LA FONCTION ZÊTA p-ADIQUE, NOTES DU COURS DE M2

par

Pierre Colmez

Table des matières

1. La fonction zêta p-adique

1.1. Valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta de Riemann

Soit $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s} = \prod_p (1-p^{-s})^{-1}$ la fonction zêta de Riemann. Soit $\Gamma(s) = \int_{t=0}^{+\infty} e^{-t} t^s \frac{dt}{t}$ la fonction Γ d'Euler. Cette fonction est holomorphe pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ et satisfait l'équation fonctionnelle $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, ce qui permet de la prolonger en une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier.

Lemme 1.1. — *Si* $\mathrm{Re}(s) > 1$, *alors*

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t - 1} t^s \frac{dt}{t}.$$

Démonstration. — Il suffit d'écrire $\frac{1}{e^t-1}$ sous la forme $\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}$ et d'utiliser la formule $\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$.

Proposition 1.2. — *Si f est une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ à décroissance rapide à l'infini, alors la fonction*

$$L(f,s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} f(t) t^s \frac{dt}{t}$$

définie pour $\mathrm{Re}(s) > 0$ *admet un prolongement holomorphe à* $\mathbf{C}$ *tout entier et, si* $n \in \mathbf{N}$, *alors* $L(f, -n) = (-1)^n f^{(n)}(0)$.

Démonstration. — Soit φ une fonction $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$, valant 1 sur $[0,1]$ et 0 sur $[2, +\infty[$. On peut écrire f sous la forme $\varphi f + (1-\varphi) f$ et $L(f,s)$ sous la forme $L(\varphi f, s) + L((1-\varphi)f, s)$ et comme $(1-\varphi)f$ est nulle dans un voisinage de 0 et à décroissance rapide à l'infini, l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) t^s \frac{dt}{t}$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. Comme de plus, $\frac{1}{\Gamma(s)}$ s'annule aux entiers négatifs, on a $L((1-\varphi)f, -n) = 0$ si $n \in \mathbf{N}$. On voit donc que, quitte à remplacer f par $(1-\varphi)f$, on peut supposer f à support compact. Une intégration par partie nous fournit alors la formule $L(f,s) = -L(f', s+1)$ si $\mathrm{Re}(s) > 1$, ce qui permet de prolonger $L(f,s)$ en une fonction holomorphe sur $\mathbf{C}$ tout entier. D'autre part, on a

$$L(f, -n) = (-1)^{n+1} L(f^{(n+1)}, 1) = (-1)^{n+1} \int_0^{+\infty} f^{(n+1)}(t) dt = (-1)^n f^{(n)}(0),$$

ce qui termine la démonstration.

On peut en particulier appliquer cette proposition à $f_0(t) = \frac{t}{e^t-1}$. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{t^n}{n!}$ le développement de Taylor de f_0 en 0. Les B_n sont des nombres rationnels appelés nombres de Bernoulli et qu'on retrouve dans toutes les branches des mathématiques. On a en particulier

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = \frac{-1}{30}, \quad \ldots, \quad B_{12} = \frac{-691}{2730},$$

et comme $f_0(t) - f_0(-t) = -t$, la fonction f_0 est presque paire et $B_{2k+1} = 0$ si $k \geqslant 1$. Un test presque infaillible pour savoir si une suite de nombres a un rapport avec les nombres de Bernoulli est de regarder si 691 apparaît dans les premiers termes de cette suite.

Théorème 1.3. — (i) *La fonction ζ a un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$ de résidu 1.*

(ii) *Si* $n \in \mathbf{Q}$, *alors* $\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1}$; *en particulier,* $\zeta(-n) \in \mathbf{Q}$.

Démonstration. — On a $\zeta(s) = \frac{1}{s-1} L(f_0, s-1)$ comme on le constate en utilisant la formule $\Gamma(s) = (s-1)\Gamma(s-1)$; on en déduit le résultat.

Remarque 1.4. — Les valeurs aux entiers de la fonction zêta, ou plus généralement des fonctions L de la géométrie arithmétique, recellent une quantité impressionante d'informations arithmétiques. Par exemple, Kummer a montré que, si p ne divise pas le numérateur de $\zeta(-1)$, $\zeta(-3)$, $\ldots$, $\zeta(2-p)$, alors p ne divise pas le cardinal du groupe des classes d'idéaux du corps $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_p)$.

Cela lui a permis de démontrer le théorème de Fermat pour un tel p dit *régulier*. Le point de départ de la démonstration de Kummer est la formule analytique du nombre de classes d'idéaux qui permet d'exprimer ce nombre de classes en termes de fonctions L de Dirichlet en $s = 0$. L'une des étapes principale de la démonstration de Kummer consiste à établir une congruence modulo p (ou plus exactement modulo $\mathfrak{m}_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_p)}$) entre ces fonctions L de Dirichlet en $s = 0$ et les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta. Ces congruences sont des cas particuliers de congruences mod p^k, elles-aussi découvertes par Kummer, entre les valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta.

1.2. Les congruences de Kummer

Si $a \in \mathbf{R}_+^*$, on peut appliquer la proposition 1.2 à la fonction $f_a(t) = \frac{1}{e^t-1} - \frac{a}{e^{at}-1}$ qui est $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbf{R}_+$ (on s'est débrouillé pour supprimer le pôle en 0) et à décroissance rapide à l'infini.

Corollaire 1.5. — *Si $a \in \mathbf{R}_+^*$, la fonction $(1 - a^{1-s})\zeta(s) = L(f_a, s)$ a un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier et, si $n \in \mathbf{N}$, alors $(1 - a^{1+n})\zeta(-n) = (-1)^n f_a^{(n)}(0)$. En particulier, si $a \in \mathbf{Q}$, alors $(1 - a^{1+n})\zeta(-n) \in \mathbf{Q}$.*

Proposition 1.6. — *Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, il existe une mesure μ_a dont la transformée de Laplace est $f_a(t)$. De plus, $v_{\mathscr{D}_0}(\mu_a) \geqslant 0$ et si $n \in \mathbf{N}$, alors $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n \mu_a = (-1)^n(1 - a^{1+n})\zeta(-n)$.*

Démonstration. — Pour démontrer l'existence de μ_a, il suffit de vérifier que la série obtenue en remplaçant e^t par $1 + T$ est à coefficients bornés ; ce sera alors la transformée d'Amice de μ_a. Or on peut écrire $(1 + T)^a - 1$ sous la forme $aT(1 + Tg(T))$ avec $g(T) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a}\binom{a}{n} T^{n-2} \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ et donc

$$\frac{1}{T} - \frac{a}{(1+T)^a - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-T)^{n-1} g^n \in \mathbf{Z}_p[[T]].$$

Comme on a obtenu une série à coefficients entiers, on obtient en prime la minoration $v_{\mathscr{D}_0}(\mu_a) \geqslant 0$. Finalement, on a $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n \mu_a = \mathscr{L}_{\mu_a}^{(n)}(0) = f_a^{(n)}(0)$.

***Proposition 1.7* (congruences de Kummer)**. — *Soit $a \in \mathbf{N} - \{1\}$ premier à p. Soit $k \geqslant 1$. Si n_1 et n_2 sont deux entiers $\geqslant k$ vérifiant $n_1 \equiv n_2$ mod. $(p-1)p^{k-1}$, alors*

$$v_p\big((1 - a^{1+n_1})\zeta(-n_1) - (1 - a^{1+n_2})\zeta(-n_2)\big) \geqslant k.$$

Démonstration. — Comme on a supposé $n_1 \geqslant k$ et $n_2 \geqslant k$, on a $v_p(x^{n_1}) \geqslant k$ et $v_p(x^{n_2}) \geqslant k$ si $x \in p\mathbf{Z}_p$. D'autre part, comme $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$ est de cardinal $(p-1)p^{k-1}$, et que l'on a supposé $n_1 \equiv n_2$ mod. $(p-1)p^{k-1}$, on a $x^{n_1} - x^{n_2} \in p^k\mathbf{Z}_p$ si $x \in \mathbf{Z}_p^*$. En résumé, $v_p(x^{n_1} - x^{n_2}) \geqslant k$ quel que soit $x \in \mathbf{Z}_p$, et donc $v_{\mathscr{C}^0}(x^{n_1} - x^{n_2}) \geqslant k$. Comme $v_{\mathscr{D}_0}(\mu_a) \geqslant 0$, ceci implique

$$v_p\big((1 - a^{1+n_1})\zeta(-n_1) - (1 - a^{1+n_2})\zeta(-n_2)\big) = v_p\Big(\int_{\mathbf{Z}_p} (x^{n_1} - x^{n_2})\, \mu_a(x)\Big) \geqslant k$$

et permet de conclure.

1.3. Restriction à $\mathbf{Z}_p^*$

L'énoncé ci-dessus n'est pas très esthétique à cause de la condition $n_1, n_2 \geqslant k$. La démonstration montre que cette condition vient de ce qu'on intègre sur $\mathbf{Z}_p$ tout entier, et que la vie serait plus agréable si on pouvait se restreindre à $\mathbf{Z}_p^*$. Malheureusement, si μ est une distribution quelconque, il n'y a aucun lien, a priori, entre $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^n\,\mu$ et $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\mu$. Par contre, la proposition suivante va nous fournir un tel lien, dans le cas de la mesure μ_a.

Proposition 1.8. — *Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors*
(i) $\psi(\mu_a) = \mu_a$ *;*
(ii) $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_a) = (1-\varphi)\mu_a$ *;*
(iii) $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^n\,\mu_a = (1-p^n)\int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\mu_a$, *quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. — Soit $F(T) = \psi(\frac{1}{T})$. Par définition, on a

$$F((1+T)^p-1) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\frac{1}{(1+T)\zeta-1} = \frac{-1}{p}\sum_{\zeta^p=1}\sum_{n=0}^{+\infty}((1+T)\zeta)^n$$
$$= -\sum_{m=0}^{+\infty}(1+T)^{pm} = \frac{1}{(1+T)^p-1}.$$

On a donc $\psi(\frac{1}{T}) = \frac{1}{T}$. (Formule très utile !)

Maintenant, la transformée d'Amice de μ_a est $\frac{1}{T} - a\frac{a}{(1+T)^a-1} = \frac{1}{T} - a\frac{1}{T}\star a$, et comme ψ commute à l'action de $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et $\psi(\mathscr{A}_\mu) = \mathscr{A}_{\psi(\mu)}$, si μ est une distribution, on en déduit le (i).

Le (ii) suit du (i) et du fait que l'on a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu) = (1-\varphi\psi)\mu$, si μ est une distribution.

Finalement, le (iii) suit du (ii) et de ce que $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\varphi(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p}(px)^n\,\mu$, si μ est une distribution.

Corollaire 1.9. — *Soit $a \in \mathbf{N} - \{1\}$ premier à p. Soit $k \geqslant 1$. Si n_1 et n_2 sont deux entiers vérifiant $n_1 \equiv n_2$ mod. $(p-1)p^{k-1}$, alors*

$$v_p\big((1-a^{1+n_1})(1-p^{n_1})\zeta(-n_1) - (1-a^{1+n_2})(1-p^{n_2})\zeta(-n_2)\big) \geqslant k.$$

1.4. La fonction zêta de Kubota-Leopoldt

Le corollaire 1.9 traduit une propriété de continuité p-adique de la fonction $n \mapsto (1-p^n)\zeta(-n)$. On peut grandement préciser cet énoncé. Pour avoir des formules uniformes, on pose $q = 4$ si $p = 2$, et $q = p$ si $p \neq 2$. On note ϕ la fonction indicatrice d'Euler ; on a donc $\phi(q) = 2$ si $p = 4$, et $\phi(q) = p-1$ si $p \neq 2$.

Théorème 1.10. — *Si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, il existe une unique fonction $\zeta_{p,i}$ continue sur $\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Z}_p - \{1\}$) si $i \neq 1$ (resp. si $i = 1$) telle que la fonction $(s-1)\zeta_{p,i}(s)$ soit analytique sur $\mathbf{Z}_p$ ($i+2\mathbf{Z}_p$ si $p = 2$), et que l'on ait $\zeta_{p,i}(-n) = (1-p^n)\zeta(-n)$ si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $-n \equiv i$ modulo $p-1$.*

Remarque 1.11. — (i) Le théorème ci-dessus est dû à Kubota et Leopoldt et la fonction $\zeta_{p,i}$ est appelée la i-ème branche de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt. Si i est pair, alors $\zeta_{p,i}$ est identiquement nulle car $\zeta(-n) = 0$ si $n \geqslant 2$ est pair.

(ii) On voit que pour rendre la fonction $n \to \zeta(-n)$ p-adiquement continue, on a été forcé de se restreindre à une classe de congruence modulo $p-1$ et surtout de multiplier $\zeta(-n)$ par le facteur $(1-p^n)$ qui est le facteur d'Euler en p de la fonction ζ. L'explication folklorique de ce phénomène est en général la suivante. On a $\zeta(s) = \prod_\ell \frac{1}{1-\ell^{-s}}$. Si $\ell \neq p$, on peut, en se restreignant à une classe de congruence modulo $p-1$ (c.f. n$^{\rm o}$ suivant), prolonger la fonction $n \to \ell^n$ en une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$; par contre, il n'y a rien à faire avec le facteur $(1-p^n)$ qui tend p-adiquement vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Il semble donc normal d'être forcé de retirer ce dernier facteur si on veut que le produit soit p-adiquement continu. Malheureusement, cette explication séduisante est un petit peu trop simpliste pour être juste, comme le montre l'exemple des fonctions L p-adiques attachées aux formes modulaires. Une définition des facteurs d'Euler qu'il faut mettre en p pour pouvoir espérer des propriétés de continuité p-adique pour une fonction L générale a été donnée par Perrin-Riou. Cette définition utilise intensivement les anneaux de Fontaine.

(iii) L'unicité de $\zeta_{p,i}$ est immédiate puisque $i + \phi(q)\mathbf{N}$ est dense dans $\mathbf{Z}_p$ si $p \neq 2$, et dans $i + 2\mathbf{Z}_p$, si $p = 2$. Par contre l'existence est un miracle, comme l'était déjà la rationalité des valeurs aux entiers négatifs de la fonction zêta. Cette existence repose sur la transformée Γ de Leopoldt qui donne un résultat plus fort que l'analyticité sur $\mathbf{Z}_p$.

1.5. Transformée de Mellin p-adique et transformée Γ de Leopoldt

On note Δ le groupe des racines de l'unité contenues dans $\mathbf{Q}_p^*$. Donc Δ est le groupe (cyclique) des racines $\phi(q)$-ième de l'unité, et $\mathbf{Z}_p^*$ est la réunion disjointe des $\varepsilon + q\mathbf{Z}_p$ pour $\varepsilon \in \Delta$. On note $\omega : \mathbf{Z}_p \to \Delta \cup \{0\}$ la fonction définie par $\omega(x) = 0$ si $x \in p\mathbf{Z}_p$, et $x - \omega(x) \in q\mathbf{Z}_p$, si $x \in \mathbf{Z}_p^*$. Si $x \in \mathbf{Z}_p^*$, on définit $\langle x \rangle \in 1 + q\mathbf{Z}_p$ par $\langle x \rangle = x\omega(x)^{-1}$.

Proposition 1.12. — *Si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, la fonction $x \mapsto \omega(x)^i \langle x \rangle^s$ est une fonction localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$. De plus,*

$$\omega(x)^i\langle x\rangle^n = x^n \text{ si } n \equiv i\ [\phi(q)] \textit{ et si } x \in \mathbf{Z}_p^*, \quad \omega(x)^i\langle x\rangle^s = \lim_{\substack{n\to s\\ n\equiv i\ [\phi(q)]}} x^n \textit{ quels que soient } x, s \in \mathbf{Z}_p.$$

Démonstration. — L'analyticité locale vient de ce que l'on a $\omega(x)^i\langle x\rangle^s = 0$ sur $p\mathbf{Z}_p$ et

$$\omega(x)^i\langle x\rangle^s = \varepsilon^i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)^s = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{s}{n}\varepsilon^{i-n}(x-\varepsilon)^n,$$

si $x \in \varepsilon + q\mathbf{Z}_p$ et $\varepsilon \in \Delta$. Le reste de la proposition suit de ce que Δ étant d'ordre $\phi(q)$, on a $\omega(x)^n = \omega(x)^i$ si $n \equiv i\ [\phi(q)]$.

Si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, on définit la i-ème branche $\mathrm{Mel}_{i,\mu}$ de la transformée de Mellin d'une distribution continue μ par la formule

$$\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = \int_{\mathbf{Z}_p}\omega(x)^i\langle x\rangle^s\,\mu(x) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\omega(x)^i\langle x\rangle^s\,\mu(x),$$

la seconde égalité résultant du fait que $\omega(x) = 0$ si $x \in p\mathbf{Z}_p$. D'autre part, on a $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(n) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^n\,\mu$ si $n \equiv i\ [\phi(q)]$.

Remarque 1.13. — On préfère souvent définir la transformée de Mellin d'une distribution μ sur $\mathbf{Z}_p^*$ comme la fonction qui à un caractère localement analytique β de $\mathbf{Z}_p^*$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p^*$ associe l'intégrale

$$\mathrm{Mel}_\mu(\beta) = \int_{\mathbf{Z}_p^*}\beta(x)\,\mu(x).$$

On retrouve l'autre définition de la transformée de Mellin en évaluant cette transformée de Mellin en le caractère $\omega(x)^i\langle x\rangle^s$ et on a donc la formule

$$\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = \mathrm{Mel}_\mu(\omega(x)^i\langle x\rangle^s).$$

L'existence des $\phi(q)$ branches de la transformée de Mellin correspondent au fait que l'espace des caractères continus de $\mathbf{Z}_p^*$ dans $\mathbf{C}_p^*$ est naturellement la réunion de $\phi(q)$ boules ouvertes, une pour chaque caractère de Δ (un caractère général de $\mathbf{Z}_p^*$ est de la forme $x \mapsto \omega(x)^i v^{\theta(x)}$, avec $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, et $v \in D(1, 0^+)$).

Soit u un générateur topologique du groupe multiplicatif $1 + q\mathbf{Z}_p$, et soit $\theta : 1 + q\mathbf{Z}_p \to \mathbf{Z}_p$ le morphisme de groupes qui à x associe $\frac{\log x}{\log u}$. Ce morphisme est analytique et son inverse aussi, ce qui fait que, si f est une fonction localement analytique (resp. continue) sur $1 + q\mathbf{Z}_p$, la fonction $\theta^* f$ définie par $\theta^*\phi(x) = \phi(\theta(x))$ est localement analytique sur $\mathbf{Z}_p$ (resp. continue).

Si μ est une distribution à support dans $1 + q\mathbf{Z}_p$, on définit la distribution $\theta_*\mu$ sur $\mathbf{Z}_p$ par la formule

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi\, \theta_*\mu = \int_{1+q\mathbf{Z}_p} \theta^*\phi\, \mu.$$

Et comme θ^* transforme une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p$ en une fonction continue sur $1 + q\mathbf{Z}_p$, l'image d'une mesure par θ_* est encore une mesure.

Exercice 1. — Montrer, plus généralement, que l'image d'une distribution d'ordre r par θ_* est une distribution d'ordre r.

Lemme 1.14. — *Si X est un ouvert compact de $\mathbf{Z}_p$, si $\alpha \in \mathbf{Z}_p^*$, et si μ est une distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$, alors*

$$\mathrm{Res}_X(\mu \star \alpha) = \mathrm{Res}_{\alpha^{-1}X}(\mu) \star \alpha.$$

Démonstration. — Comme on a $\mathbf{1}_X(\alpha x) = \mathbf{1}_{\alpha^{-1}X}(x)$ si $X \subset \mathbf{Z}_p$; on en déduit la formule

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mathrm{Res}_X(\mu\star\alpha) &= \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_X(x)\phi(x)\,\mu\star\alpha = \int_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{1}_X(\alpha X)\phi(\alpha x)\,\mu(x)\\ &= \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(\alpha x)(1_{\alpha^{-1}X}(x)\,\mu(x)) = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(\alpha x)\,\mathrm{Res}_{\alpha^{-1}X}(\mu)\\ &= \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mathrm{Res}_{\alpha^{-1}X}(\mu)\star\alpha,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

Définition 1.15. — Si μ est une distribution sur $\mathbf{Z}_p^*$ et si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, on définit la i-ième branche $\Gamma_\mu^{(i)}$ de la transformée Γ de μ par la formule

$$\Gamma_\mu^{(i)} = \theta_*\mathrm{Res}_{1+q\mathbf{Z}_p}\Big(\sum_{\varepsilon\in\Delta} \varepsilon^{-i}\mu\star\varepsilon\Big) = \theta_*\Big(\sum_{\varepsilon\in\Delta} \varepsilon^{-i}\mathrm{Res}_{\varepsilon^{-1}+q\mathbf{Z}_p}(\mu)\star\varepsilon\Big),$$

l'égalité entre les deux définitions résultant du lemme précédent. Il est clair que, si μ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p^*$, alors $\Gamma_\mu^{(i)}$ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$, et que l'on a $v_{\mathscr{D}_0}(\Gamma_\mu^{(i)}) \geqslant v_{\mathscr{D}_0}(\mu)$.

Proposition 1.16. — *Si μ est une distribution continue et $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, alors*

$$\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \omega(x)^i \langle x\rangle^s \, \mu(x) = \int_{\mathbf{Z}_p} u^{sy} \, \Gamma_\mu^{(i)}(y) = \mathscr{A}_{\Gamma_\mu^{(i)}}(u^s - 1).$$

Démonstration. — La première (resp. dernière) égalité est une conséquence de la définition de la transformée de Mellin (resp. d'Amice) d'une distribution continue. Si $y = \theta(x) = \frac{\log x}{\log u}$, on a $u^{sy} = \exp(s \log x) = \langle x\rangle^s$ et donc

$$\int_{\mathbf{Z}_p} u^{sy} \, \Gamma_\mu^{(i)}(y) = \int_{1+q\mathbf{Z}_p} \langle x\rangle^s \sum_{\varepsilon\in\Delta} \varepsilon^{-i} \mathrm{Res}_{\varepsilon^{-1}+q\mathbf{Z}_p}(\mu) \star \varepsilon.$$

Utilisant le fait que $\omega(x) = \varepsilon^{-1}$ si $x \in \varepsilon^{-1} + q\mathbf{Z}_p$ et que $\langle \varepsilon x\rangle = \langle x\rangle$, on obtient

$$\int_{\mathbf{Z}_p} u^{sy} \, \Gamma_\mu^{(i)}(y) = \sum_{\varepsilon\in\Delta} \int_{\varepsilon^{-1}+q\mathbf{Z}_p} \omega(x)^i \langle x\rangle^s \, \mu(x) \, ,$$

et le résultat suit de ce que $\mathbf{Z}_p^*$ est la réunion disjointe des $\varepsilon + q\mathbf{Z}_p$ pour $\varepsilon \in \Delta$.

Corollaire 1.17. — (i) *Si μ est une distribution continue et si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, la fonction* $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s)$ *est une fonction analytique de s et même de $u^s - 1$.*

(ii) *Si μ est une mesure vérifiant $v_{\mathscr{D}_0}(\mu) \geqslant 0$, et si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, alors il existe $g_{i,\mu} \in \mathscr{O}_L[[T]]$ tel que* $\mathrm{Mel}_{i,\mu}(s) = g_{i,\mu}(u^s - 1)$.

1.6. Construction de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt

Si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, et si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ vérifie $\langle a\rangle \neq 1$, définissons une fonction $g_{a,i}$ sur $\mathbf{Z}_p$ par la formule

$$g_{a,i}(s) = \frac{1}{1 - \omega(a)^{1-i}\langle a\rangle^{1-s}} \mathrm{Mel}_{-i,\mu_a}(-s) = \frac{1}{1 - \omega(a)^{1-i}\langle a\rangle^{1-s}} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \omega(x)^{-i} \langle x\rangle^{-s} \mu_a(x).$$

D'après le corollaire 1.17, $\mathrm{Mel}_{-i,\mu_a}(-s)$ est une fonction analytique de s. D'autre part, si $\omega(a)^{1-i} \neq 1$, la fonction $s \to 1 - \omega(a)^{1-i}\langle a\rangle^{1-s}$ est une fonction analytique de s ne s'annulant pas sur $\mathbf{Z}_p$ car $\langle a\rangle^s \in 1 + q\mathbf{Z}_p$ et $\omega(a)^{1-i} \in \Delta - \{1\}$ et donc $\omega(a)^{i-1} \notin 1 + q\mathbf{Z}_p$ et si $\omega(a)^{1-i} = 1$, la fonction $1 - \langle a\rangle^{1-s}$ ne s'annule que pour $s = 1$. On en déduit le fait que $g_{a,i}$ est une fonction continue sur $\mathbf{Z}_p - \{1\}$ et même sur $\mathbf{Z}_p$ si $\omega(a)^{1-i} \neq 1$.

De plus, si $-n \equiv i \ [\phi(q)]$, on a $\omega(a)^{1-i} = \omega(a)^{1+n}$ et $\omega(x)^{-i} = \omega(x)^n$ si $x \in \mathbf{Z}_p^*$. Donc

$$\begin{aligned} g_{a,i}(-n) = \frac{1}{1 - \omega(a)^{1+n}\langle a\rangle^{1+n}} \int_{\mathbf{Z}_p^*} \omega(x)^n \langle x\rangle^n \mu_a(x) =& \frac{1}{1 - a^{1+n}} \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^n \mu_a(x) \\ =& (-1)^n (1 - p^n) \zeta(-n) \end{aligned}$$

ne dépend pas du choix de a. Si a et a' sont 2 éléments de $\mathbf{Z}_p^*$, la fonction $g_{a,i} - g_{a',i}$ est donc un quotient de fonctions analytiques sur $\mathbf{Z}_p$ s'annulant en un nombre infini de points, ce qui implique qu'elle est identiquement nulle et que la fonction $g_{a,i}$ est indépendante du choix de a. Il suffit donc de poser $\zeta_{p,i} = g_{a,i}$ pour n'importe quel choix de a vérifiant $\langle a\rangle \neq 1$ et $\omega(a)^{1-i} \neq 1$ si $i \neq 1$ pour avoir une construction de la fonction zêta de Kubota-Leopoldt.

1.7. Le résidu en $s=1$ de la fonction zêta p-adique

La série formelle $\frac{\log(1+T)}{T}$ convergeant sur $B(0,1^-)$, il existe une distribution μ_{KL} dont c'est la transformée d'Amice. La transformée de Laplace de μ_{KL} est $\frac{t}{e^t-1}=f_0(t)$ et

$$\int_{\mathbf{Z}_p} x^n\,\mu_{\mathrm{KL}} = f_0^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}n\zeta(1-n),$$

Comme on le constate en utilisant le théorème 1.3. Cette distribution ressemble beaucoup à la mesure de Haar mais n'est pas invariante par translation. On a en effet le lemme suivant.

Lemme 1.18. — $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\mu_{\mathrm{KL}}(x)=\frac{1}{p^n}$

Démonstration. — $\int_{a+p^n\mathbf{Z}_p}\mu_{\mathrm{KL}}(x)=\frac{1}{p^n}\sum_{\varepsilon^{p^n}=1}\varepsilon^{-a}\mathscr{A}_{\mu_{\mathrm{KL}}}(\varepsilon-1)$ et comme $\log(\varepsilon)=0$ si ε est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p, tous les termes de la somme sont nuls sauf celui correspondant à $\varepsilon=1$, ce qui donne le résultat.

Proposition 1.19. — *On a :*
(i) $\psi(\mu_{\mathrm{KL}})=p^{-1}\mu_{\mathrm{KL}}$ *;*
(ii) $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_{\mathrm{KL}})=(1-p^{-1}\varphi)\mu_{\mathrm{KL}}$ *;*
(iii) $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^n\mu_{\mathrm{KL}}=(-1)^{n-1}n(1-p^{n-1})\zeta(1-n)$*, si* $n\in\mathbf{N}$.

Le (i) suit des formules $\psi(\frac{1}{T})=\frac{1}{T}$ (cf. démonstration de la prop. 1.3) et $\varphi(\log(1+T))=p\log(1+T)$, et de ce que $\psi(\varphi(a)b)=a\psi(b)$. Le reste s'en déduit comme dans la proposition 1.3.

Théorème 1.20. — *La branche* $\zeta_{p,1}$ *de la fonction zêta p-adique a un pôle simple en* $s=1$ *de résidu* $1-\frac{1}{p}$.

Démonstration. — D'après ce qui précède, on peut définir la fonction $\zeta_{p,i}$, si $i\in\mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, par la formule

$$\zeta_{p,i}(s)=\frac{(-1)^{i-1}}{s-1}\mathrm{Mel}_{1-i,\mu_{\mathrm{KL}}}(1-s)=\frac{(-1)^{i-1}}{s-1}\int_{\mathbf{Z}_p^*}\omega(x)^{1-i}\langle x\rangle^{1-s}\mu_{\mathrm{KL}}(x).$$

En effet, les membres de droite et de gauche de la formule ci-dessus sont analytiques sur $\mathbf{Z}_p-\{1\}$, et prennent la même valeur, à savoir $\zeta_{p,i}(-n)=(1-p^n)\zeta(-n)$, si $n\in\mathbf{N}$ vérifie $-n\equiv i\ [p-1]$. Ils sont donc égaux en tout point. De plus

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_{p,i}(s)&=\int_{\mathbf{Z}_p^*}\omega(x)^{1-i}\mu_{\mathrm{KL}}(x)\\&=\sum_{\alpha\in\Delta}\omega(\alpha)^{1-i}\int_{\alpha+p\mathbf{Z}_p}\mu_{\mathrm{KL}}(x)=\begin{cases}1-\frac{1}{p} & \text{si } i=1,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

Remarque 1.21. — (i) La formule $\lim_{s\to1}(s-1)\zeta_{p,1}(s)=1-\frac{1}{p}$ est à rapprocher de la formule analogue pour la fonction zêta de Riemann. La différence entre les deux formules est encore une fois donnée par un facteur d'Euler en p.

(ii) On préfère souvent voir la fonction zêta p-adique comme une fonction d'un caractère continu (et donc localement analytique) $\eta:\mathbf{Z}_p^*\to\mathbf{C}_p^*$; auquel cas, le résultat précédent se traduit en disant que la fonction zêta p-adique a un pôle simple en le caractère x^{-1} (i.e. $x \mapsto x^{-1}$) de résidu $1 - \frac{1}{p}$.

1.8. Les zéros de la fonction zêta p-adique

La fonction zêta p-adique est étroitement reliée aux groupes de classes d'idéaux (quotient du groupe des idéaux fractionnaires par celui des idéaux principaux) des corps $\mathbf{Q}(e^{\frac{2i\pi}{p^n}})$, pour $n \in \mathbf{N}$. Le théorème 1.22 ci-dessous est une conséquence d'un théorème plus précis de Mazur et Wiles et donne une bonne illustration de ce lien.

L'énoncé de ce théorème va demander un peu de préparation. Tout d'abord, si K/F est une extension finie de corps de nombres, et si $\mathfrak{a}$ est un idéal non nul de l'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$ de K, on définit l'idéal $\mathrm{N}_{K/F}(\mathfrak{a})$ comme l'idéal de $\mathscr{O}_F$ engendré par les $\mathrm{N}_{K/F}(\alpha)$, pour $\alpha \in \mathfrak{a}$. On a $\mathrm{N}_{K/F}(\mathfrak{a}\mathfrak{b}) = \mathrm{N}_{K/F}(\mathfrak{a})\mathrm{N}_{K/F}(\mathfrak{b})$ et $\mathrm{N}_{K/F}((\alpha)) = (\mathrm{N}_{K/F}(\alpha))$, ce qui montre que $\mathrm{N}_{K/F}$ induit, par passage aux quotients, un morphisme de groupes du groupe des classes d'idéaux de K dans celui des classes d'idéaux de F. Ce morphisme envoie le p-Sylow dans le p-Sylow puisque le p-Sylow d'un groupe abélien fini n'est autre que l'ensemble des éléments d'ordre une puissance de p.

Dans tout ce qui suit, on suppose $p \neq 2$. Si $n \geqslant 1$, on note F_n le corps cyclotomique $\mathbf{Q}(e^{\frac{2i\pi}{p^n}})$ et X_n le p-Sylow du groupe des classes d'idéaux de F_n. D'après la discussion précédente, l'application N_{F_{n+1}/F_n} induit un morphisme de groupes de X_{n+1} dans X_n. On note X la limite projective des X_n relativement aux applications N_{F_{n+1}/F_n}. Un élément c de X est donc une suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$, avec $c_n \in X_n$ et $c_n = \mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(c_{n+1})$ quel que soit $n \geqslant 1$. Comme chaque X_n est un p-groupe abélien fini et donc un $\mathbf{Z}_p$-module, X est un $\mathbf{Z}_p$-module compact.

On note F_∞ la réunion des F_n. C'est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}$ et son groupe de Galois est canoniquement isomorphe à $\mathbf{Z}_p^*$ via le caractère cyclotomique χ_{cycl}. Le groupe $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q})$ laisse fixe chaque F_n et respecte l'anneau des entiers, et donc transforme un idéal en un idéal et un idéal principal en un idéal principal et, par suite, agit sur X_n. Comme cette action commute aux applications N_{F_{n+1}/F_n}, on obtient une action de $\mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q})$ sur X.

Théorème 1.22. — *Si $i \in (\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z})^*$ est impair et si $s \in \mathbf{Z}_p$, alors les deux conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) $\zeta_{p,i}(s) = 0$;

(ii) *il existe un élément c de X qui n'est pas tué par une puissance de p et sur lequel $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q})$ agit via la formule*

$$\sigma(c) = \omega(\chi_{\mathrm{cycl}}(\sigma))^i \langle \chi_{\mathrm{cycl}}(\sigma) \rangle^s \cdot c.$$

Le théorème précédent caractérise les zéros de la fonction zêta p-adique mais n'est pas très explicite : on ne sait, par exemple, pas démontrer l'énoncé suivant qui reste le principal problème ouvert concernant la fonction zêta p-adique.

Conjecture 1.23. — *Si $i \in (\mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z})^*$ est impair, et si k est un entier $\geqslant 1$, alors $\zeta_{p,i}(k) \neq 0$.*

On sait démontrer ce résultat pour $k = 1$, mais cela résulte d'un théorème profond sur les formes linéaires de logarithmes de nombres algébriques (cf. n° 2.4 du § 2.3). Pour traiter le cas général, il faudrait disposer d'un résultat analogue pour les polylogarithmes.

2. Fonctions L de Dirichlet

Ce que l'on a fait pour la fonction zêta de Riemann s'étend sans douleur aux fonctions L de Dirichlet (à l'exception du théorème de Mazur-Wiles, bien sûr).

2.1. Caractères de Dirichlet et sommes de Gauss

Si D est un entier, on appelle caractère de Dirichlet modulo D un morphisme de groupes de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$ dans $\mathbf{C}^*$. L'image d'un caractère de Dirichlet est bien évidemment incluse dans le groupe des racines de l'unité.

Si D' est un diviseur de D et χ est un caractère de Dirichlet modulo D', on peut aussi voir χ comme un caractère de Dirichlet modulo D en composant χ avec la projection $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/D'\mathbf{Z})^*$. On dit que χ est de conducteur D si on ne peut pas trouver de diviseur D' de D distinct de D, tel que χ provienne d'un caractère modulo D'. De manière équivalente, χ est de conducteur D si quel que soit D' diviseur de D distinct de D, la restriction de χ au noyau de la projection $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/D'\mathbf{Z})^*$ n'est pas triviale.

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo D, on note χ^{-1} le caractère de Dirichlet modulo D défini par $\chi^{-1}(n) = (\chi(n))^{-1}$ si $n \in (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$.

Si χ est un caractère de Dirichlet modulo D, on considère aussi souvent χ comme une fonction périodique sur $\mathbf{Z}$ de période D en composant χ avec la projection naturelle de $\mathbf{Z}$ sur $\mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$ et en étendant χ par 0 sur les entiers non premiers à D. On a donc $\chi^{-1}(n) = (\chi(n))^{-1}$ si $(n, D) = 1$, mais $\chi^{-1}(n) = 0$ si $(n, D) \neq 1$.

Si D est un entier, si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur D et si $n \in \mathbf{Z}$, on définit la somme de Gauss tordue $G(\chi, n)$ par la formule

$$G(\chi, n) = \sum_{a \bmod D} \chi(a) e^{2i\pi \frac{na}{D}},$$

et on pose $G(\chi) = G(\chi, 1)$.

Lemme 2.1. — (i) *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $G(\chi, n) = \chi^{-1}(n) G(\chi)$*
(ii) *$G(\chi) G(\chi^{-1}) = \chi(-1) D$.*

Démonstration. — Si $(n, D) = 1$, alors n est inversible dans $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$, ce qui permet d'écrire

$$G(\chi, n) = \sum_{a \bmod D} \chi(a) e^{2i\pi \frac{na}{D}} = \chi^{-1}(n) \sum_{an \bmod D} \chi(an) e^{2i\pi \frac{na}{D}} = \chi^{-1}(n) G(\chi).$$

Si $(n, D) = e > 1$, on peut écrire $D = eD'$ et $n = en'$. Soit U le noyau de la projection de $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$ sur $(\mathbf{Z}/D'\mathbf{Z})^*$. Si on choisit un système S de représentants de $(\mathbf{Z}/D'\mathbf{Z})^*$ dans $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$, on a

$$G(\chi, n) = \sum_{a \in S} \sum_{u \in U} \chi(au) e^{2i\pi \frac{nau}{D}}.$$

Si $u \in U$ et $a \in \mathbf{Z}$, alors $nau - na = n'ea(u-1) \equiv 0 \bmod D$ et donc $e^{2i\pi \frac{nau}{D}} = e^{2i\pi \frac{na}{D}}$. On obtient donc

$$G(\chi, n) = \sum_{a \in S} \chi(a) e^{2i\pi \frac{na}{D}} \Big(\sum_{u \in U} \chi(u) \Big) = 0$$

car $\sum_{u \in U} \chi(u) = 0$ puisque χ est un caractère non trivial de U (sinon χ serait de conducteur D'). Ceci démontre le (i).

Utilisant ce qui précède, on obtient

$$\begin{aligned} G(\chi)G(\chi^{-1}) &= \sum_{b \bmod D} e^{2i\pi \frac{b}{D}} \chi^{-1}(b) G(\chi) = \sum_{b \bmod D} e^{2i\pi \frac{b}{D}} \Big(\sum_{a \bmod D} \chi(a) e^{2i\pi \frac{ab}{D}} \Big) \\ &= \sum_{a \bmod D} \chi(a) \Big(\sum_{b \bmod D} e^{2i\pi \frac{(a+1)b}{D}} \Big) \end{aligned}$$

et comme $\sum_{b \bmod D} e^{2i\pi \frac{(a+1)b}{D}} = \begin{cases} D & \text{si } a = -1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$, on en tire la formule $G(\chi)G(\chi^{-1}) = \chi(-1)D$.

2.2. Les fonctions-L de Dirichlet

Soient D un entier et χ un caractère de Dirichlet de conducteur D. Soit

$$L(\chi, s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} (1 - \chi(p) p^{-s})^{-1}, \quad \text{pour } \mathrm{Re}(s) > 1,$$

la fonction L de Dirichlet attachée à χ. Si on utilise l'identité

$$\chi(n) = \frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) e^{2i\pi \frac{nb}{D}},$$

on obtient

$$L(\chi, s) = \frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{2i\pi \frac{nb}{D}}}{n^s}$$

Utilisant la formule $\int_0^{+\infty} e^{-nt} t^s \frac{dt}{t} = \frac{\Gamma(s)}{n^s}$, on obtient, ayant posé $\varepsilon_D = e^{\frac{2i\pi}{D}}$,

$$\begin{aligned} L(\chi, s) &= \frac{1}{G(\chi^{-1})} \frac{1}{\Gamma(s)} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \varepsilon_D^{nb} e^{-nt} \\ &= \frac{1}{G(\chi^{-1})} \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \sum_{b \bmod D} \frac{\chi^{-1}(b)}{\varepsilon_D^{-b} e^t - 1} t^s \frac{dt}{t}. \end{aligned}$$

En particulier, la proposition 1.2 implique que $L(\chi, s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbf{C}$ tout entier et que, si $n \in \mathbf{N}$, alors $L(\chi, -n)$ est $(-1)^n \times$ la dérivée n-ième de la fonction $\frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \frac{\chi^{-1}(b)}{\varepsilon_D^{-b} e^t - 1}$ prise en $t = 0$. Pour supprimer le $(-1)^n$, on peut changer t en $-t$, utiliser l'identité

$$\frac{1}{\varepsilon_D^{-b} e^{-t} - 1} = -1 - \frac{1}{\varepsilon_D^{b} e^t - 1}$$

et le fait que $\sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) = 0$ et on obtient $L(\chi, -n) = (\frac{d}{dt})^n \mathscr{L}_\chi(t)_{|0}$, où l'on a posé

$$\mathscr{L}_\chi(t) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \frac{\chi^{-1}(b)}{\varepsilon_D^{b} e^t - 1}.$$

2.3. Fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet

Soit χ un caractère de Dirichlet de conducteur $D > 1$ premier à p. Si $\chi^{-1}(b) \neq 0$, alors ε_D^b est une racine de l'unité d'ordre premier à p et distincte de 1, ce qui implique $v_p(\varepsilon_D^b - 1) = 0$. On en déduit le fait que la série entière

$$F_\chi(T) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \frac{\chi^{-1}(b)}{(1+T)\varepsilon_D^b - 1} = \frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_D^{nb}}{(\varepsilon_D^b - 1)^{n+1}} T^n$$

est à coefficients bornés (et même à coefficients entiers, puisque $G(\chi)$ et $G(\chi^{-1})$ sont des entiers algébriques et $v_p(G(\chi)G(\chi^{-1})) = v_p(D) = 0$, ce qui implique $v_p(G(\chi)) = v_p(G(\chi^{-1})) = 0$) et donc est la transformée d'Amice d'une mesure μ_χ sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée de Laplace est $F_\chi(e^t - 1) = \mathscr{L}_\chi(t)$. On a donc $\int_{\mathbf{Z}_p} x^n \mu_\chi = \mathscr{L}_\chi^{(n)}(0) = L(\chi, -n)$ d'après le n° 2.2 et $v_{\mathscr{D}_0}(\mu_\chi) \geqslant 0$.

Définition 2.2. — On définit la fonction-L p-adique associée à χ comme étant la transformée de Mellin de μ_χ et on note cette fonction $\beta \to L_p(\chi \otimes \beta)$. Si β est un caractère localement analytique sur $\mathbf{Z}_p^*$, on a donc

$$L_p(\chi \otimes \beta) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \beta(x) \mu_\chi(x).$$

D'autre part, si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, on pose

$$L_{p,i}(\chi, s) = L_p(\chi \otimes (\omega^{-i}(x)\langle x \rangle^{-s})) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \omega^{-i}(x)\langle x \rangle^{-s} \mu_\chi(x).$$

Proposition 2.3. — *Si $i \in \mathbf{Z}/\phi(q)\mathbf{Z}$, la fonction $L_{p,i}(\chi, s)$ est une fonction analytique sur $\mathbf{Z}_p$ et on a $L_{p,i}(\chi, -n) = (1 - \chi(p)p^n)L(\chi, -n)$ si $n \in \mathbf{N}$ vérifie $-n \equiv i\ [\phi(q)]$.*

Démonstration. — Le fait que $L_{p,i}(\chi, s)$ soit une fonction analytique sur $\mathbf{Z}_p$ suit des propriétés générales de la transformée de Mellin d'une mesure (corollaire 1.17). D'autre part, d'après la démonstration de la prop. 1.3, on a

$$\sum_{\eta^p = 1} \frac{1}{(1+T)\varepsilon_D^b \eta - 1} = p \frac{1}{(1+T)^p \varepsilon_D^{pb} - 1}$$

on en déduit le fait que la transformée d'Amice de la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ de μ_χ est

$$\frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \frac{\chi^{-1}(b)}{(1+T)\varepsilon_D^b - 1} - \frac{\chi^{-1}(b)}{(1+T)^p \varepsilon_D^{pb} - 1},$$

ce qui, mettant $\chi^{-1}(b)$ sous la forme $\chi(p)\chi^{-1}(pb)$ et utilisant le fait que $b \to pb$ est une bijection modulo D, peut se réécrire sous la forme $\mathscr{A}_{\mu_\chi}(T) - \chi(p)\mathscr{A}_{\mu_\chi}((1+T)^p - 1)$. On en déduit les formules

$$\mathscr{L}_{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_\chi)}(t) = \mathscr{L}_{\mu_\chi}(t) - \chi(p)\mathscr{L}_{\mu_\chi}(pt) \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^n \mu_\chi = (1 - \chi(p))L(\chi, -n),$$

si $n \in \mathbf{N}$, et le résultat.

2.4. Comportement en $s = 1$ des fonctions L de Dirichlet

En reprenant la formule pour $L(\chi, s)$ donnée au n° 2.2 du § 2, on obtient

$$\begin{aligned} L(\chi,1) =& \frac{1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\varepsilon_D^{nb}}{n} \\ =& \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \log(1-\varepsilon_D^b). \end{aligned}$$

On peut obtenir de plus jolies formules en regroupant les contributions de b et $-b$ et en séparant le cas χ pair ($\chi(-1) = 1$) du cas χ impair ($\chi(-1) = -1$).

Nous allons établir l'analogue p-adique de cette formule. Il s'agit de calculer $\int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{-1}\mu_\chi$. Pour ce faire, nous allons calculer la transformée d'Amice de $x^{-1}\mu_\chi$ (qui n'est déterminée qu'à constante près) puis restreindre à $\mathbf{Z}_p^*$, ce qui tue l'indétermination qui correspond à un multiple de la masse de Dirac en 0.

Proposition 2.4. — *La transformée d'Amice de $x^{-1}\mu_\chi$ est* (à constante près) *:*

$$\mathscr{A}_{x^{-1}\mu_\chi}(T) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \log((1+T)\varepsilon_D^b - 1)$$

Démonstration. — Si μ est une distribution, les transformées d'Amice de μ et $x^{-1}\mu$ sont reliées par la formule

$$(1+T)\frac{d}{dT}\mathscr{A}_{x^{-1}\mu}(T) = \mathscr{A}_\mu(T).$$

Appliquons l'opérateur $(1+T)\frac{d}{dT}$ au membre de droite de l'identité à vérifier ; on obtient

$$\frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \frac{(1+T)\varepsilon_D^b}{(1+T)\varepsilon_D^b - 1} = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \Big(\frac{1}{(1+T)\varepsilon_D^b - 1} + 1\Big)$$

et cette dernière expression est égale à $\mathscr{A}_{\mu_\chi}(T)$ comme on le voit en utilisant le fait que $\sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) = 0$. On en déduit le fait que les deux membres ont même image par $(1+T)\frac{d}{dT}$ et donc qu'ils diffèrent par une fonction localement constante. Pour conclure, il faut encore vérifier que le second membre est bien donné par une série convergeant sur $D(0, 0^+)$; mais on a

$$\log((1+T)\varepsilon_D^b - 1) = \log(\varepsilon_D^b - 1) + \log(1 + \frac{\varepsilon_D^b T}{\varepsilon_D^b - 1}) = \log(\varepsilon_D^b - 1) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \Big(\frac{\varepsilon_D^b T}{\varepsilon_D^b - 1}\Big)^n$$

et comme on a supposé $(D, p) = 1$, on a $v_p(\varepsilon_D^b - 1) = 0$, et la série converge bien sur $D(0, 0^+)$. Ceci permet de conclure.

Lemme 2.5. — *La transformée d'Amice de la restriction de $x^{-1}\mu_\chi$ à $\mathbf{Z}_p^*$ est donnée par la formule*

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(x^{-1}\mu_\chi)}(T) =& \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) \Big(\log((1+T)\varepsilon_D^b - 1) - \frac{1}{p}\log((1+T)^p\varepsilon_D^{pb} - 1)\Big) \\ =& \mathscr{A}_{x^{-1}\mu_\chi}(T) - \frac{\chi(p)}{p}\mathscr{A}_{x^{-1}\mu_\chi}((1+T)^p - 1). \end{aligned}$$

Démonstration. — On utilise la formule générale donnant la transformé d'Amice de la restriction à $\mathbf{Z}_p^*$ d'une mesure en fonction de celle de la mesure et l'identité

$$\sum_{\eta^p=1} \log((1+T)\varepsilon_D^b\eta - 1) = \log((1+T)^p\varepsilon_D^{pb} - 1),$$

ce qui permet de montrer la première des deux égalités ; la seconde se démontre en écrivant $\chi^{-1}(b)$ sous la forme $\chi(p)\chi^{-1}(bp)$ et en utilisant le fait que $b \to pb$ est une bijection modulo D comme nous l'avons déjà fait.

En posant $T = 0$ dans la formule précédente, on obtient

$$L_{p,1}(\chi, 1) = L_p(\chi \otimes x^{-1}) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} x^{-1}\mu_\chi = \frac{-1}{G(\chi^{-1})}\Big(1 - \frac{\chi(p)}{p}\Big) \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b)\log(\varepsilon_D^b - 1),$$

formule qui ne diffère de la formule complexe que par un facteur d'Euler et le remplacement du logarithme usuel par le logarithme p-adique. Il s'agit d'une illustration d'un phénomène surprenant au premier abord qui fait que les formules p-adiques et les formules complexes continuent à se ressembler beaucoup même en des points où elles n'ont aucune raison de le faire a priori.

2.5. Torsion par un caractère de conducteur une puissance de p

Notre but dans ce paragraphe est d'étendre les résultats des deux paragraphes précédents pour calculer la fonction L p-adique de χ évaluée en un caractère de la forme $\beta(x)x^n$, où β est un caractère de Dirichlet de conducteur une puissance de p (vu comme caractère localement constant de $\mathbf{Z}_p^*$) et n un entier $\geqslant -1$. Nous utiliserons la notation $\chi \otimes \beta$ pour désigner le caractère de Dirichlet modulo Dp^k défini par $(\chi\otimes\beta)(a) = \chi(a)\beta(a)$, où χ et β sont vus comme des caractères mod Dp^k grâce aux projections respectives de $(\mathbf{Z}/Dp^k\mathbf{Z})^*$ sur $(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$ et $(\mathbf{Z}/p^k\mathbf{Z})^*$.

Lemme 2.6. — *Soit $k \geqslant 1$, β un caractère de Dirichlet de conducteur p^k et μ une distribution continue sur $\mathbf{Z}_p$. Alors on a*

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \beta(x)(1+T)^x\mu(x) = \frac{1}{G(\beta^{-1})} \sum_{c \bmod p^k} \beta^{-1}(c)\mathscr{A}_\mu((1+T)\varepsilon_{p^k}^c - 1).$$

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{Z}_p} \beta(x)(1+T)^x\mu(x) &= \sum_{a \bmod p^k} \beta(a)\int_{a+p^k\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu_\chi \\ &= \sum_{a \bmod p^k} \beta(a)\Big(\frac{1}{p^k}\sum_{\eta^{p^k}=1}\eta^{-a}\mathscr{A}_\mu((1+T)\eta-1)\Big) \\ &= \sum_{\eta^{p^k}=1}\mathscr{A}_\mu((1+T)\eta-1)\Big(\frac{1}{p^k}\sum_{a \bmod p^k}\beta(a)\eta^{-a}\Big).\end{aligned}$$

Si on écrit η sous la forme $\varepsilon_{p^k}^c = e^{2i\pi\frac{c}{p^k}}$, on reconnait dans le terme entre parenthèses une somme de Gauss tordue (divisée par p^k) dont la valeur est donnée par le lemme 2.1 et ce terme vaut donc

$$\frac{1}{p^k}\beta^{-1}(-c)G(\beta) = \frac{\beta^{-1}(c)}{G(\beta^{-1})},$$

la dernière égalité provenant de la formule $G(\beta)G(\beta^{-1}) = \beta(-1)p^k$ (lemme 2.1). On en tire le résultat.

Proposition 2.7. — *Si μ est une mesure sur $\mathbf{Z}_p$ dont la transformée d'Amice est de la forme*

$$\mathscr{A}_\mu(T) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})} \sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b) F((1+T)\varepsilon_D^b - 1)$$

et si β est un caractère de Dirichlet de conducteur p^k avec $k \geqslant 1$, alors

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \beta(x)(1+T)^x \mu(x) = \frac{-1}{G((\chi\otimes\beta)^{-1})} \sum_{a \bmod Dp^k} (\chi\otimes\beta)^{-1}(a) F((1+T)\varepsilon_{Dp^k}^a - 1).$$

Démonstration. — D'après le lemme précédent, on a

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \beta(x)(1+T)^x \mu(x) = \frac{-1}{G(\chi^{-1})G(\beta^{-1})} \sum_{b \bmod D} \sum_{c \bmod p^k} \chi^{-1}(b)\beta^{-1}(c) F((1+T)\varepsilon_D^b \varepsilon_{p^k}^c - 1).$$

Pour mettre cette expression sous une forme un peu plus sympathique, on peut utiliser le fait que tout élément a de $\mathbf{Z}/Dp^n\mathbf{Z}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $Dc + p^n b$, avec $b \in \mathbf{Z}/D\mathbf{Z}$ et $c \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, ce qui donne les formules

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{Dp^k}^a =& \varepsilon_D^b \varepsilon_{p^k}^c \\
(\chi\otimes\beta)^{-1}(a) =& \chi^{-1}(p^k)\beta^{-1}(D)\chi^{-1}(b)\beta^{-1}(c) \\
G((\chi\otimes\beta)^{-1}) =& \sum_{a \bmod Dp^k} (\chi\otimes\beta)^{-1}(a)\varepsilon_{Dp^k}^a \\
=& \chi^{-1}(p^k)\beta^{-1}(D)\Big(\sum_{b \bmod D} \chi^{-1}(b)\varepsilon_D^b\Big)\Big(\sum_{c \bmod p^k} \beta^{-1}(c)\varepsilon_{p^k}^c\Big) \\
=& \chi^{-1}(p^k)\beta^{-1}(D)G(\chi^{-1})G(\beta^{-1})
\end{aligned}$$

et permet de conclure.

On peut appliquer la proposition précédente à la distribution $x^{-1}\mu_\chi$ et à la fonction $F(T) = \log(T)$. On obtient, en évaluant le résultat en $T = 0$,

$$L_p(\chi \otimes (x^{-1}\beta)) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \beta(x) x^{-1} \mu_\chi = \frac{-1}{G((\chi\otimes\beta)^{-1})} \sum_{x \bmod Dp^n} (\chi\otimes\beta)^{-1}(x) \log(\varepsilon_{Dp^n}^x - 1),$$

formule qui est à rapprocher de la formule correspondante sur les complexes.

Proposition 2.8. — *Si β est un caractère de Dirichlet non trivial de conducteur une puissance de p, et si $n \in \mathbf{N}$, alors $L_p(\chi \otimes (x^n\beta)) = L(\chi\otimes\beta, -n)$.*

Démonstration. — On tire de la proposition précédente et de la formule donnant la transformée d'Amice de μ_χ, le fait que la transformée d'Amice de $\beta(x)\mu_\chi(x)$ est

$$\frac{-1}{G((\chi\otimes\beta)^{-1})} \sum_{x \bmod Dp^n} \frac{(\chi\otimes\beta)^{-1}(x)}{(1+T)\varepsilon_{Dp^n}^x - 1}$$

et donc que sa transformée de Laplace est la fonction $\mathscr{L}_{\chi\otimes\beta}(t)$. Le résultat s'en déduit.

Remarque 2.9. — Il n'y a pas de facteur d'Euler apparaissant dans les deux formules précédentes ; c'est dû au fait que p n'est pas premier au conducteur de $\chi \otimes \beta$.

Exercice 2. — Soient $p \geqslant 3$, $i \neq 1$ et soit u un générateur topologique de $1 + p\mathbf{Z}_p$.

(i) Montrer qu'il existe $g_i \in \mathbf{Z}_p[[T]]$ tel que $\zeta_{p,i}(s) = g_i(u^s - 1)$.

(ii) Montrer que, si $v_p(\zeta(i-p)) = 0$, alors $v_p(\zeta_{p,i}(s)) = 0$ quel que soit $s \in \mathbf{Z}_p$.

(iii) Calculer $\zeta_{p,i}(0)$. En déduire que, si $v_p(\zeta(-1)) = v_p(\zeta(-3)) = \cdots = v_p(\zeta(4-p)) = 0$, alors $v_p(L(\omega^i, 0)) = 0$ si $i \in \mathbf{Z}/(p-1)\mathbf{Z}$ est impair, différent de -1.

3. Séries de Coleman

Ce § est consacré à une autre construction de la fonction zêta p-adique et des fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet. Cette construction repose sur une machine, due à Coleman, qui fabrique, à partir d'un « système compatible d'unités locales », une mesure sur $\mathbf{Z}_p$. Elle est conceptuellement un peu plus compliquée que la précédente, mais a l'avantage de fournir un lien direct entre des objets « globaux », à savoir les *unités cyclotomiques*, et les fonctions L p-adiques. Ce lien permet, grâce à une méthode puissante (méthode des systèmeis d'Euler) introduite récemment par Kolyvagin, de faire une étude fine des propriétés arithmétiques des fonctions L p-adiques. En particulier, cela a permis à Rubin de donner une démonstration « élémentaire » du théorème de Mazur-Wiles (cf. Washington, *Introduction to cyclotomic fields* ou Lang, *Cyclotomic fields I and II*).

Par ailleurs cette machine de Coleman a été étendue par Perrin-Riou dans un cadre très général, et la théorie des (φ, Γ)-modules de Fontaine permet d'étendre encore un peu plus la machine de Perrin-Riou pour fournir une construction générale de fonctions L p-adiques à partir « d'éléments globaux » (généralisation des unités cyclotomiques). La méthode des systèmes d'Euler permet alors de faire cracher à la fonction L p-adique les informations arithmétiques qu'elle contient. La seule ombre à ce tableau idyllique est qu'on ne sait pas, sauf dans des cas très particuliers, construire les éléments globaux dont on a besoin...

3.1. Unités cyclotomiques et fonctions L p-adiques. — Si $N \in \mathbf{N}$, notons ε_N une racine primitive N-ième de l'unité. Soit $D \in \mathbf{N}$, premier à p.

• Si $D \neq 1$ et si $n \geqslant 1$, alors $v_\ell(\varepsilon_{Dp^n} - 1) = 0$ quel que soient le nombre premier ℓ et le plongement de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$. Ceci implique que $\varepsilon_{Dp^n} - 1$ est une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})$.

• Si $D = 1$, on a $v_\ell(\varepsilon_{p^n} - 1) = 0$ quel que soient le nombre premier $\ell \neq p$ et le plongement de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ dans $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$; par contre $v_p(\varepsilon_{p^n} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} \neq 0$. Donc $\varepsilon_{p^n} - 1$ n'est pas une unité de l'anneau des entiers de $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{p^n})$ mais, si $a \in \mathbf{Z}$ est premier à p, alors $\frac{\varepsilon_{p^n}^a - 1}{\varepsilon_{p^n} - 1}$ en est une.

Les unités $\varepsilon_{Dp^n} - 1$, si $D \neq 1$, ou $\frac{\varepsilon_{p^n}^a - 1}{\varepsilon_{p^n} - 1}$, sont appelées *unités cyclotomiques*.

Maintenant, un petit calcul montre que, si $n \geqslant 2$, alors

$$\mathrm{N}_{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})/\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp^{n-1}})}(\varepsilon_{Dp^n} - 1) = \varepsilon_{Dp^n}^p - 1 \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_{\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})/\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{Dp^{n-1}})}(\varepsilon_{Dp^n} - 1) = \varepsilon_{Dp^n}^p - 1.$$

Autrement dit, les unités cyclotomiques forment un système compatible pour les applications norme dans la tour des extensions cyclotomiques globales $\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})$, $n \geqslant 1$, et locales $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{Dp^n})$, $n \geqslant 1$.

Exercice 3. — Exprimer $\mathrm{N}_{\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_{Dp})/\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_D)}(\varepsilon_{Dp}-1)$ en termes de ε_{Dp}^p-1, et de l'action de $p\in(\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*=\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\boldsymbol{\mu}_D)/\mathbf{Q})$.

Soit $F=\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_D)$; c'est une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$, (on a donc $F=W(k_F)[\frac{1}{p}]$, et F est muni d'une action bijective de φ). Soit $\varepsilon=(1,\varepsilon^{(1)},\dots)\in\widetilde{\mathbf{E}}^+$ notre système habituel de racines de l'unité, et soit $\overline{\pi}=\varepsilon-1$. Si $n\in\mathbf{N}$, soit $F_n=F(\varepsilon^{(n)})$, et soit $\pi_n=\varepsilon^{(n)}-1$. Soit $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}$ la limite projective des $\mathscr{O}_{F_n}$ pour les applications N_{F_{n+1}/F_n}. Un élément de u de $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}$ est donc une suite $u=(u_n)_{n\geqslant 1}$, où $u_n\in\mathscr{O}_{F_n}$ pour tout n, et $u_n=\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(u_{n+1})$ si $n\geqslant 1$.

On a démontré dans le chapitre sur les anneaux de Fontaine, que $\sigma(x)-x\in\pi_1\mathscr{O}_{F_{n+1}}$, si $n\geqslant 1$, si $x\in\mathscr{O}_{F_{n+1}}$, et si $\sigma\in\mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$, et donc que $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(x)-x^p\in\pi_1\mathscr{O}_{F_{n+1}}$ si $x\in\mathscr{O}_{F_{n+1}}$. Cela implique que $\overline{u}=(\overline{u}_n)_{n\geqslant 1}$ est un élément de l'anneau des entiers $\mathbf{E}_F^+$ du corps des normes $\mathbf{E}_F$, et donc qu'il existe un unique $\overline{g}_u\in k_F[[T]]$ tel que $\overline{g}_u(\overline{\pi})=\overline{u}$.

Si $g=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kT^k$ est un élément de $F[[T]]$, ou de $k_F[[T]]$, et si $n\in\mathbf{N}$, on note $g^{[n]}$ la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\varphi^{-n}(a_k)T^k$. Si $g\in k_F[[T]]$, alors $g^{[n]}$ est aussi définie par l'identité $(g^{[n]}(T))^{p^n}=g(T^{p^n})$. L'identité $\overline{g}_u(\overline{\pi})=\overline{u}$ se traduit donc par $\overline{g}_u^{[n]}(\pi_n)=\overline{u}_n$ dans $\mathscr{O}_{F_n}/\pi_1\mathscr{O}_{F_n}$, quel que soit $n\geqslant 1$. Nous allons montrer que l'on peut relever cette propriété en caractéristique 0.

Théorème 3.1. — (Coleman)

(i) *Si $u=(u_n)_{n\geqslant 1}\in\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}$, il existe $g_u\in\mathscr{O}_F[[T]]$ unique, telle que l'on ait $g_u^{[n]}(\pi_n)=u_n$ quel que soit $n\geqslant 1$. De plus, l'application $u\mapsto g_u$ est multiplicative.*

(ii) *Si $u\neq 0$, et si $\partial=(1+T)\frac{d}{dT}$, alors $\frac{\partial g_u}{g_u}$ vérifie l'équation fonctionnelle $\psi\big(\frac{\partial g_u}{g_u}\big)^{[1]}=\frac{\partial g_u}{g_u}$, et $u\mapsto\frac{\partial g_u}{g_u}$ induit un isomorphisme de $\mathbf{Z}_p$-modules de $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*$ sur l'ensemble des $f\in\mathscr{O}_F[[T]]$ vérifiant $\psi^{[1]}(f)=f$.*

Remarque 3.2. — (i) D'après le (ii), si $u\in\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*$, alors $\frac{\partial g_u}{g_u}\in\mathscr{O}_F[[T]]$ est la transformée d'Amice d'une mesure $\mu_u\in\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p,\mathscr{O}_F)$. Ceci permet de voir les séries de Coleman, comme une machine permettant d'associer une mesure sur $\mathbf{Z}_p$ à un système *d'unités locales* compatibles par les applications norme.

(ii) Si on part de $u=\big(\frac{(1+\pi_n)^a-1}{\pi_n}\big)_{n\geqslant 1}$, on obtient $g_u=\frac{(1+T)^a-1}{T}$, et $\frac{\partial g_u}{g_u}\star(-1)=-\frac{a}{(1+T)^a-1}+\frac{1}{T}$. La mesure μ_u est donc, au changement de variables $x\mapsto -x$ près, la mesure μ_a qui nous a permis de construire la fonction zêta p-adique, et on retrouve l'équation fonctionnelle $\psi(\mu_a)=\mu_a$ qui nous avait servi à relier les intégrales de μ_a sur $\mathbf{Z}_p$ et $\mathbf{Z}_p^*$.

(iii) De même, si $D\neq 1$, si $F=\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_D)$, et si $\eta\in\boldsymbol{\mu}_D$ est une racine primitive D-ième de l'unité, alors $u_\eta=((1+\pi_n)\varphi^{-n}(\eta)-1)_{n\in\mathbf{N}}\in\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*$. La série de Coleman associée est alors $(1+T)\varepsilon-1$, la mesure $\lambda_\eta=\mu_{u_\eta}\star(-1)$ a comme transformée d'Amice $\frac{-1}{(1+T)\eta^{-1}-1}$. On voit donc que, si χ est un caractère de Dirichlet de conducteur D, alors μ_χ est une combinaison linéaire des λ_η, $\eta\in\boldsymbol{\mu}_D$ primitive. Autrement dit, les séries de Coleman permettent de construire les fonctions L p-adiques attachées aux caractères de Dirichlet à partir des unités cyclotomiques.

Exercice 4. — Retrouver la formule $\int_{\mathbf{Z}_p^*}x^n\,\mu_\chi=(1-\chi(p)p^n)\int_{\mathbf{Z}_p}x^n\,\mu_\chi$, en utilisant ce qui précède.

3.2. Existence des séries de Coleman. — Ce n° est consacré à la démonstration du (i) du th. 3.1. Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 3.3. — *Si $f \in \mathscr{O}_{F_1}[[T]]$, il existe* $\mathrm{N}(f) \in \mathscr{O}_{F_1}[[T]]$ *tel que*
$$\mathrm{N}(f)((1+T)^p-1) = \prod_{\zeta^p=1} f((1+T)\zeta-1).$$
De plus, on a
(i) $\mathrm{N}(f)(\pi_n) = \mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(f(\pi_{n+1}))$ *quel que soit* $n \geqslant 1$ *;*
(ii) $\mathrm{N}(f) \in \mathscr{O}_F[[T]]$ *si* $f \in \mathscr{O}_F[[T]]$ *;*
(iii) $\mathrm{N}(f)^{[1]} - f \in \pi_1\mathscr{O}_{F_1}[[T]]$, *si* $f \in \mathscr{O}_F[[T]]$ *;*
(iv) *si* $f \in (\mathscr{O}_{F_1}[[T]])^*$, *si* $k \geqslant 1$, *et si* $f - g \in \pi_1^k\mathscr{O}_{F_1}[[T]]$, *alors* $\mathrm{N}(f) - \mathrm{N}(g) \in \pi_1^{k+1}\mathscr{O}_{F_1}[[T]]$.

Démonstration. — L'unicité est immédiate. Passons à l'existence. Tout élément f de $\mathscr{O}_{F_1}[[T]]$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i f_i((1+T)^p-1) = \sum_{i=0}^{p-1}(1+T)^i\varphi(f_i)$, avec $f_i = \psi((1+T)^{-i}f) \in \mathscr{O}_{F_1}[[T]]$. (Cela peut se voir, par exemple, en disant que f est la transformée d'Amice d'une mesure μ, et en décomposant μ sous la forme
$$\mu = \sum_{i=0}^{p-1}\mathrm{Res}_{i+p\mathbf{Z}_p}\mu = \sum_{i=0}^{p-1}\delta_i * \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\delta_{-i}*\mu);$$
ceci montre que f_i est la transformée d'Amice de $\psi(\delta_{-i}*\mu)$, et comme $v_{\mathscr{D}_0}(\psi(\lambda)) \geqslant v_{\mathscr{D}_0}(\lambda)$, on a $f_i \in \mathscr{O}_{F_1}[[T]]$.) Autrement dit, $A = \mathscr{O}_{F_1}[[T]]$ est une extension de degré p de $B = \mathscr{O}_{F_1}[[\varphi(T)]]$. Comme A est obtenu en rajoutant à B une racine p-ième de $(1+T)^p$, le groupe des automorphismes de A au-dessus de B est $\boldsymbol{\mu}_p$, où $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_p$ agit par $(1+T) \mapsto (1+T)\zeta$. On en déduit que $\prod_{\zeta^p=1} f((1+T)\zeta-1) = \mathrm{N}_{A/B}(f) \in B$, ce qui prouve l'existence de $\mathrm{N}(f)$.

Maintenant, les conjugués de π_{n+1} sous $\mathrm{Gal}(F_{n+1}/F_n)$ sont les $(1+\pi_{n+1})\zeta - 1$, et $\pi_n = (1+\pi_{n+1})^p - 1$; on en déduit la propriété (i).

Le (ii) est immédiat via la théorie de Galois.

Le (iii) vient de ce que $f((1+T)\zeta-1) \equiv f(T) \bmod \pi_1$, et donc $\mathrm{N}(f)(T^p) = f(T)^p$ dans $k_{F_1}[[T]]$. On en tire $(\mathrm{N}(f)^{[1]}(T))^p = f(T)^p$ dans $k_{F_1}[[T]]$, et finalement $\mathrm{N}(f)^{[1]} = f$ dans $k_{F_1}[[T]]$, ce qu'il fallait démontrer.

Finalement, on a $\mathrm{N}(f^{-1}g) = \mathrm{N}(f)^{-1}\mathrm{N}(g)$, ce qui permet, quitte à diviser f et g par f, de se ramener, pour démontrer le (iv), au cas où $f = 1$ et $g = 1 + \pi_1^k h$. On a alors
$$\mathrm{N}(g)((1+T)^p-1) \equiv 1 + \pi_1^k\sum_{\zeta^p=1} h((1+T)\zeta-1) \bmod \pi_1^{2k},$$
et comme $\sum_{\zeta^p=1} h((1+T)\zeta-1) = p\varphi\psi(h)$ est divisible par p, et donc a fortiori par π_1, cela permet de conclure.

Corollaire 3.4. — (i) *Si* $\overline{u} \in \mathbf{E}_F$ *vérifie* $v_{\mathbf{E}}(\overline{u}) = 0$, *alors il existe* $g_{\overline{u}} \in \mathscr{O}_F[[T]]$ *unique, tel que* $\mathrm{N}(g_{\overline{u}})^{[1]} = g_{\overline{u}}$ *et* $g_{\overline{u}}(\overline{\pi}) = \overline{u}$.
(ii) *Si* $k, n \geqslant 1$, *et si* $x \in 1 + \pi_1^k\mathscr{O}_{F_{n+1}}$, *alors* $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(x) \in 1 + \pi_1^{k+1}\mathscr{O}_{F_{n+1}}$.

Démonstration. — Il existe $\overline{g} \in k_F[[T]]$ unique, tel que $\overline{u} = \overline{g}(\overline{\pi})$. Soit $g \in \mathscr{O}_F[[T]]$ relevant $\overline{g}$. La condition $v_{\mathbf{E}}(\overline{u}) = 0$ implique que $g \in (\mathscr{O}_F[[T]])^*$, et les (iii) et (iv) du lemme 3.3 montrent que l'application $f \mapsto \mathrm{N}(f)^{[1]}$ est contractante (pour la topologie p-adique) sur $g + p\mathscr{O}_F[[T]]$. Elle y admet donc un unique point fixe $g_{\overline{u}}$, ce qui démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit d'écrire x sous la forme $f(\pi_{n+1})$, avec $f \in 1 + \pi_1^k\mathscr{O}_F[T]$, et d'utiliser les (i) et (iv) du lemme 3.3.

Revenons à la démonstration du (i) du théorème 3.1. L'unicité de g_u vient juste de ce qu'une série dans $\mathscr{O}_F[[T]]$ ayant une infinité de zéros dans $D(0,0^+)$ est nulle. (cf. exercice sur le théorème de préparation de Weierstrass ; cela utilise crucialement le fait que F est de valuation discrète).

Passons à l'existence. Commençons par supposer que $u \in \varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$. Alors $\overline{u} \in \mathbf{E}_F^+$ vérifie $v_{\mathbf{E}}(\overline{u}) = 0$, et il existe $g_{\overline{u}} \in \mathscr{O}_F[[T]]$ unique tel que $\mathrm{N}(g_{\overline{u}})^{[1]} = g_{\overline{u}}$ et $g_{\overline{u}}(\overline{\pi}) = \overline{u}$. Soit $v_n = g_{\overline{u}}^{[n]}(\pi_n)$. La propriété « $g_{\overline{u}}(\overline{\pi}) = \overline{u}$ » se traduit par « $v_n - u_n \in \pi_1\mathscr{O}_{F_n}$ quel que soit $n \geqslant 1$ », et la propriété « $\mathrm{N}(g_{\overline{u}})^{[1]} = g_{\overline{u}}$ » se traduit, d'après le (i) du lemme 3.3, par « $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(v_{n+1}) = v_n$ quel que soit $n \geqslant 1$ ». Si $w_n = \frac{v_n}{u_n}$. D'après ce qui précède, on a $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(w_{n+1}) = w_n$ et $w_n \in 1 + \pi_1\mathscr{O}_{F_n}$. D'après le (ii) du cor. 3.4, cela implique que $w_n = \mathrm{N}_{F_{n+k}/F_n}(w_{n+k}) \in 1 + \pi_1^{k+1}\mathscr{O}_{F_n}$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. On en déduit que $w_n = 1$, et donc que $u_n = g_{\overline{u}}^{[n]}(\pi_n)$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$, ce qui prouve le théorème dans le cas $u \in \varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$, avec $g_u = g_{\overline{u}}$.

Dans le cas général, on peut écrire u_n de manière unique sous la forme $\pi_n^{k_n} v_n$, avec $k_n \in \mathbf{N}$ et $v_n \in \mathscr{O}_{F_n}^*$. Comme $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(\pi_{n+1}) = \pi_n$, on a $k_{n+1} = k_n$ quel que soit n, et $\mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(v_{n+1}) = v_n$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit $k \in \mathbf{N}$ la valeur commune des k_n, et soit $v = (v_n)_{n\geqslant 1} \in \varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$. D'après ce qui précède, il existe $g_v \in \mathscr{O}_F[[T]]$ tel que $g_v^{[n]}(\pi_n) = v_n$ quel que soit $n \geqslant 1$, et il est clair que si on définit g_u par $g_u = T^k g_v$, alors $g_v^{[n]}(\pi_n) = v_n$ quel que soit $n \geqslant 1$. Ceci permet de conclure.

3.3. Dérivée logrithmique des séries de Coleman et opérateur ψ.— Ce n° est consacré à la démonstration du (ii) du th. 3.1. La prop. 3.5 permet de montrer que $\frac{\partial g_u}{g_u}$ vérifie l'équation fonctionnelle $\psi\big(\frac{\partial g_u}{g_u}\big)^{[1]} = \frac{\partial g_u}{g_u}$, et la prop. 3.9 permet de montrer que tout $f \in \mathscr{O}_F[[T]]$ vérifiant l'équation fonctionnelle $\psi(f)^{[1]} = f$ est de la forme $\frac{\partial g_u}{g_u}$, pour $u \in \varprojlim \mathscr{O}_{F_n}^*$.

Proposition 3.5. — *Si $u \in \varprojlim \mathscr{O}_{F_n}$ est non nul et si $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$, alors*

$$\mathrm{N}(g_u)^{[1]} = g_u \quad \text{et} \quad \psi\Big(\frac{\partial g_u}{g_u}\Big)^{[1]} = \frac{\partial g_u}{g_u}.$$

Démonstration. — D'après le (i) du lemme 3.3, on a

$$\mathrm{N}(g_u)^{[n+1]}(\pi_n) = \mathrm{N}_{F_{n+1}/F_n}(g_u^{[n+1]}(\pi_{n+1})) = g_u^{[n]}(\pi_n).$$

Comme les extensions galoisiennes $F/\mathbf{Q}_p$ et $\mathbf{Q}_p(\boldsymbol{\mu}_{p^\infty})/\mathbf{Q}_p$ sont disjointes puisque l'une est totalement ramifiée et l'autre est non ramifiée, on peut trouver $\sigma \in \mathrm{Gal}(F_\infty/\mathbf{Q}_p)$ agissant par φ sur F et par l'identité sur π_n pour tout n. En appliquant σ^n à l'identité ci-dessus, on en déduit que $\mathrm{N}(g_u)^{[1]} - g_u$ s'annule en π_n pour tout n, et donc est nulle.

La seconde formule se déduit de la première en utilisant la formule $\psi(\partial \log f) = \partial(\log \mathrm{N}(f))$ qui est plus moins immédiate à partir des formules

$$\varphi(\mathrm{N}(f)) = \prod_{\zeta^p=1} f((1+T)\zeta - 1), \quad \varphi(\psi(f)) = \frac{1}{p}\sum_{\zeta^p=1} f((1+T)\zeta - 1),$$
$$\partial(\varphi(g)) = p\varphi(\partial(g)) \quad \partial(g((1+T)\zeta - 1)) = \partial g((1+T)\zeta - 1)).$$

Lemme 3.6. — *(« de Dieudonné ») Si $g \in 1+TF[[T]]$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $g \in 1 + T\mathscr{O}_F[[T]]$,

(ii) $\frac{g(T^p)}{(g^{[1]}(T))^p} \in 1 + pT\mathscr{O}_F[[T]]$.

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) suit de ce que $\overline{g}(T^p) = (\overline{g}^{[1]}(T))^p$ dans $k_F[[T]]$. Pour démontrer l'implication réciproque, on peut écrire g, sous la forme $g = \prod_{n=1}^{+\infty}(1-a_nT^n)$, avec $a_n \in F$. Si $a_m \in \mathscr{O}_F$, pour $1 \leqslant m \leqslant n-1$, alors $\prod_{m=1}^{n-1}(1-a_mT^m)^{-1} \in 1+T\mathscr{O}_F[[T]]$. On en déduit, en utilisant l'implication (i)⇒(ii), que, si $h = \prod_{m=1}^{n-1}(1-a_mT^m)^{-1}g$, alors $\frac{h(T^p)}{(h^{[1]}(T))^p} \in 1+pT\mathscr{O}_F[[T]]$. Comme le coefficient de T^n dans $\frac{h(T^p)}{(h^{[1]}(T))^p}$ est $p\varphi^{-1}(a_n)$, on en déduit l'appartenance de a_n à $\mathscr{O}_F$, ce qui permet, par récurrence, de conclure.

Lemme 3.7. — *Si $G \in TF[[T]]$ a une dérivée appartenant à $\mathscr{O}_F[[T]]$, alors*
(i) $G((1+T)^p-1) - G(T^p) \in p\mathscr{O}_F[[T]]$;
(ii) $\sum_{\zeta^p=1} G((1+T)\zeta-1) - pG(T) \in p\mathscr{O}_F[[T]]$.

Démonstration. — Comme $G' \in \mathscr{O}_F[[T]]$, on a $G^{(n)} \in \mathscr{O}_F[[T]]$ quel que soit $n \geqslant 1$. Maintenant, on peut écrire $(1+T)^p-1$ sous la forme T^p+pu, avec $u \in \mathscr{O}_F[[T]]$, et $(1+T)\zeta-1$ sous la forme $T+(\zeta-1)v$, avec $v \in \mathscr{O}_F[[T]]$. On obtient donc

$$\begin{aligned} G((1+T)^p-1) - G(T^p) &= \sum_{n=1}^{+\infty} G^{(n)}(T^p)\frac{(pu)^n}{n!}, \\ -pG(T) + \sum_{\zeta^p=1} G((1+T)\zeta-1) &= \sum_{n=1}^{+\infty} G^{(n)}(T) \sum_{\zeta^p=1,\,\zeta\neq 1} \frac{(\zeta-1)^n v^n}{n!} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} G^{(n)} v^n \mathrm{Tr}_{F(\boldsymbol{\mu}_p)/F}\Big(\frac{(\zeta-1)^n}{n!}\Big). \end{aligned}$$

Le (i) suit alors de ce que $n - v_p(n!) \geqslant 1$ quel que soit $n \geqslant 1$, et le (ii) de ce que $\frac{n}{p-1} - v_p(n!) \geqslant \frac{1}{p-1}$, et donc $v_p\big(\mathrm{Tr}_{F(\boldsymbol{\mu}_p)/F}\big(\frac{(\zeta-1)^n}{n!}\big)\big) \geqslant \big[\frac{1}{p-1} + v_p(\mathfrak{d}_{F_1/F})\big] \geqslant 1$.

Lemme 3.8. — *Si $x \in 1+p\mathscr{O}_F$, il existe $c \in 1+p\mathscr{O}_F$ tel que $\varphi(c) = xc^p$.*

Démonstration. — Comme $x \in 1+p\mathscr{O}_F$, la suite de terme général $\varphi^{-n}(x)^{p^{n-1}}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. Le produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} \varphi^{-n}(x)^{p^{n-1}}$ converge donc dans $1+p\mathscr{O}_F$ vers un élément c répondant à la question.

Proposition 3.9. — *Soit $f \in \mathscr{O}_F[[T]]$ vérifiant $\psi(f)^{[1]} = f$, et soient $G \in TF[[T]]$ la primitive de $(1+T)^{-1}f$ et $g = \exp G \in 1+TF[[T]]$. Alors*
(i) $G \in \mathscr{R}_F^+$,
(ii) $G((1+T)^p-1) = \sum_{\zeta^p=1}\big(G^{[1]}((1+T)\zeta-1) - G^{[1]}(\zeta-1)\big)$,
(iii) $F \in 1+T\mathscr{O}_F[[T]]$, *et il existe $c \in 1+p\mathscr{O}_F$, tel que $g' = cg$ vérifie l'équation fonctionnelle* $\mathrm{N}(g)^{[1]} = g$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Pour démontrer le (ii), il suffit d'appliquer l'opérateur $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$, pour constater que les deux membres diffèrent d'une constante, et donc sont égaux puisqu'ils le sont en $T=0$. Pour démontrer le (iii), considérons $h(T) = \frac{g(T^p)}{(g^{[1]}(T))^p} \in 1+TF[[T]]$.

On peut aussi écrire h sous la forme

$$\exp\Big(\big(G(T^p)-G((1+T)^p-1)\big)+\big(G((1+T)^p-1)-\sum_{\zeta^p=1}G^{[1]}((1+T)\zeta-1)\big)$$
$$+\big(-pG^{[1]}(T)+\sum_{\zeta^p=1}G^{[1]}((1+T)\zeta-1)\big)\Big).$$

Comme le terme entre parenthèse appartient à $pT\mathscr{O}_F[[T]]$ d'après le (ii) et le lemme 3.7, cela montre que $h\in 1+pT\mathscr{O}_F[[T]]$, et donc que $g\in 1+T\mathscr{O}_F[[T]]$ d'après le lemme 3.6. Finalement, il résulte du (ii), et de la définition de l'application $g\mapsto \mathrm{N}(g)^{[1]}$, que $g^{-1}\mathrm{N}(g)^{[1]}$ est constante. Si on note x cette constante, on a $x=\varphi^{-1}(\prod_{\zeta^p=1}g(\zeta-1))$, et comme $g\in 1+T\mathscr{O}_F[[T]]$, cela implique que $x\in 1+p\mathscr{O}_F$. D'après le lemme 3.8, il existe alors $c_0\in 1+p\mathscr{O}_F$ tel que $\varphi(c_0)=xc_0^p$, et il est facile de voir que $c=\varphi^{-1}(c_0^{-1})$ convient.

Exercice 5. — Soit F une extension finie non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$. On munit $\mathscr{O}_F[[T]]$ des opérateurs ψ_F et φ_F définis par $\psi_F(f)=\psi(f)^{[1]}$, et $\varphi_F(f)=\varphi(f)^{[-1]}$.

(i) Vérifier que $\psi_F\circ\varphi_F=\mathrm{id}$.

(ii) Montrer que, si $g\in\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$, alors $(1-\varphi_F)f\in\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=0}$.

(iii) Montrer que, si $f\in(T\mathscr{O}_F[[T]])^{\psi_F=0}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_F^n(f)$ converge dans $\mathscr{O}_F[[T]]$, et que la somme de cette série g vérifie $g\in\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$ et $(1-\varphi_F)g=f$.

(iv) Montrer, en utilisant les $\frac{\partial((1+T)\eta-1)}{(1+T)\eta-1}$, pour $\eta\in\mathscr{O}_F^*-\{1\}$ racine de l'unité, que les deux conditions suivantes sont équivalentes pour $f\in\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=0}$:

(a) il existe $g\in\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$ tel que $(1-\varphi_F)g=f$,

(b) $\mathrm{Tr}_{F/\mathbf{Q}_p}f(0)=0$.

Exercice 6. — (i) Si G est un groupe profini ($G=\varprojlim G/H$, H décrivant les sous-groupes ouverts distingués d'indice fini), on définit l'algèbre d'Iwasawa de G comme $\Lambda_G=\varprojlim\mathbf{Z}_p[G/H]$. Montrer que Λ_G s'identifie naturellement à l'algèbre des mesures de G dans $\mathbf{Z}_p$.

(ii) Montrer que $\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$ est stable par l'action de $\mathbf{Z}_p^*$ ($f\mapsto f\star a(T)=f((1+T)^a-1)$), et que l'action de $\mathbf{Z}_p^*$ s'étend en une action continue de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda=\mathscr{D}(\mathbf{Z}_p^*,\mathbf{Z}_p)$, la masse de Dirac en a agissant comme a.

(iii) Montrer, que $\mathbf{Z}_p\subset\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$ est un sous-Λ-module de torsion de $\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}$, et que $\mathscr{O}_F[[T]]^{\psi_F=1}/\mathbf{Z}_p$ est un Λ-module libre de rang $[F:\mathbf{Q}_p]$ (utiliser l'opérateur $1-\varphi_F$ de l'exercice précédent).

(iv) Soit $\Gamma=\mathrm{Gal}(F_\infty/F)$. Montrer que $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*$ est muni d'une structure de Λ_Γ-module, que $\varepsilon^{\mathbf{Z}_p}$ ($\varepsilon=(1,\dots,\varepsilon^{(n)},\dots)$ comme d'habitude) est le sous-Λ_Γ-module de torsion de $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*$, et que $\varprojlim\mathscr{O}_{F_n}^*/\varepsilon^{\mathbf{Z}_p}$ est un Λ_Γ-module libre de rang $[F:\mathbf{Q}_p]$.

Pierre Colmez