ , ce qui permet de conclure.

(ii) On va montrer que  $c = 8c'$  marche (avec  $c'$  comme dans la preuve de (i), dont on garde les notations). Le (i) de prop. V.17 montre que  $(g-1)^n (\tau_m^a X) = \tau_m^{a+n} X$  si  $a \in \mathbf{Z}$  et  $g \in \{a_m^+, u_m^+\}$ . En combinant cela avec le (i), on obtient pour  $g \in \{a_m^+, u_m^+\}$

$$(w_\delta g - 1)^n (\tau_m^a X) = w_\delta (g-1)^n w(\tau_m^a X) \subset w(\tau_m^{a+n-c'} X) \subset \tau_m^{a+n-2c'} X$$

et donc  $b_m^\alpha (\tau_m^a X) \subset \tau_m^{|\alpha|+a-c} X$ .

Soit maintenant  $g \in K_m$  quelconque et écrivons  $(g-1)^n = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b^\alpha$  dans  $\Lambda(K_m)$ . Alors  $c_\alpha \in \mathbf{Z}_p$  et  $v_p(c_\alpha) \geq n - |\alpha|$  quand  $|\alpha| < n$ . Comme  $p$  est multiple de  $\tau_m^{nb}$  (et donc de  $\tau_m$ ) dans  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$ , on obtient  $c_\alpha b^\alpha (\tau_m^a X) \subset \tau_m^{\max(n, |\alpha|)+a-c} X$  pour tout  $\alpha \in \mathbf{N}^4$ . Comme  $X$  est complet pour la topologie  $\tau_m$ -adique (car  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger,b}(\Gamma_m)$  l'est), cela permet de conclure que  $(g-1)^n (\tau_m^a X) \subset \tau_m^{n+a-c} X$ , ce qui finit la preuve.

**Proposition V.19.** — Il existe  $c_1 > c$  tel que :

- (i) Pour tout  $a \in \mathbf{Z}$  on a  $w_\delta((T^a D_0^{\dagger,b})^{\psi=0}) \subset (T^{a-c_1} D_0^{\dagger,b})^{\psi=0}$ .
- (ii) Pour tous  $b > 2m$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 1$  et  $g \in K_m$

$$(g-1)^n (T^a D_0^{\dagger,b}) \subset T^{a+p^m n - c_1} D_0^{\dagger,b}.$$

*Démonstration.* — On va montrer que l'on peut prendre  $c_1 = p^m(1+c+l(D_0))$ . Fixons  $b > 2m$ ,  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $n \geq 1$  et notons, pour simplifier,  $q = [\frac{a}{p^m}]$  et  $Y = \tau_m^{q-l(D_0)} M_m^{\dagger,b-m}$ .

**Lemme V.20.** — Soit  $A$  (resp.  $B$ ) l'ensemble des  $i \in \{0, 1, \dots, p^m - 1\}$  tels que  $p$  ne divise pas  $i$  (resp.  $p$  divise  $i$ ). Alors  $T^a D_0^{\dagger,b} \subset \sum_{i \in A} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y + \sum_{i \in B} \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$  et  $(T^a D_0^{\dagger,b})^{\psi=0} \subset \sum_{i \in A} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} Y$ .

*Démonstration.* — Soit  $z \in T^a D_0^{\dagger, b}$  et posons  $z_i = \psi^m((1+T)^{-i}z)$ , de telle sorte que  $z = \sum_{i=0}^{p^m-1} (1+T)^i \cdot \varphi^m(z_i)$  et  $z_i \in T^{q-l(D_0)} D_0^{\dagger, b-m}$  (lemme II.3). On en déduit (prop. V.17) que  $x_i = (1+T)\varphi^m(\sigma_{\frac{1}{i}}(z_i))$  (pour  $i \in A$ ) et  $y_i = (1+T)\varphi^m(z_i)$  (pour  $i \in B$ ) sont des éléments de  $Y$  et on conclut en remarquant que  $z = \sum_{i \in A} \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x_i + \sum_{i \in B} \begin{pmatrix} 1 & i-1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y_i$ . La deuxième assertion s'en déduit, car si  $\psi(z) = 0$ , alors  $z_i = 0$  pour tout  $i \in B$ .

Revenons à la preuve de la prop. V.19. En appliquant le (ii) du lemme V.18, la prop. V.17 (i) et le lemme I.5 (dans cet ordre) on obtient, pour  $g \in K_m$ ,

$$\begin{aligned} (g-1)^n(Y) &\subset \tau_m^{q-l(D_0)-c+n} M_m^{\dagger, b-m} = \varphi^m(T)^{q-c-l(D_0)+n} M_m^{\dagger, b-m} \\ &\subset T^{p^m(q-c-l(D_0)+n)} D_0^{\dagger, b} \subset T^{a+p^m n-c_1} D_0^{\dagger, b}. \end{aligned}$$

On conclut pour le (ii) en utilisant le lemme V.20 et le fait que  $K_m$  est distingué dans  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ . Le (i) se démontre de la même manière, en utilisant le (i) du lemme V.18.

**V.6. Fin de la preuve du th. V.3.** — On note  $p_\Pi : D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi$  la projection naturelle. Elle envoie  $D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $\Pi_0$ . Couplée avec la prop. V.10, la proposition ci-dessous permet de conclure quant à la preuve du th. V.3.

**Proposition V.21.** — *Il existe une constante  $c_2$  telle que si  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b > 2m+1$  et  $z \in (T^a D_0^{\dagger, b}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , alors  $v := p_\Pi(z) \in \Pi^{(b)}$  et  $v^{(b)}(v) \geq ar_b - c_2$ .*

*Démonstration.* — Si  $z = (z_1, z_2) \in (T^a D_0^{\dagger, b}) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , alors  $z = z_1 + w \cdot \varphi(\psi(z_2))$  et  $\varphi(\psi(z_2)) \in T^{a-p(1+l(D))} D_0^{\dagger, b}$  (lemme II.3). Comme de plus  $Cr_b \leq C$ , il suffit de démontrer la proposition pour  $z \in T^a D_0^{\dagger, b}$ . Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme V.22.** — *Si  $z \in D_0 \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ , alors  $v_\Pi(p_\Pi(z)) \geq k$  si et seulement si  $\{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1} \in p^k \mathcal{O}_L$  pour tout  $\check{z} \in \check{D}_0^{\dagger} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .*

*Démonstration.* — Par dualité de Schikhof [27], le vecteur  $v = p_\Pi(z)$  de  $\Pi_0$  est dans  $p^k \Pi_0$  si et seulement si  $l(v) \in p^k \mathcal{O}_L$  pour tout  $l \in \Pi_0^*$ . Le résultat suit du fait que  $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$  induit un isomorphisme  $\Pi_0^* = \check{D}_0^{\dagger} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

Revenons à la démonstration de la prop. V.21. Les lemmes V.22 et IV.7, la  $K_m$ -équivariance de  $\{, \}$  et l'inclusion  $D_0^{\dagger} \subset T^{-l_1} D_0^{\dagger, b-1}$  ramènent la preuve de la prop. V.21 à celle de l'assertion suivante : il existe une constante  $C$  telle que

$$\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_p(\{b_m^\alpha \check{z}, z\}) - p^m r_b |\alpha| = \infty, \quad \inf_\alpha (v_p(\{b_m^\alpha \check{z}, z\}) - p^m r_b |\alpha|) \geq ar_b - C$$

pour tous  $a \in \mathbf{Z}$ ,  $b > 2m+1$ ,  $z \in T^a D_0^{\dagger, b}$  et  $\check{z} \in T^{-l_1} \check{D}_0^{\dagger, b-1}$ .

Nous allons montrer que  $C = l_1 + 4c_1$  convient. Comme  $\check{z} \in T^{-l_1} \check{D}_0^{\dagger, b-1}$  et  $T^{-l_1} \check{D}_0^{\dagger, b-1} \subset T^{-l_1} \check{D}_0^{\dagger, b}$ , on déduit de la prop. V.19 que

$$b_m^\alpha \check{z} \in T^{p^m|\alpha|-C} \check{D}_0^{\dagger, b-1} \subset T^{p^m|\alpha|-C} \check{D}_0^{\dagger, b}.$$

L'inégalité  $\inf_\alpha (v_p(\{b_m^\alpha \check{z}, z\}) - p^m r_b |\alpha|) \geq ar_b - C$  découle alors du lemme II.4.

Il nous reste à montrer que  $\lim_{|\alpha| \rightarrow \infty} v_p(\{b_m^\alpha \check{z}, z\}) - p^m r_b |\alpha| = \infty$ . Tout élément  $f$  de  $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$  peut s'écrire sous la forme

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k \left( \frac{p}{T^{n_b}} \right)^k,$$

avec  $f_k \in \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b-1}$  tendant vers 0 pour la topologie  $p$ -adique, donc on peut écrire

$$z = \sum_{k \geq 0} p^{u_k} y_k \left( \frac{p}{T^{n_b}} \right)^k,$$

avec  $y_k \in T^a D_0^{\dagger, b-1}$  et  $u_k \in \mathbf{N}$  tendant vers  $\infty$ . Notons

$$x_{k, \alpha} = \left\{ b_m^\alpha \check{z}, p^{u_k} y_k \left( \frac{p}{T^{n_b}} \right)^k \right\}.$$

On a

$$p^{u_k} y_k \left( \frac{p}{T^{n_b}} \right)^k \in p^{k+u_k} T^{a-kn_b} D_0^{\dagger, b-1} \subset p^{k+u_k} T^{a-kn_b} D_0^{\dagger, b}$$

et, comme on l'a déjà vu,

$$b_m^\alpha \check{z} \in T^{p^m|\alpha|-C} \check{D}_0^{\dagger, b-1} \subset T^{p^m|\alpha|-C} \check{D}_0^{\dagger, b}.$$

Combinées avec le lemme II.4, l'égalité  $n_b r_{b-1} = p$  et les inégalités  $ar_b, ar_{b-1} \geq -|a|$  et  $Cr_{b-1}, Cr_b \leq C$ , les relations précédentes donnent

$$v_p(x_{k, \alpha}) - p^m r_b |\alpha| \geq u_k - |a| - C + \max(0, (p-1)(p^m |\alpha| r_b - k)).$$

Un petit exercice d'analyse réelle montre alors que  $\inf_k (v_p(x_{k, \alpha}) - p^m r_b |\alpha|)$  tend vers  $+\infty$  quand  $|\alpha| \rightarrow \infty$ , ce qui permet de conclure.

## VI. Le module $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et l'espace $\Pi_{\delta}(D)^{\text{an}}$

On fixe dans ce chapitre une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ , avec  $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$ , et on note  $\Pi = \Pi_{\delta}(D)$  et  $\check{\Pi} = \Pi_{\delta-1}(\check{D})$ . On construit une extension non triviale  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  de  $\Pi^{\text{an}}$  par  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$ . Cette construction n'est pas utilisée dans le chapitre suivant, consacré à la preuve du th. 0.2, mais est très utile pour une étude fine de  $\Pi^{\text{an}}$  (cf. [12, 14, 16], par exemple).

**VI.1. Continuité de l'action de  $w_\delta$ .** — Soit  $D_0$  un  $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -réseau de  $D$  stable par  $\varphi$  et  $\Gamma$ . Soit  $m$  comme après la prop. V.17 et soient  $a \geq b > 2m$ . Fixons une base  $e_1, e_2, \dots, e_d$  de  $D_0^{\dagger, b}$  sur  $\mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}$ . C'est aussi une base de  $D^{[0, r_b]}$  sur  $\mathcal{E}^{[0, r_b]}$ , ce qui nous permet de poser

$$v^{[r_a, r_b]}(z) = \min_{1 \leq i \leq d} v^{[r_a, r_b]}(f_i) \quad \text{si} \quad z = \sum_{i=1}^d f_i e_i \in D^{[0, r_b]}.$$

Rappelons que  $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* = D^{\psi=0}$  (et de même si on remplace  $D$  par  $D^{(0, r_b]}$  pour  $b$  assez grand).

**Proposition VI.1.** — *Il existe une constante  $c$  telle que pour tous  $a \geq b > 2m$  et tout  $z \in (D^{(0, r_b]})^{\psi=0}$  on ait*

$$v^{[r_a, r_b]}(w_\delta(z)) \geq v^{[r_a, r_b]}(z) - c.$$

*Démonstration.* — On peut multiplier  $z$  par une puissance de  $p$  sans changer l'inégalité, donc on peut supposer que  $z \in D_0^{(0, r_b]}$  et  $[v^{[r_a, r_b]}(z)] = N \geq 1$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme VI.2.** — *Soient  $a, b, N \in \mathbf{N}^*$  tels que  $a \geq b$  et soit  $f \in \mathcal{O}_\mathcal{E}^{(0, r_b]}$ . Si  $v^{[r_a, r_b]}(f) \geq N$ , alors*

$$f \in \sum_{i=0}^{N-1} p^{N-1-i} T^{in_a} \mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}.$$

*Démonstration.* — Ecrivons

$$f = \sum_{n < 0} a_n T^n + \sum_{n=0}^{n_a-1} a_n T^n + \sum_{n=n_a}^{2n_a-1} a_n T^n + \dots + \sum_{n \geq (N-1)n_a} a_n T^n.$$

Par hypothèse  $v_p(a_n) + nr_a \geq N$  et  $v_p(a_n) + nr_b \geq N$  pour tout  $n$ . En particulier  $v_p(a_n) > N$  si  $n < 0$ , donc  $\sum_{n < 0} a_n T^n \in p^{N-1} \mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}$  (lemme I.1). Ensuite, si  $0 \leq n < n_a$ , on a  $v_p(a_n) > N - 1$ , donc  $\sum_{n=0}^{n_a-1} a_n T^n \in p^{N-1} \mathcal{O}_\mathcal{E}^+ \subset p^{N-1} \mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}$ . Le même argument montre que

$$\sum_{n=n_a}^{2n_a-1} a_n T^n \in p^{N-2} T^{n_a} \mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}, \dots, \quad \sum_{n \geq (N-1)n_a} a_n T^n \in T^{(N-1)n_a} \mathcal{O}_\mathcal{E}^{\dagger, b}.$$

Revenons à la preuve de la prop. VI.1. D'après le lemme VI.2 ci-dessus, on a  $z \in \sum_{i=0}^{N-1} p^{N-1-i} T^{in_a} D_0^{\dagger, b}$ . Puisque  $\psi(z) = 0$ , on a

$$z = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z) \in \sum_{i=0}^{N-1} p^{N-1-i} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(T^{in_a} D_0^{\dagger, b}).$$

Le lemme II.3 fournit une constante  $c_2$  telle que  $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(T^{in_a} D_0^{\dagger,b}) \subset (T^{in_a - c_2} D_0^{\dagger,b})^{\psi=0}$  pour tous  $a \geq b > 2m$  et tout  $i$ . Le (i) de la prop. V.19 fournit une constante  $c_1$  telle que  $w_\delta((T^d D_0^{\dagger,b})^{\psi=0}) \subset T^{d-c_1} D_0^{\dagger,b}$  pour tous  $b > 2m$  et  $d \in \mathbf{Z}$ . On a donc, avec  $c = c_1 + c_2$ ,

$$w_\delta(z) \in \sum_{i=0}^{N-1} p^{N-1-i} T^{in_a - c} D_0^{\dagger,b},$$

et donc

$$v^{[r_a, r_b]}(w_\delta(z)) \geq \inf_{0 \leq i < N} (N - 1 - i + (in_a - c)r_a) \geq N - 1 - c > v^{[r_a, r_b]}(z) - c - 2,$$

d'où le résultat.

**Corollaire VI.3.** — *L'involution  $w_\delta$  de  $(D^{(0, r_b]})^{\psi=0}$  s'étend de manière unique en une involution continue de  $(D^{]0, r_b])^{\psi=0}$  pour tout  $b > 2m$ .*

*Démonstration.* — Le module  $(D^{(0, r_b]})^{\psi=0} = \bigoplus_{i=1}^{p-1} (1+T)^i \varphi(D^{(0, r_{b-1}]})$  est dense dans  $(D^{]0, r_b])^{\psi=0} = \bigoplus_{i=1}^{p-1} (1+T)^i \varphi(D^{]0, r_{b-1}])$ , puisque  $D^{(0, r_{b-1}]}$  l'est dans  $D^{]0, r_{b-1}]}$ . Cela démontre l'unicité de l'extension éventuelle de  $w_\delta$ . L'existence est une conséquence de la proposition précédente, de la densité de  $(D^{(0, r_b]})^{\psi=0}$  dans  $(D^{]0, r_b])^{\psi=0}$  et de la complétude de  $(D^{]0, r_b])^{\psi=0}$ .

Le cor. VI.3 fournit une involution continue  $w_\delta$  sur  $D_{\text{rig}}^{\psi=0} = \bigcup_{b > 2m} (D^{]0, r_b])^{\psi=0}$ , qui étend l'involution  $w_\delta$  sur  $(D^\dagger)^{\psi=0}$ . On définit alors, de la manière usuelle

$$D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D_{\text{rig}} \times D_{\text{rig}}, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\},$$

que l'on munit de la topologie induite par l'inclusion  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \subset D_{\text{rig}} \times D_{\text{rig}}$ . Notons que l'application  $z \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z), \psi(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wz)))$  induit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \simeq D_{\text{rig}} \times D_{\text{rig}}$ , l'application inverse étant donnée par  $(z_1, z_2) \mapsto (z_1, \varphi(z_2) + w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)))$ . La densité de  $D^\dagger$  dans  $D_{\text{rig}}$  entraîne donc celle de  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .

## VI.2. L'action de $G$ sur $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$

**Proposition VI.4.** — *L'action de  $G$  sur  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  s'étend par continuité en une action continue de  $G$  sur  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ .*

*Démonstration.* — Les formules du squelette d'action (voir la rem. III.3) permettent de définir une action de  $G$  sur  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  (le fait qu'il s'agit bien d'une action découle de la densité de  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  dans  $D_{\text{rig}} \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$  et du fait que ces formules définissent une action de  $G$  sur  $D^\dagger \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ ). La continuité de l'action se démontre de la même manière que la prop. VI.1, en utilisant le (ii) de la prop. V.19.

On renvoie au § IV.3 pour les algèbres  $\mathcal{D}(K_m)$  et  $\mathcal{D}_h(K_m)$ , et au § V.2 pour les  $b_m^\alpha$ .

**Proposition VI.5.** — *Il existe une constante  $c$  telle que, pour tous  $a \geq b > 2m$ ,  $z \in D^{]0,rb]}$  et  $\alpha \in \mathbf{N}^4$ , on ait*

$$v^{[ra,rb]}(b_m^\alpha z) \geq v^{[ra,rb]}(z) + p^m |\alpha| r_a - c.$$

*Démonstration.* — La preuve est entièrement analogue à celle de la prop. VI.1, en utilisant le lemme VI.2 et le (ii) de la prop. V.19.

**Corollaire VI.6.** — *Pour tous  $a \geq b > 2m$ ,  $z \in D^{]0,rb]}$  et  $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha \in \mathcal{D}_{a-m}(K_m)$ , la série  $\sum_{\alpha} c_\alpha b_m^\alpha z$  converge dans  $D^{]0,rb]}$  et*

$$v^{[ra,rb]}(\sum_{\alpha} c_\alpha b_m^\alpha z) \geq v^{[ra,rb]}(z) + v^{(a-m)}(\lambda) - c.$$

*Démonstration.* — Une suite de  $D^{]0,rb]}$  converge dans  $D^{]0,rb]}$  si et seulement si elle converge pour la valuation  $v^{[ra,rb]}$  pour tous  $a \geq b$ . Le résultat suit donc de la proposition précédente et de la définition de  $v^{(a-m)}$ .

**Proposition VI.7.** — *Soit  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$ .*

- (i) *Si  $b$  est assez grand, l'action de  $H$  sur  $D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  s'étend en une structure de  $\mathcal{D}(H)$ -module topologique.*
- (ii)  *$D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est un  $\mathcal{D}(H)$ -module topologique.*

*Démonstration.* — Comme  $H$  est commensurable à  $K_m = 1 + p^m M_2(\mathbf{Z}_p)$  (avec  $m$  comme ci-dessus), on peut supposer que  $H = K_m$ . Si  $z = (z_1, z_2) \in D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , on peut écrire  $z$  sous la forme  $z = z_1 + w \cdot \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2)$ , avec  $z_1, \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) \in D^{]0,rb]}$ . En passant à la limite projective (sur  $a$ ) dans le cor. VI.6, on obtient une application continue  $\mathcal{D}(K_m) \times (D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , définie par  $(\lambda, z) \mapsto \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha z$  si  $\lambda = \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^4} c_\alpha b_m^\alpha$ . Cette application étend la structure de  $L[K_m]$ -module de  $D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , et comme  $L[K_m]$  est dense dans  $\mathcal{D}(K_m)$ , cela prouve que  $D^{]0,rb]}$   $\boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  est un  $\mathcal{D}(K_m)$ -module (topologique d'après ce qui précède). Ceci démontre le (i) et, le (ii) étant une conséquence immédiate du (i), cela permet de conclure.

**Proposition VI.8.** — *Soit  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$ , qui stabilise l'ouvert compact  $U \subset \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ . Alors  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} U$  est un sous- $\mathcal{D}(H)$ -module de  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et  $\text{Res}_U(\lambda \cdot z) = \lambda \cdot \text{Res}_U(z)$  pour tous  $z \in D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et  $\lambda \in \mathcal{D}(H)$ .*

*Démonstration.* — Cela découle de la continuité de l'action de  $\mathcal{D}(H)$ , de la densité de  $L[H]$  dans  $\mathcal{D}(H)$  et de la  $H$ -équivariance de l'application  $\text{Res}_U$ .

**VI.3. Description de  $\Pi^{\text{an}}$  via  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ .** — L'accouplement  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$  sur  $(\check{D}^{\dagger} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  s'étend en un accouplement  $G$ -équivariant parfait (voir la discussion qui précède [10, prop. V.2.10])

$$\{ , \}_{\mathbf{P}^1} : (\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) \rightarrow L.$$

**Théorème VI.9.** —  $(\Pi^{\text{an}})^*$  est isomorphe comme  $G$ -module topologique à l'orthogonal de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

*Démonstration.* — Soit  $M$  l'orthogonal de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  dans  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Notons que  $M$  est un sous- $\mathcal{D}(H)$ -module de  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  pour tout sous-groupe ouvert compact  $H$  de  $G$  (cela suit de la stabilité de  $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  par  $H$ , de la  $H$ -équivariance et continuité de  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ , de la densité de  $L[H]$  dans  $\mathcal{D}(H)$  et de la continuité de  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ ). Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme VI.10.** — Pour tout  $\check{z} \in \check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  l'application  $D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow L$ , donnée par  $z \mapsto \{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1}$ , est continue. De plus, l'application  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \rightarrow (D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)^*$  ainsi obtenue est continue.

*Démonstration.* — Il suffit de vérifier que pour tout  $\check{z} \in \check{D}_{\text{rig}}$  l'application  $z \mapsto \{\check{z}, z\}$  est une forme linéaire continue sur  $D^{\dagger}$  et que l'application  $\check{D}_{\text{rig}} \rightarrow (D^{\dagger})^*$  ainsi obtenue est continue. En revenant aux définitions des topologies de  $D^{\dagger}$  et  $\check{D}_{\text{rig}}$ , la continuité de  $\check{D}_{\text{rig}} \rightarrow (D^{\dagger})^*$  découle de l'inégalité

$$v_p(\{\check{z}, z\}) \geq kr_b + v^{[r_a, r_b]}(\check{z}) - 2$$

pour  $a \geq b > 2m$ ,  $k \geq 1$ ,  $z \in T^k D_0^{\dagger, b}$  et  $\check{z} \in D^{[0, r_b]}$ . Pour démontrer cette inégalité on se ramène par densité et  $L$ -linéarité (et en utilisant le (ii) du lemme I.3) à  $\check{z} \in \frac{1}{p} T^{N n_b} D_0^{\dagger, b}$ , avec  $N$  la partie entière de  $v^{[r_a, r_b]}(\check{z}) \geq 0$ . L'inégalité suit alors du lemme II.4.

Revenons à la preuve du th. VI.9. On déduit du lemme VI.10, de l'isomorphisme  $\Pi^{\text{an}} \simeq (D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  (cor. V.4) et de la définition de  $M$ , une application linéaire continue  $\phi : M \rightarrow (\Pi^{\text{an}})^*$ , induite par  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ . Explicitement, on a  $\langle \phi(\check{z}), v \rangle = \{\check{z}, z_v\}_{\mathbf{P}^1}$  pour tout relèvement  $z_v \in D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  de  $v \in \Pi^{\text{an}}$  et tout  $\check{z} \in M$ . L'application  $\phi$  est  $G$ -équivariante, puisque  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$  l'est. Nous allons montrer que  $\phi$  est un homéomorphisme, en construisant son inverse.

Commençons par constater que  $\phi$  est injective car un élément de  $\text{Ker}(\phi)$  est orthogonal à  $D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et donc à  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  par densité de  $D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , et donc est nul puisque  $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$  est un accouplement parfait.

Le (ii) de la prop. VI.7 montre que l'inclusion  $\Pi^* \simeq \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 \subset \check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  induit une application  $\mathcal{D}(H)$ -linéaire continue  $\xi : \mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^* \rightarrow \check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

Puisque  $\check{\Pi}^*$  et  $\Pi^*$  sont orthogonaux et  $M$  est un sous- $\mathcal{D}(H)$ -module de  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , l'image de  $\xi$  est contenue dans  $M$ .

La prop. IV.13 fournit un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques  $\iota : (\Pi^{\text{an}})^* \simeq \mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$  ( $H$  étant par exemple  $\text{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$ ), et la composée  $\iota \circ \phi \circ \xi$  est l'identité car c'est l'identité sur le sous-espace dense  $\Pi^*$  de  $\mathcal{D}(H) \otimes_{\Lambda(H)} \Pi^*$ .

Comme  $\phi$  est injective, cela implique que son inverse est  $\xi \circ \iota$ , ce qui permet de conclure.

**Corollaire VI.11.** —  $(\Pi^{\text{an}})^*$  et  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$  sont exactement orthogonaux pour l'accouplement  $\{ \cdot, \cdot \}_{\mathbf{P}^1}$ .

*Démonstration.* — Le th. VI.9 et le cor. III.22 montrent que  $(\Pi^{\text{an}})^*$  est l'orthogonal de  $\check{\Pi}^*$  dans  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Or  $\check{\Pi}^*$  est un sous-espace dense de  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$  (par densité de  $\check{\Pi}^{\text{an}}$  dans  $\check{\Pi}$  combinée à la réflexivité de  $\check{\Pi}^{\text{an}}$  et au théorème de Hahn-Banach), donc  $(\Pi^{\text{an}})^*$  est en fait l'orthogonal de  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$ , ce qui permet de conclure.

**Corollaire VI.12.** — L'injection  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^* \rightarrow D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  fournie par le th. VI.9 induit une suite exacte de  $G$ -modules topologiques

$$0 \rightarrow (\check{\Pi}^{\text{an}})^* \rightarrow D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \Pi^{\text{an}} \rightarrow 0.$$

*Démonstration.* — D'après le th. VI.9,  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$  est un sous-espace fermé de  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . Soit  $Y$  le quotient. Puisque  $\{ \cdot, \cdot \}_{\mathbf{P}^1}$  induit une dualité parfaite entre  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  et  $D_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ , on obtient un isomorphisme topologique de  $Y^*$  sur l'orthogonal de  $(\check{\Pi}^{\text{an}})^*$  dans  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , donc sur  $(\Pi^{\text{an}})^*$  (corollaire précédent). On a donc un isomorphisme de  $G$ -modules topologiques  $Y^* \simeq (\Pi^{\text{an}})^*$  et on conclut en observant que  $\Pi^{\text{an}}$  et  $Y$  sont réflexifs (pour le dernier, cela découle de ce que  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$  satisfait Hahn-Banach).

**Corollaire VI.13.** — Il existe  $m = m(D)$  tel que  $(\Pi^{\text{an}})^* \subset \check{D}^{[0, r_m]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ .

*Démonstration.* —  $(\Pi^{\text{an}})^*$  est un espace de Fréchet et le corollaire précédent fournit une injection continue dans  $\check{D}_{\text{rig}} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , qui est la réunion croissante des espaces de Fréchet  $\check{D}^{[0, r_m]} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ . Le résultat s'ensuit.

**Corollaire VI.14.** — Soit  $z \in D_{\text{rig}}$  tel que  $P(\varphi)z = 0$  pour un polynôme non nul  $P \in L[X]$ . Alors  $fz \in (\check{\Pi}^{\text{an}})^*$  pour tout  $f \in \mathcal{R}^+$ .

*Démonstration.* — Comme  $fz$  est à support  $\mathbf{Z}_p$ , on a  $\{fz, y\}_{\mathbf{P}^1} = \{fz, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} y\}$  pour tout  $y \in \check{D}^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ , et il suffit donc de vérifier que  $fz$  est orthogonal à  $\check{D}^{\natural}$ . Par linéarité et densité de  $L[T]$  dans  $\mathcal{R}^+$ , on peut supposer que  $f = (1+T)^k$ , avec  $k \in \mathbf{N}$ . Comme  $\check{D}^{\natural}$  est un  $\mathcal{E}^+$ -module et  $\{(1+T)^k \check{z}, (1+T)^k z\} = \{\check{z}, z\}$ , on peut supposer

que  $f = 1$ . Le résultat suit alors de ce que  $P(\psi)D^{\natural} = D^{\natural}$  [9, prop. II.5.15] et de ce que  $\varphi$  et  $\psi$  sont adjoints pour  $\{ , \}$ .

## VII. Complétés unitaires universels

**VII.1. Réseaux invariants minimaux.** — Soit  $G$  un groupe de Lie  $p$ -adique et soit  $\Pi$  une représentation continue de  $G$  sur un  $L$ -espace vectoriel localement convexe. Rappelons qu'une  $L$ -représentation de Banach  $B$  de  $G$  est dite unitaire si  $G$  préserve une valuation définissant la topologie de  $B$ . Le *complété unitaire universel*  $\widehat{\Pi}$  de  $\Pi$  est (s'il existe) une  $L$ -représentation de Banach unitaire de  $G$ , munie d'une application  $L$ -linéaire continue,  $G$ -équivariante  $\iota : \Pi \rightarrow \widehat{\Pi}$ , qui est universelle au sens suivant : pour toute  $L$ -représentation de Banach unitaire  $B$  de  $G$ , l'application

$$\mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\widehat{\Pi}, B) \rightarrow \mathrm{Hom}_{L[G]}^{\mathrm{cont}}(\Pi, B), \quad f \mapsto f \circ \iota$$

est une bijection. Autrement dit, tout morphisme continu  $\Pi \rightarrow B$  se factorise de manière unique à travers  $\iota : \Pi \rightarrow \widehat{\Pi}$ .

**Remarque VII.1.** — (i) Il découle facilement de la définition que si  $\widehat{\Pi}$  existe, alors l'image de  $\iota$  est dense dans  $\widehat{\Pi}$ , et que  $\widehat{\Pi}$  est unique à isomorphisme unique près.

(ii) Même si  $\widehat{\Pi}$  existe, il n'y a aucune raison a priori pour que  $\widehat{\Pi} \neq 0$ , et classifier les représentations de  $G$  ayant un complété universel non nul est un problème difficile et fondamental [7].

(iii) Si  $\Pi$  est topologiquement irréductible et si  $\widehat{\Pi}$  existe et est non nul, alors  $\Pi$  admet une valuation invariante par  $G$ . En effet, dans ce cas l'application naturelle  $\Pi \rightarrow \widehat{\Pi}$  est injective, ce qui permet de considérer la restriction de la valuation sur  $\widehat{\Pi}$  à  $\Pi$ .

Si  $\Pi$  est un  $L$ -espace vectoriel, un *réseau* de  $\Pi$  est un sous- $\mathcal{O}_L$ -module de  $\Pi$  qui engendre le  $L$ -espace vectoriel  $\Pi$  (on ne demande pas à un réseau d'être séparé pour la topologie  $p$ -adique ; un réseau peut donc contenir des sous- $L$ -espaces vectoriels). La remarque suivante d'Emerton [19, lemma 1.3] sera utile pour la suite :

**Lemme VII.2.** —  $\Pi$  admet un complété universel  $\widehat{\Pi}$  si et seulement si  $\Pi$  contient un  $\mathcal{O}_L$ -réseau  $M$  avec les propriétés suivantes :

- $M$  est ouvert dans  $\Pi$  et stable sous l'action de  $G$ .
- $M$  est minimal pour ces propriétés, i.e.  $M$  est contenu dans un homothétique de tout sous- $\mathcal{O}_L$ -réseau ouvert de  $\Pi$  stable par  $G$ .

De plus, dans ce cas

$$\widehat{\Pi} = L \otimes_{\mathcal{O}_L} \varprojlim (M/p^n M).$$

**VII.2. Le complété universel de  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p)$ .** — Soit  $U(\mathbf{Z}_p)$  le groupe  $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Considérons la  $U(\mathbf{Z}_p)$ -représentation de Banach unitaire admissible  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$ , l'action de  $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  étant donnée par  $((\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot \phi)(x) = \phi(x - b)$ . L'espace des vecteurs localement analytiques de  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$  est l'espace  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  des fonctions localement analytiques sur  $\mathbf{Z}_p$ , à valeurs dans  $L$ . Le résultat suivant montre que  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$  n'est pas le complété unitaire universel de  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ , et donc qu'on n'a pas forcément  $\widehat{\Pi^{\text{an}}} = \Pi$  pour une représentation de Banach unitaire admissible  $\Pi$ .

**Proposition VII.3.** —  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  n'a pas de complété unitaire universel.

*Démonstration.* — D'après le lemme VII.2, il suffit de montrer que tout réseau ouvert et  $\mathbf{Z}_p$ -stable  $\mathcal{L}$  dans  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  contient un réseau ouvert,  $\mathbf{Z}_p$ -stable et non commensurable avec  $\mathcal{L}$ . Soit  $\mathcal{L}$  un tel réseau et, pour  $n \geq 1$ , notons  $X_n$  la boule unité de  $\text{LA}^{(n)}(\mathbf{Z}_p)$  (pour lequel on renvoie au § IV.2). Nous aurons besoin du lemme suivant.

**Lemme VII.4.** — Soit  $(b_n)_{n \geq 1}$  une suite croissante dans  $\mathbf{N}$  et soient  $k, a \in \mathbf{N}^*$  tels que  $p^a X_k \subset \sum_{n \geq 1} p^{b_n} X_n$ . Alors  $b_k \leq 3a$ .

*Démonstration.* — Comme  $X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_{k-1}$  et  $X_n \subset \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_L)$  pour  $n \geq 1$ , on a

$$p^a X_k \subset X_{k-1} + p^{b_k} \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_L).$$

Soient  $N = 2a \cdot p^{k-1}(p-1)$  et  $\phi = p^{2a} \binom{x}{N}$ . Alors  $\phi \in X_k$ , et donc  $p^a \phi = \phi_1 + p^{b_k} \phi_2$ , avec  $\phi_1 \in X_{k-1}$  et  $\phi_2 \in \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_L)$ . En regardant les  $N$ -ièmes coefficients de Mahler on obtient la relation  $a_N(\phi_1) + p^{b_k} a_N(\phi_2) = p^{3a}$ , et comme  $v_p(a_N(\phi_1)) \geq Nr_{k-1} = 2pa > 3a$ , on en déduit que  $b_k = 3a - v_p(a_N(\phi_2)) \leq 3a$ , ce qui permet de conclure.

Revenons à la preuve de la prop. VII.3. Puisque  $\mathcal{L} \cap \text{LA}^{(n)}(\mathbf{Z}_p)$  est un voisinage de 0 dans  $\text{LA}^{(n)}(\mathbf{Z}_p)$ , il contient  $p^{a_n} X_n$  pour un certain  $a_n \in \mathbf{N}$ . Posons  $b_n = 4 \max(a_1, \dots, a_n) + n$  pour  $n \geq 1$  et  $\mathcal{L}' = \sum_{n \geq 1} p^{b_n} X_n$ . Alors  $\mathcal{L}'$  est un réseau  $\mathbf{Z}_p$ -invariant dans  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ , contenu dans  $\mathcal{L}$ . Il découle du lemme VII.4 que  $\mathcal{L}'$  n'est pas commensurable avec  $\mathcal{L}$ , ce qui permet de conclure.

On peut aussi voir  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$  et  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  comme des représentations du semi-groupe  $P^+ = \begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p - \{0\} & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , via

$$((\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}) \cdot \phi)(x) = \mathbf{1}_{b+a\mathbf{Z}_p}(x) \phi\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Le preuve du résultat suivant est une bonne préparation pour celle du th. VII.11.

**Proposition VII.5.** —  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$  est le complété unitaire universel de  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  en tant que  $P^+$ -représentation.

*Démonstration.* — Soit  $\mathcal{L} = \text{LA}(\mathbf{Z}_p, L) \cap \mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_L)$ . Nous allons montrer que  $\mathcal{L}$  est un réseau ouvert,  $P^+$ -stable et minimal. En utilisant le lemme VII.2 et la densité de  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$  dans  $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_p, L)$ , cela permet de conclure.

Soit  $\mathcal{L}'$  un réseau ouvert et  $P^+$ -invariant dans  $\text{LA}(\mathbf{Z}_p, L)$ . Soit  $X_n$  comme dans la preuve de la proposition VII.3. Quitte à remplacer  $\mathcal{L}'$  par  $p^N \mathcal{L}'$  pour un  $N \in \mathbf{Z}$ , on peut supposer que  $X_1 \subset \mathcal{L}'$ . Si  $n \geq 2$  et  $\phi \in X_n$ , alors

$$\phi = \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-i}{0} \phi_i, \quad \text{avec } \phi_i(x) = \phi(px+i),$$

et  $\phi_i \in X_{n-1}$  pour  $i = 0, \dots, p-1$ . Donc  $X_n \subset \sum_{i=0}^{p-1} \binom{p-i}{0} X_{n-1}$ , ce qui permet de conclure que  $\sum_{n \geq 1} X_n \subset \mathcal{L}'$ . Enfin, on vérifie sans mal, en utilisant les coefficients de Mahler, que  $\mathcal{L} \subset p^{-1} \sum_{n \geq 1} X_n$ , ce qui permet de conclure.

### VII.3. Cohérence et complétion universelle

On suppose, dans ce §, que  $G = \text{GL}_n(\mathbf{Q}_p)$ . Rappelons que  $S = G/KZ$ . On renvoie au § IV.7 pour la définition de  $d(s, 1)$  quand  $s \in S$ .

**Proposition VII.6.** — *Si  $\Pi$  est cohérente, alors  $\Pi^{\text{an}} = \cup_h \Pi^{(h)}$  admet un complété universel  $\widehat{\Pi^{\text{an}}}$ . Plus précisément, si  $h \geq m(\Pi)$  et si  $\Pi_0^{(h)}$  est la boule unité de  $\Pi^{(h)}$  pour la valuation  $v^{(h)}$ , alors*

$$M := \sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(h)}$$

*est un réseau ouvert de  $\Pi^{\text{an}}$  et  $\widehat{\Pi^{\text{an}}}$  est le complété de  $\Pi$  relativement à ce réseau.*

*Démonstration.* — Soient  $k \geq h \geq m(\Pi)$ . Pour chaque  $s \in S$  tel que  $d(s, 1) \leq k-h$  on choisit un relèvement  $\hat{s}$  à  $G$ . L'application continue

$$\bigoplus_{d(s,1) \leq k-h} \Pi^{(h)} \rightarrow \Pi^{(k)}, \quad (x_s)_{d(s,1) \leq k-h} \mapsto \sum_{d(s,1) \leq k-h} \hat{s} \cdot x_s$$

est surjective par hypothèse. On en déduit que  $\sum_{d(s,1) \leq k-h} s \cdot \Pi_0^{(h)}$  est un réseau ouvert de  $\Pi^{(k)}$ . En passant à la limite inductive, il s'ensuit que  $M = \sum_{s \in S} s \cdot \Pi_0^{(h)}$  est un réseau ouvert de  $\Pi$ , invariant par  $G$  par construction. Par ailleurs, si  $\mathcal{L}$  est un réseau ouvert de  $\Pi^{\text{an}}$ , alors  $\mathcal{L} \cap \Pi^{(h)}$  est un réseau ouvert de  $\Pi^{(h)}$ , donc il existe  $k$  tel que  $\mathcal{L} \supset p^k \Pi_0^{(h)}$ . Si de plus  $\mathcal{L}$  est invariant par  $G$ , alors  $\mathcal{L}$  contient  $p^k M$ . Ainsi,  $M$  est un réseau ouvert  $G$ -invariant et minimal à homothétie près. Le lemme VII.2 permet de conclure.

**Remarque VII.7.** — Il n'est pas difficile de voir, en reprenant les arguments ci-dessus, que la valuation  $v^{(h)}$  sur  $\Pi^{(h)}$  est génératrice au sens d'Emerton [19, def. 1.13].

Autrement dit, la cohérence implique l'existence d'une valuation génératrice (il suffirait que  $\Pi$  soit engendré algébriquement par  $\Pi^{(h)}$  pour  $h$  assez grand) et donc la prop. VII.6 peut aussi se déduire de la prop. 1.14 de [19].

**VII.4. Functorialité.** — Si  $u \in \text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\Pi_1, \Pi_2)$ , et si  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  admettent des complétés universels, alors il existe un unique morphisme  $\hat{u} \in \text{Hom}_{L[G]}^{\text{cont}}(\hat{\Pi}_1, \hat{\Pi}_2)$ , tel que  $\hat{u} \circ \iota_1 = \iota_2 \circ u$ , où  $\iota_i : \Pi_i \rightarrow \hat{\Pi}_i$  est l'application canonique.

**Proposition VII.8.** — Soit  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$  une suite exacte stricte de représentations de  $G$  sur des  $L$ -espaces vectoriels localement convexes. Si  $\hat{\Pi}$  existe, alors :

- (i)  $\hat{\Pi}_2$  existe aussi, et le morphisme  $\hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_2$  induit par  $\Pi \rightarrow \Pi_2$  est surjectif.
- (ii) Si de plus  $\hat{\Pi}_1$  existe, alors  $\text{Im}(\hat{\Pi}_1 \rightarrow \hat{\Pi})$  est dense dans  $\text{Ker}(\hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_2)$ .

*Démonstration.* — (i) Soit  $M$  un réseau ouvert,  $G$ -stable et minimal (à homothétie près) de  $\Pi$ , comme dans le lemme VII.2. Comme  $\Pi \rightarrow \Pi_2$  est stricte et surjective, l'image  $M_2$  de  $M$  dans  $\Pi_2$  est un réseau ouvert de  $\Pi_2$ , stable par  $G$ . Si  $M'_2$  est un autre réseau ouvert de  $\Pi_2$ , stable par  $G$ , et si  $M'$  est l'image inverse de  $M'_2$  dans  $\Pi$ , alors  $M' \cap M$  est un réseau ouvert de  $\Pi$  qui est stable par  $G$ ; comme  $M$  est minimal, il existe  $k \in \mathbf{N}$  tel que  $M' \cap M$  contienne  $p^k M$ , et donc  $M'$  contient  $p^k M_2$ . Il s'ensuit que  $M_2$  est minimal (à homothétie près) et le résultat suit du lemme VII.2, qui montre aussi que  $\varprojlim M_2/p^n M_2$  est un réseau ouvert borné de  $\hat{\Pi}_2$ .

(ii)  $M_1 = \Pi_1 \cap M$ , est un réseau ouvert de  $\Pi_1$ , stable par  $G$ , et on a une suite exacte  $0 \rightarrow M_1 \rightarrow M \rightarrow M_2 \rightarrow 0$ . En passant aux séparés complétés pour la topologie  $p$ -adique, puis en inversant  $p$ , on en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim M_1/p^n M_1) \rightarrow \hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_2 \rightarrow 0.$$

L'application naturelle  $M_1 \rightarrow \varprojlim M_1/p^n M_1$  induit un morphisme continu  $f : \Pi_1 \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim M_1/p^n M_1)$ , d'image dense. Par définition de  $\hat{\Pi}_1$ ,  $f$  est induit par un unique morphisme  $\varphi : \hat{\Pi}_1 \rightarrow L \otimes_{\mathcal{O}_L} (\varprojlim M_1/p^n M_1)$ . Puisque  $f$  est à image dense, il en est de même de  $\varphi$ , ce qui permet de conclure.

**Corollaire VII.9.** — On garde les notations et hypothèses de la prop. VII.8, et on suppose de plus que  $\hat{\Pi}_1$  est admissible. Alors on a une suite exacte de  $L$ -espaces vectoriels  $\hat{\Pi}_1 \rightarrow \hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_2 \rightarrow 0$ .

*Démonstration.* — Soient  $X = \text{Ker}(\hat{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_2)$  et  $H$  un sous-groupe ouvert compact de  $G$ . La prop. VII.8 montre l'existence d'un morphisme d'image dense  $f : \hat{\Pi}_1 \rightarrow X$ . Ainsi,  $X^*$  est un sous- $\Lambda(H)$ -module de  $(\hat{\Pi}_1)^*$ , qui est de type fini par admissibilité

de  $\widehat{\Pi}_1$ . Comme  $\Lambda(H)$  est noethérien,  $X$  est admissible, et l'image de  $f$  est fermée [27]. Donc  $f$  est surjectif, ce qui permet de conclure.

**Remarque VII.10.** — (i)  $\widehat{\Pi}_1 \rightarrow \widehat{\Pi}$  n'est pas toujours injective. Considérons par exemple une représentation  $\pi$  de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , lisse et supercuspidale. Alors le complété universel  $\widehat{\pi}$  de  $\pi$  existe et est une représentation de Banach non admissible [18, 5.1.18]. Mais  $\pi$  admet<sup>(24)</sup> une famille de complétions unitaires topologiquement irréductibles. Si  $\Pi$  est un tel complété, alors  $\pi$  s'injecte dans  $\Pi^{\mathrm{an}}$ , mais  $\widehat{\pi}$  ne s'injecte pas dans  $\widehat{\Pi}^{\mathrm{an}} = \Pi$  (cette égalité étant une conséquence du théorème 0.2).

(ii) On aurait pu aussi considérer une extension  $E_{\mathcal{L}}$  de la représentation  $W(\delta_1, \delta_2)$  par la steinberg analytique  $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$  de la rem. 0.3 de l'introduction (ces extensions sont paramétrées [12] par  $\mathcal{L} \in \mathbf{P}^1(L)$ ). Ici encore, le complété universel de  $E_{\mathcal{L}}$  est un quotient de celui de  $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$  par un sous-espace non trivial, et donc le complété universel de  $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$  ne s'injecte pas dans celui de  $E_{\mathcal{L}}$ .

(iii) Dans les deux exemples précédents,  $\widehat{\Pi}_1$  n'est pas admissible, et nous ne connaissons pas d'exemple avec  $\widehat{\Pi}_1$  admissible.

### VII.5. Le complété universel de $\Pi^{\mathrm{an}}$

Supposons dorénavant que  $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ .

**Théorème VII.11.** — Si  $\Pi \in \mathrm{Rep}_L(G)$ , alors  $\Pi^{\mathrm{an}}$  est cohérente et son complété universel est  $\Pi$ .

*Démonstration.* — La preuve va demander quelques préliminaires. On commence par supposer que  $\Pi = \Pi_{\delta}(D)$  pour un  $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ . Soit  $D_0$  un réseau de  $D$  et soit  $\Pi_0 = \Pi_{\delta}(D_0)$ , un réseau de  $\Pi$ , ouvert, borné et  $G$ -stable. Pour tout  $b > m(D)$  on note  $X_b$  le sous- $\mathcal{O}_L$ -module  $(D_0^{\dagger, b} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) / (D_0^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$  de  $\Pi_0$ . Soit  $\Pi_0^{(b)}$  la boule unité de  $\Pi^{(b)}$  pour la valuation  $v^{(b)}$ . Les prop. V.10 et V.21, et le fait que  $p \in T^{n_b} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\dagger, b}$ , montrent qu'il existe  $b_0 > m(D)$  et une constante  $c$  tels que  $p^c \Pi_0^{(b)} \subset X_b \subset p^{-c} \Pi_0^{(b)}$  pour tout  $b \geq b_0$ .

**Lemme VII.12.** — Il existe une constante  $c_1$  telle que pour tout  $b \geq b_0$

$$p^{c_1} X_b \subset \sum_{d(g,1) \leq b-b_0} g \cdot X_{b_0}.$$

<sup>(24)</sup>Cela découle de la compatibilité entre la correspondance de Langlands classique et celle  $p$ -adique, voir [10, th. 0.21].

*Démonstration.* — Il existe  $c_1$  tel que  $w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(D_0^{\dagger,b})) \subset p^{-c_1} D_0^{\dagger,b}$  pour tout  $b \geq b_0$  (utiliser la prop. V.19 et le fait que  $p \in T^{n_b} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ). On a donc  $p^{c_1} D_0^{\dagger,b} \subset D_0^{\dagger,b} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . Ensuite, tout  $z \in D_0^{\dagger,b}$  s'écrit sous la forme

$$z = \sum_{i=0}^{p^{b-b_0}-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{b-b_0} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} u_i,$$

avec  $u_i = \psi^{b-b_0}((1+T)^{-i}z) \in D_0^{\dagger,b_0}$ . Puisque tout  $x \in D_0^{\dagger,b} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  s'écrit  $x = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x) + w \cdot \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w \cdot x)$ , on en déduit que

$$p^{c_1}(D_0^{\dagger,b} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1) \subset \sum_{d(g,1) \leq b-b_0} g \cdot (D_0^{\dagger,b_0} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1),$$

ce qui permet de conclure.

**Lemme VII.13.** — On a  $\Pi^{\text{an}} \cap \Pi_0 \subset p^{-(c+c_1+1)} \sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(b_0)}$ .

*Démonstration.* — Soit  $v \in p \cdot (\Pi_0 \cap \Pi^{\text{an}})$ . Alors  $v$  a un relèvement  $z$  à  $pD_0 \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$  et, puisque  $v \in \Pi^{\text{an}}$ , le cor. V.4 montre que  $z \in D^{\dagger} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ . Puisque  $pD_0 \cap D^{\dagger} \subset \cup_{b \geq b_0} D_0^{\dagger,b}$  (cela se déduit du lemme I.2), on conclut que  $v \in X_b$  pour un certain  $b \geq b_0$ . Or, le lemme précédent et l'inclusion  $X_{b_0} \subset p^{-c} \Pi_0^{(b_0)}$  entraînent

$$X_b \subset p^{-c-c_1} \sum_{d(g,1) \leq b-b_0} g \cdot \Pi_0^{(b_0)} \subset p^{-c-c_1} \sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(b_0)},$$

ce qui permet de conclure.

Revenons à la preuve du th. VII.11. En tensorisant par  $L$  l'inclusion du lemme VII.12 on obtient  $\Pi^{(b)} \subset \sum_{d(g,1) \leq b-b_0} g \cdot \Pi^{(b_0)}$  pour tout  $b \geq b_0$ , ce qui montre que  $\Pi^{\text{an}}$  est cohérente. La prop. VII.6 montre que  $\widehat{\Pi^{\text{an}}}$  existe, et c'est le complété de  $\Pi^{\text{an}}$  par rapport au réseau minimal (à homothétie près)  $\sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(b_0)}$ . Le lemme VII.13 montre que  $M = \Pi^{\text{an}} \cap \Pi_0$  est commensurable à  $\sum_{g \in G} g \cdot \Pi_0^{(b_0)}$ , donc  $\widehat{\Pi^{\text{an}}}$  est le complété de  $\Pi^{\text{an}}$  par rapport au réseau  $M$ . Puisque  $\Pi^{\text{an}}$  est dense dans  $\Pi$ , l'injection naturelle  $M/p^n M \rightarrow \Pi_0/p^n \Pi_0$  est un isomorphisme. En passant à la limite et en inversant  $p$ , on obtient  $\widehat{\Pi^{\text{an}}} = \Pi$ .

Jusque là nous avons supposé que  $\Pi = \Pi_{\delta}(D)$  pour une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$ . Supposons maintenant que  $\Pi \in \text{Rep}_L(G)$  est quelconque. Disons que  $\Pi$  est *bonne* si elle est cohérente et égale au complété unitaire universel de ses vecteurs localement analytiques. Notons que si  $\Pi$  est une représentation cohérente, alors  $\widehat{\Pi^{\text{an}}}$  existe (prop. VII.6) et l'injection  $\Pi^{\text{an}} \rightarrow \Pi$  induit un morphisme  $\widehat{\Pi^{\text{an}}} \rightarrow \Pi$ . Notons aussi qu'une représentation de dimension finie est bonne.

Le th. III.45 nous fournit une paire  $G$ -compatible  $(D, \delta)$  et une application  $\beta : \Pi_{\delta}(D) \rightarrow \Pi/\Pi^{\text{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$ , dont le noyau et le conoyau sont de dimension finie sur  $L$ .

Comme  $\Pi^{\mathrm{SL}_2(\mathbf{Q}_p)}$  est de dimension finie (cor. III.37), et comme  $\Pi_\delta(D)$  est bonne d'après ce qui précède, le résultat s'obtient en appliquant plusieurs fois le lemme suivant.

**Lemme VII.14.** — *Soit  $0 \rightarrow \Pi_1 \rightarrow \Pi \rightarrow \Pi_2 \rightarrow 0$  une suite exacte dans  $\mathrm{Rep}_L(G)$ . Si  $\Pi_1$  est bonne et si  $\Pi$  ou  $\Pi_2$  est bonne, l'autre l'est aussi.*

*Démonstration.* — L'exactitude du foncteur  $\Pi \mapsto \Pi^{\mathrm{an}}$  nous fournit une suite exacte  $0 \rightarrow \Pi_1^{\mathrm{an}} \rightarrow \Pi^{\mathrm{an}} \rightarrow \Pi_2^{\mathrm{an}} \rightarrow 0$ . Puisque la cohérence est stable par quotient et extension (prop. IV.22), les hypothèses faites entraînent la cohérence de  $\Pi_1, \Pi$  et  $\Pi_2$  et donc (prop. VII.6) l'existence de  $\widehat{\Pi_1^{\mathrm{an}}}, \widehat{\Pi^{\mathrm{an}}}$  et  $\widehat{\Pi_2^{\mathrm{an}}}$ . De plus, comme  $\Pi_1$  est bonne,  $\widehat{\Pi_1^{\mathrm{an}}} \simeq \Pi_1$  est admissible. Le cor. VII.9 fournit donc une suite exacte  $\widehat{\Pi_1^{\mathrm{an}}} \rightarrow \widehat{\Pi^{\mathrm{an}}} \rightarrow \widehat{\Pi_2^{\mathrm{an}}} \rightarrow 0$ , s'insérant dans un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc} & & \widehat{\Pi_1^{\mathrm{an}}} & \longrightarrow & \widehat{\Pi^{\mathrm{an}}} & \longrightarrow & \widehat{\Pi_2^{\mathrm{an}}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \Pi_1 & \longrightarrow & \Pi & \longrightarrow & \Pi_2 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Par hypothèse la flèche verticale de gauche est un isomorphisme. Une chasse au diagramme montre que si une des flèches verticales restantes est un isomorphisme, l'autre l'est aussi, ce qui permet de conclure.

### Références

- [1] Y. AMICE, Interpolation  $p$ -adique, Bull. Soc. France **92** (1964), 117–180.
- [2] L. BARTHEL et R. LIVNÉ, Irreducible modular representations of  $\mathrm{GL}_2$  of a local field, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.
- [3] L. BERGER, Représentations modulaires de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et représentations galoisiennes de dimension 2, Astérisque **330** (2010), 263–279.
- [4] L. BERGER et P. COLMEZ, Familles de représentations de de Rham et monodromie  $p$ -adique, Astérisque **319** (2008), 303–337.
- [5] C. BREUIL, Sur quelques représentations modulaires et  $p$ -adiques de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  I, Compositio Math. **138** (2003), 165–188.
- [6] C. BREUIL, Invariant  $L$  et série spéciale  $p$ -adique, Ann. E.N.S. **37** (2004), 559–610.
- [7] C. BREUIL et P. SCHNEIDER, First steps towards  $p$ -adic Langlands functoriality, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 149–180.
- [8] F. CHERBONNIER et P. COLMEZ, Représentations  $p$ -adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.
- [9] P. COLMEZ,  $(\varphi, \Gamma)$ -modules et représentations du mirabolique de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , Astérisque **330** (2010), 61–153.
- [10] P. COLMEZ, Représentations de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$  et  $(\varphi, \Gamma)$ -modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.
- [11] P. COLMEZ, La série principale unitaire de  $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ , Astérisque **330** (2010), 213–262.

- [12] P. COLMEZ, La série principale unitaire de  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  : vecteurs localement analytiques, à paraître dans Automorphic Forms and Galois Representations (2011), London Mathematical Society - EPSRC Durham Symposium.
- [13] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU et V. PAŠKŪNAS, en préparation.
- [14] G. DOSPINESCU, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale  $p$ -adique pour  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , Math. Ann. **354** (2012), 627–657.
- [15] G. DOSPINESCU et B. SCHRAEN, Endomorphism algebras of admissible  $p$ -adic representations of  $p$ -adic Lie groups, Representation Theory **17** (2013), 237–246.
- [16] G. DOSPINESCU, Extensions de représentations de de Rham et vecteurs localement algébriques, preprint.
- [17] K. DIXON, M. DU SAUTOY, A. MANN et D. SEGAL, Analytic pro- $p$ -groups, 2nd edition, Cambridge University Press, 1999.
- [18] M. EMERTON, A local-global compatibility conjecture in the  $p$ -adic Langlands programme for  $GL_2/\mathbf{Q}$ , Pure and Applied Math. Quarterly **2** (2006), 279–393.
- [19] M. EMERTON,  $p$ -adic  $L$ -functions and unitary completions of representations of  $p$ -adic reductive groups, Duke Math. J. **130** (2005), 353–392.
- [20] M. EMERTON, Locally analytic vectors in representations of locally  $p$ -adic analytic groups, to appear in Memoirs of the AMS, disponible à <http://www.math.northwestern.edu/~emerton/preprints.html>.
- [21] J.-M. FONTAINE, Représentations  $p$ -adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol II*, Progr. Math. **87**, Birkhäuser, 1990, 249–309.
- [22] R. LIU, B. XIE, et Y. ZHANG, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$ , Ann. E.N.S. **45** (2012), 167–190.
- [23] K. KEDLAYA, A  $p$ -adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.
- [24] M. KISIN, Deformations of  $G_{\mathbf{Q}_p}$  and  $GL_2(\mathbf{Q}_p)$  representations, Astérisque **330** (2010), 511–528.
- [25] V. PAŠKŪNAS, The image of Colmez’s Montréal functor, Publ. IHES (à paraître).
- [26] G. PEREZ-GARCIA et W. SCHIKHOF, *Locally convex spaces over non-archimedean valued fields*, Cambridge studies in advanced mathematics, 2010.
- [27] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380.
- [28] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, Algebras of  $p$ -adic distributions and admissible representations, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.

---

PIERRE COLMEZ, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail* : [colmez@math.jussieu.fr](mailto:colmez@math.jussieu.fr)

GABRIEL DOSPINESCU, UMPA, École Normale Supérieure de Lyon, 46 allée d’Italie, 69007 Lyon, France • *E-mail* : [gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr](mailto:gabriel.dospinescu@ens-lyon.fr)