
LE PROGRAMME DE FONTAINE

par

Pierre Colmez

Three rings for the Elven-kings under the sky,

$\mathbf{B}_{\text{cris}}, \mathbf{B}_{\text{st}}, \mathbf{B}_{\text{dR}},$

Seven for the Dwarf-lords in their halls of stone,

$\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{B}_{\mathbf{Q}_p}, \mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \tilde{\mathbf{A}},$

Nine for mortal Men doomed to die,

$\mathbf{Q}_p, \mathbf{Z}_p, \mathbf{F}_p, \overline{\mathbf{Q}}_p, \overline{\mathbf{F}}_p, \mathbf{C}_p, \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}, \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}, \mathbf{B}_{\text{HT}},$

One ring to rule them all,

$\mathbf{A}_{\text{inf}}.$

Introduction

J'ai vu Fontaine pour la première fois à un exposé qu'il a donné au séminaire Delange-Poitou-Pisot en 1985. Je ne me souviens plus de rien sauf du fait qu'au milieu de tas de choses incompréhensibles, il avait parlé d'un $2i\pi$ p -adique qui avait l'air particulièrement difficile à définir.

L'année suivante, je me suis retrouvé assistant normalien à Grenoble avec Fontaine comme patron officiel (mon problème de thèse m'avait été fourni par John Coates, alors en poste à Orsay), mais il était à Minneapolis pour collaborer avec William Messing. Je n'ai donc commencé à discuter avec lui que l'année d'après, à son retour des États-Unis. Pour donner corps à une idée absurde qui me trottait dans la tête, j'avais besoin que la valuation p -adique de $2i\pi$ vaille $\frac{1}{p-1}$ et il m'a confirmé que cette formule lui disait quelque chose (je l'ai trouvée quelques années plus tard, sous une forme déguisée, dans son joli article [5]). Encouragé par cette réponse, je me suis mis à essayer de calculer la valuation p -adique d'autres nombres intéressants et je suis vite tombé sur un problème que je ne savais pas comment attaquer. Je suis donc retourné discuter avec Fontaine et j'étais tombé sur la bonne personne puisque ce genre de questions était précisément l'objet de son cours Peccot ; il m'a donc renvoyé

au volume d’Astérisque [2] issu de ce cours puis, pour faire bonne mesure, m’a donné la solution dans le cas qui m’intéressait à l’époque [54]; j’ai eu, par la suite [55], besoin d’un cas plus général et ce volume d’Astérisque m’a été indispensable.

Cela m’a permis de me familiariser avec les anneaux \mathbf{B}_{cris} et \mathbf{B}_{dR} . Cette première rencontre avec les anneaux de Fontaine et le programme de Fontaine est loin d’avoir été la dernière : une fois que l’on s’est approprié un de ces fameux anneaux, il est difficile de s’en détacher... J’ai eu de multiples occasions de discuter des aspects de ce programme avec Fontaine, au gré de mes visites à Orsay (du temps où le RER B marchait), ou pendant des conférences et programmes spéciaux, un peu partout dans le monde. Je lui dois par exemple la suggestion, lors d’une conférence à Venise, que le « lemme fondamental » (nommé ainsi pour faire râler les automorphes) de notre article en commun pouvait servir de point de départ pour le développement d’une théorie d’objets analytiques analogues à ses presque \mathbf{C}_p -représentations. Quand j’ai enfin réussi à mettre sur pied la théorie en question [56], il a commencé à tout réinterpréter de manière beaucoup plus naturelle et géométrique et il est dommage que l’article annoncé (cf. [17]), en collaboration avec son étudiant Jérôme Plût, n’ait jamais vu le jour (ce n’est pas le seul article dont la non publication est regrettable, mais comme Fontaine racontait à qui voulait bien l’entendre les idées qu’ils poursuivait, la plupart des résultats qu’il n’a pas écrits l’ont été par d’autres).

Que mon chemin ait croisé celui de Jean-Marc Fontaine a été une des grandes chances de ma vie, et contribuer à son programme un des bonheurs de ma carrière de mathématicien. Fontaine avait un talent spécial pour définir les bons objets et poser les bonnes questions et, dans la suite de ce texte, j’essaie de présenter ces objets et les conjectures qui les lient, en mettant l’accent sur les contributions de Fontaine lui-même à la preuve de ces conjectures.

Un survol rapide du programme. — Le corps \mathbf{R} des nombres réels n’est pas le seul complété possible de \mathbf{Q} : à chaque nombre premier p est associé un complété \mathbf{Q}_p (le corps des nombres p -adiques); il y a donc, en sus du monde réel, un monde p -adique pour chaque nombre premier p ; le théorème d’Ostrowski dit que ce sont tous les mondes possibles et la manière dont ces mondes interagissent est encore très mystérieuse. Le programme de Fontaine vit complètement dans le monde p -adique; il a deux versants : un versant arithmétique visant à décrire et classifier les \mathbf{Q}_p -représentations du groupe de Galois absolu G_K d’une extension finie K de \mathbf{Q}_p , et un versant géométrique visant à comprendre les \mathbf{Q}_p -représentations de G_K provenant de la géométrie.

La partie géométrique du programme, motivation initiale du programme, repose sur les anneaux \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} et \mathbf{B}_{dR} dont les propriétés sont énoncées au n° 1.4.3 et la construction au § 1.5. Ces anneaux permettent d’énoncer les conjectures C_{cris} , C_{st} et C_{dR} de Fontaine décrivant les représentations de G_K venant de la géométrie (n° 1.4.4). En ce qui concerne la partie arithmétique du programme, ces anneaux

permettent aussi de découper, à l'intérieur des \mathbf{Q}_p -représentations de G_K , des sous-classes privilégiées de représentations (contenant celles venant de la géométrie) : les représentations cristallines, semi-stables, de Rham, etc. Deux conjectures de Fontaine (la conjecture de monodromie p -adique « de Rham \Rightarrow potentiellement semi-stable » et la conjecture « faiblement admissible \Rightarrow admissible ») fournissent une description complète de ces classes de représentations en termes d'objets provenant de l'algèbre linéaire, nettement plus faciles à décrire. (Tout ceci est expliqué dans le § 2.2.)

Un autre anneau de Fontaine (qu'il note $\widehat{\mathcal{E}^{\text{nr}}}$) est à la base de la théorie des (φ, Γ) -modules (cf. § 2.3) dont le but est de donner une description de toutes les \mathbf{Q}_p -représentations de G_K , ce qui constitue une perspective orthogonale à la précédente. Cette théorie est l'outil le plus puissant dont on dispose à l'heure actuelle pour étudier les \mathbf{Q}_p -représentations de G_K .

Enfin, je dirai quelques mots (§ 3) d'un addendum relativement récent : la courbe de Fargues-Fontaine, un objet fascinant qui permet de « géométriser » toute la partie arithmétique du programme, et plus [65].

Je ne parlerai pas de plusieurs directions importantes récentes, en particulier la convergence avec le programme de Langlands local [48, 57] ou tout ce qui a trait à des résultats « en famille » car cela nous entraînerait trop loin (et de nouveaux objets apparaissent régulièrement, l'un des derniers en date [63] répondant au nom poétique de champ des (φ, Γ) -modules d'Emerton et Gee).

Je ne dirai rien non plus des applications [46, 14, 27] de ce programme aux valeurs spéciales de fonctions L (le programme de Fontaine fournit les outils pour décoder complètement – conjecturalement – l'information arithmétique contenue dans des nombres comme $\zeta(k) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^k}$, pour k entier ≥ 2), ni à l'étude des points rationnels sur les courbes [75, 37, 77].

Applications globales. — Avant de passer à la description du programme de Fontaine, je voudrais indiquer brièvement comment on l'utilise pour étudier les représentations de $G_{\mathbf{Q}} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ (après tout, ce sont plutôt elles qui intéressent les arithméticiens) et, en particulier, comment il intervient dans la correspondance de Langlands globale (dans le sens Galois \rightarrow automorphe, le plus difficile et le plus intéressant pour un arithméticien). Je m'excuse du flou artistique de ce qui va suivre ; le reste du texte est plus précis.

La géométrie algébrique fournit des \mathbf{Q}_p -représentations de $G_{\mathbf{Q}}$ en pagaille ; celles-ci ont des propriétés spéciales. Les inclusions de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} et \mathbf{Q}_ℓ fournissent des inclusions $G_{\mathbf{R}} \subset G_{\mathbf{Q}}$ et $G_{\mathbf{Q}_\ell} \subset G_{\mathbf{Q}}$ pour tout nombre premier ℓ . Si $\rho : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$ vient de la géométrie, sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_\ell}$ est, d'après Grothendieck, « non ramifiée » pour tout ℓ sauf un nombre fini, et sa restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ est « de Rham », d'après la conjecture C_{dR} de Fontaine. Une représentation ayant ces propriétés est dite *géométrique* (terminologie introduite par Fontaine et Mazur) et la *conjecture de Fontaine-Mazur* [15] est que toute \mathbf{Q}_p -représentation géométrique de $G_{\mathbf{Q}}$, absolument

irréductible, provient de la géométrie. Cette conjecture a l'air complètement folle, mais ce qui a donné confiance à Fontaine et Mazur est un petit argument de dimensions pour les représentations de dimension 2. Les \mathbf{Q}_p -représentations de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}_p}$ forment un espace analytique de dimension 5 ; à l'intérieur, les représentations de de Rham sont une réunion dénombrable d'espaces de dimension 2 (les deux conjectures de Fontaine mentionnées ci-dessus ramènent la question à l'étude d'objets provenant de l'algèbre linéaire, dont les espaces de paramètres sont relativement faciles à décrire). Par ailleurs, les représentations de dimension 2 de $G_{\mathbf{Q}}$, non ramifiées en dehors d'un ensemble fini fixé de nombres premiers, forment un espace qui est, conjecturalement, de dimension ≤ 3 . Comme $3 + 2 \leq 5$, on peut espérer que les espaces se coupent transversalement et donc qu'il n'y ait qu'un nombre dénombrable de représentations géométriques (ce qui est le minimum pour croire à la conjecture, vu qu'il n'y a qu'un nombre dénombrable de variétés algébriques définies sur \mathbf{Q}).

Il n'y a aucun espoir d'attaquer directement cette conjecture, et on cherche plutôt à prouver qu'une représentation géométrique de $G_{\mathbf{Q}}$ est modulaire (i.e. est la représentation attachée à une représentation automorphe, ce qui présume que l'on sache attacher des représentations galoisiennes aux formes automorphes ce qui fait, depuis 60 ans, l'objet d'un nombre impressionnant de travaux, le plus abouti étant [84]). Depuis les travaux de Wiles [95] sur le grand théorème de Fermat, on procède de la manière suivante pour prouver que $\rho : G_{\mathbf{Q}} \rightarrow \mathbf{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$ est modulaire :

- On montre que la réduction $\bar{\rho}$ de ρ modulo p est modulaire (programme de Langlands modulo p dont l'archétype est la conjecture de Serre [91, 90] prouvée par Khare et Wintenberger [73, 74]).

- On fixe une composante irréductible de l'espace des représentations de de Rham, et on montre, en comparant des espaces de déformations, que l'on a assez de formes automorphes pour atteindre toutes les représentations géométriques dont la réduction modulo p est $\bar{\rho}$ et dont la restriction à $G_{\mathbf{Q}_p}$ varie dans cette composante.

Démontrer que $\bar{\rho}$ est modulaire n'a pas l'air beaucoup plus facile que de prouver que ρ est modulaire, mais Taylor [93] a réalisé que l'on pouvait souvent prouver un résultat plus faible (modularité de la restriction à un sous-groupe ouvert d'indice fini), ce qui a permis de démontrer des tas de théorèmes de modularité potentielle avec des retombées arithmétiques spectaculaires (en direction des conjectures plus que quinquagénaires de Sato-Tate et de Hasse-Weil), les derniers en date étant [34, 47].

En ce qui concerne le second point, plus la composante irréductible sur laquelle on travaille est compliquée et plus les résultats sont difficiles à prouver. Dans les applications à la correspondance de Langlands globale, on part d'un système de \mathbf{Q}_p -représentations, une pour chaque p , et il suffit de prouver la modularité de l'une d'entre elles, ce qui permet de prendre p assez grand pour que la situation devienne sympathique (i.e. « Fontaine-Laffaille » en p). Dans les applications à la conjecture

de Fontaine-Mazur, on n'a qu'une représentation à notre disposition et il faudra attendre que la convergence, mentionnée ci-dessus, entre le programme de Fontaine et la correspondance de Langlands locale ait progressé un peu plus pour pouvoir avancer.

1. Périodes des variétés algébriques

1.1. Nombres p -adiques

1.1.1. *Le corps \mathbf{C}_p [76, 62].* — Le corps \mathbf{R} est le complété de \mathbf{Q} pour la valeur absolue $|\cdot|$; le corps des nombres p -adiques \mathbf{Q}_p est son complété pour la norme p -adique $|\cdot|_p$ définie de la manière suivante : si $a \in \mathbf{Z}$, on note $v_p(a)$ le nombre de fois qu'on peut diviser a par p (on a $v_p(0) = +\infty$). On a $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$ et $v_p(a+b) \geq \inf(v_p(a), v_p(b))$. La première propriété permet d'étendre v_p à \mathbf{Q} en posant $v_p(a/b) = v_p(a) - v_p(b)$ et implique que, si on pose $|x|_p = p^{-v_p(x)}$, alors $|xy|_p = |x|_p|y|_p$; la seconde implique que $|x+y|_p \leq \sup(|x|_p, |y|_p)$ (inégalité ultramétrique, plus forte que l'inégalité triangulaire).

L'inégalité ultramétrique fait que $\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p, |x|_p \leq 1\}$ est un sous-anneau de \mathbf{Q}_p , l'anneau des entiers p -adiques; on note \mathbf{Z}_p^* le groupe de ses unités (c'est l'ensemble des $x \in \mathbf{Z}_p$ vérifiant $|x|_p = 1$). L'application naturelle $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p$ est un isomorphisme pour tout n , ce qui fournit une seconde construction, algébrique, de \mathbf{Z}_p et \mathbf{Q}_p : $\mathbf{Z}_p = \varprojlim_n \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z} = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}, x_{n+1} = x_n \pmod{p^n}\}$ et $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Z}_p[\frac{1}{p}]$. Ces deux constructions de \mathbf{Q}_p permettent de combiner des méthodes purement algébriques et des méthodes analytiques pour attaquer les problèmes p -adiques, ce qui est souvent très utile.

La norme p -adique s'étend de manière unique à la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de \mathbf{Q}_p (si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$ et si $x \in K$, alors $|x|_p = |\mathbf{N}_{K/\mathbf{Q}_p}(x)|^{1/[K:\mathbf{Q}_p]}$: c'est la même formule que celle exprimant le module d'un nombre complexe). Le corps $\overline{\mathbf{Q}_p}$ n'est pas complet pour $|\cdot|_p$; on note \mathbf{C}_p son complété. Si L est un sous-corps de \mathbf{C}_p , on note $\mathcal{O}_L = \{x \in L, |x|_p \leq 1\}$ l'anneau de ses entiers, et \mathfrak{m}_L l'idéal $\{x \in L, |x|_p < 1\}$ (qui est maximal). L'algorithme de Newton permet de prouver que \mathbf{C}_p est algébriquement clos et donc que le processus s'arrête (ouf!). Les corps \mathbf{C} et \mathbf{C}_p ont même cardinal et sont algébriquement clos; si on croit à l'axiome du choix, on peut donc fabriquer un isomorphisme $\mathbf{C}_p \cong \mathbf{C}$, mais il n'en existe pas de raisonnable. Une grande partie de ce qui suit est issue du désir de comprendre quelles sont les incarnations p -adiques de nombres complexes intéressants comme $2i\pi = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z}$ ou bien encore ⁽¹⁾ $\frac{\Gamma(1/4)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)} = 2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}$.

1. Ce second nombre est une période (voir ci-dessous) de la courbe elliptique E d'équation $y^2 = x^3 - x$: c'est (au signe près) l'intégrale de $\omega = \frac{dx}{y}$ le long du chemin fermé dans $E(\mathbf{C})$ dont la projection dans $\mathbf{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (par $(x, y) \mapsto x$) est constituée du segment $[\infty, 1 + \varepsilon]$, suivi d'un cercle de centre 1 et rayon ε , suivi du segment $[1 + \varepsilon, \infty]$; l'intégrale ne dépend pas de ε et quand $\varepsilon \rightarrow 0$ la contribution du cercle tend vers 0, et comme $\sqrt{x^3-x}$ change de signe après avoir parcouru

1.1.2. *Le groupe $G_{\mathbf{Q}_p}$ [89].* — Une énorme différence entre \mathbf{R} et \mathbf{Q}_p est que \mathbf{R} est presque algébriquement clos, ce qui n'est pas le cas de \mathbf{Q}_p : la clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de \mathbf{Q}_p est de degré infini sur \mathbf{Q}_p et le groupe de Galois absolu $G_{\mathbf{Q}_p} = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p)$ est un groupe infini (mais profini, i.e. limite projective de groupes finis), très intéressant. Plus généralement, si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , le groupe $G_K = \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/K)$ est un groupe infini.

Le groupe $G_{\mathbf{Q}_p}$ admet une filtration décroissante naturelle par des « groupes de ramification ». Cela induit une filtration croissante naturelle sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ par des sous-corps $\overline{\mathbf{Q}_p}^{(u)}$, pour $u \geq 0$. Si $u < 1$, alors $\overline{\mathbf{Q}_p}^{(u)}$ est le corps \mathbf{Q}_p^{nr} obtenu en rajoutant à \mathbf{Q}_p toutes les racines de l'unité d'ordre premier à p . Le corps $\overline{\mathbf{Q}_p}^{(1)}$ s'obtient en rajoutant à \mathbf{Q}_p^{nr} les $p^{1/N}$, pour N premier à p , mais les $\overline{\mathbf{Q}_p}^{(u)}$, pour $u > 1$, n'ont pas de description sympathique.

Si ζ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p et si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\sigma(\zeta)$ est une racine de l'unité de même ordre. On en déduit l'existence de $\chi(\sigma) \in \mathbf{Z}_p^*$ tel que $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$, pour toute racine de l'unité d'ordre une puissance de p . Il n'est pas difficile de prouver que $\chi(\sigma\tau) = \chi(\sigma)\chi(\tau)$, et donc que $\chi : G_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$ est un morphisme de groupe : c'est le *caractère cyclotomique*; il va jouer un rôle important dans ce qui suit.

Le groupe $G_{\mathbf{Q}_p}$ agit par des isométries sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$, et l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbf{Q}_p}$ s'étend par continuité à \mathbf{C}_p : l'orbite sous l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ d'un élément de $\overline{\mathbf{Q}_p}$ est finie mais celle d'un élément de $\mathbf{C}_p \setminus \overline{\mathbf{Q}_p}$ ne l'est pas.

1.2. Périodes des courbes elliptiques

1.2.1. *Courbes elliptiques et réseaux de \mathbf{C} .* — Si Λ est un réseau de \mathbf{C} (i.e. $\Lambda = \mathbf{Z}\omega_1 \oplus \mathbf{Z}\omega_2$, où (ω_1, ω_2) est une base de \mathbf{C} sur \mathbf{R}), on définit une fonction (la fonction \wp de Weierstrass) méromorphe, Λ -périodique, par la formule

$$\wp(z, \Lambda) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

Comme une fonction holomorphe Λ -périodique est bornée et donc constante d'après le théorème de Liouville, un petit calcul montre que \wp vérifie l'équation différentielle $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$ où $g_2 = 60G_4(\Lambda)$ et $g_3 = 140G_6(\Lambda)$, et les $G_{2k}(\Lambda)$ sont les nombres complexes définis par :

$$G_2(\Lambda) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{|\omega|^{2s}}, \quad G_{2k}(\Lambda) = \sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{\omega^{2k}}, \quad \text{si } k \geq 2.$$

un cercle de rayon 1, les intégrales \int_1^∞ et \int_∞^1 sont égales (et pas opposées comme on pourrait le penser), et l'intégrale le long du chemin est $2 \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3-x}}$.

L'application $z \mapsto \phi(z) = (\wp(z), \wp'(z))$ est un isomorphisme de surfaces de Riemann compactes de \mathbf{C}/Λ sur les points complexes $E(\mathbf{C})$ de la courbe elliptique E d'équation affine $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$ (et d'équation projective $ZY^2 = 4X^3 - g_2XZ^2 - g_3Z^3$), envoyant 0 sur le point à l'infini de $E(\mathbf{C})$ (de coordonnées projectives $(0, 1, 0)$ correspondant à la direction verticale).

Via cet isomorphisme, la forme différentielle dz correspond à $\omega = \frac{dX}{Y}$ (i.e. $\phi^*\omega = \frac{\phi^*(dX)}{\phi^*Y} = \frac{d\wp}{\wp'} = dz$), et Λ s'identifie au *réseau des périodes* de ω (i.e. l'image du groupe d'homologie singulière $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ par $u \mapsto \int_u \omega$). L'application $(E, \omega) \mapsto \Lambda$ envoyant une courbe elliptique E sur \mathbf{C} , munie d'une forme différentielle holomorphe ω , sur le réseau des périodes de ω est une bijection sur l'ensemble des réseaux de \mathbf{C} .

Plus généralement, on peut intégrer une 1-forme fermée α sur \mathbf{C}/Λ (vue comme variété différentielle) le long d'un chemin fermé u , et $(\alpha, u) \mapsto \int_u \alpha$ fournit un accouplement (*l'accouplement des périodes*) entre le groupe de cohomologie de de Rham $H_{\text{dR}}^1(\mathbf{C}/\Lambda)$ – un \mathbf{C} -espace vectoriel de dimension 2 engendré par dz et $d\bar{z}$ – et $H_1(\mathbf{C}/\Lambda, \mathbf{Z})$, et cet accouplement induit, via ϕ , un isomorphisme (cas particulier du théorème de de Rham)

$$H_{\text{dR}}^1(E(\mathbf{C})) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}(H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z}), \mathbf{C}).$$

La décomposition $H_{\text{dR}}^1(\mathbf{C}/\Lambda) = \mathbf{C}dz \oplus \mathbf{C}d\bar{z}$ correspond, via ϕ , à la *décomposition de Hodge* $H_{\text{dR}}^i(X(\mathbf{C})) = \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}(X(\mathbf{C}))$ existant pour n'importe quelle variété projective lisse X sur \mathbf{C} (et pour tout degré i de cohomologie).

1.2.2. La formule de Legendre. — Pour construire un accouplement des périodes dans le monde p -adique, il y a deux difficultés évidentes et une plus cachée. Les difficultés évidentes sont d'interpréter p -adiquement les groupes $H_{\text{dR}}^1(E(\mathbf{C}))$ (que devient $d\bar{z}$?) et $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$: la topologie p -adique étant totalement discontinue, la notion de chemin p -adique est un peu minée.

Commençons par la première difficulté : comment interpréter $d\bar{z}$ de manière plus algébrique. La forme $\wp(z, \Lambda) dz$ n'est pas holomorphe mais les résidus en ses pôles sont nuls (i.e. elle est *de seconde espèce*). Elle fournit donc une forme linéaire sur $H_1(\mathbf{C}/\Lambda, \mathbf{Z})$: pour définir $\int_u \eta$, il suffit d'intégrer sur un chemin représentant u et qui évite les pôles ; la nullité du résidu faisant que le résultat ne change pas si on passe “juste en-dessous” ou “juste au-dessus” d'un pôle.

Par prolongement analytique en $s = 0$ de la formule

$$d\left(\sum_{\omega \in \Lambda} \frac{-1}{(z-\omega)|z-\omega|^{2s}}\right) = \sum_{\omega \in \Lambda} \left(\frac{(1+s) dz}{(z-\omega)^2|z-\omega|^{2s}} + \frac{s d\bar{z}}{|z-\omega|^{2+2s}}\right),$$

on obtient l'identité suivante⁽²⁾ dans $\text{Hom}(H_1(\mathbf{C}/\Lambda, \mathbf{Z}), \mathbf{C})$, où ω_1, ω_2 est une base directe de Λ sur \mathbf{Z} :

$$\wp dz + G_2(\Lambda) dz + \frac{2i\pi}{\omega_2\bar{\omega}_1 - \omega_1\bar{\omega}_2} d\bar{z} = 0.$$

Soit maintenant E une courbe elliptique définie sur un corps K de caractéristique 0 (i.e. E est d'équation affine $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$, avec $g_2, g_3 \in K$), et soit $K(E)$ le corps des fonctions rationnelles sur E (i.e. $K(E) = \frac{K(X)[Y]}{(Y^2 - 4X^3 + g_2X + g_3)}$). Ce qui précède suggère de considérer le groupe $H_{\text{dR}}^1(E/K)$, quotient de l'espace des $\alpha \in \Omega_{K(E)}^1 = K(E) \cdot \frac{dX}{Y}$, de seconde espèce, par l'espace des dF , pour $F \in K(E)$: on obtient de la sorte un K -espace vectoriel de dimension 2 dont une base est $\omega = \frac{dX}{Y}$, $\eta = X \frac{dX}{Y}$.

Si K est un sous-corps de \mathbf{C} , on a un isomorphisme naturel

$$H_{\text{dR}}^1(E(\mathbf{C})) \cong \mathbf{C} \otimes_K H_{\text{dR}}^1(E/K),$$

puisque $\phi^*\eta = \wp(z, \Lambda) dz$. Par contre, la décomposition de Hodge ci-dessus n'existe pas forcément sur K car elle fait intervenir $G_2(\Lambda)$ qui est, en général, transcendant sur K . Ce qui subsiste est la *filtration de Hodge* : $\text{Fil}^0 = H_{\text{dR}}^1(E/K)$, $\text{Fil}^2 = 0$ et Fil^1 est le sous-espace $H^0(E, \Omega^1)$ des formes holomorphes (de dimension 1, engendré par ω).

Choisissons une base directe e_1, e_2 de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ sur \mathbf{Z} . La matrice $\begin{pmatrix} \omega_1 & \eta_1 \\ \omega_2 & \eta_2 \end{pmatrix}$, où $\omega_i = \int_{u_i} \omega$ et $\eta_i = \int_{u_i} \eta$, est "la" *matrice des périodes de E* (elle dépend, de manière transparente, des choix de ω, η, u_1, u_2 , d'où les guillemets autour du "la"). Les coefficients de cette matrice des périodes (i.e. *les périodes de E*) sont des nombres intéressants sur lesquels on dispose de plus de conjectures que de résultats. La relation entre $\wp dz, dz$ et $d\bar{z}$ fournit *la formule de Legendre* : si $u, v \in H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$, alors

$$\int_u \omega \int_v \eta - \int_v \omega \int_u \eta = 2i\pi (u\sharp v),$$

où $u\sharp v \in \mathbf{Z}$ est le déterminant de u, v dans la base e_1, e_2 . Si E est définie sur $\bar{\mathbf{Q}}$, on a le résultat remarquable suivant.

Théorème 1.1. — (Nesterenko [79]) *Les trois nombres $e^{2i\pi \omega_2/\omega_1}$, $\frac{\omega_1}{2i\pi}$ et $\frac{\eta_1}{2i\pi}$ sont algébriquement indépendants.*

Si on part de la courbe elliptique d'équation $Y^2 = 4X^3 - X$, le théorème précédent implique que π, e^π et $\Gamma(\frac{1}{4})$ sont algébriquement indépendants.

2. La série $\sum_{\omega \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{|\omega|^{2+2s}}$ a un pôle en $s = 0$ de résidu $\frac{\pi}{\text{vol}(\Lambda)} = \frac{2i\pi}{\omega_2\bar{\omega}_1 - \omega_1\bar{\omega}_2}$ comme on le voit en comparant avec l'intégrale $\int_{|z| \geq 1} \frac{dx dy}{|z|^{2+2s}}$.

1.2.3. *La formule de Legendre p -adique.* — Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , et si E est une courbe elliptique définie sur K , le groupe $H_{\text{dR}}^1(E/K)$ a une existence p -adique. Qu'en est-il de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$?

• *Le module de Tate.* Si M est un groupe commutatif, on note $M[p^n]$ le sous-groupe des x vérifiant $p^n x = 0$, et on définit le *module de Tate* $T_p(M)$ de M comme l'ensemble des $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$, avec $u_n \in M[p^n]$ et $pu_{n+1} = u_n$, pour tout n . Alors $T_p(M)$ est un \mathbf{Z}_p -module car chacun des $M[p^n]$ l'est (\mathbf{Z}_p agissant à travers $\mathbf{Z}_p/p^n = \mathbf{Z}/p^n$). Par exemple, si Λ est un réseau de \mathbf{C} , l'application $u \mapsto (p^{-n}u)_{n \in \mathbf{N}}$ identifie Λ à un sous- \mathbf{Z} -module de $T_p(\mathbf{C}/\Lambda)$ et on a $T_p(\mathbf{C}/\Lambda) = \mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$.

Maintenant, via l'isomorphisme $\phi : \mathbf{C}/\Lambda \cong E(\mathbf{C})$, la loi d'addition sur \mathbf{C}/Λ induit une loi d'addition sur $E(\mathbf{C})$ pour laquelle l'élément neutre (noté 0) est le point à l'infini. On a $P_1 + P_2 + P_3 = 0$ si et seulement si P_1, P_2, P_3 sont les points d'intersection (avec multiplicité) de E avec une droite du plan projectif, ce qui fournit des formules purement algébriques pour cette loi de groupe, et si E est définie sur K , il en est de même de la loi d'addition. En transportant l'identité $T_p(\mathbf{C}/\Lambda) = \mathbf{Z}_p \otimes_{\mathbf{Z}} \Lambda$, on obtient un isomorphisme naturel $\mathbf{Z}_p \otimes H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \cong T_p(E)$ qui montre que *l'on peut définir $\mathbf{Z}_p \otimes H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ de manière purement algébrique*, sans parler de chemin. Si E est définie sur K , l'addition étant définie sur K , le module $T_p(E)$ est muni d'une action \mathbf{Z}_p -linéaire continue de G_K .

Si K est une extension finie de \mathbf{Q}_p , et si E est une courbe elliptique définie sur K , un analogue p -adique de l'accouplement de périodes $(\omega, u) \mapsto \int_u \omega$ sur $H_{\text{dR}}^1(E(\mathbf{C})) \times H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ serait donc un accouplement $(\omega, u) \mapsto \int_u \omega$ sur $H_{\text{dR}}^1(E/K) \times T_p(E)$, et comme G_K agit p -adiquement continûment sur $T_p(E)$, on veut que cet accouplement respecte cette action de G_K (i.e. $\int_{\sigma(u)} \omega = \sigma(\int_u \omega)$). Comme nous allons le voir, ceci conduit à une difficulté imprévue.

• *L'accouplement de Weil.* La formule de Legendre a un avatar algébrique donné par l'accouplement de Weil $(u, v) \mapsto \langle u, v \rangle_n$ de $E[p^n] \times E[p^n]$ dans μ_{p^n} . Cet accouplement est antisymétrique et parfait (il identifie $E[p^n]$ à $\text{Hom}(E[p^n], \mu_{p^n})$). Si E est définie sur K , cet accouplement commute à l'action de G_K ; si K est un sous-corps de \mathbf{C} , si $\phi : \mathbf{C}/\Lambda \cong E(\mathbf{C})$ comme d'habitude, et si $u, v \in \Lambda$, alors

$$\langle \phi(\frac{u}{p^n}), \phi(\frac{v}{p^n}) \rangle_n = \exp(2i\pi \frac{u\sharp v}{p^n}).$$

Les $\langle \cdot, \cdot \rangle_n$ se recollent pour fabriquer un accouplement \mathbf{Z}_p -linéaire, antisymétrique $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p(E) \times T_p(E) \rightarrow T_p(\mu_{p^\infty})$, parfait et commutant à l'action de G_K , ce qui fournit un isomorphisme $\wedge^2 T_p(E) \cong T_p(\mu_{p^\infty})$ de $\mathbf{Z}_p[G_K]$ -modules.

Supposons maintenant E définie sur \mathbf{Q} (et donc aussi sur \mathbf{Q}_p et \mathbf{C}). Soit e_1, e_2 une base orientée de $H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ sur \mathbf{Z} ; c'est aussi une base de $T_p(E)$ sur \mathbf{Z}_p , et on note $u\sharp v$, si $u, v \in T_p(E)$, le déterminant de (u, v) dans la base (e_1, e_2) . D'après la formule de Legendre, $\int_u \omega \int_v \eta - \int_v \omega \int_u \eta = 2i\pi (u\sharp v)$, si $u, v \in H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$. Si on dispose d'un accouplement « périodes p -adiques » $H_{\text{dR}}^1(E/\mathbf{Q}_p) \times T_p(E) \rightarrow \mathbf{C}_p$, alors $(u, v) \mapsto \int_u \omega \int_v \eta - \int_v \omega \int_u \eta$ est une forme bilinéaire alternée sur $T_p(E)$, et donc de

la forme $(2i\pi)_p(u\sharp v)$, avec $(2i\pi)_p \in \mathbf{C}_p$. Si cet accouplement est non dégénéré, alors $(2i\pi)_p \neq 0$. Maintenant, une forme bilinéaire alternée sur $T_p(E)$ n'est rien d'autre qu'une forme linéaire sur $\wedge^2 T_p(E) \cong T_p(\mu_{p^\infty})$. Or $u\sharp v \in \mathbf{Z}_p$ est fixe par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ agit par multiplication par $\chi(\sigma)$ sur $T_p(\mu_{p^\infty})$ (par définition de χ). Il s'ensuit que, si l'accouplement « périodes p -adiques » commute, comme on le souhaite, à $G_{\mathbf{Q}_p}$, on doit avoir

$$\sigma((2i\pi)_p) = \chi(\sigma)(2i\pi)_p, \quad \text{pour tout } \sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}.$$

1.2.4. *Pas de $2i\pi$ dans \mathbf{C}_p .* — Le résultat suivant, première pierre de la théorie de Hodge p -adique, montre que ce n'est pas possible.

Théorème 1.2. — (Tate [92]) *Soit $k \in \mathbf{Z}$. Alors*

$$\{x \in \mathbf{C}_p, \sigma(x) = \chi(\sigma)^k x, \forall \sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}\} = \begin{cases} \mathbf{Q}_p & \text{si } k = 0, \\ \{0\} & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Pour $k = 1$, ce théorème dit qu'il n'y a pas de $2i\pi$ dans \mathbf{C}_p . Le cas $k = 0$ (théorème d'Ax-Sen-Tate) a une histoire amusante. On peut tracer les débuts de ce qui deviendra la théorie de Hodge p -adique dans une série d'échanges [91] entre Serre et Tate du début de l'année 1965 (Serre 07/01/65, Tate 12/01/65, Serre 29/01/65, Tate 02/02/65, etc.). Dans sa lettre du 02/02/65, Tate considère que c'est un exercice, mais quelques mois plus tard (lettre du 28/05/65), Serre commence à s'inquiéter : « Depuis un certain temps, j'essaie vainement de prouver ce que tu dis être un exercice (as-tu vraiment regardé ?) [...] J'ai d'abord cru que « c'était évident », et plus j'ai regardé, moins c'est devenu évident ; si bien que depuis quelques jours, j'essaie plutôt de faire un contre-exemple. » (Que $(\overline{\mathbf{Q}}_p)^{G_{\mathbf{Q}_p}} = \mathbf{Q}_p$ est une conséquence de la théorie de Galois, mais il n'y a aucune raison, a priori, pour que $(\overline{\mathbf{Q}}_p)^{G_{\mathbf{Q}_p}}$ soit dense dans $(\mathbf{C}_p)^{G_{\mathbf{Q}_p}}$ bien que $\overline{\mathbf{Q}}_p$ soit dense dans \mathbf{C}_p .) Tout est rentré dans l'ordre en 1966, et nous avons maintenant trois preuves de ce résultat par Tate, par Sen et par Ax (celle d'Ax (janvier 1967) est très astucieuse et totalement élémentaire mais apporte moins que les deux autres).

Puisque $2i\pi$ n'existe pas dans \mathbf{C}_p , on peut envisager de le rajouter de force, et donc de considérer l'anneau $\mathbf{B}_{\text{HT}} = \mathbf{C}_p[t, t^{-1}]$, anneau que l'on munit d'une action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ en faisant agir $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur t par le caractère cyclotomique (i.e. $\sigma(t) = \chi(\sigma)t$ si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$) et d'une graduation stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$ en posant $\text{Gr}^i \mathbf{B}_{\text{HT}} = t^i \mathbf{C}_p$ si $i \in \mathbf{Z}$. Le th. 1.2 peut se reformuler sous la forme : les points fixes de \mathbf{B}_{HT} sous l'action de \mathcal{G}_K sont

$$\mathbf{B}_{\text{HT}}^{G_K} = K.$$

On n'a toujours pas d'accouplement naturel $H_{\text{dR}}^1(E/K) \times T_p(E) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{HT}}$, non dégénéré et commutant à l'action de G_K , mais on s'en rapproche⁽³⁾ : il existe un accouplement naturel non dégénéré $(H^0(E, \Omega^1) \oplus H^1(E, \mathcal{O})) \times T_p(E) \rightarrow \mathbf{B}_{\text{HT}}$, et cet accouplement commute à l'action de G_K . Il y a plusieurs manières de construire cet

3. La filtration de Hodge fournit une suite exacte $0 \rightarrow H^0(E, \Omega^1) \rightarrow H_{\text{dR}}^1(E/K) \rightarrow H^1(E, \mathcal{O}) \rightarrow 0$.

accouplement (Tate, Raynaud, Coleman, Fontaine). Je vais expliquer la construction de Fontaine de la partie de l'accouplement qui ne se réalise pas dans \mathbf{C}_p , à savoir l'accouplement $H^0(E, \Omega^1) \times T_p(E) \rightarrow \mathbf{C}_p t$.

1.2.5. Une première approximation d'un $2i\pi$ p -adique. — Une des raisons pour lesquelles $2i\pi$ n'existe pas dans \mathbf{C}_p est que sur \mathbf{C}_p^* , une fois choisie la valeur de $\log p$, on a $\log(xy) = \log x + \log y$ pour tous x, y (alors que, sur \mathbf{C} , cette formule n'est vraie qu'à un multiple de $2i\pi$ près) : c'est dû à l'ultramétrie de la norme p -adique. En particulier, si ε_n est une racine p^n -ième de 1, alors $p^n \log \varepsilon_n = \log \varepsilon_n^{p^n} = \log 1 = 0$, et donc $\log \varepsilon_n = 0$. Fontaine a réalisé que cela n'impliquait nullement que la différentielle $\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}$ (formellement $d \log \varepsilon_n$) soit nulle. Cette différentielle vit dans le module Ω des différentielles de Kähler de $\overline{\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p}}$ sur \mathbf{Z}_p (si A est une \mathbf{Z}_p -algèbre, le module Ω_{A/\mathbf{Z}_p} des différentielles de Kähler de A sur \mathbf{Z}_p est le A -module engendré par des symboles da , pour $a \in A$, avec les relations naturelles $da = 0$, si $a \in \mathbf{Z}_p$, et $d(a+b) = da + db$ et $d(ab) = a db + b da$ si $a, b \in A$). On munit Ω de l'action évidente de $G_{\mathbf{Q}_p}$, i.e. $\sigma(da) = \sigma(a) d(\sigma(x))$.

Théorème 1.3. — (Fontaine [5]) *Fixons un générateur $(\varepsilon_n)_n$ de $T_p(\mu_{p^\infty})$.*

- (i) $\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n} = p \frac{d\varepsilon_{n+1}}{\varepsilon_{n+1}}$, si $n \in \mathbf{N}$ et $\sigma(\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}) = \chi(\sigma) \frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}$, si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ et $n \in \mathbf{N}$.
- (ii) Soit $\mathfrak{a} = \{a \in \overline{\mathbf{Q}_p}, v_p(a) \geq -\frac{1}{p-1}\}$. L'application $p^{-n}a \mapsto a \frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n}$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $a \in \overline{\mathbf{Q}_p}$, induit un isomorphisme $\iota : \overline{\mathbf{Q}_p}/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \Omega$, et on a $\sigma(\iota(a)) = \chi(\sigma)\iota(\sigma(a))$, si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ et $a \in \overline{\mathbf{Q}_p}$.

Le (i) est juste une traduction de ce que $\varepsilon_n = \varepsilon_{n+1}^p$ et $\sigma(\varepsilon_n) = \varepsilon_n^{\chi(\sigma)}$. La preuve du (ii) est un exercice un peu astucieux reposant sur le résultat standard suivant : si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, il existe $\alpha \in \mathcal{O}_K$ tel que $\mathcal{O}_K = \mathbf{Z}_p[\alpha]$; si $P \in \mathbf{Z}_p[X]$ est le polynôme minimal de α , alors $0 = dP(\alpha) = P'(\alpha)d\alpha$ et l'application $a \mapsto a d\alpha$ induit un isomorphisme $\mathcal{O}_K/P'(\alpha)\mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{O}_K/\mathbf{Z}_p}$.

Remarque 1.4. — Soit $T_p(\Omega)$ le module de Tate de Ω . Il ressort du (i) que $(\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n})_n \in T_p(\Omega)$, et on déduit du (ii) un isomorphisme $\widehat{\mathfrak{a}t} \xrightarrow{\sim} T_p(\Omega)$, où $\widehat{\mathfrak{a}}$ est l'adhérence de \mathfrak{a} dans \mathbf{C}_p (et donc $\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathfrak{a} = \mathbf{C}_p/\widehat{\mathfrak{a}}$), envoyant at sur $(\iota(p^{-n}a))_n$, et commutant à l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$. En particulier, $t = (\frac{d\varepsilon_n}{\varepsilon_n})_n$ se comporte comme on le voudrait pour un $2i\pi$ p -adique (c'est une première approximation du $2i\pi$ p -adique de Fontaine), et le $\frac{1}{p-1}$ apparaissant dans la définition de \mathfrak{a} correspond à la formule $v_p(2i\pi) = \frac{1}{p-1}$.

Soit maintenant E une courbe elliptique définie sur K , d'équation $Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$. Soit $\omega = \frac{dX}{Y} = \frac{2dY}{12X^2 - g_2}$ comme d'habitude. On suppose, pour simplifier, que $g_2, g_3 \in \mathcal{O}_K$ et que $4X^3 - g_2X - g_3$ n'a pas de racine double modulo \mathfrak{m}_K : cela a pour conséquence le fait que l'addition \oplus sur E (et donc aussi la multiplication m_p par p) est définie sur \mathcal{O}_K et que, si $v = (x, y) \in E(\overline{\mathbf{Q}_p})$, alors au moins une des expressions $\frac{dx}{y}, \frac{2dy}{12x^2 - g_2}, d(\frac{x}{y}) - xd(\frac{1}{y})$ a un sens dans Ω (si deux de ces expressions ont

un sens, elles donnent le même résultat grâce aux manipulations usuelles sur les formes différentielles, et on définit $v^*\omega \in \Omega$ comme n'importe laquelle de ces expressions).

La forme ω est invariante par translation et on a $m_p^*\omega = p\omega$ (sur \mathbf{C}/Λ , cela correspond à ce que $d(z+a) = dz$ et $d(pz) = pdz$); on en déduit que $(v_1 \oplus v_2)^*\omega = v_1^*\omega + v_2^*\omega$ et $m_p(v)^*\omega = pv^*\omega$. (Si on ne fait pas l'hypothèse simplificatrice, ces deux formules restent vraies pour $p^r\omega$, où r est assez grand pour tuer les dénominateurs apparaissant dans les formules d'addition.)

Pour construire l'accouplement $H^0(E, \Omega^1) \times T_p(E) \rightarrow \mathbf{C}_p t$, il suffit alors de définir $\int_u \omega$, si $u = (u_n)_n \in T_p(E)$, comme $(u_n^*\omega)_n \in T_p(\Omega)$ (de même, $t = (\varepsilon_n^* \frac{dT}{T})_n \in T_p(\Omega)$). Que l'on obtienne bien un élément de $T_p(\Omega)$ résulte de $m_p(v)^*\omega = pv^*\omega$; la \mathbf{Z}_p -linéarité résulte de $(v_1 \oplus v_2)^*\omega = v_1^*\omega + v_2^*\omega$, et la commutation à l'action de G_K est immédiate sur la définition de l'action de G_K sur Ω .

1.3. Périodes et théorèmes de comparaison

1.3.1. La cohomologie de de Rham algébrique. — Soit X une variété projective lisse, de dimension d , définie sur un corps K de caractéristique 0. On dispose, grâce à Grothendieck [67], d'une définition purement algébrique de la cohomologie de de Rham de X : les $H_{\text{dR}}^i(X/K)$ sont les groupes d'hypercohomologie⁽⁴⁾ du complexe de de Rham algébrique $\mathcal{O}_X \rightarrow \Omega_X^1 \rightarrow \Omega_X^2 \rightarrow \dots$.

Les $H_{\text{dR}}^i(X/K)$ sont des K -espaces vectoriels de dimension finie et, si K est un sous-corps de \mathbf{C} , on a un isomorphisme naturel $\mathbf{C} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X/K) \cong H_{\text{dR}}^i(X(\mathbf{C}))$, où $X(\mathbf{C})$ est considérée comme variété différentielle de dimension $2d$.

Le complexe de de Rham admet une filtration décroissante par les $0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow \Omega_X^q \rightarrow \Omega_X^{q+1} \rightarrow \dots$, ce qui munit les $H_{\text{dR}}^i(X/K)$ d'une filtration décroissante : la *filtration de Hodge*, et on a $\text{Fil}^q H_{\text{dR}}^i(X/K) / \text{Fil}^{q+1} H_{\text{dR}}^i(X/K) = H^{i-q}(X, \Omega_X^q)$. Par ailleurs, la théorie de Hodge fournit une description de $H_{\text{dR}}^i(X(\mathbf{C}))$ en termes de formes harmoniques, dont on déduit un isomorphisme naturel

$$\mathbf{C} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X/K) \cong \mathbf{C} \otimes_K \left(\bigoplus_{q=0}^i H^{i-q}(X, \Omega_X^q) \right).$$

Autrement dit, la filtration de Hodge est naturellement scindée sur \mathbf{C} (mais pas, en général, sur K car le scindage sur \mathbf{C} peut faire intervenir des nombres transcendants).

1.3.2. Périodes complexes. — Si K est un sous-corps de \mathbf{C} , l'intégration $\int_u \omega$ d'une i -forme différentielle ω le long d'un cycle u de dimension i fournit un accouplement $H_{\text{dR}}^i(X/K) \times H_i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}) \rightarrow \mathbf{C}$, et les $\int_u \omega$ sont les *périodes de ω* . Par ailleurs, le

4. Par exemple, si les U_i , $1 \leq i \leq r$, sont des ouverts affines recouvrant X , le groupe $H_{\text{dR}}^1(X/K)$ est le quotient de l'espace des $((\omega_i)_i, (f_{i,j})_{i < j})$, avec $\omega_i \in \Omega^1(U_i)$ et $f_{i,j} \in \mathcal{O}(U_i \cap U_j)$ vérifiant $d\omega_i = 0$ et $df_{i,j} = \omega_j - \omega_i$, par l'espace des $((df_i)_i, (f_j - f_i)_{i < j})$, avec $f_i \in \mathcal{O}(U_i)$.

Si E est une courbe elliptique, pour représenter la forme $\eta = X \frac{dX}{Y}$ de cette façon, on peut utiliser le fait que, si $a \in E(\mathbf{C})$, et si t_a est la translation par a (i.e. $t_a^*f(x) = f(x \ominus a)$), alors $t_a^*\eta - \eta = df_a$ sur $U_a \cap U_0$, où $U_0 = E \setminus \{0\}$ et $U_a = E \setminus \{a\}$; alors U_a et U_0 recouvrent E , $\eta \in \Omega^1(U_0)$, $t_a^*\eta \in \Omega^1(U_a)$, et $(\eta, t_a^*\eta, f_a)$ définit un 1-cocycle du complexe de de Rham de E dont l'image dans $H_{\text{dR}}^1(E/K)$ est η .

lemme de Poincaré permet de montrer que l'inclusion du complexe $\mathbf{C} \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ dans le complexe de de Rham induit un isomorphisme $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{C}) \cong H_{\text{dR}}^i(X(\mathbf{C}))$ (interprétation de Weil [49] de l'isomorphisme de de Rham), et donc un isomorphisme

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \cong \mathbf{C} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X/K),$$

et les périodes des formes différentielles apparaissent dans la matrice de cet isomorphisme dans des bases des deux espaces (l'espace $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ s'interprète donc aussi, naturellement, comme $\text{Hom}(H_i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Z}), \mathbf{Q})$). C'est sous cette forme que l'on va chercher à définir les périodes p -adiques. Notons que, si on combine l'isomorphisme ci-dessus avec la décomposition de Hodge de $\mathbf{C} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X/K)$ mentionnée plus haut, on obtient une *décomposition de Hodge* pour $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$, à savoir

$$\mathbf{C} \otimes_{\mathbf{Q}} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \cong \bigoplus_{q=0}^i (\mathbf{C} \otimes_K H^{i-q}(X, \Omega_X^q)).$$

Il reste à comprendre ce qui peut jouer le rôle de $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ et aussi dans quel anneau vivent les périodes p -adiques puisque nous avons vu que \mathbf{C}_p n'est pas un bon candidat.

1.3.3. Algébrisation de $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$. — Le groupe $H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ ne semble pas avoir d'incarnation purement algébrique; par contre $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ en a une (de la même manière que, pour une courbe elliptique E , le \mathbf{Z}_p -module $\mathbf{Z}_p \otimes H_1(E(\mathbf{C}), \mathbf{Z})$ s'identifie naturellement au module de Tate $T_p(E)$ de E): un théorème d'Artin [36] fournit un isomorphisme naturel $\mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Q}} H^i(X(\mathbf{C}), \mathbf{Q}) \cong H_{\text{ét}}^i(X, \mathbf{Q}_p)$ avec le groupe de cohomologie étale de X qui, lui, peut se définir de manière purement algébrique (cela repose sur un résultat fondamental de Grothendieck disant que, si X est une variété algébrique, alors tout revêtement topologique fini de $X(\mathbf{C})$ est aussi, naturellement, une variété algébrique).

Comme dans le cas de $T_p(E)$, si X est définie sur K , alors G_K agit sur l'extension des scalaires $X_{\overline{K}}$ de X à \overline{K} , et donc aussi sur $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$. Par ailleurs, la cohomologie étale ne change pas si on étend les scalaires à un autre corps algébriquement clos contenant \overline{K} . Comme les coefficients des équations définissant X vivent dans un sous-corps de K de type fini sur \mathbf{Q} et qu'un tel corps peut se plonger dans \mathbf{C} , on en déduit, via les théorèmes de comparaison précédents, l'identité

$$\dim_K H_{\text{dR}}^i(X/K) = \dim_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p).$$

En résumé, si K est un corps de caractéristique 0, et si X est une variété projective lisse de dimension d , définie sur K , alors, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, 2d\}$, on dispose de :

- $H_{\text{dR}}^i(X/K)$, un K -espace vectoriel de dimension finie muni d'une filtration décroissante par des sous- K -espaces vectoriels,
 - $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$, un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension finie muni d'une action \mathbf{Q}_p -linéaire continue de G_K ,
- ces deux espaces ayant la même dimension (sur leurs corps respectifs).

1.4. Périodes p -adiques

1.4.1. *La conjecture de Hodge-Tate.* — Supposons maintenant que $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, et continuons à supposer que X est une variété projective lisse, définie sur K . L’analogie p -adique du théorème de comparaison de de Rham serait un isomorphisme

$$B_\gamma \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \cong B_\gamma \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X/K)$$

commutant à l’action de G_K , où B_γ est une K -algèbre munie d’une action de G_K . Comme on l’a vu dans le cas des courbes elliptiques, on ne peut pas prendre $B_\gamma = \mathbf{C}_p$. Dans le même article [92] où il prouve le th. 1.2, Tate formule une conjecture sur l’existence d’un isomorphisme comme ci-dessus, mais où l’espace vectoriel filtré $H_{\text{dR}}^i(X/K)$ est remplacé par son gradué $\bigoplus_{q=0}^i H^{i-q}(X, \Omega^q)$ (ce qui perd pas mal d’information). La reformulation à la Fontaine de cette conjecture utilise l’anneau $\mathbf{B}_{\text{HT}} = \mathbf{C}_p[t, t^{-1}]$ introduit ci-dessus.

Conjecture 1.5. — (Tate) *Si X est une variété propre et lisse définie sur K et si $i \in \mathbf{N}$, on a un isomorphisme naturel*

$$(C_{\text{HT}}) \quad \iota_{\text{HT}} : \mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{B}_{\text{HT}} \otimes_K \left(\bigoplus_{q=0}^i H^{i-q}(X, \Omega^q) \right)$$

commutant à l’action de G_K et respectant les graduations.

Remarque 1.6. — (i) Si on prend les termes de degré 0 des deux côtés, on obtient un isomorphisme naturel, commutant à l’action de G_K ,

$$\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbf{Q}_p) \cong \bigoplus_{q=0}^i (t^{-q} \mathbf{C}_p \otimes_K H^{i-q}(X, \Omega^q)),$$

ce qui est la manière traditionnelle d’énoncer la conjecture : existence d’une *décomposition de Hodge-Tate* pour $\mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X \otimes \overline{K}, \mathbf{Q}_p)$ (encore plus traditionnellement, on note $\mathbf{C}_p(-q)$ le G_K -module $t^{-q} \mathbf{C}_p$: si V est un G_K -module et k est un entier, on note $V(k)$ le *tordu à la Tate* (Tate twist) de V par χ^k – i.e. on multiplie l’action de G_K sur V par χ^k).

(ii) Si on prend les points fixes par G_K , le membre de droite devient la cohomologie de Hodge $\bigoplus_{q=0}^i H^{i-q}(X, \Omega^q)$ (puisque $\mathbf{B}_{\text{HT}}^{G_K} = K$) et le membre de gauche hérite d’une graduation (induite par la graduation sur \mathbf{B}_{HT}). La graduation qu’on en déduit sur la cohomologie de Hodge est la graduation naturelle (i.e. $\text{Gr}^q = H^{i-q}(X, \Omega^q)$). Autrement dit, la cohomologie étale (munie de l’action de G_K) encode la cohomologie de Hodge (munie de sa graduation).

Tate, lui-même [92], a prouvé cette conjecture dans le cas des variétés abéliennes (analogues, en dimension arbitraire, des courbes elliptiques) avec « bonne réduction ». Raynaud a étendu ce résultat aux variétés abéliennes générales, ce qui permet d’en déduire le résultat pour le H^1 de toute variété ; la preuve de Fontaine ci-dessus pour les courbes elliptiques s’étend aux variétés abéliennes, et fournit une preuve simple [5] du résultat de Raynaud. Malheureusement, il semble que ces méthodes élémentaires ne s’étendent pas à H^i , pour $i \geq 2$.

1.4.2. *Structures additionnelles sur la cohomologie de de Rham.* — Une grande spécificité de la géométrie sur un corps p -adique K est qu'on peut réduire "modulo p " les équations d'une variété X définie sur K et obtenir une variété X_κ sur le corps fini $\kappa = \mathcal{O}_K/\mathfrak{m}_K$ (pour que ce soit possible, il faut partir d'équations à coefficients dans \mathcal{O}_K , i.e. d'un modèle sur \mathcal{O}_K). Dans les bons cas, la variété X_κ est un miroir assez fidèle de la variété X , et la cohomologie de X « ne dépend que de X_κ ». De plus, comme X_κ est en caractéristique p , il y a une action du frobenius $x \mapsto x^p$ sur X_κ et on peut espérer que cette action induise une action sur la cohomologie de X .

Les bons cas sont ceux où les singularités de X_κ (ou plus exactement du modèle) sont les plus gentilles possible. Si X est une variété algébrique lisse sur K :

- on dit que X a *bonne réduction* si elle admet un modèle lisse sur \mathcal{O}_K (auquel cas X_κ est lisse sur κ);
- on dit que X est *semi-stable* si elle admet un modèle sur \mathcal{O}_K dont les singularités sont « localement » de la forme $X_1 \cdots X_r = \varpi$, où ϖ est une uniformisante de K (i.e. un générateur de \mathfrak{m}_K).

On espère que toute variété lisse sur K devient semi-stable sur une extension finie de K (c'est vrai pour les courbes); c'est peut-être un peu optimiste : des singularités franchement méchantes apparaissent quand on réduit modulo p (par exemple, si on réduit la courbe projective de Fermat $X^p + Y^p + Z^p = 0$ modulo p , on trouve la droite $X + Y + Z = 0$ avec multiplicité p , mais on peut faire bien pire...), mais on n'a pas de contreexemple.

Si X est semi-stable, on dispose d'une cohomologie H_{HK}^\bullet construite par Hyodo et Kato [70] (et appelée *cohomologie de Hyodo-Kato*) : les $H_{\text{HK}}^i(X)$ sont des K_0 -espaces vectoriels de dimension finie ($K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$), munis d'un frobenius φ bijectif, K_0 -semi-linéaire⁽⁵⁾, et d'un opérateur N « de monodromie » K_0 -linéaire, nilpotent, vérifiant la relation $N\varphi = p\varphi N$. De plus, on a un isomorphisme naturel « de Hyodo-Kato » :

$$\iota_{\text{HK}} : K \otimes_{K_0} H_{\text{HK}}^i(X) \cong H_{\text{dR}}^i(X/K).$$

Dans le cas de bonne réduction on a $N = 0$, et on retrouve une cohomologie introduite antérieurement par Grothendieck [68] et développée par Berthelot [44], à savoir *la cohomologie cristalline* H_{cris}^\bullet .

Autrement dit $H_{\text{HK}}^i(X)$ est muni d'un φ , d'un N , et d'une filtration (la filtration de Hodge sur $H_{\text{dR}}^i(X/K)$) après extension des scalaires à K : c'est ce que Fontaine appelle, fort à-propos, *un (φ, N) -module filtré*. Si X a bonne réduction, $H_{\text{HK}}^i(X)$ est aussi un (φ, N) -module filtré mais sur lequel $N = 0$, ce que Fontaine appelle *un φ -module filtré*.

1.4.3. *Les anneaux de périodes p -adiques.* — L'anneau \mathbf{B}_{HT} est un peu artificiel et ne prend pas en compte les structures supplémentaires existant sur la cohomologie de de Rham. Ceci a conduit Fontaine à construire des anneaux $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{st}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$

5. Le frobenius $x \mapsto x^p$ sur κ se relève, de manière unique, en un automorphisme φ de K_0 .

beaucoup plus fins (et beaucoup plus compliqués) que \mathbf{B}_{HT} : sa motivation initiale était de comprendre H^1 dans le cas de bonne réduction. Je donne la construction de ces anneaux au n° 1.5.2, mais pour énoncer les résultats et pour la plupart des applications, on peut prendre un point de vue axiomatique et n'utiliser que leurs propriétés ci-dessous.

Les anneaux $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{st}} \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}$ sont des anneaux topologiques munis d'actions continues (compatibles) de $G_{\mathbf{Q}_p}$, et de structures supplémentaires stables par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et, si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, les points fixes sous l'action de G_K sont :

$$\mathbf{B}_{\text{dR}}^{G_K} = K \quad \text{et} \quad \mathbf{B}_{\text{st}}^{G_K} = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{G_K} = K_0.$$

- \mathbf{B}_{st} est muni d'un frobenius φ et d'un opérateur « de monodromie » N , commutant tous les deux à $G_{\mathbf{Q}_p}$ et vérifiant la relation $N \circ \varphi = p \varphi \circ N$.
- $\mathbf{B}_{\text{cris}} \subset \mathbf{B}_{\text{st}}$ est le noyau de N (et est muni de l'action de φ).
- \mathbf{B}_{dR} est un corps, et est muni d'une filtration décroissante $(\mathbf{B}_{\text{dR}}^i)_{i \in \mathbf{Z}}$, stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$, compatible avec la multiplication (i.e. $\mathbf{B}_{\text{dR}}^i \cdot \mathbf{B}_{\text{dR}}^j \subset \mathbf{B}_{\text{dR}}^{i+j}$), et l'anneau gradué associé $\bigoplus_{i \in \mathbf{Z}} (\mathbf{B}_{\text{dR}}^i / \mathbf{B}_{\text{dR}}^{i+1})$ n'est autre que \mathbf{B}_{HT} .

Ces anneaux sont reliés par *les suites exactes fondamentales*, avec ⁽⁶⁾ $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$, ensemble des $x \in \mathbf{B}_{\text{cris}}$ vérifiant $\varphi(x) = x$ (la plus délicate est la troisième ; c'est aussi la plus importante) :

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{st}} \xrightarrow{N} \mathbf{B}_{\text{st}} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathbf{B}_e \rightarrow \mathbf{B}_{\text{cris}} \xrightarrow{\varphi-1} \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow 0, \\ 0 &\rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_e \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}} / \mathbf{B}_{\text{dR}}^0 \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Il en ressort que *l'on peut retrouver \mathbf{Q}_p à l'intérieur de \mathbf{B}_{st} (ou \mathbf{B}_{cris}) en utilisant les structures additionnelles (φ , N et la filtration)*. C'est un point fondamental de la théorie de Fontaine : couplé avec les conjectures C_{st} et C_{cris} ci-dessous, il fournit une description de la mystérieuse représentation $H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$ de G_K en termes d'objets nettement plus faciles à calculer et à décrire.

1.4.4. Les théorèmes de comparaison p -adiques. — Une fois que l'on dispose des anneaux \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} et \mathbf{B}_{dR} , il est tentant de formuler les conjectures C_{cris} (cas de bonne réduction), C_{st} (cas semi-stable) et C_{dR} (cas général).

6. Le e en indice vient des travaux de Bloch et Kato [46] qui ont utilisé les anneaux de Fontaine pour définir des sous-groupes $H_e^1(G_K, V)$, $H_f^1(G_K, V)$, $H_g^1(G_K, V)$ du groupe de cohomologie galoisienne $H^1(G_K, V)$, si V est une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K . Les indices e , f , g sont les premières lettres de “exponential”, “finite” et “geometric”. Le groupe $H_e^1(G_K, V)$ est le noyau de $H^1(G_K, V) \rightarrow H^1(G_K, \mathbf{B}_e \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)$.

Conjecture 1.7. — (Fontaine) Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p , et soit X une variété projective lisse définie sur K . On a des isomorphismes naturels :

$$\begin{aligned} (C_{\text{cris}}) \quad & \iota_{\text{cris}} : \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes_{K_0} H_{\text{cris}}^i(X), \\ (C_{\text{st}}) \quad & \iota_{\text{st}} : \mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} H_{\text{HK}}^i(X), \\ (C_{\text{dR}}) \quad & \iota_{\text{dR}} : \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K H_{\text{dR}}^i(X), \end{aligned}$$

commutant aux actions de G_K , φ , N et respectant les filtrations.

De plus, ι_{st} s'obtient à partir de ι_{cris} par extension des scalaires de \mathbf{B}_{cris} à \mathbf{B}_{st} et ι_{dR} s'obtient à partir de ι_{st} par extension des scalaires de \mathbf{B}_{st} à \mathbf{B}_{dR} .

Remarque 1.8. — (o) Chacune des conjectures C_{cris} , C_{st} et C_{dR} implique la conjecture C_{HT} pour les variétés auxquelles elle s'applique.

(i) Quand Fontaine a formulé la conjecture C_{st} , la cohomologie de Hyodo-Kato n'existait pas encore, et la conjecture incluait l'existence d'une théorie cohomologique ayant les propriétés de la cohomologie de Hyodo-Kato [70, 40]. La définition de cette cohomologie utilise pleinement la géométrie logarithmique introduite par Fontaine et Illusie et développée par Kato [71].

(ii) Ces conjectures ont donné lieu à énormément de travaux (par exemple [39, 40, 45, 64, 80, 83, 94], liste non exhaustive, loin s'en faut) et sont maintenant des théorèmes (y compris sans hypothèse de projectivité ou de lissité). Un des premiers résultats est celui de Fontaine et Messing [9] qui, dans le cas de bonne réduction, construisent une flèche $\text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{cris}} \otimes H_{\text{cris}}^i(X))^{\varphi=1} \rightarrow H_{\text{ét}}^i(X_{\overline{K}}, \mathbf{Q}_p)$, mais n'arrivent à montrer que c'est un isomorphisme que si $K = K_0$ et si $i \leq p-1$ (en utilisant ce qui est connu sous le nom de théorie de Fontaine-Laffaille, cf. rem.2.6). En ce qui concerne C_{st} , Fontaine lui-même [10] l'a démontrée pour H^1 (ce qui lui a donné la confiance nécessaire pour énoncer la conjecture : il était un peu surprenant qu'il suffise de rajouter $\log p$ à \mathbf{B}_{cris} pour obtenir le bon anneau) en s'appuyant sur un résultat fondamental de Raynaud [82].

(iii) Il y a eu récemment des résultats pour les variétés analytiques [83, 60, 59].

(iv) Les preuves pour $i \geq 2$ sont considérablement plus délicates que celles des résultats qui les ont inspirés pour les variétés sur \mathbf{C} . Une grosse différence entre les deux situations est qu'on peut recouvrir une variété complexe par des boules ouvertes dont la cohomologie est essentiellement triviale, alors qu'en p -adique, les pièces de base sont plus compliquées que des boules, mais même les boules ont une cohomologie hautement non triviale.

1.5. Construction des anneaux de périodes p -adiques

1.5.1. *A ring to rule them all* \mathbf{A}_{inf} . — Soit

$$\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b} = \{(x_n)_{n \in \mathbf{N}}, x_n \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/p, x_{n+1}^p = x_n, \forall n \in \mathbf{N}\} = \varprojlim_{x \mapsto x^p} \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}/p$$

Alors $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ est un anneau de caractéristique p car $x \mapsto x^p$ est un morphisme d'anneaux en caractéristique p . Si $x = (x_n)_{n \in \mathbf{N}} \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$, et si \hat{x}_n est un relèvement de x_n dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, alors $\hat{x}_n^{p^n}$ converge dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ (car $a - b \in p^k \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ implique $a^p - b^p \in p^{k+1} \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$), et la limite x^\sharp ne dépend pas du choix des \hat{x}_n . Si on pose $v^b(x) = v_p(x^\sharp)$, alors v^b est une valuation sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ pour laquelle il est complet. Il s'ensuit que, si $\alpha \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ vérifie $v^b(\alpha) > 0$, alors $\mathbf{C}_p^b = \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}[\frac{1}{\alpha}]$ est le corps des fractions de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ et que v^b s'étend en une valuation de \mathbf{C}_p^b .

On fait agir $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ composante par composante (via son action sur $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$); cette action s'étend naturellement à \mathbf{C}_p^b .

Théorème 1.9. — \mathbf{C}_p^b est un corps algébriquement clos de caractéristique p , complet pour v^b et l'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ sur \mathbf{C}_p^b est continue.

Soit ⁽⁷⁾ $\varepsilon_n = e^{2i\pi/p^n}$, de telle sorte que $\varepsilon = (\varepsilon_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est un élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ sur lequel $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$ agit par $\sigma(\varepsilon) = \varepsilon^{\chi(\sigma)}$ (défini comme $\sum_{k \in \mathbf{N}} (\chi_k^{(\sigma)})(\varepsilon - 1)^k$), puisque $\sigma(\varepsilon_n) = \varepsilon_n^{\chi_n^{(\sigma)}}$, par définition du caractère cyclotomique χ .

Soit \mathbf{A}_{inf} l'unique anneau A , complet pour la topologie p -adique, tel que $A/pA = \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ (et donc $\mathbf{A}_{\text{inf}} = W(\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b})$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$). Il existe un unique système multiplicatif de représentants de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$ dans \mathbf{A}_{inf} (les représentants de Teichmüller). Si $x \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$, notons $[x]$ son représentant de Teichmüller. Tout élément de \mathbf{A}_{inf} peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{k \in \mathbf{N}} p^k [x_k]$, où les x_k sont des éléments arbitraires de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$. Par unicité des vecteurs de Witt, \mathbf{A}_{inf} est muni d'un frobenius φ donné par $\varphi(\sum_{k \in \mathbf{N}} p^k [x_k]) = \sum_{k \in \mathbf{N}} p^k [x_k^p]$, et d'une action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ commutant à φ .

On définit $\theta : \mathbf{A}_{\text{inf}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$ par $\theta(\sum_{k \in \mathbf{N}} p^k [x_k]) = \sum_{k \in \mathbf{N}} p^k x_k^\sharp$. Alors θ est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est engendré ([7, prop. 2.4]) par

$$\xi = \frac{[\varepsilon] - 1}{[\varepsilon^{1/p}] - 1}.$$

Remarque 1.10. — (i) Les formules pour l'addition et la multiplication des vecteurs de Witt sont assez épouvantables : par exemple, modulo p^2 , on a

$$([x_0] + p[x_1]) + ([y_0] + p[y_1]) = [x_0 + y_0] + p[x_1 + y_1] + \sum_{i=1}^{p-1} \frac{(-1)^i}{i} x_0^{i/p} y_0^{(p-i)/p}.$$

Heureusement, on se rend compte assez vite qu'on n'en a jamais besoin ; savoir qu'elles existent suffit.

(ii) Il y a deux manières fructueuses de penser à \mathbf{A}_{inf} suivant ce que l'on veut faire : si on s'intéresse à la détermination des idéaux premiers de \mathbf{A}_{inf} , le plus efficace est

7. Pour donner un sens à cette égalité, on note $\overline{\mathbf{Q}}$ la clôture algébrique de \mathbf{Q} dans \mathbf{C} et on fixe un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\overline{\mathbf{Q}_p}$.

de voir p comme une variable [22] (si on fait du 3-adique, il faut voir 3 comme une variable!) et de penser à \mathbf{A}_{inf} comme étant $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}[[p]]$ (cf. th. 3.9); si on s'intéresse à la convergence de certaines séries, il est souvent utile d'imaginer que c'est $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[\xi]]$. Dans les deux cas, il faut faire attention à « ne pas oublier les retenues » quand on fait des additions ou des multiplications...

1.5.2. *Les anneaux elfiques* \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} , \mathbf{B}_{dR} . — Fontaine a défini les anneaux \mathbf{B}_{dR} , \mathbf{B}_{cris} et \mathbf{B}_{st} en trois étapes : [7] pour \mathbf{B}_{dR} , [8] pour \mathbf{B}_{cris} et [10, 12] pour \mathbf{B}_{st} . Soit $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = \varprojlim (\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]/\xi^k)$. C'est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel \mathbf{C}_p (et donc, si on croit à l'axiome du choix, isomorphe à $\mathbf{C}_p[[t]]$), contenant le complété \mathbf{A}_{cris} de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{\xi^k}{k!}]$, $k \in \mathbf{N}$ pour la topologie p -adique. L'action de $G_{\mathbf{Q}_p}$ s'étend à tous ces anneaux et, si on pose

$$t = \log[\varepsilon] = - \sum_{k \geq 1} \frac{(1-[\varepsilon])^k}{k},$$

alors $t \in \mathbf{A}_{\text{cris}}$ est une uniformisante de \mathbf{B}_{dR}^+ , et

$$\sigma(t) = \log[\varepsilon^{\chi(\sigma)}] = \log([\varepsilon]^{\chi(\sigma)}) = \chi(\sigma)t,$$

ce qui fait de t un analogue p -adique de $2i\pi$ (c'est *le* $2i\pi$ p -adique de Fontaine; que t soit une uniformisante de \mathbf{B}_{dR}^+ implique que $t \neq 0$, mais que son image dans \mathbf{C}_p est nulle, en accord avec le théorème de Tate).

Le frobenius φ s'étend par continuité à \mathbf{A}_{cris} , et $\varphi(t) = pt$. L'action de φ s'étend donc au sous-anneau $\mathbf{B}_{\text{cris}} = \mathbf{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{t}] = \mathbf{B}_{\text{cris}}^+[\frac{1}{t}]$ (avec $\mathbf{B}_{\text{cris}}^+ = \mathbf{A}_{\text{cris}}[\frac{1}{p}]$) de $\mathbf{B}_{\text{dR}} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+[\frac{1}{t}]$, et on note \mathbf{B}_e le sous-anneau $\mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ de \mathbf{B}_{dR} . On munit \mathbf{B}_{dR} de la filtration décroissante par les $\mathbf{B}_{\text{dR}}^i = t^i \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, pour $i \in \mathbf{Z}$; cette filtration est stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$.

En tant qu'anneau abstrait, on a $\mathbf{B}_{\text{st}} = \mathbf{B}_{\text{cris}}[u]$, où $u \in \mathbf{B}_{\text{dR}}$ est un analogue p -adique de $\log p$ défini par

$$u = \log \frac{[p^b]}{p} = \sum_{k \geq 1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{[p^b]}{p} - 1 \right)^k,$$

où $p^b = (p, p^{1/p}, p^{1/p^2}, \dots) \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$. Ce sous-anneau est stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$: il existe $c : G_{\mathbf{Q}_p} \rightarrow \mathbf{Z}_p$ tel que $\sigma(u) = u + c(\sigma)t$, si $\sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}$. On munit \mathbf{B}_{st} d'un Frobenius en posant $\varphi(u) = pu$ et d'un «opérateur de monodromie» $N = \frac{-d}{du}$. On a la relation $N\varphi = p\varphi N$.

Il y a deux énoncés cruciaux et non triviaux (en plus des propriétés énoncées au n° 1.4.3) à prouver pour faire marcher la machine :

- $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\text{cris}} \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$ est injective, si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$ et $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$.
- u est transcendant sur \mathbf{B}_{cris} .

Le premier de ces énoncés est prouvé dans [7] (avec une variante de \mathbf{B}_{cris} : il y a plein d'anneaux qui peuvent jouer le rôle de \mathbf{B}_{cris} dans toute cette histoire; l'anneau \mathbf{B}_{cris} s'est imposé car \mathbf{A}_{cris} s'interprète [8] comme $H_{\text{cris}}^0(\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_p})$, ce qui fait qu'il apparaît

naturellement dans les preuves des théorèmes de comparaison); la preuve simplifiée de [12] est trop simple pour être honnête.

2. Représentations galoisiennes

Soient K une extension finie de \mathbf{Q}_p et $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$ comme d'habitude.

2.1. La stratégie de Fontaine

Fontaine a développé à partir de la fin des années 1970, un programme visant à classifier et décrire les \mathbf{Q}_p -représentations de G_K (i.e. les \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action \mathbf{Q}_p -linéaire continue de G_K), en termes plus concrets.

2.1.1. Représentations B -admissibles. — La stratégie de Fontaine part de l'observation suivante : si on dispose d'une \mathbf{Q}_p -algèbre topologique B , munie d'une action \mathbf{Q}_p -linéaire continue de G_K et de structures additionnelles stables sous l'action de G_K , on peut associer à toute \mathbf{Q}_p -représentation V de G_K un invariant $D_B(V)$ en prenant les points fixes $(B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}$ de $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ sous l'action de G_K . Alors $D_B(V)$ est un B^{G_K} -module muni des structures additionnelles sur B et qui est souvent plus facile à décrire que la représentation V dont on est parti. Un tel anneau B permet en outre de découper la sous-catégorie des *représentations B -admissibles* :

Définition 2.1. — Une \mathbf{Q}_p -représentation V de G_K est *B -admissible* si $B \otimes_{\mathbf{Q}_p} V$ est triviale, i.e. isomorphe à $B^{\dim V}$ en tant que représentation de G_K .

Tout l'art consiste à ciseler de bons anneaux et Fontaine a été un véritable orfèvre en la matière.

2.1.2. B -admissibilité et cohomologie galoisienne. — Soit V une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K . Choisissons une base de V sur \mathbf{Q}_p , et notons $U_\sigma \in \text{GL}_d(\mathbf{Q}_p)$ la matrice de l'action de $\sigma \in G_K$ dans cette base. On a $U_{\sigma\tau} = U_\sigma U_\tau$, et comme G_K agit trivialement sur \mathbf{Q}_p , les U_σ vérifient la relation de cocycle $U_{\sigma\tau} = U_\sigma \sigma(U_\tau)$. La B -admissibilité de V se traduit par l'existence d'une base de $B \otimes V$ sur B , fixe par G_K , et donc par l'existence de $M \in \mathbf{GL}_d(B)$ telle que $U_\sigma = M^{-1} \sigma(M)$, pour tout $\sigma \in G_K$ (i.e. le 1-cocycle $\sigma \mapsto U_\sigma$ est un cobord : sa classe dans $H^1(G_K, \text{GL}_d(B))$ est triviale).

Par exemple, si on munit $\overline{\mathbf{Q}_p}$ de la topologie discrète, alors $H^1(G_K, \text{GL}_d(\overline{\mathbf{Q}_p}))$ est trivial (théorème 90 de Hilbert); on en déduit que V est *$\overline{\mathbf{Q}_p}$ -admissible si et seulement si G_K agit sur V à travers un quotient fini*. Le résultat suivant est nettement plus profond.

Théorème 2.2. — (Sen [87]) *V est \mathbf{C}_p -admissible si et seulement si le sous-groupe d'inertie de G_K (i.e. $G_K \cap \text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}_p}/\mathbf{Q}_p^{\text{nr}})$) agit à travers un quotient fini.*

En particulier, $\mathbf{Q}_p(1)$ n'est pas \mathbf{C}_p -admissible (i.e. il n'y a pas de $2i\pi$ dans \mathbf{C}_p).

2.2. Description des représentations issues de la géométrie

2.2.1. *La hiérarchie des représentations p -adiques.* — On peut appliquer le programme ci-dessus avec les anneaux \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} , \mathbf{B}_{dR} , \mathbf{B}_{HT} , $\overline{\mathbf{Q}}_p \cdot \mathbf{B}_{\text{cris}}$ (sous-anneau de \mathbf{B}_{dR} engendré par $\overline{\mathbf{Q}}_p$ et \mathbf{B}_{cris}), $\overline{\mathbf{Q}}_p \cdot \mathbf{B}_{\text{st}}$... Ceci permet de définir les notions suivantes pour une \mathbf{Q}_p -représentation V de G_K :

- V est dite *cristalline* si elle \mathbf{B}_{cris} -admissible et *potentiellement cristalline* si elle est $\overline{\mathbf{Q}}_p \cdot \mathbf{B}_{\text{cris}}$ -admissible.
- V est dite *semi-stable* si elle \mathbf{B}_{st} -admissible et *potentiellement semi-stable* si elle est $\overline{\mathbf{Q}}_p \cdot \mathbf{B}_{\text{st}}$ -admissible.
- V est dite *de Rham* si elle est \mathbf{B}_{dR} -admissible.
- V est dite *Hodge-Tate* si elle est \mathbf{B}_{HT} -admissible.

Les relations entre les différents anneaux fournissent les implications suivantes :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{cristalline} & \implies & \text{potentiellement cristalline} \\
 \Downarrow & & \Downarrow \\
 \text{semi-stable} & \implies & \text{potentiellement semi-stable} \\
 & & \Downarrow \\
 & & \text{de Rham} \implies \text{Hodge-Tate}
 \end{array}$$

Remarque 2.3. — (i) Toutes les implications ci-dessus sont strictes à l'exception de « pst \Rightarrow dR » qui est, en fait, une équivalence. L'implication réciproque, connue sous le nom de « conjecture de monodromie p -adique de Fontaine », a été ramenée par Berger [41], en utilisant la théorie des (φ, Γ) -modules du § 2.3, à un énoncé portant sur les équations différentielles p -adiques (la « conjecture de monodromie p -adique de Crew » [61]), qui a été prouvé dans la foulée par André [35], par Mebkhout [78] et par Kedlaya [72]. Il y a eu depuis d'autres preuves, utilisant des techniques variées, de la conjecture de Fontaine.

(ii) Les extensions non triviales de \mathbf{Q}_p par $\mathbf{Q}_p(1)$ sont de Rham (et même semi-stables). Fontaine avait conjecturé [7] que les extensions non triviales de $\mathbf{Q}_p(1)$ par \mathbf{Q}_p ne sont pas de Rham, ce qui a été démontré par Bloch et Kato [46]. Comme ces extensions sont Hodge-Tate, on en déduit le fait qu'il n'existe pas d'isomorphisme G_K -équivariant de \mathbf{B}_{dR}^+ sur $\mathbf{C}_p[[t]]$. Par contre, Fontaine a démontré [19] que si on rajoute $\log 2i\pi$ à \mathbf{B}_{HT} ou à \mathbf{B}_{dR} , on obtient les mêmes représentations admissibles : *les représentations de Hodge-Tate sont presque de Rham.*

(iii) Les conjectures C_{dR} , C_{st} et C_{cris} se traduisent par le fait que les représentations de G_K « provenant de la géométrie » sont de Rham, et donc potentiellement semi-stables (et même semi-stables ou cristallines si on part de variétés semi-stables ou ayant bonne réduction).

(iv) On dispose d'une description « explicite » des représentations potentiellement semi-stables (th. 2.4), très utile pour les applications à la géométrie arithmétique.

2.2.2. *Représentations semi-stables et (φ, N) -modules filtrés.* — Un (φ, N) -module filtré est, comme son nom l'indique, un module muni d'un φ , d'un N et d'une filtration. Plus précisément, soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p , et soit $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$. Un (φ, N) -module filtré sur K est la donnée de :

- un (φ, N) -module D sur K_0 , i.e. un K_0 -espace vectoriel D de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire bijective d'un frobenius φ et d'un opérateur N vérifiant $N\varphi = p\varphi N$,
- une structure de K -module filtré sur $D_K = K \otimes_{K_0} D$, i.e. une filtration décroissante sur D_K par des sous- K -espaces vectoriels D_K^i , pour $i \in \mathbf{Z}$, avec $D_K^i = D_K$ si i est suffisamment petit, et $D_K^i = 0$ si i est suffisamment grand.

Si V est une représentation semi-stable de G_K , de dimension d , on pose

$$\mathbf{D}_{\text{st}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K} \quad \text{et} \quad \mathbf{D}_{\text{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{G_K}.$$

Alors $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ est, naturellement, un (φ, N) -module filtré sur K , de rang d : $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ est un K_0 -module de rang d puisque $\mathbf{B}_{\text{st}}^{G_K} = K_0$, et est muni des actions de φ et N existant sur \mathbf{B}_{st} ; $\mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$ est un K -module de rang d puisque $\mathbf{B}_{\text{dR}}^{G_K} = K$, et est muni de la filtration de \mathbf{B}_{dR} ; l'inclusion $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\text{st}}(V) \hookrightarrow \mathbf{D}_{\text{dR}}(V)$, induite par l'inclusion $K \otimes_{K_0} \mathbf{B}_{\text{st}} \hookrightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}$, est une bijection pour des raisons de dimension.

On dit qu'un (φ, N) -module filtré sur K est *admissible* s'il est de la forme $\mathbf{D}_{\text{st}}(V)$, avec V semi-stable. Le problème est de donner une caractérisation plus concrète de cette condition.

Si D est un (φ, N) -module filtré sur K , le rang $\text{rg}(D)$ de D est la dimension de D sur K_0 . Si D est de rang 1, on définit le *degré* $\text{deg}(D)$ de D par la formule

$$\text{deg}(D) = t_N(D) - t_H(D),$$

où $t_N(D)$ et $t_H(D)$ sont définis en choisissant une base e de D sur K_0 :

- il existe $\lambda \in K_0^*$ tel que $\varphi(e) = \lambda e$, et on pose $t_N(D) = v_p(\lambda)$;
- il existe $i \in \mathbf{Z}$, unique, tel que $e \in D_K^i \setminus D_K^{i+1}$, et on pose $t_H(D) = i$.

Si D est de rang $r \geq 2$, alors $\det D = \wedge^r D$ est de rang 1, et on définit le *degré* de D par $\text{deg}(D) = \text{deg}(\det D)$ et la *pen*t de D par $\mu(D) = \frac{\text{deg}(D)}{\text{rg}(D)}$. On dit que D est *faiblement admissible*, si $\mu(D) = 0$ et si $\mu(D') \leq 0$, pour tout sous- (φ, N) -module filtré D' de D .

Théorème 2.4. — $V \mapsto \mathbf{D}_{\text{st}}(V)$ induit une équivalence de catégories de la catégorie des représentations semi-stables de G_K sur celle des (φ, N) -modules filtrés sur K faiblement admissibles, le foncteur inverse étant

$$D \mapsto \mathbf{V}_{\text{st}}(D) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1, N=0} \cap \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_K D_K).$$

Remarque 2.5. — L'intérêt de ce résultat est qu'il permet de traduire tout problème portant sur les représentations semi-stables en un problème portant sur des objets concrets. Par exemple, il est très facile de construire des (φ, N) -modules filtrés

faiblement admissibles et, si K est fixé, il n'est pas si difficile de décrire explicitement l'espace des (φ, N) -modules filtrés sur K , faiblement admissibles, de rang fixé.

Ce résultat a une longue histoire. La formule pour le foncteur inverse résulte juste de la manière dont on peut décrire \mathbf{Q}_p à l'intérieur de \mathbf{B}_{st} en utilisant les suites exactes fondamentales du n° 1.4.3. Fontaine a prouvé qu'un (φ, N) -module filtré admissible est faiblement admissible [4] et conjecturé [4, 13] que la réciproque est vraie (conjecture « faiblement admissible \Rightarrow admissible » ou simplement « fa \Rightarrow a »), ce que nous [16] avons fini par démontrer en 1999.

Avant notre preuve du cas général, il y avait eu des résultats partiels, le plus probant étant celui de Fontaine et Laffaille [6] pour les (φ, N) -modules filtrés sur lesquels $N = 0$, dans le cas $K = K_0$, et tels qu'il existe $a \in \mathbf{Z}$ avec $D_K^a = D_K$ et $D_K^{a+p-1} = 0$ (i.e. la longueur de la filtration est $\leq p - 1$).

Remarque 2.6. — La théorie de Fontaine-Laffaille va plus loin car elle décrit non seulement $\mathbf{V}_{\text{st}}(D)$ mais aussi les \mathbf{Z}_p -réseaux de $\mathbf{V}_{\text{st}}(D)$ stables par G_K , ce qui est fondamental pour beaucoup d'applications arithmétiques.

2.2.3. Le lemme fondamental. — Notre preuve est un dévissage assez pénible permettant de se ramener au cas de Fontaine-Laffaille et reposant sur le th. 2.7 (dit « lemme fondamental ») ci-dessous. Dans l'énoncé, $\mathbf{U} = (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi=p}$ et un fragment de la suite exacte fondamentale fournit une suite exacte $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p t \rightarrow \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{C}_p \rightarrow 0$, ce qui fait que \mathbf{U} ressemble beaucoup à $\mathbf{C}_p \oplus \mathbf{Q}_p$, tandis que l'on a une suite exacte $0 \rightarrow t\mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+/t^2 \rightarrow \mathbf{C}_p \rightarrow 0$ qui fait que $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+/t^2$ ressemble beaucoup à $\mathbf{C}_p \oplus \mathbf{C}_p$ (cf. § 2.4 pour des compléments sur cette ressemblance).

Théorème 2.7. — Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_h \in \mathbf{C}_p$, et $v_1, \dots, v_h \in \mathbf{B}_{\text{dR}}^+/t^2$ tels que

$$\sum_{i=1}^h \alpha_i \theta(v_i) = 0, \quad \text{mais} \quad \sum_{i=1}^h \alpha_i \otimes \theta(v_i) \neq 0 \text{ dans } \mathbf{C}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{C}_p.$$

Enfin, soit

$$Y = \{u_1, \dots, u_h \in \mathbf{U}, (\theta(u_1), \dots, \theta(u_h)) = (x\alpha_1, \dots, x\alpha_h), \text{ avec } x \in \mathbf{C}_p\}.$$

Alors $\rho : Y \rightarrow t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+/t^2\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ = t\mathbf{C}_p$, définie par $\rho(u_1, \dots, u_h) = \sum_{i=1}^h u_i v_i$, est surjective et son noyau est un \mathbf{Q}_p -espace vectoriel de dimension h .

Ce résultat est surprenamment difficile à prouver directement : si on fixe $z \in \mathbf{C}_p$, et qu'on essaie de trouver $x \in \mathbf{C}_p$ tel qu'il existe des relèvements $\widehat{\alpha_i x}$ de $\alpha_i x$ dans U tels que $\sum_{i=1}^h \widehat{\alpha_i x} v_i = tz$, on se heurte à des problèmes qui semblent inextricables (en particulier parce que les $\widehat{\alpha_i x}$ ne sont définis qu'à $\mathbf{Q}_p t$ près et donc que $x \mapsto z$ est multivaluée). Quand Fontaine m'a dit qu'il avait besoin de ce lemme pour faire marcher sa stratégie, j'ai bien sûr essayé l'approche directe, sans aucun succès. J'allais abandonner quand je me suis souvenu que Wintenberger m'avait mentionné que l'on

pouvait faire les constructions de Fontaine en famille (il n'est pas le seul à avoir eu cette idée : lui en avait besoin pour étudier comment varient les périodes dans une famille de variétés abéliennes [97]; en 1999 c'était « bien connu »). Avec ce point de vue, l'application $x \mapsto z$ peut s'exprimer comme une limite de fonctions algébriques, ce qui fournit un point de départ solide pour attaquer le problème.

Il y a eu, par la suite, d'autres preuves de la conjecture « fa \Rightarrow a », dont une de Fontaine [20] prouvant en parallèle les conjectures « fa \Rightarrow a » et « dR \Rightarrow pst » et qu'il a utilisé comme fil conducteur de son cours à Tsinghua en 2004 et de son livre avec Ouyang Yi [21]. La preuve la plus satisfaisante est probablement celle utilisant la classification des fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine (cf. n° 3.3.2).

2.3. Les (φ, Γ) -modules

La théorie des (φ, Γ) -modules a été développée par Fontaine [11] pour donner une description de toutes les représentations p -adiques de G_K : une \mathbf{Q}_p -représentation de dimension d du mystérieux groupe G_K est encodée dans la donnée de deux matrices $A, B \in \mathbf{GL}_d(\mathbf{B}_K)$ vérifiant une relation de commutation $A\gamma(B) = B\varphi(A)$. Le prix à payer est que le corps \mathbf{B}_K qui intervient est largement plus compliqué que \mathbf{Q}_p , mais la théorie des (φ, Γ) -modules s'est révélée, à l'usage, un outil extrêmement puissant pour l'étude des représentations de G_K .

2.3.1. *Les séries de Coleman.* — Pour illustrer les concepts qui vont suivre, commençons par un résultat frappant de Coleman [53] :

Théorème 2.8. — Soit $\varepsilon_n = e^{2i\pi/p^n}$, et soit $F_n = \mathbf{Q}_p(\varepsilon_n)$. Si $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ vérifie $u_n \in F_n$ et $N_{F_{n+1}/F_n}(u_{n+1}) = u_n$, pour tout $n \geq 1$, il existe $G_u \in \mathbf{Z}_p[[T]][[T^{-1}]$, unique, telle que $G_u(\varepsilon_n - 1) = u_n$, pour tout $n \geq 1$.

L'unicité de G_u est immédiate (un élément de $\mathbf{Z}_p[[T]]$ n'a qu'un nombre fini de zéros), mais l'existence ne l'est pas.

Soit $(L_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une famille d'extensions finies de \mathbf{Q}_p , avec $L_n \subset L_{n+1}$ pour tout n , et soit $L_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} L_n$. Définissons l'ensemble

$$X(L_\infty) = \{(u_n)_{n \in \mathbf{N}}, \text{ avec } u_n \in L_n \text{ et } N_{L_{n+1}/L_n}(u_{n+1}) = u_n, \text{ pour tout } n \geq 0\}$$

des systèmes compatibles pour les applications normes. Cet ensemble ne dépend que de L_∞ et pas du choix des L_n ; la théorie du corps des normes le munit, si L_∞ est raisonnable, d'une structure de corps de caractéristique p . Par exemple, l'extension cyclotomique $F_\infty = \mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})$ est raisonnable, et $X(F_\infty) \cong \mathbf{F}_p((T))$, l'isomorphisme correspondant envoyant u sur l'image de la série de Coleman G_u modulo p .

La construction du corps $X(L_\infty)$ apparaît dans un exposé de Fontaine au séminaire de théorie des nombres de Grenoble [1], en 1971, mais la théorie n'a vraiment été développée, par Fontaine et Wintenberger [3, 96], qu'une dizaine d'années plus tard.

2.3.2. *Le corps des normes d'une extension APF.* — La terminologie officielle pour « raisonnable » est « strictement arithmétiquement profinie » ou « strictement APF ». On dit que L_∞ est *strictement APF* si :

- on peut écrire $L_\infty = \cup_{n \in \mathbf{N}} L_n$, avec $[L_n : \mathbf{Q}_p] < \infty$, $L_n \subset L_{n+1}$,
- il existe $c > 0$ tel que, pour tout $n \geq 0$,

$$(*) \quad v_p(\sigma(x) - x) \geq v_p(x) + c, \quad \text{pour tous } x \in L_{n+1} \text{ et } \sigma \in G_{L_n}.$$

Des exemples naturels d'extensions strictement APF sont :

- l'extension cyclotomique $K(\mu_{p^\infty})$, avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$,
 - l'extension de Kummer $K(\alpha^{1/p^\infty})$, avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$ et $\alpha \in K^*$,
 - une extension galoisienne K_∞ de K , $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, de groupe de Galois un groupe de Lie p -adique (comme \mathbf{Z}_p^* , $(\mathbf{Z}_p^* \mathbf{Z}_p)$, $\mathrm{GL}_d(\mathbf{Z}_p)$, etc.) avec $[(K_\infty \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}) : \mathbf{Q}_p] < \infty$.
- (Les deux premiers exemples sont élémentaires ; le troisième est une conséquence d'un résultat de Sen [86].)

Si L_∞ est strictement APF, le corps résiduel $\mathcal{O}_{L_\infty}/\mathfrak{m}_{L_\infty}$ de L_∞ est un corps fini \mathbf{F}_q , et on a le résultat suivant.

Théorème 2.9. — (i) Si $(x_n)_n, (y_n)_n \in X(L_\infty)$, alors $N_{L_{n+k}/L_n}(x_{n+k} + y_{n+k})$ converge vers $s_n \in L_n$ et $(s_n)_n \in X(L_\infty)$.

(ii) Muni des lois $+$ et \cdot définies par $(x_n)_n + (y_n)_n = (s_n)_n$ et $(x_n)_n \cdot (y_n)_n = (x_n y_n)_n$, l'ensemble $X(L_\infty)$ est un corps de caractéristique p , isomorphe à $\mathbf{F}_q((T))$.

(iii) Si M_∞ est une extension finie, galoisienne, de L_∞ , alors $X(M_\infty)$ est une extension galoisienne de $X(L_\infty)$ et $\mathrm{Gal}(X(M_\infty)/X(L_\infty)) = \mathrm{Gal}(M_\infty/L_\infty)$; les groupes de Galois absolus de L_∞ et $X(L_\infty)$ s'identifient donc canoniquement.

(iv) Si L_∞ est une extension galoisienne de K , et $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ s'identifie à un sous-groupe du groupe des automorphismes continus de $X(L_\infty)$.

Remarque 2.10. — Si L_∞ est une extension galoisienne de K , avec $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, ce théorème fournit un dévissage de G_K :

$$1 \rightarrow G_{\mathbf{F}_q((T))} \rightarrow G_K \rightarrow \mathrm{Gal}(L_\infty/K) \rightarrow 1.$$

Si L_∞ est l'extension cyclotomique de K , le groupe $\mathrm{Gal}(L_\infty/K)$ est particulièrement simple puisque c'est un sous-groupe fermé d'indice fini de \mathbf{Z}_p^* , et le dévissage obtenu est à la base de la théorie des (φ, Γ) -modules résumée ci-dessous.

La clé de la preuve du (i) est la propriété (*) qui implique que, modulo p^c , on a $N_{L_{n+1}/L_n}(x) = x^{[L_{n+1}:L_n]}$ si $x \in \mathcal{O}_{L_{n+1}}$; cela permet aussi de prouver le résultat suivant, crucial pour ce qui va suivre. (Le corps \mathbf{C}_p^b et $\varepsilon \in \mathbf{C}_p^b$ sont définis au n° 1.5.1.)

Théorème 2.11. — Si L_∞ est une extension APF, $X(L_\infty)$ est naturellement un sous-corps de \mathbf{C}_p^b et la clôture séparable de $X(L_\infty)$ est dense dans \mathbf{C}_p^b .

Par exemple, l'inclusion de $X(\mathbf{Q}_p(\mu_{p^\infty})) = \mathbf{F}_p((T))$ dans \mathbf{C}_p^b envoie T sur $\varepsilon - 1$.

2.3.3. *Quelques anneaux gnomiques.* — Si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, on note K_∞ l'extension cyclotomique $K(\mu_{p^\infty})$ de K , et on note \mathbf{E}_K le corps des normes de K_∞ vu comme sous-corps de \mathbf{C}_p^\flat . On a donc, en particulier, $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p} = \mathbf{F}_p((\varepsilon - 1))$.

D'après le th. 2.9, la clôture séparable \mathbf{E} de $\mathbf{E}_{\mathbf{Q}_p}$ est la réunion des \mathbf{E}_K et, si on note $H_K \subset G_K$ le noyau du caractère cyclotomique $\chi : G_K \rightarrow \mathbf{Z}_p^*$, on a $\text{Gal}(\mathbf{E}/\mathbf{E}_K) = H_K$. On note Γ_K le groupe $\text{Gal}(K_\infty/K) = G_K/H_K$, et donc χ induit un isomorphisme de Γ_K sur un sous-groupe fermé d'indice fini de \mathbf{Z}_p^* .

Soit $\tilde{\mathbf{A}} = W(\mathbf{C}_p^\flat)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans \mathbf{C}_p^\flat (c'est aussi le complété de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{[p^*]}]$ pour la topologie p -adique). Soit $\pi = [\varepsilon] - 1 \in \tilde{\mathbf{A}}$. On note $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ l'adhérence dans $\tilde{\mathbf{A}}$ de $\mathbf{Z}_p[\pi, \pi^{-1}]$; c'est l'anneau des $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi^k$, avec $a_k \in \mathbf{Z}_p$ et $a_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow -\infty$. On a

$$\varphi(\pi) = [\varepsilon]^p - 1 = (1 + \pi)^p - 1 \quad \text{et} \quad \sigma(\pi) = [\varepsilon]^{\chi(\sigma)} - 1 = (1 + \pi)^{\chi(\sigma)} - 1, \quad \text{si } \sigma \in G_{\mathbf{Q}_p}.$$

Il s'ensuit que $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ est stable par φ et par $G_{\mathbf{Q}_p}$ qui agit à travers $\Gamma_{\mathbf{Q}_p}$.

Il existe un unique sous-anneau \mathbf{A} de $\tilde{\mathbf{A}}$, p -saturé ($x \in \tilde{\mathbf{A}}$ et $px \in \mathbf{A} \Rightarrow x \in \mathbf{A}$) et complet pour la topologie p -adique, contenant $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et tel que $\mathbf{A}/p\mathbf{A} = \mathbf{E} \subset \tilde{\mathbf{A}}/p\tilde{\mathbf{A}}$. Cet anneau est stable par $G_{\mathbf{Q}_p}$ et par φ , et on a $\mathbf{A}^H = \mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{A}^{\varphi=1} = \mathbf{Z}_p$.

Si $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$, on pose $\mathbf{A}_K = \mathbf{A}^{H_K}$. Alors \mathbf{A}_K est stable par φ et par G_K agissant à travers Γ_K , et on a $\mathbf{A}_K/p\mathbf{A}_K = \mathbf{E}_K$.

Enfin, on pose⁽⁸⁾ $\mathbf{B} = \mathbf{A}[\frac{1}{p}]$, $\mathbf{B}_K = \mathbf{A}_K[\frac{1}{p}]$. Alors \mathbf{B} et \mathbf{B}_K sont des corps munis d'actions de φ et de G_K commutant entre elles, G_K agit à travers Γ_K sur \mathbf{B}_K , et

$$\mathbf{B}^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p \quad \text{et} \quad \mathbf{B}^{H_K} = \mathbf{B}_K.$$

Remarque 2.12. — En général, si $F = K_\infty \cap \mathbf{Q}_p^{\text{nr}}$, il existe $\pi_K \in \mathbf{A}_K$ tel que \mathbf{A}_K soit l'ensemble des $\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k \pi_K^k$, avec $a_k \in \mathcal{O}_F$ et $a_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow -\infty$ (i.e. \mathbf{A}_K a la même forme que $\mathbf{A}_{\mathbf{Q}_p}$), mais les formules donnant l'action de φ et Γ_K sur π_K ne peuvent pas vraiment s'expliciter (l'expérience montre que ce n'est pas un vrai problème).

2.3.4. *L'équivalence de catégories de Fontaine.* — Un (φ, Γ) -module D sur \mathbf{B}_K est un \mathbf{B}_K -espace vectoriel de dimension finie muni d'actions semi-linéaires de φ et Γ_K commutant entre elles. Un (φ, Γ) -module sur \mathbf{B}_K est *étale* si φ est de pente 0 ce qui se traduit, si D est de rang d , par l'existence d'une base de D sur \mathbf{B}_K dans laquelle la matrice de φ appartient à $\mathbf{GL}_d(\mathbf{A}_K)$.

Si V est une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K , on pose $D(V) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V)^{H_K}$. C'est un $\mathbf{B}^{H_K} = \mathbf{B}_K$ -module muni d'une action résiduelle de $G_K/H_K = \Gamma_K$ et d'une action de φ provenant du frobenius φ sur \mathbf{B} ; c'est donc un (φ, Γ) -module sur \mathbf{B}_K .

Théorème 2.13. — (Fontaine [11]) *Si V est une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K , le (φ, Γ) -module $D(V)$ est étale et $V \mapsto D(V)$ induit une équivalence de catégories de la*

8. L'anneau \mathbf{B} est celui mentionné dans l'introduction sous le nom de $\widehat{\mathcal{E}}^{\text{nr}}$.

catégorie des \mathbf{Q}_p -représentations de G_K sur celle des (φ, Γ) -modules étales sur \mathbf{B}_K , le foncteur inverse étant $D \mapsto V(D) = (\mathbf{B} \otimes_{\mathbf{B}_K} D)^{\varphi=1}$.

Remarque 2.14. — (i) Pour beaucoup d'applications, il est inutile de savoir comment le foncteur $V \mapsto D(V)$ est défini; savoir qu'il existe suffit.

(ii) Comme Γ_K est procyclique (au moins si $p \neq 2$ ou bien si $p = 2$ et K contient $\sqrt{-1}$), si γ est un générateur de Γ_K , un (φ, Γ) -module D est complètement décrit par les actions de φ et de Γ . Si on choisit une base de D , et si on note A et B les matrices de γ et φ dans cette base, la seule contrainte est la commutation de φ et γ qui se traduit par la relation $A\gamma(B) = B\varphi(A)$.

(iii) \mathbf{B} et \mathbf{B}_{dR}^+ sont tous deux obtenus à partir de \mathbf{A}_{inf} , mais pour aller de l'un à l'autre (et donc pour retrouver les invariants « elfiques » à partir des (φ, Γ) -modules, ce qui est important pour les applications arithmétiques), il faut utiliser des anneaux intermédiaires [50, 51, 41].

2.3.5. Application à la cohomologie galoisienne. — Plaçons-nous dans la situation où Γ_K est procyclique et choisissons un générateur γ de Γ_K . Si V est une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K , le groupe $H^1(G_K, V)$ classe les extensions $0 \rightarrow V \rightarrow E \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$ de représentations de G_K (agissant trivialement sur \mathbf{Q}_p). Via l'équivalence de catégories du th. 2.13, une telle extension correspond à une extension $0 \rightarrow D(V) \rightarrow D(E) \rightarrow \mathbf{B}_K \rightarrow 0$. Si on choisit un relèvement $e \in D(E)$ de $1 \in \mathbf{B}_K$, et que l'on pose $x = (\gamma - 1)e$ et $y = (\varphi - 1)e$, alors x et y appartiennent à $D(V)$ et décrivent complètement $D(E)$ (si on connaît $D(V)$); par ailleurs, comme on peut modifier e par un élément de $D(V)$, le couple (x, y) n'est déterminé par $D(E)$ qu'à addition près de $((\gamma - 1)z, (\varphi - 1)z)$, avec $z \in D(V)$. On en tire le résultat suivant.

Proposition 2.15. — *On a un isomorphisme naturel*

$$H^1(G_K, V) \cong \frac{\{(x, y) \in D(V) \times D(V), (\varphi - 1)x = (\gamma - 1)y\}}{\{((\gamma - 1)z, (\varphi - 1)z), z \in D(V)\}}.$$

Ce résultat (et beaucoup d'autres développés dans la thèse de Herr [69]) a été présenté par Fontaine dans un exposé au Newton Institute, peu de temps avant la conférence où Wiles a annoncé la preuve du grand théorème de Fermat⁽⁹⁾. Dans l'esprit de Fontaine, c'était une étape dans la preuve de la « loi de réciprocité explicite » conjecturée par Perrin-Riou [81], et portant sur sa généralisation des séries de Coleman (l'exponentielle de Perrin-Riou). Fontaine n'a rien écrit à ce sujet, mais son programme a été mené à bien [52, 42].

9. Fontaine était rentré à Paris au moment de la conférence, mais il suivait les événements de près et a utilisé ses entrées au journal Le Monde pour assurer au résultat de Wiles la publicité qu'il méritait.

2.4. Les presque \mathbf{C}_p -représentations

Soit K une extension finie de \mathbf{Q}_p . La théorie des presque \mathbf{C}_p -représentations [18] de G_K a été développée par Fontaine dans son cours à l'IHP, pendant le semestre p -adique, en 1997, avec pour but la preuve de « fa \Rightarrow a » esquissée ci-dessous.

2.4.1. *L'action de \mathbf{C}_p perdue et retrouvée.* — Un joli résultat (frappant car archi-faux si on remplace \mathbf{C}_p par $\overline{\mathbf{Q}_p}$) à la base de la théorie est le suivant [19, prop. 6.2] :

Théorème 2.16. — *Si $\lambda : \mathbf{C}_p \rightarrow \mathbf{C}_p$ est \mathbf{Q}_p -linéaire continue, et commute à l'action de G_K , alors il existe $c \in K$ tel que $\lambda(x) = cx$, pour tout $x \in \mathbf{C}_p$.*

Une \mathbf{C}_p -représentation est un \mathbf{C}_p -espace de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire de G_K . Ces objets ont été classifiés par Sen [88], et le th. 2.16 permet de prouver [19, th. 6.1] que beaucoup d'information est encodée dans l'action de G_K :

Théorème 2.17. — *Si W_1, W_2 sont deux \mathbf{C}_p -représentations de G_K , toute application \mathbf{Q}_p -linéaire continue, G_K -équivariante, de W_1 dans W_2 , est \mathbf{C}_p -linéaire.*

2.4.2. *Presque- \mathbf{C}_p -représentations.* — Une presque- \mathbf{C}_p -représentation W est un \mathbf{Q}_p -espace de Banach muni d'une action continue de G_K tel qu'il existe une \mathbf{C}_p -représentation W' de G_K et $V' \subset W'$, $V \subset W$ des sous- \mathbf{Q}_p -espaces vectoriels de dimension finie stables par G_K , tels que $W/V \cong W'/V'$, en tant que représentations de G_K . On a donc des suites exactes :

$$0 \rightarrow V' \rightarrow W' \rightarrow W'/V' \rightarrow 0, \quad 0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow W'/V' \rightarrow 0,$$

de telle sorte que W est obtenu à partir de W' « en quotientant par V' et en rajoutant V ». Une telle description s'appelle *une présentation de W* . Le résultat fondamental de la théorie est le suivant.

Théorème 2.18. — ([18, th. 5.1]) (i) *Si W est une presque- \mathbf{C}_p -représentation,*

$$\text{Dim } W = (\dim W, \text{ht } W), \quad \dim W = \dim_{\mathbf{C}_p} W' \text{ et } \text{ht } W = \dim_{\mathbf{Q}_p} V - \dim_{\mathbf{Q}_p} V',$$

ne dépendent que de W et pas de la présentation.

(ii) *Si $f : W_1 \rightarrow W_2$ est un morphisme de presque- \mathbf{C}_p -représentations, alors $\text{Ker } f$ et $\text{Im } f$ sont des presque- \mathbf{C}_p -représentations, et :*

$$\text{Dim } W_1 = \text{Dim } \text{Ker } f + \text{Dim } \text{Im } f.$$

Par exemple les espaces \mathbf{U} et $\mathbf{B}_{\text{dR}}^+/t^2$ apparaissant dans l'énoncé du lemme fondamental (th. 2.7) sont des presque- \mathbf{C}_p -représentations dont les Dimensions respectives sont (1, 1) et (2, 0).

Je n'assistais pas au cours de Fontaine, mais il me racontait ce qu'il faisait et j'avais été frappé par le fait qu'il pouvait facilement retrouver la dimension du petit

\mathbf{Q}_p -espace vectoriel, mais pas celle du gros \mathbf{C}_p -espace vectoriel : les calculs de cohomologie galoisienne de Tate permettent de montrer que les groupes $H^i(G_K, W)$ sont de dimension finie sur \mathbf{Q}_p , nuls si $i \geq 2$, et

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(G_K, W) - \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(G_K, W) + \dim_{\mathbf{Q}_p} H^2(G_K, W) = -[K : \mathbf{Q}_p] \text{ht}(W).$$

Il ne semble pas y avoir d'invariant galoisien permettant de retrouver $\dim W$ et la preuve du th. 2.18 ci-dessus a dû attendre quelques années ; elle repose sur le "lemme fondamental" dont il a été question plus haut.

Remarque 2.19. — Un résultat surprenant de la théorie est que l'on peut imposer à W' d'être triviale (i.e. isomorphe à \mathbf{C}_p^d comme G_K -module) dans la définition de presque- \mathbf{C}_p -représentation ; on obtient les mêmes objets. Par exemple le Tate twist $\mathbf{C}_p(1)$ (qu'on a vu être très différent de \mathbf{C}_p puisqu'il n'y a pas de $2i\pi$ dans \mathbf{C}_p) ne diffère de \mathbf{C}_p que par des \mathbf{Q}_p -représentations de dimension finie de G_K .

2.4.3. *Une preuve de la conjecture « fa \Rightarrow a ».* — La preuve de « fa \Rightarrow a » que Fontaine avait en vue est la suivante. Soit D un (φ, N) -module filtré sur K , de rang h . Si $r \in \mathbf{N}$, on pose

$$X_{\text{st}}^r(D) = (t^{-r} \mathbf{B}_{\text{st}}^+ \otimes_{K_0} D)^{N=0, \varphi=1} \quad \text{et} \quad X_{\text{dR}}^r(D) = (t^{-r} \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K D_K) / \text{Fil}^0.$$

Alors $X_{\text{st}}^r(D)$ et $X_{\text{dR}}^r(D)$ sont des presque- \mathbf{C}_p -représentations et, si r est assez grand, on a

$$\dim X_{\text{st}}^r(D) = (rh - t_N(D), h) \quad \text{et} \quad \dim X_{\text{dR}}^r(D) = (rh - t_H(D), 0).$$

Maintenant, si D est faiblement admissible, $V_{\text{st}}(D)$ est, d'après un vieux résultat de Fontaine [4], de dimension $\leq h$ sur \mathbf{Q}_p , et égale au noyau de $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$, si r est assez grand. Si on note W le conoyau de $X_{\text{st}}^r(D) \rightarrow X_{\text{dR}}^r(D)$, on a $\dim W = 0$ puisque $\dim V_{\text{st}}(D) = 0$ et $\dim X_{\text{st}}^r(D) = \dim X_{\text{dR}}^r(D)$; il s'ensuit que $\text{ht } W \geq 0$. Comme $\text{ht } V_{\text{st}}(D) + \text{ht } X_{\text{dR}}^r(D) = \text{ht } X_{\text{st}}^r(D) + \text{ht } W$, on déduit des inégalités précédentes que $\dim_{\mathbf{Q}_p} V_{\text{st}}(D) = h$, i.e. D est admissible, et que $W = 0$.

3. La courbe de Fargues-Fontaine

Comme je le raconte dans [58], la courbe X^{FF} de Fargues-Fontaine a vu le jour à Trieste, dans la nuit du 5 septembre 2009. Fontaine avait réalisé, 2 mois plus tôt, que l'anneau $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\text{cris}}^{\varphi=1}$ est principal (à sa grande surprise) en s'appuyant sur des résultats de Kedlaya [72] et Berger [43], mais il a fallu des sauts intellectuels audacieux pour imaginer que \mathbf{B}_e pouvait être considéré comme l'anneau des fonctions sur une courbe affine, puis que l'on pouvait compactifier cette courbe affine en rajoutant un point ∞ de manière à obtenir une courbe projective X^{FF} . Cette courbe permet de donner une incarnation géométrique à tous les objets du programme de Fontaine ; on en déduit une preuve particulièrement limpide de la conjecture « faiblement admissible \Rightarrow admissible ». Nous allons donner des telles incarnations pour :

- la suite exacte fondamentale $0 \rightarrow \mathbf{Q}_p \rightarrow \mathbf{B}_e \rightarrow \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \rightarrow 0$,
- les représentations de G_K , pour $[K : \mathbf{Q}_p] < \infty$,
- les (φ, N) -modules filtrés.

On peut interpréter de même les (φ, Γ) -modules et, dans son dernier article [23], Fontaine décrit les presque \mathbf{C}_p -représentations en termes de faisceaux cohérents sur X^{FF} .

3.1. La courbe. — Tout ce qui suit est tiré de [22].

3.1.1. La courbe comme espace projectif. — La courbe X^{FF} offre de grandes similarités avec la droite projective \mathbf{P}^1 sur \mathbf{C} . Pour souligner ces similarités, introduisons les notations suivantes :

- (pour \mathbf{P}^1) $K = \mathbf{C}$, $\mathcal{A} = \mathbf{C}[T]$, $\mathcal{K} = \mathbf{C}((T^{-1}))$, $\mathcal{K}^+ = \mathbf{C}[[T^{-1}]]$, $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$, où \mathcal{P}_n est l'espace des polynômes homogènes $\mathbf{C}[X, Y]$ de degré n .
- (pour X^{FF}) $K = \mathbf{Q}_p$, $\mathcal{A} = \mathbf{B}_e$, $\mathcal{K} = \mathbf{B}_{\text{dR}}$, $\mathcal{K}^+ = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+$, $\mathcal{P} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{P}_n$, où $\mathcal{P}_n = (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi=p^n}$.

Dans les deux cas, on a les faits algébriques suivant (nettement moins évidents pour X^{FF} que pour \mathbf{P}^1 : le (i) correspond à la suite exacte fondamentale) :

Théorème 3.1. — (i) *La suite $0 \rightarrow K \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{K}/\mathcal{K}^+ \rightarrow 0$ est exacte.*

(ii) *Tout élément de \mathcal{P}_n est le produit de n éléments de \mathcal{P}_1 , uniquement déterminés à l'ordre près et à multiplication près par des éléments de K^* .*

Dans les deux cas, \mathcal{P} est une K -algèbre, naturellement graduée, et l'espace projectif Z associé n'est autre que \mathbf{P}^1 dans le premier cas, et X^{FF} dans le second :

- Les points de Z sont en bijection avec les idéaux homogènes maximaux de \mathcal{P} , et donc avec $(\mathcal{P}_1 \setminus \{0\})/K^*$;
- les ouverts non vides de Z sont de la forme $U_f = Z \setminus V(f)$ où, si $f \in \mathcal{P}$, $V(f)$ est l'ensemble des zéros de f (i.e. l'ensemble des $t \in \mathcal{P}_1/K^*$ divisant f). Si $f \in \mathcal{P}_d \setminus \{0\}$, l'anneau $\mathcal{O}(U_f)$ des fonctions entières sur U_f est la réunion (croissante) des $\frac{1}{f^n} \mathcal{P}_{dn}$.

Si f est une fonction méromorphe sur Z (i.e. $f \in \text{Frac}(\mathcal{A})$), on note $v_z(f)$ l'ordre du zéro de f en $z \in Z$ et on a, dans les deux cas, la formule immédiate mais fondamentale $\sum_{z \in Z} v_z(f) = 0$.

3.1.2. La courbe vue comme compactification d'un espace affine. — Dans les deux cas, on privilégie un point ∞ de Z : dans le cas de \mathbf{P}^1 , c'est le point correspondant à Y et dans le cas de X^{FF} , c'est le point correspondant à t , le $2i\pi$ de Fontaine ; dans le cas de \mathbf{P}^1 , on note $t = \frac{Y}{X}$ le paramètre local en ∞ , et on pose $T = \frac{X}{Y}$ (et donc $t = T^{-1}$). Alors, dans les deux cas, \mathcal{A} est l'anneau $\mathcal{O}(Z \setminus \{\infty\})$ des fonctions entières sur $Z \setminus \{\infty\}$ et \mathcal{K}^+ est le complété $\widehat{\mathcal{O}}_{X, \infty}$ de l'anneau local en ∞ . La « suite exacte fondamentale » ((i) du th. 3.1 pour X^{FF}) s'interprète donc géométriquement comme la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(X) \rightarrow \mathcal{O}(X \setminus \{\infty\}) \rightarrow \text{Fr}(\widehat{\mathcal{O}}_{X, \infty})/\widehat{\mathcal{O}}_{X, \infty} \rightarrow 0.$$

Maintenant, \mathbf{P}^1 est obtenu en compactifiant la droite affine par un point à l'infini, et on peut aussi construire $Z = X^{\text{FF}}$ en recollant un point ∞ au schéma affine $\text{Spec}(\mathcal{A})$. Il faut épaissir un peu ∞ pour que l'ensemble tienne, et on est ramené à recoller $\text{Spec}(\mathcal{K}^+)$ et $\text{Spec}(\mathcal{A})$ le long de $\text{Spec}(\mathcal{K})$: il suffit de définir l'anneau $\mathcal{O}(U)$ des fonctions holomorphes sur un ouvert non vide U de Z . Un tel ouvert est de la forme $\text{Spec}(\mathcal{A}[\frac{1}{u}])$ ou $\text{Spec}(\mathcal{A}[\frac{1}{u}]) \cup \{\infty\}$, avec $u \in \mathcal{A}$; dans le premier cas, on pose $\mathcal{O}(U) = \mathcal{A}[\frac{1}{u}]$, dans le second $\mathcal{O}(U) = \mathcal{A}[\frac{1}{u}] \cap \mathcal{K}^+$.

Remarque 3.2. — Il y a quand même une différence essentielle entre $Z = \mathbf{P}^1$ et $Z = X^{\text{FF}}$. Dans le cas $Z = \mathbf{P}^1$, le corps des constantes (i.e. les fonctions holomorphes sur Z tout entier) est \mathbf{C} et le corps résiduel en ∞ est aussi \mathbf{C} ; dans le cas de X^{FF} , le corps des constantes est \mathbf{Q}_p mais le corps résiduel en ∞ est le corps résiduel de \mathbf{B}_{dR}^+ et donc est \mathbf{C}_p qui est de dimension infinie sur \mathbf{Q}_p . Cette différence provient de ce que \mathbf{P}^1 est de type fini sur \mathbf{C} , alors que X^{FF} n'est pas de type fini sur \mathbf{Q}_p .

3.2. Fibrés sur X

Dans la suite on note simplement X la courbe de Fargues-Fontaine X^{FF} . On note X_e l'ouvert $\text{Spec}(\mathbf{B}_e)$ de telle sorte que $X = X_e \cup \{\infty\}$.

3.2.1. Fibrés et B-paires. — Si \mathcal{E} est un fibré vectoriel sur X , on peut lui associer la paire $(M_e(\mathcal{E}), M_{\text{dR}}^+(\mathcal{E}))$ définie par

$$M_e(\mathcal{E}) = H^0(X_e, \mathcal{E}), \quad M_{\text{dR}}^+(\mathcal{E}) = \widehat{\mathcal{O}}_{X, \infty} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}.$$

Alors $M_e(\mathcal{E})$ est un \mathbf{B}_e -module libre (puisque $\mathbf{B}_e = \mathcal{O}(X_e)$ est principal) de rang fini, et $M_{\text{dR}}^+(\mathcal{E})$ est un \mathbf{B}_{dR}^+ -réseau de $\mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e(\mathcal{E})$; une telle structure est appelée une *B-paire*. Réciproquement, une *B-paire* (M_e, M_{dR}^+) définit un fibré \mathcal{E} sur X : si U est un ouvert de X_e , on a

$$H^0(U, \mathcal{E}) = \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e \quad \text{et} \quad H^0(U \cup \{\infty\}, \mathcal{E}) = (\mathcal{O}(U) \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e) \cap M_{\text{dR}}^+.$$

L'application $\mathcal{E} \mapsto (M_e(\mathcal{E}), M_{\text{dR}}^+(\mathcal{E}))$ est une équivalence de catégories de la catégorie des fibrés sur X sur celle des *B-paires*. (Remplacer \mathbf{B}_e par $\mathbf{C}[T]$ et \mathbf{B}_{dR}^+ par $\mathbf{C}[[T^{-1}]]$ fournit une description – à la Beauville-Laszlo [38] – des fibrés sur \mathbf{P}^1 .)

L'espace $H^0(X, \mathcal{E})$ des sections globales de \mathcal{E} est l'espace des sections sur $X \setminus \{\infty\}$ se prolongeant sur un voisinage infinitésimal de ∞ , et donc

$$H^0(X, \mathcal{E}) = M_e(\mathcal{E}) \cap M_{\text{dR}}^+(\mathcal{E}).$$

3.2.2. Le fibré $\mathcal{O}(\lambda)$. — Si \mathcal{E} est un fibré sur X , on peut associer à \mathcal{E} deux invariants additifs dans les suites exactes : son rang $\text{rg}(\mathcal{E})$ et son degré $\text{deg}(\mathcal{E})$ défini par $\text{deg}(\mathcal{E}) = \text{deg}(\det \mathcal{E})$ où, si \mathcal{L} est un fibré de rang 1 sur X , et si $(\mathbf{B}_e, t^n \mathbf{B}_{\text{dR}}^+)$ est la *B-paire* associée, on pose $\text{deg} \mathcal{L} = -n$ (on a aussi $\text{deg} \mathcal{L} = \sum_{z \in X} v_z(s)$, si s est une section méromorphe globale de \mathcal{L}). On définit la *pente* $\mu(\mathcal{E})$ de \mathcal{E} comme le quotient $\frac{\text{deg}(\mathcal{E})}{\text{rg}(\mathcal{E})}$.

Si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, avec d, h entiers premiers entre eux et $h \geq 1$, on définit un fibré $\mathcal{O}(\lambda)$ sur X de la manière suivante. On considère le P -module gradué $\bigoplus_{n \in \mathbf{N}} (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^{d+n}}$, et on note $\mathcal{O}(\lambda)$ le fibré associé : si $u \in (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi = p}$, et si U_u est l'ouvert sur lequel u est inversible, alors $H^0(U_u, \mathcal{O}(\lambda)) = ((\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)[\frac{1}{u}])^{\varphi^h = p^d}$.

Proposition 3.3. — (i) $\mathcal{O}(\lambda)$ est de rang h , de degré d , et de pente λ .

(ii) Les sections globales de $\mathcal{O}(\lambda)$ sont données par :

$$H^0(X, \mathcal{O}(\lambda)) = \begin{cases} (\mathbf{B}_{\text{cris}}^+)^{\varphi^h = p^d} & \text{si } \lambda \geq 0, \\ 0 & \text{si } \lambda < 0. \end{cases}$$

3.2.3. *Classification des fibrés.* — Munie des deux invariants rang et degré, la catégorie des fibrés sur X est une catégorie de Harder-Narasimhan (comme celle des fibrés sur une courbe projective lisse). Cela a pour conséquence l'existence, sur tout \mathcal{E} , d'une filtration canonique $0 = \mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \dots \subset \mathcal{E}_r = \mathcal{E}$ (la *filtration de Harder-Narasimhan*), strictement croissante, telle que $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$ soit *semi-stable* pour tout $i = 1, \dots, r$ (ce qui signifie que $\mu(\mathcal{E}') \leq \mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ pour tout sous-objet strict \mathcal{E}' de $\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1}$) et telle que la suite des pentes $\mu(\mathcal{E}_i/\mathcal{E}_{i-1})$ soit strictement décroissante.

Le délicat résultat suivant est fondamental.

Théorème 3.4. — ([22, th. 8.2.10]) Si \mathcal{E} est un fibré sur X , il existe des nombres rationnels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$, uniquement déterminés, tels que

$$\mathcal{E} \cong \mathcal{O}(\lambda_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(\lambda_r).$$

Remarque 3.5. — (i) Il résulte de ce théorème que la filtration de Harder-Narasimhan de \mathcal{E} est scindée comme dans le cas de \mathbf{P}^1 où l'on a, grâce à Grothendieck [66], une décomposition comme ci-dessus mais où les λ_i sont des entiers.

(ii) Une grosse différence avec le cas de \mathbf{P}^1 est que $H^1(X, \mathcal{O}(\lambda)) \neq 0$ si $\lambda < 0$: par exemple $H^1(X, \mathcal{O}(-1)) = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+ / (t\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \oplus \mathbf{Q}_p)$; une extension nontriviale de \mathcal{O} par $\mathcal{O}(-1)$ est de pente $\frac{-1}{2}$. Cette différence vient de ce que \mathbf{B}_e , bien que principal, n'est pas euclidien⁽¹⁰⁾, contrairement à $\mathbf{C}[T]$.

Le théorème de classification des fibrés admet comme corollaire le résultat suivant qui est le point de départ d'une belle histoire, loin d'être terminée [65, 85].

Théorème 3.6. — X est géométriquement simplement connexe : tout revêtement étale fini de X est de la forme $E \otimes X$, où $[E : \mathbf{Q}_p] < \infty$.

10. Un exemple nettement plus sexy que le sempiternel $\mathbf{Z}[\frac{1+\sqrt{-19}}{2}]$ des leçons d'agrégation !

3.3. Fibrés G_K -équivariants

3.3.1. *Fibrés G_K -équivariants et représentations de G_K .* — Le groupe G_K agit naturellement sur X . Le point ∞ est fixe par G_K et tous les autres points de X ont une orbite infinie sous l'action de G_K . L'action de G_K sur

$$\mathcal{O}(X \setminus \{\infty\}) = \mathbf{B}_e \quad \text{et} \quad \widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = \mathbf{B}_{\text{dR}}^+,$$

qui s'en déduit est l'action naturelle.

Via l'identification entre fibrés sur X et B -paires, les fibrés G_K -équivariants s'identifient aux (G_K, B) -paires, i.e. les B -paires (M_e, M_{dR}^+) où M_e est muni d'une action semi-linéaire de G_K et $M_{\text{dR}}^+ \subset \mathbf{B}_{\text{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e$ est stable par G_K (objets introduits par Berger [43]).

Si \mathcal{E} est un fibré G_K -équivariant sur X , sa filtration de Harder-Narasimhan est constituée de fibrés G_K -équivariants (car l'action de G_K respecte les pentes des fibrés). Il découle du th.3.4 et de la prop.3.3 que, si \mathcal{E} est semi-stable de pente 0, alors $H^0(X, \mathcal{E})$ est une \mathbf{Q}_p -représentation de G_K . On en déduit le résultat suivant qui fournit une description « géométrique » des \mathbf{Q}_p -représentations de G_K .

Théorème 3.7. — *Les foncteurs*

$$V \mapsto V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathcal{O} \quad \text{et} \quad \mathcal{E} \mapsto H^0(X, \mathcal{E})$$

induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre la catégorie des \mathbf{Q}_p -représentations de G_K et celle des fibrés G_K -équivariants sur X , semi-stables de pente 0.

3.3.2. *(φ, N) -modules filtrés et fibrés G_K -équivariants.* — On peut associer à un (φ, N) -module filtré D sur K , une (G_K, B) -paire $(M_e(D), M_{\text{dR}}^+(D))$, et donc un fibré G_K -équivariant $\mathcal{E}(D)$ sur X , en posant

$$M_e(D) = (\mathbf{B}_{\text{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0, \varphi=1} \quad \text{et} \quad M_{\text{dR}}^+(D) = \text{Fil}^0(\mathbf{B}_{\text{dR}}^+ \otimes_K D_K).$$

Un petit exercice de traduction nous donne :

Proposition 3.8. — *Soit D un (φ, N) -module filtré sur K .*

- (i) $\text{rg}(\mathcal{E}(D)) = \text{rg}(D)$, $\text{deg}(\mathcal{E}(D)) = \text{deg}(D)$ et $\mu(\mathcal{E}(D)) = \mu(D)$.
- (ii) D est faiblement admissible si et seulement si $\mathcal{E}(D)$ est semi-stable, de pente 0.

Comme $\mathcal{E}(D)$ est semi-stable, de pente 0, si et seulement si D est admissible (grâce au th.3.7 et à la définition d'admissible), cela fournit une preuve particulièrement limpide de la conjecture « fa \Rightarrow a » (bien sûr, toute la difficulté s'est concentrée dans la preuve du th.3.4).

3.4. Idéaux maximaux de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$.— La preuve du th. 3.1 demande d'étudier les zéros des éléments de \mathbf{A}_{inf} , ce qui se fait en s'inspirant [22, th. 2.4.6 et n° 1.5.2] de la stratégie dans le cas de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$.

Si $x = \sum_{k \in \mathbf{N}} x_k T^k \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$ (resp. $x = \sum_{k \in \mathbf{N}} p^k [x_k] \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$), le *polygone de Newton* NP_x de x est la plus grande fonction convexe $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $f(k) \leq \inf_{i \leq k} v_p(x_i)$ (resp. $f(k) \leq \inf_{i \leq k} v^b(x_i)$), pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Dans les deux cas, NP_x est une fonction convexe décroissante, linéaire par morceaux, et $\lambda < 0$ est une *pente* de NP_x s'il existe un intervalle sur lequel la dérivée de NP_x est λ ; la *multiplicité* de λ est la longueur de cet intervalle (c'est un entier ≥ 1).

Théorème 3.9. — *Soit x un élément de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$ ou de \mathbf{A}_{inf} , et soit λ une pente de NP_x , de multiplicité d .*

- Si $x \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$, il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$, uniques à permutation près, vérifiant $v_p(a_i) = -\lambda$, et tels que $x = (T - a_1) \cdots (T - a_d)y$ avec $y \in \mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$.
- Si $x \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$, il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$ vérifiant $v^b(a_i) = -\lambda$, et tels que $x = (p - [a_1]) \cdots (p - [a_d])y$ avec $y \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$.

Dans les deux cas, NP_y est obtenu en enlevant de NP_x le segment de pente λ .

Le cas de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$ est parfaitement classique, et on en déduit que l'ensemble des idéaux maximaux fermés de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]][\frac{1}{p}]$ est en bijection naturelle avec $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ (la bijection envoie $a \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ sur l'idéal $(T - a)$).

Dans le cas de \mathbf{A}_{inf} , on en déduit que $a \mapsto (p - [a])$ induit une surjection de $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$ sur l'ensemble des idéaux premiers fermés non nuls (qui sont aussi les maximaux fermés) de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$ et donc que cet ensemble est le quotient de $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$ par une certaine relation d'équivalence. Cette relation d'équivalence est difficile à décrire mais on dispose d'une autre paramétrisation (th. 3.10), plus directe, des idéaux maximaux fermés de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$. L'énoncé du résultat va demander un peu de préparation.

Si $x \in \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$, posons $\xi_x = \frac{[1+x]-1}{[1+x^{1/p}]-1} \in \mathbf{A}_{\text{inf}}$; on a $\xi_x = [x^{1-\frac{1}{p}}] + pu_x$, où u_x est une unité de \mathbf{A}_{inf} ; le th. 3.9 permet d'en déduire que (ξ_x) est un idéal premier de \mathbf{A}_{inf} .

On fait agir \mathbf{Z}_p sur $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$ par $\sigma_a(x) = (1+x)^a - 1$. Si $y = \sigma_a(x)$ avec $a \in \mathbf{Z}_p^*$, les idéaux (ξ_x) et (ξ_y) de \mathbf{A}_{inf} sont égaux (car $u - 1$ divise $u^a - 1$ et $u^a - 1$ divise $(u^a)^{1/a} - 1 = u - 1$).

Théorème 3.10. — *$x \mapsto (\xi_x)$ induit une bijection de $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}/\mathbf{Z}_p^*$ sur l'ensemble des idéaux maximaux fermés de $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$.*

Remarque 3.11. — (i) $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ est aussi un quotient de $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b}$: c'est le quotient par \mathbf{Z}_p si on fait agir $a \in \mathbf{Z}_p$ par $a \cdot x = \varepsilon^a x$ ($\varepsilon^{\mathbf{Z}_p}$ est l'ensemble des $z \in \mathbf{C}_p^b$ vérifiant $z^\# = 1$, et l'application $\mathbf{m}_{\mathbf{C}_p^b} \rightarrow \mathbf{m}_{\mathbf{C}_p}$ est simplement $a \mapsto a^\#$).

(ii) Dans les deux cas, 0 joue un rôle particulier vu qu'il est fixe par les actions de \mathbf{Z}_p^* et \mathbf{Z}_p et c'est le seul point ayant un stabilisateur non trivial. Il est donc raisonnable de le supprimer et donc de considérer les ensembles $|D^\times|$ et $|Y|$ des idéaux maximaux

fermés de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]][\frac{1}{p}, \frac{1}{T}]$ et $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}, \frac{1}{[p^b]}]$ au lieu de $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]][\frac{1}{p}]$ et $\mathbf{A}_{\text{inf}}[\frac{1}{p}]$. Alors $|D^\times|$ et $|Y|$ sont les points classiques d'espaces analytiques D^\times (qui n'est autre que la boule unité ouverte *épointée*, i.e. privée de 0) et Y (qui est un objet plus exotique). Les isomorphismes ensemblistes

$$|D^\times| \cong (\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} \setminus \{0\})/\mathbf{Z}_p \quad \text{et} \quad |Y| \cong (\mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p} \setminus \{0\})/\mathbf{Z}_p^*$$

sont la trace sur les points classiques d'isomorphismes d'espaces « analytiques » mais pour donner un sens aux quotients correspondants, il faut sortir du cadre des espaces analytiques (ou même adiques) et passer dans le monde des diamants [85].

Épilogue

Il y aurait encore beaucoup à dire sur le devenir des constructions de Fontaine et le lecteur est invité à consulter [58] pour un éclairage différent, les exposés Bourbaki de la bibliographie pour des développements de certains des points mentionnés dans le texte, et les documents regroupés sur <https://webusers.imj-prg.fr/~pierre.colmez/FW.html> pour des photos instantanées de mathématiques en train de se faire.

Index

anneaux	caractère cyclotomique χ , 6
basculés $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p^b}$, \mathbf{C}_p^b , 18	courbe X^{FF} , X , ouvert X_e , 30, 31
elfiques \mathbf{A}_{inf} , \mathbf{B}_{cris} , \mathbf{B}_{st} , \mathbf{B}_{dR} , \mathbf{B}_e , 16, 18, 19	éléments spéciaux t , ε , ξ , u , π , 10, 11, 18, 19, 26
gnomiques \mathbf{E} , \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{E}_K , \mathbf{A}_K , \mathbf{B}_K , $\tilde{\mathbf{A}}$, $\widehat{\mathcal{O}}^{\text{nr}}$, 26	groupes de Galois $G_{\mathbf{Q}_p}$, G_K , 6
humains \mathbf{Q}_p , \mathbf{Z}_p , \mathbf{Z}_p^* , \mathbf{C}_p , \mathbf{Q}_p^{nr} , $\overline{\mathbf{Q}}_p$, $\mathcal{O}_{\mathbf{C}_p}$, \mathcal{O}_K , \mathbf{B}_{HT} , 5, 6, 10	opérateurs φ , N , θ , 15, 16, 18, 19
	Tate twist $V(k)$, 14

Références

Travaux de Fontaine mentionnés dans le texte

- [1] J.-M. FONTAINE, Corps de séries formelles et extensions galoisiennes des corps locaux, Séminaire de théorie de nombres de Grenoble 1971-72, http://www.numdam.org.ezproxy.math.cnrs.fr/volume/STNG_1971-1972__1/
- [2] J.-M. FONTAINE, *Groupes p -divisibles sur les corps locaux*, Astérisque **47-48** (1977).
- [3] J.-M. FONTAINE, J.-P. WINTENBERGER, Le corps des normes de certaines extensions algébriques de corps locaux, C.R.A.S. **288** (1979) 367–370.
- [4] J.-M. FONTAINE, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*, Astérisque **65** (1979), 3–80.
- [5] J.-M. FONTAINE, Formes différentielles et modules de Tate des variétés abéliennes sur les corps locaux, Invent. math. **65** (1981/82), 379–409.

- [6] J.-M. FONTAINE, G. LAFFAILLE, Constructions de représentations p -adiques, *Ann. ENS* **15** (1982), 547–608.
- [7] J.-M. FONTAINE, Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math.* **115** (1982), 529–577.
- [8] J.-M. FONTAINE, Cohomologie de de Rham, cohomologie cristalline et représentations p -adiques, *Algebraic geometry (Tokyo/Kyoto, 1982)*, 86–108, Lecture Notes in Math. **1016**, Springer, 1983.
- [9] J.-M. FONTAINE, W. MESSING, p -adic periods and p -adic étale cohomology, *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry* Contemporary Math. **67**, AMS, 1987, 179–207.
- [10] J.-M. FONTAINE, Lettre à Uwe Jannsen, 26/11/1987.
- [11] J.-M. FONTAINE, Représentations p -adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87** (1990) 249–309, Birkhäuser.
- [12] J.-M. FONTAINE, Le corps des périodes p -adiques, *Astérisque* **223** (1994), 59–111.
- [13] J.-M. FONTAINE, Représentations p -adiques semi-stables, *Astérisque* **223** (1994), 113–184.
- [14] J.-M. FONTAINE, B. PERRIN-RIOU, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L , dans *Motives (Seattle)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1, 599–706, 1994.
- [15] J.-M. FONTAINE, B. MAZUR, Geometric Galois representations, *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, 1995.
- [16] P. COLMEZ, J.-M. FONTAINE, Construction des représentations p -adiques semi-stables, *Invent. math.* **140** (2000), 1–43.
- [17] J.-M. FONTAINE, Analyse p -adique et représentations galoisiennes, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 139–148, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [18] J.-M. FONTAINE, Presque \mathbf{C}_p -représentations, *Kazuya Kato's fiftieth birthday*, Doc. Math., Extra Vol. (2003), 285–385.
- [19] J.-M. FONTAINE, Arithmétique des représentations galoisiennes p -adiques, *Astérisque* **295** (2004), 1–115.
- [20] J.-M. FONTAINE, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay 2004-12 (2004), 20p.
- [21] J.-M. FONTAINE, Y. OUYANG, Theory of p -adic Galois representations, second draft, <http://staff.ustc.edu.cn/~yiouyang/research.html>.
- [22] L. FARGUES, J.-M. FONTAINE, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p -adique, *Astérisque* **406** (2018), 51–382.
- [23] J.-M. FONTAINE, Almost \mathbf{C}_p -representations and vector bundles, *Tunis. J. Math.* **2** (2020), 667–732.

Quelques exposés Bourbaki en rapport avec le texte

- [24] J.-P. SERRE, Groupes p -divisibles, *Séminaire Bourbaki 1966-67*, exp. **318**, *Exposés de séminaires 1950-2000*, deuxième édition augmentée, Documents Mathématiques **1**, SMF, 2008.
- [25] L. ILLUSIE, Cohomologie cristalline (d'après P. Berthelot), *Séminaire Bourbaki 1974-1975*, exp. **456**, *Lecture Notes in Math.* **514** (1976), 53–60.
- [26] L. ILLUSIE, Cohomologie de de Rham et cohomologie étale p -adique (d'après G. Faltings, J.-M. Fontaine et al.), *Séminaire Bourbaki 1989-90*, exp. **726**, *Astérisque* **189-190** (1990), 325–374.
- [27] J.-M. FONTAINE, Valeurs spéciales de fonctions L des motifs, *Sém. Bourbaki 1991/92*, exp. **751**, *Astérisque* **206**, 205-249, 1992.
- [28] B. EDIXHOVEN, Rational elliptic curves are modular (after Breuil, Conrad, Diamond and Taylor), *Séminaire Bourbaki 1999-2000*, exp. **861**, *Astérisque* **276** (2002) 161–188.
- [29] P. COLMEZ, Les conjectures de monodromie p -adique, *Séminaire Bourbaki 2001-2002*, exp. **897**, *Astérisque* **290** (2003), 53–101.
- [30] L. BERGER La correspondance de Langlands locale p -adique pour $GL_2(\mathbf{Q}_p)$, *Séminaire Bourbaki 2009-10*, exp. **1017**, *Astérisque* **339** (2011), 157–180.
- [31] C. BREUIL, Correspondance de Langlands p -adique, compatibilité local-global et applications (d'après Colmez, Emerton, Kisin,...), *Séminaire Bourbaki 2010-11*, exp. **1031**, *Astérisque* **348** (2012), 119–147.
- [32] J.-M. FONTAINE, Perfectoïdes, presque pureté et monodromie-poids (d'après Peter Scholze), *Séminaire Bourbaki 2011-12*, exp. **1057**, *Astérisque* **352** (2013), 509–534.
- [33] M. MORROW, The Fargues-Fontaine curve and diamonds (d'après Fargues, Fontaine, et Scholze), *Séminaire Bourbaki 2017-18*, exp. **1150**, *Astérisque* (à paraître).

Autres références

- [34] P. ALLEN, F. CALEGARI, A. CARAIANI, T. GEE, D. HELM, B.-V. LE HUNG, J. NEWTON, P. SCHOLZE, R. TAYLOR, J. THORNE, Potential automorphy over CM fields, arXiv :1812.09999 [math-NT] (2018).
- [35] Y. ANDRÉ, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p -adique, *Invent. math.* **148** (2002), 285–317.
- [36] M. ARTIN, Comparaison avec la cohomologie classique, cas d'un schéma lisse, Exp. XI dans SGA4, *Lecture Notes in Mathematics* **305**, 64–78, Springer-Verlag 1972.
- [37] J. BALAKRISHNAN, N. DOGRA, S. MÜLLER, J. TUITMAN, J. VONK, Explicit Chabauty–Kim for the split Cartan modular curve of level 13, *Ann. of Math.* **189** (2019), 885–944.
- [38] A. BEAUVILLE, Y. LASZLO, Un lemme de descente, *C.R.A.S.* **320** (1995), 335–340.
- [39] A. BEILINSON, p -adic periods and derived de Rham cohomology, *J. AMS* **25** (2012), 715–738.
- [40] A. BEILINSON, On the crystalline period map, *Cambridge J. Math.* **1** (2013), 1–51.
- [41] L. BERGER, Représentations p -adiques et équations différentielles, *Invent. math.* **148** (2002), 219–284.
- [42] L. BERGER, Bloch and Kato's exponential map : three explicit formulas, *Doc. Math. Extra Vol.* (2003), 99–129.

- [43] L. BERGER, Construction de (φ, Γ) -modules : représentations p -adiques et B -paires, *Algebra Number Theory* **2** (2008), 91–120.
- [44] P. BERTHELOT, Cohomologie cristalline des schémas de caractéristique $p > 0$, *Lecture Notes in Mathematics* **407**, Springer-Verlag 1974.
- [45] B. BHATT, M. MORROW, P. SCHOLZE, Integral p -adic Hodge Theory, *Publ. IHES* **128** (2018), 219–397.
- [46] S. BLOCH et K. KATO, L functions and Tamagawa numbers of motives, dans *The Grothendieck Festschrift*, vol. 1, *Prog. in Math.* **86**, 333–400, Birkhäuser 1990.
- [47] G. BOXER, F. CALEGARI, T. GEE, V. PILLONI, Abelian surfaces over totally real fields are potentially modular, *arXiv :1812.09269 [math.NT]* (2018).
- [48] C. BREUIL, The emerging p -adic Langlands programme, *Proceedings of I.C.M. 2010, Hyderabad*, Vol. II, 203-230.
- [49] Correspondance entre Henri Cartan et André Weil (éditée par M. Audin), lettres d’A. Weil des 18/01/47 et 02/02/47, *Documents Mathématiques* **6**, SMF 2011.
- [50] F. CHERBONNIER, Représentations p -adiques surconvergentes. thèse Orsay, 1996
- [51] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ, Représentations p -adiques surconvergentes. *Invent. math.* **133** (1998), 581–611.
- [52] F. CHERBONNIER, P. COLMEZ, Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques d’un corps local. *J. AMS* **12** (1999), 241-268.
- [53] R. COLEMAN, Division values in local fields, *Invent. math.* **53** (1979), 91–116.
- [54] P. COLMEZ, Périodes de variétés abéliennes à multiplication complexe et dérivées de fonctions L d’Artin en $s = 0$, *C.R.A.S.* **309** (1989), 139–142.
- [55] P. COLMEZ, Périodes des variétés abéliennes à multiplication complexe. *Ann. of Maths* **138** (1993), 625–683.
- [56] P. COLMEZ, Espaces de Banach de dimension finie, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 331–439.
- [57] P. COLMEZ, Le programme de Langlands p -adique, *European Congress of Mathematics Krakow 2012*, *European Math. Soc.* (2013), 259–284.
- [58] P. COLMEZ, La courbe de Fargues et Fontaine, préface, *Astérisque* **406** (2018), 1–50.
- [59] P. COLMEZ, G. DOSPINESCU, W. NIZIOL, Cohomology of p -adic Stein spaces, *arXiv :1801.06686 [math.NT]*, *Invent. math.* (à paraître).
- [60] P. COLMEZ, W. NIZIOL, Syntomic complexes and p -adic nearby cycles, *Invent. math.* **208** (2017), 1–108.
- [61] R. CREW, Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, *Ann. ENS* **31** (1998), 717–763.
- [62] B. DWORK, G. GEROTTO, F. SULLIVAN, *An introduction to G -functions*, *Annals of Mathematics Studies* **133**, Princeton University Press, 1994.
- [63] M. EMERTON, T. GEE, Moduli stacks of étale (φ, Γ) -modules and the existence of crystalline lifts, *arXiv :1908.07185 [math.NT]* (2019).
- [64] G. FALTINGS, Almost étale extensions, *Astérisque* **279** (2002), 185–270.
- [65] L. FARGUES, Geometrization of the local Langlands correspondence, an overview, *arXiv :1602.00999 [math.NT]* (2016).

- [66] A. GROTHENDIECK, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, *Amer. J. Math.* **79** (1957), 121–138.
- [67] A. GROTHENDIECK, On the de Rham cohomology of algebraic varieties, *Publ. IHES* **29** (1966), 95–103.
- [68] A. GROTHENDIECK, Crystals and the de Rham cohomology of schemes, dans *Dix exposés sur la cohomologie des schémas*, *Advanced Studies in Pure Mathematics* **3**, 306–358, North-Holland 1968.
- [69] L. HERR, Sur la cohomologie galoisienne des corps p -adiques, *Bull. S.M.F.* **126** (1998), 563–600.
- [70] O. HYODO, K. KATO, Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles, *Astérisque* **223** (1994), 221–268.
- [71] K. KATO, Logarithmic structures of Fontaine-Illusie, *Algebraic analysis, geometry, and number theory (Baltimore, MD, 1988)*, 191–224, Johns Hopkins Univ. Press, 1989.
- [72] K. KEDLAYA, A p -adic monodromy theorem, *Ann. of Math.* **160** (2004), 93–184.
- [73] C. KHARE, J.-P. WINTENBERGER, Serre’s modularity conjecture (I), *Invent. math.* **178** (2009), 485–504.
- [74] C. KHARE, J.-P. WINTENBERGER, Serre’s modularity conjecture (II), *Invent. math.* **178** (2009), 505–586.
- [75] M. KIM, The motivic fundamental group of $\mathbf{P}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}$ and the theorem of Siegel, *Invent. Math.* **161** (2005), 629–656.
- [76] N. KOBLITZ *p -adic numbers, p -adic analysis, and zeta-functions*, Second edition, *Graduate Texts in Mathematics* **58**, Springer-Verlag, 1984.
- [77] B. LAWRENCE, A. VENKATESH, Diophantine problems and p -adic period mappings, *arXiv :1807.02721 [math.NT]* (2018).
- [78] Z. MEBKHOUT, Analogue p -adique du théorème de Turritin et le théorème de la monodromie p -adique, *Invent. math.* **148** (2002), 319–351.
- [79] Y. NESTERENKO, Modular functions and transcendence questions, *Sb. Math.* **187** (1996), 1319–1348.
- [80] W. NIZIOŁ, Semistable Conjecture via K-theory, *Duke Math. J.* **141** (2008), 151–178.
- [81] B. PERRIN-RIOU, Théorie d’Iwasawa des représentations p -adiques sur un corps local, *Invent. math.* **115** (1994) 81–149.
- [82] M. RAYNAUD, Variétés abéliennes et géométrie rigide, *actes congrès intern. math. Nice, Tome 1*, 473–477, 1970.
- [83] P. SCHOLZE, p -adic Hodge theory for rigid-analytic varieties, *Forum of Mathematics*, *Pi*, 1, e1, 2013.
- [84] P. SCHOLZE, On torsion in the cohomology of locally symmetric varieties, *Ann. of Math.* **182** (2015), 945–1066.
- [85] P. SCHOLZE, J. WEINSTEIN, *Berkeley lectures on p -adic geometry*, *Annals of Math Studies*, Princeton University Press, 2020.
- [86] S. SEN, Ramification in p -adic Lie extensions, *Invent. math.* **17** (1972), 44–50.
- [87] S. SEN, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, *Ann. of Math.* **97** (1973), 160–170.
- [88] S. SEN, Continuous cohomology and p -adic Galois representations, *Invent. math.* **62** (1980/81), 89–116.

- [89] J.-P. SERRE, *Corps locaux*, deuxième édition, Publications de l'Université de Nancago VIII, Hermann, 1968.
- [90] J.-P. SERRE, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, *Duke Math. J.* **54** (1987), 179–230.
- [91] Correspondance Serre-Tate (éditée par P. Colmez et J.-P. Serre), *Documents Mathématiques* **13** et **14**, SMF 2015.
- [92] J. TATE, p -divisible groups, *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, 158–183, Springer 1967.
- [93] R. TAYLOR, Remarks on a conjecture of Fontaine and Mazur, *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), 125–143.
- [94] T. TSUJI, p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case, *Invent. math.* **137** (1999), 233–411.
- [95] A. WILES, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, *Ann. of Math.* **141** (1995), 443–551.
- [96] J.-P. WINTENBERGER, Le corps des normes de certaines extensions infinies des corps locaux; applications, *Ann. ENS* **16** (1983), 59–89.
- [97] J.-P. WINTENBERGER, Théorème de comparaison p -adique pour les schémas abéliens. I, Construction de l'accouplement de périodes, *Astérisque* **223** (1994), 349–397.