REPRÉSENTATIONS LOCALEMENT ANALYTIQUES DE $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ ET (φ, Γ)-MODULES

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous étendons la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en une correspondance $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$ entre les (φ, Γ)-modules de rang 2 sur l'anneau de Robba et certaines représentations localement analytiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. Si Δ est isocline, on se ramène à la correspondance déjà établie ; dans le cas contraire, on construit un $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-module formé d'induites paraboliques localement analytiques et de leurs duales. Cette construction s'étend à $\mathbf{GL}_2(F)$, si F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, ce qui suggère qu'il en est de même de la correspondance $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$.

Abstract. — We extend the p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ to a correspondence $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$ between (φ, Γ)-modules of rank 2 over the Robba ring and certain locally analytic representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. If Δ is isocline, one uses the existing correspondence ; in the remaining cases one builds a $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$-module from parabolically induced locally analytic representations and their duals. This construction extends to $\mathbf{GL}_2(F)$, if F is a finite extension of $\mathbf{Q}_p$, which suggests that the same should be true for the correspondence $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$.

Table des matières

Introduction

Cet article a pour objet diverses extensions de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (aux (φ, Γ)-modules, pas nécessairement étales, de rang 2 sur l'anneau de Robba, et partiellement à $\mathbf{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$).

0.1. La correspondance p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$. — Avant d'expliquer comment étendre la correspondance pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, commençons par rappeler brièvement comment celle-ci est construite [**9, 12, 13**].

Soit L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ associe à toute L-représentation V du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$, de dimension 2, une représentation unitaire $\Pi(V)$ de $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ c'est-à-dire un L-banach muni d'une action continue de G laissant stable la boule unité. Plus précisément, $\Pi(V)$ appartient à la catégorie $\mathrm{Rep}_L(G)$ des représentations unitaires *admissibles* de G.

Cette correspondance utilise l'équivalence de catégories de Fontaine et ses raffinements : on note $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba des fonctions f analytiques sur une couronne $0 < v_p(T) \leq r(f)$, $\mathscr{E}^\dagger$ l'anneau de ses éléments bornés et $\mathscr{E}$ le complété de $\mathscr{E}^\dagger$ pour v_p. La catégorie $\mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ des L-représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est alors équivalente à la catégorie $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\Lambda)$ des (φ, Γ)-modules étales sur Λ, si $\Lambda \in \{\mathscr{E},\ \mathscr{E}^\dagger,\ \mathscr{R}\}$. Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, on note $D^\dagger$ et D_{rig} respectivement les objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E}^\dagger)$ et $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{R})$ qui lui correspondent (on a $D = \mathscr{E} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$ et $D_{\mathrm{rig}} = \mathscr{R} \otimes_{\mathscr{E}^\dagger} D^\dagger$). Au vu de ce qui précède, la construction de la correspondance $V \mapsto \Pi(V)$ est donc équivalente à celle d'une correspondance $D \mapsto \Pi(D)$ ou $D_{\rm rig} \mapsto \Pi(D)$.

Un (φ,Γ)-module Δ sur $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}^\dagger$ ou $\mathscr{R}$ peut aussi être vu comme l'espace des sections globales sur $\mathbf{Z}_p$ d'un faisceau $U \mapsto \Delta\boxtimes U$, équivariant sous l'action du semi-groupe $P^+ = \left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si $D\in\Phi\Gamma^{\rm et}(\mathscr{E})$ et si ω est un caractère continu de $\mathbf{Q}_p^*$, on sait définir un prolongement de D en un G-faisceau [1] sur $\mathbf{P}^1=\mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$, de caractère central [2] ω. Un choix judicieux de ω fournit ce que l'on cherche ; en effet, si [3] $\omega=\chi^{-1}\det D$, où $\chi(x)=x|x|$, alors :

- $D\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est une extension de $\Pi(D)$ par $\Pi(D)^*\otimes\omega$, où [4] $\Pi(D)\in{\rm Rep}_L(G)$.
- le sous-faisceau $U\mapsto D^\dagger\boxtimes U$ est stable par G, l'action se prolonge par continuité et fournit un G-faisceau de type analytique $U\mapsto D_{\rm rig}\boxtimes_\omega U$ sur $\mathbf{P}^1$. De plus :

— $D_{\rm rig}\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est une extension de $\Pi(D)^{\rm an}$ par $(\Pi(D)^{\rm an})^*\otimes\omega$, où $\Pi(D)^{\rm an}$ est l'espace des vecteurs localement analytiques de $\Pi(D)$, et donc appartient à la catégorie ${\rm Rep}^{\rm an}(G)$ des L-représentations localement analytiques admissibles de G (topologiquement, c'est une limite inductive compacte de banachs).

— Le casimir [5] agit par multiplication par $\frac{1}{2}\big((\alpha-\beta)^2-1\big)$, où α,β sont les poids de Hodge-Tate de $D_{\rm rig}$ (cf. **[14]** [6])

0.2. Une extension de la correspondance. — L'application $D_{\rm rig}\mapsto\Pi(D)^{\rm an}$ attache donc, à tout (φ,Γ)-module étale de rang 2 sur $\mathscr{R}$ un objet de ${\rm Rep}^{\rm an}(G)$. Le théorème ci-dessous étend cette correspondance à tout (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, pas nécessairement étale. Notons que l'on peut retrouver la correspondance $D\mapsto\Pi(D)$, et donc la correspondance de Langlands locale p-adique, à partir de $D_{\rm rig}\mapsto\Pi(D)^{\rm an}$: en effet, $\Pi(D)$ n'est autre **[12]** que le complété universel de $\Pi(D)^{\rm an}$. On peut donc voir le théorème ci-dessous comme une extension de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

1. Un G-faisceau sur $\mathbf{P}^1$ est un faisceau G-équivariant $U\mapsto M\boxtimes U$ sur $\mathbf{P}^1$ muni de l'action naturelle $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)\cdot x=\frac{ax+b}{cx+d}$; on dit que M est *de type analytique* si $M\boxtimes U$ est un $\mathscr{D}(K)$-module pour tout ouvert compact U de $\mathbf{P}^1$ et tout sous-groupe ouvert compact K de G stabilisant U (il suffit que ce soit le cas pour $U=\mathbf{P}^1$ et pour un K car tous ces groupes sont commensurables), où $\mathscr{D}(K)$ désigne l'algèbre des distributions sur K.

2. Cela signifie que $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & a\end{smallmatrix}\right)$ agit par multiplication par $\omega(a)$ si $a\in\mathbf{Q}_p^*$.

3. Si $\Lambda\in\{\mathscr{E},\ \mathscr{E}^\dagger,\ \mathscr{R}\}$, un (φ,Γ)-module de rang 1 est de la forme $\Lambda(\delta)$, pour un caractère δ de $\mathbf{Q}_p^*$ uniquement déterminé ($\Lambda(\delta)$ est obtenu en multipliant les actions de φ et σ_a sur Λ par $\delta(p)$ et $\delta(a)$ respectivement). On note $\det D$ le caractère associé au (φ,Γ)-module $\wedge^2\det D$ qui est de rang 1 puisque D est supposé de rang 2.

4. La représentation $\Pi(D)$ est uniquement déterminée par ce dévissage, sauf si D est la forme $\mathscr{E}(\delta)\oplus\mathscr{E}(\chi\delta)$, où $\delta:\mathbf{Q}_p^*\to\mathscr{O}_L^*$ est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p^*$; dans ce cas, il y a deux possibilités pour $\Pi(D)$ mais les deux représentations possibles ont la même semi-simplifiée.

5. Générateur du centre de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de ${\rm SL}_2$

6. Dospinescu suppose que D est indécomposable, mais le cas général se déduit de son résultat par continuité.

Soit $\Delta \in \Phi\Gamma(\mathscr{R})$, de rang 2, indécomposable. Notons ω le caractère $\chi^{-1}\det\Delta$.

Théorème 0.1. — *Il existe un unique prolongement de Δ en un G-faisceau de type analytique sur $\mathbf{P}^1$, tel que le centre de G agisse par ω.*

De plus, il existe $\Pi(\Delta) \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}(G)$, unique, telle que $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ soit une extension de $\Pi(\Delta)$ par $\Pi(\Delta)^* \otimes \omega$.

Remarque 0.2. — (i) L'unicité est relativement formelle (prop. 3.7) si $\mathrm{End}\,\Delta = L$: les méthodes de Dospinescu [**14**] permettent de montrer que, si α, β sont les poids de Hodge-Tate de Δ fournis par la théorie de Sen, alors le casimir agit par multiplication par $\frac{1}{2}\big((\alpha-\beta)^2 - 1\big)$. Ceci impose l'action de l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de G, et donc aussi celle d'un voisinage ouvert assez petit de l'élément neutre. Si $\mathrm{End}\,\Delta \neq L$ (i.e. si Δ est une extension de $\mathscr{R}(x^i\delta)$ par $\mathscr{R}(\delta)$, avec $i \in \mathbf{N}$) ou, plus généralement, si Δ n'est pas irréductible, cette unicité résulte de comparaisons de groupes d'extensions qui sont aussi à la base de la preuve de l'existence.

(ii) Si Δ est étale, la discussion précédant le théorème montre que l'on peut poser $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = D_{\mathrm{rig}} \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ et $\Pi(\Delta) = \Pi(D)^{\mathrm{an}}$, si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est tel que $D_{\mathrm{rig}} = \Delta$.

(iii) La théorie des pentes de Kedlaya [**20**] implique qu'un (φ, Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$ vérifie une des deux propriétés (non exclusives [7]) suivantes :

- il existe η tel que $\Delta \otimes \eta$ soit étale (cas *isocline*),
- il existe $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ tels que Δ soit une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$.

Dans le premier cas, il suffit de poser $\Delta \boxtimes_\omega U = ((\Delta \otimes \eta) \boxtimes_{\omega\eta^2} U) \otimes \eta^{-1}$, pour fabriquer un faisceau sur $\mathbf{P}^1$ avec les propriétés désirées. Dans le second, on s'inspire de ce que donne la correspondance de Langlands locale p-adique dans le cas triangulin [**10, 24, 15**] et on fabrique $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ en construisant des extensions de séries principales analytiques et de leurs duales (cf. § suivant).

(iv) La construction dans le second cas marche, plus généralement, pour une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$; il semble donc raisonnable de penser (conj. 0.5 ci-après) que le théorème peut s'étendre en une correspondance $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$ entre (φ, Γ)-modules analytiques de rang 2 sur l'anneau de Robba attaché à F et représentations localement analytiques de $\mathbf{GL}_2(F)$.

0.3. Le cas non isocline. — Soient $\delta_1, \delta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ des caractères continus, et soient δ et ω les caractères

$$\delta = \delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1} \ \text{ et } \ \omega = \delta_1\delta_2\chi^{-1}.$$

On dit que (δ_1, δ_2) est *spécial* si $\delta = x^k$, avec $k \in \mathbf{N}$, et *générique* dans le cas contraire. On note $B(\delta_1, \delta_2)$ la représentation localement analytique de G, induite du caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1\chi^{-1}(a)\delta_2(d)$ du borel inférieur. Si (δ_1, δ_2) est spécial, la représentation $B(\delta_1, \delta_2)$ admet une sous-représentation $W(\delta_1, \delta_2)$ de dimension $k+1$ (cf. n° 4.1.2), et on note $\mathrm{St}(\delta_1, \delta_2)$ le quotient.

7. L'intersection consiste en les Δ de la forme $D_{\mathrm{rig}} \otimes \eta$, où $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ est triangulin.

Soit Δ une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$. Pour construire $\Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, on procède de la manière suivante :

• Le dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique (chap. 2) permet de voir $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$ comme un faisceau $\mathscr{R}^+(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$ prolongeant le faisceau P^+-équivariant $\mathscr{R}^+(\delta_1)$ sur $\mathbf{Z}_p$.

• Le faisceau $\mathscr{R}^+(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ admet (prop. 4.12) un unique prolongement G-équivariant en un faisceau $U\mapsto \mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega U$ prolongeant le faisceau P^+-équivariant $\mathscr{R}(\delta_1)$ sur $\mathbf{Z}_p$. De plus, $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est une extension de $B(\delta_1,\delta_2)$ par $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$.

• On construit $\Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ comme une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, en montrant (th. 6.1) que les extensions de $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ sont en bijection naturelle avec celles de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, et qu'une telle extension se prolonge de manière unique (comme ci-dessus) en un faisceau $\Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ prolongeant le faisceau P^+-équivariant Δ sur $\mathbf{Z}_p$ (prop. 6.7). La clé de la construction est la comparaison (prop. 5.18) de la cohomologie des semi-groupes $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & 0\\ p\mathbf{Z}_p & 1\end{smallmatrix}\right)$ à valeurs dans $\mathscr{R}(\delta)$; cette comparaison utilise un dévissage de $\mathscr{R}(\delta)$ en distributions et fonctions localement analytiques qui permet aussi de retrouver (th. 5.16) les résultats de Fourquaux et Xie [**17**] par la méthode utilisée dans [**10**] et introduite par Chenevier [**4**].

• On montre que l'extension intermédiaire de $B(\delta_1,\delta_2)^*\otimes\omega$ par $B(\delta_1,\delta_2)$ est scindée, ce qui permet de séparer les fréchets des limites inductives compactes de banachs, et donc de prouver l'existence de $\Pi(\Delta)$. Une analyse un peu plus fine fournit en outre le résultat suivant.

Proposition 0.3. — $\Pi(\Delta)^{\rm ss}=B(\delta_1,\delta_2)^{\rm ss}\oplus B(\delta_2,\delta_1)^{\rm ss}$ *et* $\Pi(\Delta)$ *admet une filtration dont les quotients successifs sont :*

$$\begin{cases} B(\delta_1,\delta_2),\ B(\delta_2,\delta_1) & \textit{dans le cas générique,}\\ \mathrm{St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2),\ W(\delta_1,\delta_2),\ B(\delta_2,\delta_1) & \textit{dans le cas spécial.}\end{cases}$$

0.4. Représentations de $\mathbf{GL}_2(F)$ et (φ,Γ)-modules. — Soient :

• F une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et π une uniformisante de F,

• $\mathscr{F}$ un groupe de Lubin-Tate associé à π et $\log_{\mathscr{F}}$ son logarithme,

• L un sous-corps fermé de $\mathbf{C}_p$ contenant les points de torsion de $\mathscr{F}$, et $\mathscr{R}\subset L[[T,T^{-1}]]$ l'anneau de Robba.

On munit $\mathscr{R}$ de l'action de $P^+=\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ définie par $\mathscr{F}$ (cf. n° 1.2.2). Un (φ,Γ)-module analytique (cf. n° 1.3.4) Δ sur $\mathscr{R}$ peut être vu, comme précédemment, comme un P^+-faisceau équivariant sur $\mathscr{O}_F$. La question qui se pose est de savoir sous quelles conditions on peut prolonger Δ en un faisceau $G=\mathbf{GL}_2(F)$-équivariant sur $\mathbf{P}^1=\mathbf{P}^1(F)$ et, quand c'est le cas, de comprendre dans quel cas les sections globales de ce faisceau fournissent des représentations localement analytiques de G. La conjecture 0.5 ci-dessous apporte un début de réponse.

Notons qu'un (φ,Γ)-module analytique est muni d'une action de l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{p})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de P^+, i.e. celle de son sous-groupe de Lie $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$; on note ∇ l'opérateur correspondant à $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{p}$. La « réduction modulo $\log_{\mathscr{F}}(T)\in\mathscr{R}$ » de ∇ est *l'opérateur* $\Theta_{\rm Sen}$ *de Sen* dont les « valeurs propres » sont les *poids de Hodge-Tate de* Δ, cf. n° 1.4.2 pour des énoncés précis.

Soit Δ un (φ,Γ)-module analytique, *de rang* 2 *sur* $\mathscr{R}$, indécomposable. Si $\kappa\in L$, on dit que Δ est κ*-compatible* s'il existe $c\in\operatorname{End}\Delta$ tel que $\big((2\nabla-\kappa-1)^2-c\big)\cdot\Delta\subset t\Delta$.

Remarque 0.4. — En utilisant les méthodes de Dospinescu [**14**], on montre que :

(i) Si $\operatorname{End}\Delta=L$ et si les poids de Hodge-Tate α,β de Δ sont distincts (ou, plus généralement, si l'opérateur de Sen n'est pas scalaire), alors Δ est κ-compatible si et seulement si $\kappa=\alpha+\beta-1$, auquel cas, $c=(\alpha-\beta)^2$.

(ii) Si Δ peut se prolonger en un faisceau G-équivariant sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω, alors Δ est $\kappa(\omega)$-compatible, où $\kappa(\omega)=\omega'(1)$ est le *poids* de ω.

(iii) Si Δ est κ-compatible, et si $c\in\operatorname{End}\Delta$ est tel que $\big((2\nabla-\kappa-1)^2-c\big)\cdot\Delta\subset t\Delta$, on peut munir Δ d'une unique action de $U(\mathfrak{gl}_2)$ étendant celle de $U(\mathfrak{p})$, telle que $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{gl}_2$ agisse par multiplication par κ, et le casimir par $\frac{1}{2}(c-1)$.

Au vu des résultats de cet article et de [**11**], on est amené à penser que le résultat suivant devrait être vrai.

Conjecture 0.5. — *Soit* Δ *un* (φ,Γ)*-module analytique, de rang* 2 *sur* $\mathscr{R}$*, indécomposable, et soit* $\omega:F^*\to L^*$ *un caractère localement analytique.*

(i) *Si* Δ *est* $\kappa(\omega)$*-compatible, alors* Δ *admet un unique prolongement en un faisceau* G*-équivariant sur* $\mathbf{P}^1$*, tel que le centre de* G *agisse par* ω*.*

(ii) *Il existe* $\Pi_1,\Pi_2\in\operatorname{Rep}^{\rm an}(G)$ *telles que* $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ *soit une extension de* Π_2 *par* $\Pi_1^*\otimes\omega$ *si et seulement si on est dans l'un des trois cas (non exclusifs) suivants :*

(a) $\omega=\chi^{-1}\det\Delta$ *et* $\Pi_1=\Pi_2$.

(b) *L'opérateur de Sen est scalaire et* $\omega=x^k\chi^{-1}\det\Delta$*, avec* $k\in\mathbf{Z}$*, et* $\Pi_1=\Pi_2/\Pi_2^{\rm alg}$ *si* $k\leq 0$ *et* $\Pi_2=\Pi_1/\Pi_1^{\rm alg}$ *si* $k\geq 0$.

(c) Δ *est une extension de* $\mathscr{R}(\delta)$ *par* $\mathscr{R}(\delta)$ *et* ω *est quelconque.*

Remarque 0.6. — (i) Dans le cas $F=\mathbf{Q}_p$, on peut prouver que si l'on est dans un des trois cas du (ii), alors Δ se prolonge et $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ admet la décomposition voulue (cf. [**9**] ou [**12**] pour le (a), [**11**] pour le (b) et le n° 6.5 de cet article pour les extensions de $\mathscr{R}(\delta)$ par $\mathscr{R}(\delta)$).

(ii) Si $F\neq\mathbf{Q}_p$, les seuls résultats dont on dispose sont ceux de cet article, et ils ne concernent que le cas Δ triangulable. Les méthodes utilisées pour $F=\mathbf{Q}_p$ reposent sur les formules de [**7**, chap. V], inspirées de l'analyse fonctionnelle sur $\mathbf{Z}_p$, mais ces formules ne convergent plus si $F\neq\mathbf{Q}_p$.

(iii) Le (a) du (ii) prédit l'existence d'une correspondance $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$. Si $F = \mathbf{Q}_p$, cette correspondance est l'extension de la correspondance de Langlands locale p-adique étudiée dans les § précédents. Si $F \neq \mathbf{Q}_p$, la situation est moins claire, par exemple parce que le caractère central de la représentation $\Pi(\Delta)$ n'est pas unitaire si Δ est étale (les (φ, Γ)-modules analytiques étales sur $\mathscr{R}$ correspondent aux représentations de $\mathscr{G}_F$ dont l'opérateur de Sen est F-linéaire [**21, 3**]). On peut raisonnablement penser que cette correspondance permet de décrire les fonctions analytiques sur les revêtements du demi-plan de Drinfeld (sur F) comme c'est le cas [**16**] sur $\mathbf{Q}_p$.

0.5. Notations. — Comme nous l'avons signalé dans le (iv) de la rem. 0.2, les constructions que nous allons faire marchent pour une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, et pas seulement pour $\mathbf{Q}_p$. On fixe donc une extension finie F de $\mathbf{Q}_p$, et on note G le groupe $\mathbf{GL}_2(F)$. On fait agir G sur $\mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(F)$ par la formule habituelle, à savoir $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Soient $\mathscr{O}_F$ l'anneau des entiers de F et π une uniformisante ; nous aurons besoin des éléments, sous-groupes et sous-semi-groupes suivants de G.

• $B = \left(\begin{smallmatrix} F^* & F \\ 0 & F^* \end{smallmatrix}\right)$ $\big[$resp. $\bar{B} = \left(\begin{smallmatrix} F^* & 0 \\ F & F^* \end{smallmatrix}\right)\big]$ le borel des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures),

• P (resp. $\bar{P}$) le sous-groupe mirabolique $\left(\begin{smallmatrix} F^* & F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\big[$resp. $\left(\begin{smallmatrix} F^* & 0 \\ F & 1 \end{smallmatrix}\right)\big]$ de B (resp. $\bar{B}$),

• P^+ (resp. $\bar{P}^+$) le sous-semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F - \{0\} & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ $\big[$resp. $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F - \{0\} & 0 \\ \pi\mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)\big]$ de P (resp. $\bar{P}$) ; il stabilise $\mathscr{O}_F \subset \mathbf{P}^1$,

• A^+ le sous-semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F - \{0\} & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ de P^+ et $\bar{P}^+$.

• w la matrice $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

• $u(b)$ et $\alpha(a)$ respectivement les matrices $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On a

$$\alpha(a)u(ab) = u(b)\alpha(a).$$

Si M est un objet d'une catégorie abélienne, la notation

$$M = [M_1 - M_2 - \cdots - M_n]$$

signifie que M admet une filtration croissante par des sous-objets dont les quotients successifs sont $M_1, M_2, \ldots, M_n$. En particulier, $M = [M_1 - M_2]$ signifie que M est une extension (qui peut être scindée) de M_2 par M_1.

1. (φ, Γ)-modules analytiques

1.1. Extensions de type Lubin-Tate. — On note e l'indice de ramification absolu de F, f son indice d'inertie et $q = p^f$ le cardinal de son corps résiduel k_F.

1.1.1. Groupes de Lubin-Tate. — Soit $\mathscr{F}$ un groupe de Lubin-Tate associée à π, et soit $\ell = T + \cdots \in F[[T]]$ son logarithme : si $X \oplus Y \in \mathscr{O}_F[[X,Y]]$ est la série formelle décrivant l'addition dans $\mathscr{F}$, on a

$$X \oplus Y = \ell^{-1}(\ell(X) + \ell(Y)) \text{ et } \frac{1}{\ell'(T)} = \frac{\partial}{\partial Y}(X \oplus Y)_{|(T,0)}.$$

Si $a \in \mathscr{O}_F$, on note $[a] \cdot T$ la série $\ell^{-1}(a\ell(T))$; elle appartient à $\mathscr{O}_F[[T]]$ et, par construction, $[a] \cdot (X \oplus Y) = ([a] \cdot X) \oplus ([a] \cdot Y)$, ce qui fournit un morphisme $a \mapsto [a]$ de $\mathscr{O}_F$ dans $\mathrm{End}(\mathscr{F})$. Par ailleurs, on a $[\pi] \cdot T = \pi T + T^q \bmod (\pi T^2, T^{q+1})$.

Remarque 1.1. — (i) Deux groupes de Lubin-Tate $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$ associés à π sont isomorphes : il existe $\iota = T + \cdots \in \mathscr{O}_F[[T]]$ tel que l'on ait $\iota(X \oplus_{\mathscr{F}} Y) = \iota(X) \oplus_{\mathscr{G}} \iota(Y)$.

(ii) Le *cas usuel* correspond à $F = \mathbf{Q}_p$, $\pi = p$ et $\mathscr{F} = \widehat{\mathbf{G}}_m$, groupe formel associé à $\mathbf{G}_m$; on a alors

$$X \oplus Y = X + Y + XY, \quad \frac{1}{\ell'(T)} = 1 + T, \quad \ell(T) = \log(1+T) \text{ et } [a] \cdot T = (1+T)^a - 1,$$

si $a \in \mathbf{Z}_p$.

(iii) $\mathscr{F}$ est complètement déterminé par la donnée de ℓ ou par celle de $[\pi] \cdot T$ car

$$\ell(T) = \lim_{n \to +\infty} \pi^{-n} [\pi^n] \cdot T,$$

et il y a deux choix sympathiques pour $\mathscr{F}$:
- $[\pi] \cdot T = \pi T + T^q$,
- $\ell(T) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \pi^{-n} T^{q^n}$.

1.1.2. Groupes de Lubin-Tate et extensions abéliennes. — On choisit un générateur $u = (u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ du module de Tate $T_\pi(\mathscr{F})$ de $\mathscr{F}$. On a donc $u_n \in \mathfrak{m}_{\mathbf{C}_p}$ pour tout n, $u_0 = 0$, $u_1 \neq 0$ et $[\pi] \cdot u_{n+1} = u_n$ pour tout n. On note F_n le corps $F(u_n)$ et on note F_∞ la réunion des F_n et $\widehat{F}_\infty$ son adhérence dans $\mathbf{C}_p$. Alors F_∞ est une extension abélienne de F, totalement ramifiée, de groupe de Galois $\Gamma \cong \mathscr{O}_F^*$: si $a \in \mathscr{O}_F^*$, il existe $\sigma_a \in \Gamma = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$, unique, tel que, pour tout n, on ait $\sigma_a(u_n) = [a] \cdot u_n$. L'extension maximale abélienne F^{ab} de F est alors la composée de F_∞ et de $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$.

Si $x \in F^*$, on pose $|x| = |\mathrm{N}_{F/\mathbf{Q}_p}(x)|_p$; en particulier, $|\pi| = q^{-1}$. On note

$$\chi : F^* \to \mathbf{C}_p^* \text{ le caractère } x \mapsto x|x| \text{ ; donc } \chi(a) = a \text{ si } a \in \mathscr{O}_F^* \text{ et } \chi(\pi) = \frac{\pi}{q}.$$

On remarquera que χ *n'est unitaire que si* $F = \mathbf{Q}_p$.

1.1.3. La période Ω et le caractère η. — Il existe $\Omega \in \widehat{F}_\infty$, de valuation $\frac{1}{p-1} - \frac{1}{e(q-1)}$, uniquement déterminé à multiplication près par un élément de $\mathscr{O}_F^*$, tel que [(8)]

$$\eta(x,T) = \exp\big(\Omega\, x\ell(T)\big) \in 1 + T\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]].$$

8. Dans le cas usuel, on peut prendre $\Omega = 1$ et alors $\eta(x,T) = (1+T)^x$.

Alors $x \mapsto \eta(x,T)$ est un morphisme de groupes de $\mathscr{O}_F$ dans $1+T\mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}[[T]]$ et $T \mapsto \eta(x,T)$ est un morphisme de $\mathscr{F}$ dans $\widehat{\mathbf{G}}_m$:

$$\eta(x+y,T)=\eta(x,T)\eta(y,T) \quad \text{et} \quad \eta(x,X\oplus Y)=\eta(x,X)\eta(x,Y).$$

En particulier, si ω est un point de π^n-torsion (et donc de p^n-torsion), alors $x \mapsto \eta(x,\omega)$ est un caractère d'ordre fini de $\mathscr{O}_F$, et tout caractère d'ordre fini de $\mathscr{O}_F$ est de cette forme [9].

La fonction caractéristique de $a+\pi^n\mathscr{O}_F$ peut alors s'exprimer sous la forme

$$\mathbf{1}_{a+\pi^n\mathscr{O}_F}(x)=\frac{1}{q}\sum_{[\pi^n]\cdot\omega=0}\eta(x-a,\omega)=\frac{1}{q}\sum_{[\pi^n]\cdot\omega=0}\eta(-a,\omega)\eta(x,\omega).$$

Remarque 1.2. — Ω est une période du groupe dual de $\mathscr{F}$; elle est déterminée, à multiplication près par un élément de F^*, par le fait que $\sigma_a(\Omega)=\frac{\mathrm{N}_{F/\mathbf{Q}_p}(a)}{a}\Omega$, si $a\in\mathscr{O}_F^*$.

1.2. L'anneau de Robba $\mathscr{R}$

1.2.1. Séries de Laurent et fonctions analytiques. — Soit L un corps complet pour la valuation p-adique (normalisée par $v_p(p)=1$), contenant [10] F et Ω. Si $n\in\mathbf{N}$, on pose $L_n=L\otimes_F F_n$.

Si $0<r<s$, on note $\mathscr{E}^{[r,s]}$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $C_{[r,s]}=\{z\in\mathbf{C}_p,\ r\le v_p(z)\le s\}$ que l'on voit comme un sous-ensemble des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ à coeficients dans L. Alors $\mathscr{E}^{[r,s]}$ est un anneau principal, de Banach pour la valuation $v^{[r,s]}$ définie par, si $f=\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$,

$$v^{[r,s]}(f)=\inf_{r\le v_p(z)\le s}v_p(f(z))=\min\big(\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+rk),\inf_{k\in\mathbf{Z}}(v_p(a_k)+sk)\big).$$

Si $0<r<s$, on note $\mathscr{E}^{]r,s]}$ l'anneau des fonctions analytiques sur la couronne $C_{]r,s]}=\{z\in\mathbf{C}_p,\ r<v_p(z)\le s\}$; c'est aussi la limite projective (i.e. l'intersection) des $\mathscr{E}^{[t,s]}$, pour $t\in]r,s]$, et donc un anneau de Bézout (si L est sphériquement complet), de Fréchet pour la famille des valuations $v^{[t,s]}$, pour $t\in]r,s]$.

Enfin, si $r>0$, on note $\mathscr{E}^{]r,r\}}$ la limite inductive (i.e. la réunion) des $\mathscr{E}^{]r,s]}$, pour $s>r$; c'est l'anneau des fonctions f qui sont analytiques sur une couronne de la forme $C_{]r,s(f)]}$ où $s(f)>r$ dépend de f.

On note simplement $\mathscr{R}$ l'anneau de Robba $\mathscr{E}^{]0,0\}}$. On note $\mathscr{R}^+$ l'intersection de $\mathscr{R}$ et $L[[T]]$ (c'est l'anneau des fonctions L-analytiques sur le disque unité $\{z,\ v_p(z)>0\}$), et $\mathscr{R}^-$ l'intersection de $\mathscr{R}$ et $T^{-1}L[[T^{-1}]]$ de telle sorte que $\mathscr{R}=\mathscr{R}^+\oplus\mathscr{R}^-$.

9. Dans le cas usuel, les points de torsion sont les $\zeta-1$, où ζ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p, et $\eta(x,\zeta-1)=\zeta^x$.

10. Dans le cas usuel, $\Omega=1$, et on peut prendre pour L une extension finie de $\mathbf{Q}_p$. Si $F\neq\mathbf{Q}_p$, alors Ω est transcendant sur $\mathbf{Q}_p$ et tout corps L contenant Ω est de valuation non discrète.

Si $n\geq 1$, on pose $r_n=v_p(u_n)=\frac{1}{e(q-1)q^{n-1}}$, et on note $\mathscr{R}^{(n)}$ l'anneau $\mathscr{E}^{]r_n,r_n\}}$. Le résultat suivant nous sera utile pour décrire les fonctions localement analytiques sur $\mathscr{O}_F$ (th. 2.3 et cor. 2.4).

Lemme 1.3. — (i) *Si $r_1<r<s$, alors $T\mapsto\eta(1,T)-1$ induit un isomorphisme de la couronne $C_{[r,s]}$ sur la couronne $C_{[v_p(\Omega)+r,v_p(\Omega)+s]}$.*

(ii) *$f\mapsto f(\eta(1,T)-1)$ induit un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}}$ sur $\mathscr{R}^{(1)}$.*

Démonstration. — Comme $\eta(1,T)=\exp(\Omega\,\ell(T))$ et $\ell(T)=\sum_{n\in\mathbf{N}}\pi^{-n}T^{q^n}$, le (i) est une conséquence de ce que :

- $\exp -1$ est un isomorphisme du disque $v_p(z)>\frac{1}{p-1}$ préservant v_p,
- $z\mapsto\Omega\,z$ est un isomorphisme du disque $v_p(z)>r_1$ sur le disque $v_p(z)>\frac{1}{p-1}$ augmentant $v_p(z)$ de $v_p(\Omega)$,
- ℓ est un isomorphisme du disque $v_p(z)>r_1$ préservant v_p.

Le (ii) est une conséquence directe de ce que $\frac{1}{p-1}=r_1+v_p(\Omega)$ et du (i).

1.2.2. Actions de φ, Γ et P^+. — On munit $\mathscr{R}$ d'actions continues de L-algèbres de φ et Γ, commutant entre elles, en posant $\varphi(T)=[\pi]\cdot T$ et $\sigma_a(T)=[a]\cdot T$, si $a\in\mathscr{O}_F^*$. On a

$$\varphi(\eta(x,T))=\eta(\pi x,T)\text{ et }\sigma_a(\eta(x,T))=\eta(ax,T)\text{ si }a\in\mathscr{O}_F^*,$$
$$\ell(T)=T\prod_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n\big(\tfrac{\varphi(T)}{\pi T}\big).$$

Soit P^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. On munit $\mathscr{R}$ d'une action de P^+ en posant

$$\left(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z=\eta(b,T)\ \varphi^k\circ\sigma_a(z),\quad \text{si } k\in\mathbf{N},\ a\in\mathscr{O}_F^*\text{ et }b\in\mathscr{O}_F.$$

1.2.3. L'opérateur ψ. — L'anneau $\mathscr{R}$ est une extension de degré q de $\varphi(\mathscr{R})$ et on définit un inverse à gauche ψ de φ en posant $\psi=q^{-1}\varphi^{-1}\circ\mathrm{Tr}_{\mathscr{R}/\varphi(\mathscr{R})}$. Cet inverse commute à Γ, et on a :

- $\psi(f\varphi(g))=g\psi(f)$, pour tous f,g,
- $\psi(f)=q^{-1}\varphi^{-1}\big(\sum_{[\pi]\cdot\omega=0}f(T\oplus\omega)\big)$, si $f\in\mathscr{R}^+$,
- $\psi(\eta(i,T))=0$ si $i\notin\pi\mathscr{O}_F$ et $\psi(\eta(i,T))=\eta(\frac{i}{\pi},T)$ si $i\in\pi\mathscr{O}_F$.

On en déduit que :

$$\psi^k\big(\eta(x,T)\varphi^k(z)\big)=\psi^k(\eta(x,T))z=\begin{cases}\eta(x/\pi^k,T)z & \text{si } x\in\pi^k\mathscr{O}_F,\\ 0 & \text{si } x\notin\pi^k\mathscr{O}_F.\end{cases}$$

Si S est un système de représentants de $\mathscr{O}_F/\pi$ contenant 0, les $\eta(i,T)$, pour $i\in S$, forment une base de $\mathscr{R}$ sur $\varphi(\mathscr{R})$, et on a

$$\psi\Big(\sum_{i\in S}\eta(i,T)\varphi(x_i)\Big)=x_0\ \text{ et }\ z=\sum_{i\in S}\eta(i,T)\varphi(\psi(\eta(-i,T)z)).$$

Proposition 1.4. — (i) *Si $r < s < r_1$ alors φ et ψ induisent des morphismes continus*

$$\varphi : \mathscr{E}^{[r,s]} \to \mathscr{E}^{[qr,qs]}, \quad \psi : \mathscr{E}^{[qr,qs]} \to \mathscr{E}^{[r,s]}.$$

(ii) *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $\mathscr{R}^{(n+1)} = \oplus_{i\in\mathscr{O}_F \bmod \pi^n}\eta(i,T)\,\varphi^n(\mathscr{R}^{(1)})$.*

Démonstration. — Pour le (i), voir [**17**], Lemmas 2.6 et 2.7. Le (ii) s'en déduit en utilisant la formule $z = \sum_{i\in\mathscr{O}_F \bmod \pi^n}\eta(i,T)\,\varphi^n(\psi^n(\eta(-i,T)z))$.

1.2.4. L'élément t, les dérivations ∇ et ∂. — On note t l'élément [11]

$$t = \Omega\,\ell(T)$$

de $\mathscr{R}$; on a :

- $\eta(x,T) = e^{xt}$,
- $\varphi(t) = \pi t$ et $\psi(t) = \pi^{-1}t$,
- $\sigma_a(t) = at$, si $a \in \mathscr{O}_F^*$.
- $dt = \frac{d\eta(1,T)}{\eta(1,T)} = \Omega\,\ell'(T)dT$.

On note ∂ l'opérateur différentiel [12]

$$\partial = \frac{d}{dt} = \frac{1}{\Omega}\,\frac{1}{\ell'(T)}\,\frac{d}{dT} = \eta(1,T)\,\frac{d}{d\eta(1,T)}.$$

On a :

- $\partial(\eta(x,T)) = x\,\eta(x,T)$,
- $\partial\circ\varphi = \pi\,\varphi\circ\partial$ et $\partial\circ\psi = \pi^{-1}\,\psi\circ\partial$,
- $\partial\circ\sigma_a = a\,\sigma_a\circ\partial$, si $a \in \mathscr{O}_F^*$.

On note ∇ la dérivation $t\partial$; on a :

- $\nabla(f) = \lim_{a\to 1}\frac{\sigma_a - 1}{a-1}f$, pour tout $f \in \mathscr{R}$,
- $\nabla = \frac{\log\sigma_a}{\log a}$, si $a \in \mathscr{O}_F^*$ n'est pas une racine de l'unité,
- $\sigma_a = \exp(\log a\,\nabla)$ sur $\mathscr{E}^{[r,s]}$, si $v_p(a-1) > -v^{[r,s]}(\ell(T))$.

1.2.5. Résidus et dualité. — Si $f \in \mathscr{R}$, et si $f(T)\ell'(T) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k$, on pose

$$\mathrm{rés}_0(f\,dt) = \mathrm{rés}_0\big(f\,\tfrac{d\eta(1,T)}{\eta(1,T)}\big) = \Omega\,\mathrm{rés}_0(f\ell'(T)dT) = \Omega\,a_{-1}.$$

Proposition 1.5. — *Si $f \in \mathscr{R}$ ou $\mathscr{E}$, on a :*

- $\mathrm{rés}_0\big(\sigma_a(f)\,dt\big) = \chi^{-1}(a)\mathrm{rés}_0\big(f\,dt\big)$, *pour tout $a \in \mathscr{O}_F^*$,*
- $\mathrm{rés}_0\big(\varphi(f)\,dt\big) = \chi^{-1}(\pi)\mathrm{rés}_0\big(f\,dt\big)$ *et* $\mathrm{rés}_0\big(\psi(f)\,dt\big) = \chi(\pi)\mathrm{rés}_0\big(f\,dt\big)$.
- $\mathrm{rés}_0\big(\partial f\,dt\big) = \mathrm{rés}_0\big(df\big) = 0$.

Démonstration. — Pour les deux premiers points, cf. [**17**, prop. 2.13] ; le dernier est immédiat.

---

11. Dans le cas usuel, $t = \log(1+T)$
12. Dans le cas usuel, $\partial = (1+T)\frac{d}{dT}$.

1.3. (φ,Γ)-modules et P^+-faisceaux sur $\mathscr{O}_F$

1.3.1. Représentations et faisceaux équivariants. — Soit H un semi-groupe topologique, et soit X *un H-espace* (i.e. un ensemble compact, totalement discontinu, sur lequel H agit continûment) ; les exemples que nous avons en vue sont :

- $H = P^+$ et $X = \mathscr{O}_F$ avec action $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot x = ax + b$,
- $H = \mathbf{GL}_2(F)$ et $X = \mathbf{P}^1 = \mathbf{P}^1(F)$ avec action $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot x = \frac{ax+b}{cx+d}$.

Définition 1.6. — *Un faisceau H-équivariant ou, simplement, un H-faisceau M sur X est la donnée :*

- *pour tout ouvert compact U de X d'un L-espace vectoriel topologique $M \boxtimes U$ (avec $M \boxtimes \emptyset = 0$),*
- *d'applications continues de restriction $\mathrm{Res}_U^V : M \boxtimes V \to M \boxtimes U$, si $U \subset V$ vérifiant les conditions de recollement habituelles, à savoir si $U = \cup_{i=1}^n U_i$, et si $s_i \in M \boxtimes U_i$, pour $1 \leq i \leq n$, vérifient $\mathrm{Res}_{U_i \cap U_j}^{U_i} s_i = \mathrm{Res}_{U_i \cap U_j}^{U_j} s_j$, alors il existe $s \in M \boxtimes U$, unique, tel que $\mathrm{Res}_{U_i}^U s = s_i$ pour tout i,*
- *d'isomorphismes continus $g_U : M \boxtimes U \cong M \boxtimes gU$, pour tous $g \in H$ et U ouvert compact, vérifiant $g_{hU} \circ h_U = (gh)_U$, pour tous $g, h \in H$ et tout ouvert compact U, de telle sorte que, pour tout U, $g \mapsto g_U$ soit un morphisme continu du stabilisateur H_U de U dans $\mathrm{End}_{\mathrm{cont}}(M \boxtimes U)$.*

Remarque 1.7. — (i) Si M est un H-faisceau, le module $M \boxtimes X$ de ses sections globales est muni d'une action continue de H, et donc est un $L[H]$-module topologique.

(ii) Tous nos ouverts étant compacts et donc fermés, la condition de recollement permet de prolonger tout élément de $M \boxtimes U$ par 0 sur $M \boxtimes (X - U)$. Il s'ensuit que l'on peut voir les $M \boxtimes U$ comme des sous L-espaces vectoriels de $M \boxtimes X$, et qu'un H-faisceau M sur X est équivalent à la donnée :

- d'un module $M \boxtimes X$ muni d'une action de H,
- de sous-modules fermés $M \boxtimes U$, pour U ouvert compact, vérifiant les conditions :

$$M \boxtimes \emptyset = 0$$
$$(M \boxtimes U) \cap (M \boxtimes V) = M \boxtimes (U \cap V) \ \text{ et } \ (M \boxtimes U) + (M \boxtimes V) = M \boxtimes (U \cup V),$$
$$g \cdot (M \boxtimes U) = M \boxtimes gU.$$

L'application $\mathrm{Res}_U : M \boxtimes X \to M \boxtimes U$ est alors la projection parallèlement à $M \boxtimes (X - U)$, et Res_U^V la restriction de Res_U à $M \boxtimes V$, si $V \supset U$.

On dit qu'un $L[H]$-module topologique *vit sur X* s'il peut s'écrire comme l'espace des sections globales d'un H-faisceau sur X.

Exemple 1.8. — (i) Si M vit sur X, il en est de même de son dual topologique.

(ii) Un $L[P^+]$-module topologique M vit sur $\mathscr{O}_F$ si et seulement si $M = \oplus_{i \in \mathscr{O}_F \bmod \pi} \left(\begin{smallmatrix} \pi & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot M$ (la nécessité de la condition vient de ce que $\mathscr{O}_F = \coprod_{i \in \mathscr{O}_F \bmod \pi} i +$

$\pi\mathscr{O}_F$, et sa suffisance vient de ce que toute relation entre ouverts compacts s'obtient à partir de celle-ci et de l'action de P^+).

(iii) Si K est un sous-groupe fermé de H, et si W est une représentation de K, une induite $\mathrm{Ind}_K^H W$ vit sur K/H (à condition d'avoir mis des conditions « raisonnables » dans la définition de l'induite).

1.3.2. Faisceaux de type analytique. — On note $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ l'espace des *fonctions localement analytiques sur* $\mathscr{O}_F$ à valeurs dans L. Par compacité de $\mathscr{O}_F$, cet espace est la limite inductive des $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$, où $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$ est l'espace des fonctions ϕ admettant un développement en série de Taylor $\phi(x) = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_{i,k}\big(\frac{x-i}{\pi^n}\big)^k$, sur $i + \pi^n\mathscr{O}_F$, pour tout $i \in \mathscr{O}_F$ (il suffit de le vérifier pour i appartenant à un système S de représentants modulo π^n), et alors

$$v_{\mathrm{LA}_n}(\phi) = \inf_{i\in S}\big(\inf_{k\in\mathbf{N}} v_p(a_{i,k})\big)$$

définit une valuation sur $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$ pour laquelle il est complet, et donc $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ est une limite inductive de banachs (limite inductive compacte car la boule unité de $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$ est relativement c-compacte dans $\mathrm{LA}_{n+1}(\mathscr{O}_F)$).

On note $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ le L-dual topologique de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$; c'est l'espace des *distributions analytiques* sur $\mathscr{O}_F$.

Plus généralement, on dit qu'un semi-groupe H est F-analytique s'il possède un voisinage K de l'élément neutre qui est un groupe homéomorphe à $\mathscr{O}_F^d$, la multiplication et le passage à l'inverse sur H étant donnés par des fonctions analytiques sur $\mathscr{O}_F^d$. C'est par exemple le cas de $1+\pi\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F)$, de $\mathbf{GL}_2(F)$ (en prenant $K = 1+\pi\mathbf{M}_2(\mathscr{O}_F)$) ou de P^+ (en prenant $K = \big(\begin{smallmatrix}1+\pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$).

Dans un tel cas, on dit que $\phi : H \to L$ est localement analytique si $k \mapsto \phi(gk)$ de K dans L induit, pour tout $g \in H$ (il suffit de le vérifier pour un système de représentants de H/K), une fonction localement analytique sur $\mathscr{O}_F^d$.

Si K est un groupe compact, F-analytique, on note $\mathscr{D}(K)$ l'algèbre des distributions analytiques sur K : en tant qu'espace topologique, c'est le dual des fonctions localement analytiques sur K. Elle contient les combinaisons linéaires de masses de Dirac comme sous-algèbre dense, ainsi que l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie de K (considéré comme groupe F-analytique).

Si H est un semi-groupe F-analytique, et si X est un H-espace, on dit qu'un H-faisceau est *de type analytique* si, pour tout ouvert compact U de X, l'espace $M \boxtimes U$ est un espace de type LF (limite inductive de fréchets) et est un $\mathscr{D}(K)$-module pour tout sous-groupe ouvert compact K de H stabilisant U (il suffit que ce soit vrai pour un K car deux tels sous-groupes sont commensurables).

Remarque 1.9. — Un semi-groupe F-analytique H peut aussi être considéré comme un semi-groupe $\mathbf{Q}_p$-analytique. Un H-faisceau de type analytique est donc un cas particulier de H-faisceau de type $\mathbf{Q}_p$-analytique. Maintenant, la F-analyticité de H munit son algèbre de Lie d'une structure de F-espace vectoriel, et on vérifie facilement qu'un H-faisceau de type $\mathbf{Q}_p$-analytique est de type analytique si et seulement si l'action de l'algèbre de Lie est F-linéaire.

1.3.3. (φ,Γ)*-modules.* — Un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est un $\mathscr{R}$-module libre, de rang fini, muni d'actions semi-linéaires et continues de φ et Γ, qui commutent.

Par exemple, si $\delta : F^* \to L^*$ est un caractère continu, on définit le (φ,Γ)-module $\mathscr{R}(\delta)$ en multipliant les actions de φ et σ_a sur $\mathscr{R}$ par $\delta(\pi)$ et $\delta(a)$ respectivement. Alors $\mathscr{R}(\delta)$ est un (φ,Γ)-module de rang 1 et la théorie locale du corps de classe, combinée à l'équivalence de catégories de Fontaine (dans le cas Lubin-Tate [**21**]) et à la théorie des pentes de Kedlaya, permet de montrer que *tout* (φ,Γ)*-module de rang* 1 *est de cette forme.* On note $z\otimes\delta$ l'élément de $\mathscr{R}(\delta)$ correspondant à $z\in\mathscr{R}$.

Soit P^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Si Δ est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$, on munit Δ d'une action de P^+ en posant

$$\left(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = \eta(b,T)\ \varphi^k\circ\sigma_a(z),\qquad \text{si } k\in\mathbf{N},\ a\in\mathscr{O}_F^* \text{ et } b\in\mathscr{O}_F.$$

Si U est un ouvert compact de $\mathscr{O}_F$, on peut décomposer U comme une réunion disjointe finie $\coprod_{i\in I} i+\pi^n\mathscr{O}_F$, et on définit Res_U sur $\mathscr{E}$ et $\mathscr{R}$ par la formule

$$\mathrm{Res}_U = \sum_{i\in I}\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F},$$

où l'on a posé

$\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} = \left(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\circ\varphi^n\circ\psi^n\circ\left(\begin{smallmatrix}1 & -i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et donc $\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} z = \eta(i,T)\varphi^n(\psi^n(\eta(-i,T)z))$.

Ceci ne dépend pas du choix de la décomposition car

$$z = \sum_{i \bmod \pi}\eta(i,T)\varphi(\psi(\eta(-i,T)z)) = \sum_{i \bmod \pi}\mathrm{Res}_{i+\pi\mathscr{O}_F} z.$$

On note $\Delta\boxtimes U$ l'image de Res_U. On obtient de la sorte un P^+-faisceau sur $\mathscr{O}_F$.

Remarque 1.10. — Le (ii) de l'ex. 1.8 montre qu'un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ vit sur $\mathscr{O}_F$ si on le voit comme $L[P^+]$-module topologique. Il en est de même du sous-module $\mathscr{R}^+(\delta)$ de $\mathscr{R}(\delta)$.

1.3.4. (φ,Γ)*-modules analytiques.* — On dit qu'un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est *analytique*, s'il est de type analytique en tant que P^+-faisceau. On note $\Phi\Gamma_{\mathrm{an}}(\mathscr{R})$ la catégorie des (φ,Γ)-modules analytiques.

On vérifie facilement, en reprenant les techniques de [**1**], qu'un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est de type $\mathbf{Q}_p$-analytique comme P^+-faisceau sur $\mathscr{O}_F$. De plus, comme l'action de l'algèbre de Lie de $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ est trivialement F-linéaire, tout (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ est analytique en tant que $\left(\begin{smallmatrix}1 & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$-module. Pour qu'il le soit en tant que P^+-module, il suffit donc que l'action de $\mathrm{Lie}\,\Gamma$ soit F-linéaire (ceci est donc automatique si $F=\mathbf{Q}_p$, mais pas si $F\neq\mathbf{Q}_p$). C'est le cas si et seulement si la famille d'opérateurs $\frac{\sigma_a-1}{a-1}$ a une limite quand $a\to 1$. On note alors ∇ la limite, et on a $\nabla = \frac{\log\sigma_a}{\log a}$ pour tout $a\in\mathscr{O}_F^*$ qui n'est pas une racine de l'unité ; de plus, ∇ est une connexion sur D : si $f\in\mathscr{R}$

et $z \in D$, alors $\nabla(fz) = \nabla f \cdot z + f \cdot \nabla z$, où $\nabla = t\partial$ est la dérivation introduite au n° 1.2.4.

Par exemple, $\mathscr{R}(\delta)$ est analytique si et seulement si δ est localement analytique et, si on note $\kappa(\delta) = \delta'(1)$ le *poids* de δ, alors

$$\nabla(z \otimes \delta) = \big((\nabla + \kappa(\delta)) \cdot z\big) \otimes \delta.$$

Si $\Delta \in \Phi\Gamma_{\rm an}(\mathscr{R})$, l'action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ de P^+ est donnée par les formules

$$a^+ \cdot z = \nabla z \text{ et } u^+ \cdot z = t\, z, \quad \text{où } a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \text{ et } u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right).$$

Lemme 1.11. — *Si $\kappa \in L$, il existe un caractère localement analytique δ de $\mathscr{O}_F^*$, à valeurs dans une extension finie de L, tel que $\kappa(\delta) = \kappa$.*

Démonstration. — Soit N assez grand pour que $\log \mathscr{O}_F^* \subset p^{-N}\mathscr{O}_F$. Si $v_p(z) > 0$, alors $x \mapsto \eta\big(p^N \log x, z)$ est un caractère localement analytique de $\mathscr{O}_F^*$, dont le poids est $p^N\Omega\ell(z)$. On conclut en utilisant la théorie des polygones de Newton qui permet de montrer que l'équation $\ell(z) = a$ a une solution dans une extension finie de $F(a)$.

1.3.5. Dualité. — On définit le (φ, Γ)-module $\mathscr{R}\, dt = \mathscr{R}\, \frac{d\,\eta(1,T)}{\eta(1,T)}$ en posant $\varphi(dt) = \chi(\pi)\, dt$ et $\sigma_a(dt) = \chi(a)\, dt$ (on a donc $\mathscr{R}\, dt \cong \mathscr{R}(\chi)$).

Si $\Delta \in \Phi\Gamma_{\rm an}(\mathscr{R})$, on pose $\check\Delta = {\rm Hom}_{\mathscr{R}}(\Delta, \mathscr{R}dt)$, on note $\langle\ ,\ \rangle$ l'accouplement naturel entre $\check\Delta$ et Δ, et on fait de $\check\Delta$ un élément de $\Phi\Gamma_{\rm an}(\mathscr{R})$, en imposant que, pour tous $\check z \in \check\Delta$ et $z \in \Delta$, on ait $\langle g \cdot \check z, g \cdot z\rangle = g \cdot \langle \check z, z\rangle$, si $g = \varphi, \sigma_a$.

On définit un accouplement $\{\ ,\ \} : \check\Delta \times \Delta \to L$ par

$$\{\check z, z\} = {\rm rés}_0(\langle \sigma_{-1}(\check z), z\rangle),$$

où ${\rm rés}_0(\sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k\, dT) = a_{-1}$.

Proposition 1.12. — (i) $\{\ ,\ \}$ *identifie $\check\Delta$ et Δ aux duaux topologiques de Δ et $\check\Delta$.*

(ii) $\{\ ,\ \}$ *la dualité entre $\check\Delta$ et Δ est une dualité de P^+-faisceaux sur $\mathscr{O}_F$:*

- $\{g \cdot \check z, g \cdot z\} = \{\check z, z\}$, *pour tous $g \in P^+$, $\check z \in \check\Delta$ et $z \in \Delta$,*
- $\{\psi(\check z), z\} = \{\check z, \varphi(z)\}$ *et* $\{\check z, \psi(z)\} = \{\varphi(\check z), z\}$,
- $\{{\rm Res}_U \check z, z\} = \{{\rm Res}_U \check z, {\rm Res}_U z\} = \{\check z, {\rm Res}_U z\}$ *pour tout ouvert compact U de $\mathscr{O}_F$,*
- *si $\mathscr{O}_F = \coprod_{i=1}^n U_i$, alors $\{\check z, z\} = \sum_{i=1}^n \{{\rm Res}_{U_i} \check z, {\rm Res}_{U_i} z\}$.*

Démonstration. — Il suffit de recopier la démonstration dans le cas de $\mathbf{Z}_p$ en utilisant la prop. 1.5 au lieu de [**7**, prop. I.2.2]. Pour l'identification avec le dual et les deux premiers points, cf. [**7**, prop. III.2.3] et [**9**, § I.1]. La propriété d'adjonction de ${\rm Res}_U$ pour U quelconque suit du cas particulier $U = i + \pi^n\mathscr{O}_F$, où l'on a ${\rm Res}_U = \left(\begin{smallmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ \left(\begin{smallmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, pour lequel on peut appliquer le premier point puis deux fois le second puis de nouveau le premier ; la formule $\{{\rm Res}_U z, z'\} = \{{\rm Res}_U z, {\rm Res}_U z'\}$ suit de la propriété d'adjonction et de ce que ${\rm Res}_U$ est un projecteur $[\,{\rm Res}_U({\rm Res}_U(z)) = {\rm Res}_U(z)\,]$.

1.4. Poids de Hodge-Tate

1.4.1. Sous-modules naturels d'un (φ,Γ)-module. — Soit Δ un (φ,Γ)-module analytique, de rang d sur $\mathscr{R}$, et soit $e_1,\dots,e_d$ une base de Δ sur $\mathscr{R}$.

Lemme 1.13. — *Il existe $\varepsilon>0$, dépendant du choix de $e_1,\dots,e_d$, tel que, si $0<r<s<\varepsilon$:*
- $\varphi(\oplus_{i=1}^d \mathscr{E}^{[r,s]}e_i)\subset\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{[r/q,s/q]}e_i,$
- $\psi(\oplus_{i=1}^d \mathscr{E}^{[r/q,s/q]}e_i)=\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{[r,s]}e_i$
- $\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{[r,s]}e_i$ *est stable par* Γ *et* ∇.

Démonstration. — Il suffit de recopier la démonstration de [**2**, th. I.3.3].

Remarque 1.14. — Il résulte du lemme précédent que, pour tout $0<s<\varepsilon$:
- $\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{]0,s]}e_i$ est le plus grand sous-$\mathscr{E}^{]0,s]}$-module M de Δ, de type fini, tel que $\varphi(M)\subset\mathscr{E}^{]0,s/q]}M$,
- $\psi(\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{]0,s/q]}e_i)=\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{]0,s]}e_i$
- $\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{]0,s]}e_i$ est stable par Γ et ∇.

On note $n(\Delta)$ le plus petit entier n tel qu'il existe ε et une base $e_1,\dots,e_d$ de D comme ci-dessus, avec $r_{n(\Delta)}\leq\varepsilon$. Si $r\leq s\leq r_{n(\Delta)}$, on pose alors
$$\Delta^{[r,s]}=\oplus_{i=1}^d\mathscr{E}^{[r,s]}e_i,$$
et il résulte de la rem. 1.14 que $\Delta^{[r,s]}$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a faits. On a alors
$$\Delta=\varinjlim_{s>0}\ \varprojlim_{0<r<s}\ \Delta^{[r,s]}.$$

1.4.2. Théorie de Sen. — Si $n\geq 1$, soit
$$[\pi^{-n}]\cdot T=u_n\oplus\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T))\in F_n[[T]].$$
(La notation est justifiée par le fait que $[\pi^n]\cdot(u_n\oplus\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T)))=[\pi^n]\cdot\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T))$ puisque $[\pi^n]\cdot u_n=0$, et $\ell([\pi^n]\cdot\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T)))=\pi^n\ell(\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T)))=\ell(T)$, ce qui fait que $[\pi^n]\cdot\ell^{-1}(\pi^{-n}\ell(T))=T$.) Comme $\Omega\in L$, on a $L_n[[t]]=L_n[[T]]$, et on définit un plongement
$$\iota_n:\mathscr{E}^{]0,r_n]}\to L_n[[t]]=L_n[[T]]=L\otimes F_n[[T]],$$
en envoyant $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k$ sur $\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_n\otimes([\pi^{-n}]\cdot T)^k$. Le plongement ι_n commute à l'action de Γ, et donc aussi à celle de ∇ (qui agit par $t\frac{d}{dt}$). On a alors, en notant $\theta:L_n[[t]]\to L_n$ la réduction modulo t et en posant $\mathrm{Tr}=\frac{1}{q}\mathrm{Tr}_{L_{n+1}/L_n}$, le diagramme commutatif d'anneaux suivant,
$$\begin{tikzcd}
\mathscr{E}^{]0,r_n]} \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & L_n[[t]] \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, hook, shift left] & L_n \arrow[d, hook, shift left] \\
\mathscr{E}^{]0,r_{n+1}]} \arrow[r, "\iota_{n+1}"] \arrow[u, shift left, "\psi"] & L_{n+1}[[t]] \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, shift left, "\mathrm{Tr}"] & L_{n+1} \arrow[u, shift left, "\mathrm{Tr}"]
\end{tikzcd}$$

muni d'une action de Γ et de ∇ (qui est nul sur L_n et L_{n+1}). Notons que $\theta\circ\iota_{n+k}(f)=0$ si et seulement si f est divisible par $[\pi^{n+k}]\cdot T=\varphi^{n+k}(T)$ dans $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$. On en déduit le résultat suivant, conséquence de la factorisation $t=\Omega T\prod_{k\in\mathbf{N}}\varphi^k(\pi^{-1}T^{-1}\varphi(T))$.

Lemme 1.15. — *f est divisible par t dans $\mathscr{E}^{]0,r_n]}$ si et seulement si $\theta\circ\iota_{n+k}(f)=0$ pour tout $k\geq 0$.*

On pose

$$\Delta^+_{\mathrm{dif},n}=L_n[[t]]\otimes_{\iota_n}\Delta^{]0,r_n]}\ \text{ et }\ \Delta_{\mathrm{Sen},n}=\Delta^+_{\mathrm{dif},n}/t\Delta^+_{\mathrm{dif},n}\,.$$

Alors, si n est assez grand, $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$ est un $L_n[[t]]$-module libre de rang d et $\Delta_{\mathrm{Sen},n}$ est un L_n-module libre de rang d. Le diagramme ci-dessus donne naissance au diagramme

$$\begin{tikzcd}
\Delta^{]0,r_n]} \arrow[r, "\iota_n"] \arrow[d, shift left, "\varphi"] & \Delta^+_{\mathrm{dif},n} \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, hook, shift left] & \Delta_{\mathrm{Sen},n} \arrow[d, hook, shift left] \\
\Delta^{]0,r_{n+1}]} \arrow[r, "\iota_{n+1}"] \arrow[u, shift left, "\psi"] & \Delta^+_{\mathrm{dif},n+1} \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, shift left, "\mathrm{Tr}"] & \Delta_{\mathrm{Sen},n+1} \arrow[u, shift left, "\mathrm{Tr}"]
\end{tikzcd}$$

qui est muni d'actions de Γ et ∇, et ∇ est L_n-linéaire sur $\Delta_{\mathrm{Sen},n}$ car on a supposé que ∇ est F-linéaire sur Δ. Maintenant, L_n est un produit de corps, et ces corps sont permutés par l'action de Γ, ce qui fait que les valeurs propres de ∇ ne dépendent pas du choix d'une projection de L_n sur un de ces corps ; ce sont les *poids de Hodge-Tate* de Δ et l'opérateur ∇ sur $\Delta_{\mathrm{Sen},n}$ est *l'opérateur* Θ_{Sen} *de Sen*. Le lemme 1.15 ci-dessus implique le résultat suivant.

Lemme 1.16. — *Soit $n\geq n(\Delta)$. Si $P\in L[X]$ est tel qu'il existe $c\in\operatorname{End}\Delta$, tel que $P(\nabla)-c=0$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen},n}$, alors $(P(\nabla)-c)\cdot\Delta^{]0,r_n]}\subset t\Delta^{]0,r_n]}$.*

Démonstration. — On a $(P(\nabla)-c)=0$ sur $\Delta_{\mathrm{Sen},n+k}$, pour tout k, et donc $(P(\nabla)-c)\cdot\Delta^+_{\mathrm{dif},n+k}\subset t\Delta^+_{\mathrm{dif},n+k}$, pour tout $k\in\mathbf{N}$. Le lemme 1.15 permet donc de conclure.

2. Analyse fonctionnelle sur $\mathscr{O}_F$

2.1. Transformée d'Amice-Katz. — Si $\mu\in\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$, on définit sa *transformée d'Amice-Katz* A_μ par la formule :

$$A_\mu(T)=\int_{\mathscr{O}_F}\eta(x,T)\mu(x).$$

2.1.1. Multiplication par une fonction. — Si μ est une distribution sur $\mathscr{O}_F$ et si f est une fonction localement analytique sur $\mathscr{O}_F$, on définit la distribution $f\mu$ par la formule $\int_{\mathscr{O}_F}\phi\,(f\mu)=\int_{\mathscr{O}_F}(f\phi)\,\mu$.

- *Multiplication par $\eta(x,z)$ si $v_p(z)>0$.* On a

$$A_{\eta(x,z)\mu}(T)=\int_{\mathscr{O}_F}\eta(x,T)\eta(x,z)\,\mu(x)=\int_{\mathscr{O}_F}\eta(x,T\oplus z)=A_\mu(T\oplus z).$$

• *Restriction à un ouvert compact.* C'est la multiplication par la fonction caractéristique de l'ouvert compact. Si $n \in \mathbf{N}$ et $b \in \mathscr{O}_F$, la fonction caractéristique de $b+\pi^n\mathscr{O}_F$ est $x \mapsto q^{-n}\sum_{[\pi^n]\cdot\omega=0}\eta(x,\omega)\eta(-b,\omega)$. Cela se traduit, au niveau des transformées d'Amice-Katz, par la formule

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{Res}_{b+\pi^n\mathscr{O}_F}(\mu)}(T) &= q^{-n}\sum_{[\pi^n]\cdot\omega=0}\eta(-b,\omega)A_\mu(T\oplus\omega) \\ &= \eta(b,T)\,\varphi^n\circ\psi^n(\eta(-b,T)A_\mu) = \mathrm{Res}_{b+\pi^n\mathscr{O}_F}A_\mu. \end{aligned}$$

2.1.2. Convolution des distributions. — Si λ et μ sont deux distributions, on définit leur convolée $\lambda*\mu$ par

$$\int_{\mathscr{O}_F}\phi\ \lambda*\mu = \int_{\mathscr{O}_F}\Big(\int_{\mathscr{O}_F}\phi(x+y)\ \lambda(x)\Big)\mu(y).$$

En prenant pour ϕ la fonction $x \mapsto \eta(x,z)$, avec $v_p(z) > 0$, on montre que l'on a $A_{\lambda*\mu}(z) = A_\lambda(z)A_\mu(z)$ pour tout z avec $v_p(z) > 0$, et donc que $A_{\lambda*\mu} = A_\lambda A_\mu$.

2.2. Quelques faisceaux P^+-équivariants sur $\mathscr{O}_F$. — Si $f \in \mathscr{R}$, on définit une fonction $\phi_f : \mathscr{O}_F \to \mathbf{C}_p$ par

$$\phi_f(x) = \mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)f\,dt\big) = \Omega\,\mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)f\,\ell'(T)dT\big) = \mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)f\tfrac{d\eta(1,T)}{\eta(1,T)}\big).$$

On munit $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ et $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ d'actions de P^+ en posant :

$$\Big(\big(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\phi\Big)(x) = \begin{cases}\phi(\frac{x-b}{\pi^k a}), & \text{si } x \in b+\pi^k\mathscr{O}_F,\\ 0 & \text{si } x \notin b+\pi^k\mathscr{O}_F,\end{cases}\quad \int_{\mathscr{O}_F}\phi\,\big(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu = \int_{\mathscr{O}_F}\phi(\pi^k ax+b)\,\mu.$$

Cela fait de LA et $\mathscr{D}$ des faisceaux P^+-équivariants sur $\mathscr{O}_F$ (en définissant Res_U comme la multiplication par la fonction $\mathbf{1}_U$ qui est localement analytique si U est un ouvert compact de $\mathscr{O}_F$).

Si $\delta \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$, on peut voir δ comme un caractère de P^+ en posant $\delta\big(\begin{smallmatrix}a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big) = \delta(a)$. Si M est un P^+-module, on note $M\otimes\delta$ le P^+ module M avec action de P^+ tordue par δ. (Le P^+-module $\mathscr{R}\otimes\delta$ est en général noté $\mathscr{R}(\delta)$.)

Proposition 2.1. — (i) *Les applications $\mu \mapsto A_\mu$ et $f \mapsto \phi_f$ sont P^+-équivariantes de $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ dans $\mathscr{R}$ et de $\mathscr{R}$ dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}$ respectivement.*

(ii) *Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ et si $f \in \mathscr{R}$, alors $\int_{\mathscr{O}_F}\phi_f\,\mu = \mathrm{rés}_0\big(\sigma_{-1}(A_\mu)f\,dt\big)$.*

Démonstration. — La P^+-équivariance est une conséquence des calculs suivants qui utilisent à plein la prop. 1.5 :

$$\int_{\mathscr{O}_F}\eta(x,T)\,\big(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mu = \int_{\mathscr{O}_F}\eta(\pi^k ax+b,T)\ \mu = \eta(b,T)\int_{\mathscr{O}_F}\varphi^k\circ\sigma_a\big(\eta(x,T)\big)\,\mu,$$

$$\begin{aligned}\phi_{\left(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)z}(x) &= \mathrm{rés}_0\big(\big(\begin{smallmatrix}1 & -x\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix}\pi^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)z\,dt\big) = \mathrm{rés}_0\big(\sigma_a(\eta(\tfrac{b-x}{a},T)\varphi^k(z))\,dt\big)\\ &= \chi^{-1}(a\pi^k)\mathrm{rés}_0\big(\psi^k(\eta(\tfrac{b-x}{a},T)\varphi^k(z))\,dt\big)\\ &= \begin{cases}\chi^{-1}(a\pi^k)\mathrm{rés}_0\big(\eta(\frac{b-x}{\pi^k a},T)z)\,dt\big) = \chi^{-1}(a\pi^k)\phi_z(\frac{x-b}{\pi^k a}) & \text{si } x\in b+\pi^k\mathscr{O}_F,\\ 0 & \text{si } x\in b+\pi^k\mathscr{O}_F.\end{cases}\end{aligned}$$

Enfin,

$$\int_{\mathscr{O}_F}\phi_f\,\mu = \int_{\mathscr{O}_F}\mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)f\,dt\big)\,\mu = \mathrm{rés}_0\Big(\big(f\int_{\mathscr{O}_F}\eta(-x,T)\mu\big)\,dt\Big) = \mathrm{rés}_0\big(\sigma_{-1}(A_\mu)f\,dt\big).$$

Proposition 2.2. — (i) *Si $f\in\mathscr{R}$, on a :*
- $\phi_{\psi(f)}(x) = \chi(\pi)(\psi(\phi_f))(x)$, *avec* $(\psi(\phi))(x) = \phi(\pi x)$,
- $\phi_{\mathrm{Res}_U f} = \mathrm{Res}_U\phi_f$.

(ii) *Si $\mu\in\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$, on a :*
- $\psi(A_\mu) = A_{\psi(\mu)}$, *où* $\int_{\mathscr{O}_F}\phi\,\psi(\mu) = \int_{\pi\mathscr{O}_F}\phi\big(\frac{x}{\pi}\big)\,\mu$,
- $\mathrm{Res}_U A_\mu = A_{\mathrm{Res}_U\mu}$.

Démonstration. — En ce qui concerne le (i), on a :
- $\phi_{\psi(f)}(x) = \mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)\psi(f)\,dt\big) = \mathrm{rés}_0\big(\psi(\eta(-\pi x,T)f)\,dt\big)$

$= \chi(\pi)\mathrm{rés}_0\big(\eta(-\pi x,T)f\,dt\big) = \chi(\pi)\phi_f(\pi x)$.
- $\phi_{\mathrm{Res}_{\pi^n\mathscr{O}_F}f}(x) = \phi_{\varphi^n\psi^n(f)} = \begin{cases}\phi_{\psi^n(f)}(x/\pi^n) & \text{si } x\in\pi^n\mathscr{O}_F,\\ 0 & \text{si } x\notin\pi^n\mathscr{O}_F,\end{cases} = (\mathrm{Res}_{\pi^n\mathscr{O}_F}\phi)(x).$

Ceci démontre le résultat si $U=\pi^n\mathscr{O}_F$. Le cas $U = i+\pi^n\mathscr{O}_F$ s'en déduit, grâce à la prop. 2.1, en conjuguant par $\big(\begin{smallmatrix}1 & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)$, et le cas général par linéarité.

Passons au (ii). La formule $\mathrm{Res}_U A_\mu = A_{\mathrm{Res}_U\mu}$ a été prouvée au n° 2.1.1 dans le cas où $U = i+\pi^n\mathscr{O}_F$. Le cas général s'en déduit par linéarité. Enfin, on a $\big(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\psi(\mu) = \mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}\mu$ par construction, et donc $\varphi(A_{\psi(\mu)}) = \mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}A_\mu = \varphi\circ\psi(A_\mu)$; on en déduit la formule $\psi(A_\mu) = A_{\psi(\mu)}$, ce qui permet de conclure.

2.3. Analyse fonctionnelle sur $\mathscr{O}_F$ et anneau de Robba. — Le résultat suivant est une traduction des résultats de **[26]**. La preuve que nous en donnons est assez différente de celle que l'on peut y trouver.

Théorème 2.3. — (i) *$\mu\mapsto A_\mu(T)$ induit un isomorphisme $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\cong\mathscr{R}^+$.*

(ii) *$f\mapsto\phi_f$ induit un isomorphisme $\mathscr{R}/\mathscr{R}^+\cong\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}$.*

(iii) *Les applications $\mu\mapsto A_\mu(T)$ et $f\mapsto\phi_f$ induisent la suite exacte*

$$0\to\mathscr{D}\to\mathscr{R}\to\mathrm{LA}\otimes\chi^{-1}\to 0$$

de P^+-faisceaux sur $\mathscr{O}_F$.

Démonstration. — Le (iii) est une conséquence des (i) et (ii) et des prop. 2.1 et 2.2.

Si $n\in\mathbf{N}$, on définit le sous-espace $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger$ de $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$ comme l'ensemble des ϕ dont la série de Taylor converge dans une boule contenant strictement $i+\pi^n\mathscr{O}_F$, pour tout $i \in \mathscr{O}_F$ (encore une fois, il suffit que ce soit le cas pour i appartenant à un système S de représentants modulo π^n). Alors $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger$ est, naturellement, une limite inductive compacte de banachs, et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ est aussi la limite inductive des $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger$.

L'application de restriction à $\mathbf{Z}_p$ induit un isomorphisme $\iota_{\mathbf{Z}_p} : \mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger \cong \mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger$ (cela se voit en passant par les séries de Taylor en 0), ce qui permet d'étudier $\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger$ au lieu de $\mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger$. On note $\mu \mapsto A_{\mathbf{Z}_p,\mu}$ et $f \mapsto \phi_{\mathbf{Z}_p,f}$ respectivement les applications $\mu \mapsto A_\mu$ et $f \mapsto \phi_f$ dans le cas usuel.

Un élément de $\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger$ est de la forme $\phi = \sum_{k\in\mathbf{N}} a_k x^k$, avec $v_p(a_k) \geq C + \delta k$ où $\delta > 0$. On peut donc aussi l'écrire sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{N}} b_k\, k!\binom{x}{k}$, avec $v_p(b_k) \geq C + \delta k$ (car la matrice exprimant les $k!\binom{x}{k}$ en fonction des x^k est triangulaire, à coefficients entiers, avec des 1 sur la diagonale). Comme $\frac{v_p(k!)}{k} \to \frac{1}{p-1}$ quand $k \to +\infty$, il existe $r > \frac{1}{p-1}$ tel que $f_\phi = (1+T)\sum_{k\in\mathbf{N}} \frac{k!\, b_k}{T^{k+1}}$ converge si $v_p(T) \geq r$. Or $\phi_{\mathbf{Z}_p, f_\phi}(x) = \phi(-x)$ comme le montre un calcul immédiat. On en déduit que $f \mapsto \phi_{\mathbf{Z}_p,f}$ induit un isomorphisme $R/R^+ \cong \mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger$, où l'on a posé $R = \mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}}$ et $R^+ = R \cap L[[T]]$.

Or l'accouplement $(f,g) \mapsto \mathrm{rés}_0(\sigma_{-1}(f) g\, dt)$ identifie R à son dual topologique, et R^+ est son propre orthogonal ; il s'ensuit que R^+ est le dual topologique de R/R^+. Comme l'accouplement ci-dessus s'identifie avec l'intégration sur $\mathscr{O}_F$ d'après le (ii) de la prop. 2.1, on en déduit que $\mu \mapsto A_{\mathbf{Z}_p,\mu}$ induit un isomorphisme $\big(\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger\big)^* \cong R^+$. On a donc une suite exacte

$$0 \to \big(\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger\big)^* \to \mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}} \to \mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger \to 0.$$

Maintenant, le changement de variable $X = \eta(1,T) - 1$ induit (cf. lemme 1.3) un isomorphisme $\iota : \mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}} = \mathscr{R}^{(1)}$ et, si $f \in \mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}}$, on a

$$\phi_{\iota(f)}(x) = \mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T) f(\eta(1,T)-1)\, \tfrac{d\eta(1,T)}{\eta(1,T)}\big).$$

Par ailleurs, si $x \in \mathbf{Z}_p$, alors $\eta(-x,T) = \eta(1,T)^{-x}$, et donc

$$\phi_{\iota(f)}(x) = \mathrm{rés}_0\big((1+X)^{-x} f(X) \tfrac{dX}{1+X}\big) = \phi_{\mathbf{Z}_p,f}(x).$$

De même, par dualité, l'application naturelle

$$\iota^*_{\mathbf{Z}_p} : (\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger)^* \to (\mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger)^*$$

est un isomorphisme. Au niveau des transformées d'Amice, cette application devient

$$A_{\iota^*_{\mathbf{Z}_p}(\mu)}(T) = \int_{\mathscr{O}_F} \eta(x,T)\, \iota^*_{\mathbf{Z}_p}(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \eta(x,T)\, \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \eta(1,T)^x\, \mu = A_{\mathbf{Z}_p,\mu}(\eta(1,T)-1).$$

Autrement dit, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \big(\mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger\big)^* \arrow[r, "\mu\mapsto A_{\mathbf{Z}_p,\mu}"] \arrow[d, "\iota^*_{\mathbf{Z}_p}"] & \mathscr{E}^{]1/(p-1),1/(p-1)\}} \arrow[r, "f\mapsto\phi_{\mathbf{Z}_p,f}"] \arrow[d, "\iota"] & \mathrm{LA}_0(\mathbf{Z}_p)^\dagger \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \big(\mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger\big)^* \arrow[r, "\mu\mapsto A_\mu"] & \mathscr{R}^{(1)} \arrow[r, "f\mapsto\phi_f"] & \mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger \arrow[r] \arrow[u, "\iota_{\mathbf{Z}_p}"'] & 0
\end{tikzcd}$$

et les flèches verticales sont des isomorphismes. On en déduit que la ligne du bas est exacte.

Les décompositions

$$\mathscr{R}^{(n+1)} = \bigoplus_{i\in\mathscr{O}_F \bmod \pi^n} \big(\begin{smallmatrix}\pi^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mathscr{R}^{(1)} \ \text{ et } \ \mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger = \bigoplus_{i\in\mathscr{O}_F \bmod \pi^n} \big(\begin{smallmatrix}\pi^n & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\big)\cdot\mathrm{LA}_0(\mathscr{O}_F)^\dagger$$

induisent alors, pour tout n, la suite exacte

$$0\to\big(\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger\big)^*\to\mathscr{R}^{(n+1)}\to\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger\to 0.$$

On en déduit les (i) et (ii) en passant à la limite quand $n\to+\infty$.

Soient $\left[\begin{smallmatrix}x\\ n\end{smallmatrix}\right]$ les polynômes définis par [13]

$$\eta(x,T)=\sum_{n\in N}\left[\begin{smallmatrix}x\\ n\end{smallmatrix}\right]T^n.$$

Corollaire 2.4. — (i) $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}\mapsto\sum_{n\in\mathbf{N}}a_n\left[\begin{smallmatrix}x\\ n\end{smallmatrix}\right]$ *induit un isomorphisme de l'espace des suites* $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ *à décroissance exponentielle (i.e. vérifiant* $v_p(a_n)-rn\to+\infty$, *pour* $r>0$ *assez petit) sur* $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$.

(ii) *Les polynômes sont denses dans* $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$.

(iii) *Plus généralement, si* U *est un ouvert de* $\mathscr{O}_F$, *les polynômes sont denses dans* $\mathrm{LA}(U)$.

Démonstration. — Si $f=\frac{1}{\ell'(T)}\sum_{k\in\mathbf{Z}}a_kT^k\in\mathscr{R}$, alors $\phi_f(x)=\Omega\sum_{n\in\mathbf{N}}a_{-1-n}\left[\begin{smallmatrix}x-1\\ n\end{smallmatrix}\right]$, et comme $\ell'(T)$ est une unité de $\mathscr{O}_L[[T]]$ et le changement de variable $x\mapsto x-1$ induit une isométrie de $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)$, pour tout n, le (i) est une simple traduction du (ii) du th. 2.3.

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i), et le (iii) résulte du (ii) et de la continuité de la multiplication par $\mathbf{1}_U$.

Remarque 2.5. — Soit $\mathscr{E}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$, où $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est le complété de $\mathscr{O}_L[[T]][\frac{1}{T}]$ pour la topologie p-adique. Si $F=\mathbf{Q}_p$, on peut décrire l'anneau $\mathscr{E}$ comme une extension de l'espace des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$ par son dual topologique, à savoir l'espace des mesures.

Si $F\neq\mathbf{Q}_p$, l'anneau $\mathscr{E}$ est encore une extension d'un espace de fonctions sur $\mathscr{O}_F$ par son dual topologique, mais il est plus difficile de décrire exactement cet espace de

13. Dans le cas usuel $\left[\begin{smallmatrix}x\\ n\end{smallmatrix}\right]$ est le polynôme binomial $\binom{x}{n}$ puisque $\eta(x,T)=(1+T)^x=\sum_{n\in\mathbf{N}}\binom{x}{n}T^n$.

fonctions. L'application $f \mapsto \phi_f$ l'identifie à un sous-espace des fonctions continues sur $\mathscr{O}_F$, mais on n'a pas de description simple de l'image. On peut quand-même remarquer que $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ est stable par P^+ ; il en est donc de même de l'image, et comme elle contient les $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F} x^k$, $k \leq h-1$, on en déduit que cette image contient les $\chi(\pi)^{-n}\mathbf{1}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F}\big(\frac{x-i}{\pi^n}\big)^k$, pour tous $i \in \mathscr{O}_F$, $n \in \mathbf{N}$ et $k \leq h-1$, et donc aussi l'espace[14] $\mathscr{C}^{h-1}(\mathscr{O}_F)$, où $h = [F : \mathbf{Q}_p]$, puisque l'on peut extraire de ces fonctions une base orthonormale de cet espace [**18**].

Il s'ensuit que l'image de $\mathscr{E}^+$ dans $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ est incluse dans l'espace $\mathscr{D}_{h-1}(\mathscr{O}_F)$ des distributions d'ordre $h-1$ (c'est le dual de $\mathscr{C}^{h-1}(\mathscr{O}_F)$), et donc aussi dans $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F)$, pour $r \geq h-1$. On note $\mathscr{R}_r$ la somme de $\mathscr{R}^-$ et de $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F)$ dans $\mathscr{R}$. De manière intrinsèque, c'est l'ensemble des $z \in \mathscr{R}$ tels que l'ensemble des $\pi^{[rn]}\psi^n(\eta(i,T)z)$, pour $n \in \mathbf{N}$ et $i \in \mathscr{O}_F$, est un ensemble borné. Il résulte de la description [**25**] de l'espace des fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ pour $r \geq h-1$, que $\mathscr{R}_r$ est aussi l'ensemble des $f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k T^k \in \mathscr{R}$ tels qu'il existe $C(f) \in \mathbf{R}$ tel que $v_p(a_k) - rv_p(\pi)\frac{\log k}{\log p} \geq C(f)$ pour tout $k \geq 1$.

2.4. Dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique

2.4.1. Dérivation et multiplication par x

Proposition 2.6. — (i) *Si $f \in \mathscr{R}$, alors $\phi_{\partial f}(x) = x\phi_f(x)$,*

(ii) *Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$, alors $\partial A_\mu = A_{x\mu}$.*

Démonstration. — En ce qui concerne le (i), on a :

$$\phi_{\partial f}(x) = \mathrm{rés}_0\big(\big(\partial(\eta(-x,T)f) + x\eta(-x,T)f\big)\,dt\big) = x\phi_f(x).$$

Le (ii) résulte du calcul suivant :

$$A_{x\mu}(T) = \int_{\mathscr{O}_F} x\,\eta(x,T)\,\mu(x) = \int_{\mathscr{O}_F} \partial(\eta(x,T))\,\mu(x) = \partial A_\mu(T).$$

Lemme 2.7. — *∂ est bijectif sur $\mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$.*

Démonstration. — On a une suite exacte $0 \to \mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*) \to \mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^* \to \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*) \to 0$, et le résultat est une conséquence du fait que ∂ est bijectif sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ puisque c'est la multiplication par x.

Lemme 2.8. — *La suite d'opérateurs ∂^k, pour $k \in \mathbf{Z}$, est bornée sur $\mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$.*

Démonstration. — On note $E'_{a,b}$ la somme directe de l'image de $\mathrm{LA}_a(\mathscr{O}_F)^*$ par $\mu \mapsto A_\mu$ et de l'image inverse dans $\mathscr{R}^-$ de $\mathrm{LA}_b(\mathscr{O}_F)$ par $f \mapsto \phi_f$. Alors $E'_{a,b}$ est naturellement un banach et $\mathscr{R} = \varinjlim_b \varprojlim_a E'_{a,b}$.

14. Si $r \in \mathbf{R}_+$, une fonction ϕ est de classe $\mathscr{C}^r$ si elle admet un développement de Taylor à l'ordre $[r]$ vérifiant $\phi(x+y) = \sum_{i=0}^{[r]} \phi^{[i]}(x)y^i + \varepsilon(x,y)$, et $v_p(\varepsilon(x,y)) \geq rv_p(y) + C(v_p(y))$, où $C(n)$ tend vers $+\infty$ quand $n \to +\infty$. (Dans les notations de [**18**], cela correspond à la notion de fonction de classe $\mathscr{C}^{r,\mathrm{id}}$.)

On pose $E_{a,b}=\sum_{i\in\mathscr{O}_F^*\bmod\pi}\left(\begin{smallmatrix}\pi & i\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot E'_{a,b}$. Alors $E_{a,b}$ est un banach, somme directe de $\mathrm{LA}_b(\mathscr{O}_F^*)$ et $\mathrm{LA}_a(\mathscr{O}_F^*)^*$, et $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*=\varinjlim_b\varprojlim_a E_{a,b}$. Il s'agit de prouver que la suite des ∂^k est bornée sur chacun des $E_{a,b}$, ce qui est clair car ∂^k induit la multiplication par x^k sur $\mathrm{LA}_b(\mathscr{O}_F^*)$ et sur $\mathrm{LA}_a(\mathscr{O}_F^*)^*$ (prop. 2.6), et est donc une isométrie des espaces considérés.

2.4.2. Multiplication par un caractère. — Si $\alpha\in\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ on peut définir [**17**] un opérateur continu $m_\alpha:\mathscr{R}\to\mathscr{R}$. Cet opérateur commute à Res_U, et donc laisse stable $\mathscr{R}\boxtimes U$, si U est un ouvert compact de $\mathscr{O}_F$; il laisse aussi stable $\mathscr{R}^+$ et induit la multiplication par α sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$:

$$m_\alpha(A_\mu)=A_{\alpha\mu},\ \text{si } \mu\in\mathscr{D}(\mathscr{O}_F),\ \text{ et }\ \phi_{m_\alpha(f)}=\alpha\phi_f,\ \text{si } f\in\mathscr{R}.$$

Nous ne nous intéresserons qu'au cas où $\alpha=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}\delta$, où $\delta:F^*\to L^*$ est un caractère localement F-analytique. On fixe n tel que δ soit analytique sur $1+\pi^n\mathscr{O}_F$, de telle sorte que $\delta(i+\pi^n a)=\delta(i)\sum_{j\in\mathbf{N}}\binom{\kappa(\delta)}{j}\big(\frac{\pi^n a}{i}\big)^j$ pour tous $i\in\mathscr{O}_F^*$ et $a\in\mathscr{O}_F$, et on suppose de plus que $n>\frac{1}{p-1}+v_p(\Omega)-\inf(0,v_p(\kappa(\delta)))$.

Proposition 2.9. — (i) *Si $z\in\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, la série*

$$\sum_{i\in\mathscr{O}_F^*\bmod\pi^n}\delta(i)\eta(i,T)\sum_{j\in\mathbf{N}}\pi^{nj}\tbinom{\kappa(\delta)}{j}i^{-j}\varphi^n\big(\partial^j(\psi^n(\eta(-i,T)z))\big)$$

converge dans $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ vers un élément $m_\delta(z)$ qui ne dépend ni du choix de n ni de celui du système de représentants de $\mathscr{O}_F^*$ modulo π^n.

(ii) *L'application $m_\delta:\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*\to\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, ainsi définie, est continue, laisse stable $\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ et induit la multiplication par δ sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ et* $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$.

Démonstration. — Pour la convergence de la série et l'indépendance de sa somme par rapport aux choix, voir [**17**, § 3.2] (cela utilise le fait que l'opérateur $\Omega T\partial=T\ell'(T)^{-1}\frac{d}{dT}$ est 1-lipshitzien sur $\mathscr{E}^{[r_a,r_b]}$ car $\frac{d}{dT}$ n'introduit pas de dénominateurs). La continuité de m_δ résulte du th. de Banach-Steinhaus (ou des estimées permettant de démontrer la convergence de la série), et le fait que m_δ induit la multiplication par δ sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ peut se vérifier par un calcul brutal ou par prolongement analytique à partir du cas $\delta=x^k$, avec $k\in\mathbf{N}$. Dans ce cas, les relations $\pi^{nj}\varphi^n\circ\partial^j=\partial^j\circ\varphi^n$ et $i^{k-j}\eta(i,T)=\partial^{k-j}\eta(i,T)$ permettent de mettre la série sous la forme

$$\partial^k\Big(\sum_{i\in\mathscr{O}_F^*\bmod\pi^n}\eta(i,T)\varphi^n\big(\psi^n(\eta(-i,T)z)\big)\Big)=\partial^k z;$$

on est donc ramené au fait que ∂ induit la multiplication par x (cf. prop. 2.6).

Lemme 2.10. — *On a :*
- $\sigma_a\circ m_\delta=\delta(a)^{-1}m_\delta\circ\sigma_a$, *si* $a\in\mathscr{O}_F^*$,
- $\nabla\circ m_\delta=m_\delta\circ(\nabla-\kappa(\delta))$.

Démonstration. — La seconde formule se déduit de la première en prenant la dérivée en $a = 1$, et la première peut se démontrer par prolongement analytique à partir du cas $\delta = x^k$, où la formule à démontrer devient $\sigma_a \circ \partial^k = a^{-k}\partial^k \circ \sigma_a$ (on peut aussi utiliser la formule définissant m_δ et la relation $\sigma_a(\eta(i,T)) = \eta(ai,T)$).

2.4.3. La dérivée d'une distribution. — Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$, on définit sa dérivée $\mathrm{d}\mu$ par :

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbf{Z}_p} \phi'(x)\,\mu,$$

Proposition 2.11. — (i) *Si $f \in \mathscr{R}$, alors $\phi_{tf}(x) = -\phi'_f(x)$.*
(ii) *Si $\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$, alors $tA_\mu = A_{\mathrm{d}\mu}$.*

Démonstration. — En ce qui concerne le (i), on a :

$$\phi_{tf}(x) = \mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)tf dt\big) = -\mathrm{rés}_0\big(\tfrac{\partial}{\partial x}\eta(-x,T)f dt\big) = -\tfrac{\partial}{\partial x}\mathrm{rés}_0\big(\eta(-x,T)f dt\big) = -\phi'_f(x).$$

Le (ii) résulte du calcul suivant :

$$A_{\mathrm{d}\mu}(T) = \int_{\mathscr{O}_F} \tfrac{\partial}{\partial x} e^{xt}\,\mu = t\int_{\mathscr{O}_F} e^{xt}\,\mu = t\cdot A_\mu(T).$$

Remarque 2.12. — Il n'est, en général, pas possible de définir la primitive d'une distribution, car au niveau des transformées d'Amice-Katz, cette opération correspondrait à la division par t qui a une infinité de zéro sur $v_p(T) > 0$. Par dualité, cela prouve que $\phi \mapsto \phi'$, qui est une surjection de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$, n'admet pas de section continue : *on ne peut pas définir de primitive de ϕ qui dépendent continûment de ϕ* (cf. **[22]** pour une autre preuve de ce résultat).

Proposition 2.13. — *$f \in t\mathscr{R}^+$ si et seulement si la distribution μ_f dont f est la transformée d'Amice-Katz vérifie $\int_{\mathscr{O}_F} \phi\,\mu_f = 0$ pour toute fonction ϕ localement constante.*

Démonstration. — Il résulte du (ii) de la prop. 2.11 que $f \in t\mathscr{R}^+$ si et seulement si on peut écrire μ_f sous la forme $\mathrm{d}\lambda$. Si $\mu_f = \mathrm{d}\lambda$, alors $\int_{\mathscr{O}_F} \phi\,\mu_f = \int_{\mathscr{O}_F} \phi'\,\lambda = 0$ si ϕ est localement constante, ce qui prouve une des implications.

Dans l'autre sens, remarquons que, si n est fixé, et si S est un système de représentants modulo π^n, on peut définir une primitive P sur $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger$, en primitivant la série de Taylor en chacun des éléments de S. Cette primitive dépend du choix de S mais uniquement à l'addition près d'une fonction localement constante. Comme μ_f tue les fonctions localement constante, $\int_{\mathscr{O}_F} P\phi\,\mu_f$ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F)^\dagger$ qui ne dépend d'aucun choix et ce pour tout n. On a donc défini une distribution λ sur $\mathscr{O}_F$ telle que $\mathrm{d}\lambda = \mu_f$.

Ceci permet de conclure.

2.5. L'action de w sur $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$

2.5.1. L'opérateur w_* sur $\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. — On définit w_* sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ par

$$\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi\, w_*\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi(\frac{1}{x})\,\mu(x).$$

En utilisant l'inverse de la transformée d'Amice-Katz, cela définit un opérateur w_* sur $\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$.

Lemme 2.14. — (i) $w_*=\partial w_*\partial$,

(ii) $\sigma_a\circ w_*=w_*\circ\sigma_{a^{-1}}$,

(iii) $\nabla\circ w_*=-w_*\circ\nabla$.

(iv) $w_*\circ\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F}=\mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F}\circ w_*$, *pour tous $i\in\mathscr{O}_F^*$ et $n\geq 1$.*

Démonstration. — Le (iii) se déduit du (ii) par passage à la limite. Pour démontrer les (i) et (ii), il vaut mieux travailler dans $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$, et le (i) est une conséquence du fait que ∂ correspond à la multiplication par x, et donc

$$\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi\,\partial w_*\partial\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}x\phi(x)\,w_*\partial\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}x^{-1}\phi(x^{-1})\,\partial\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi(x^{-1})\,\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi\,w_*\mu,$$

tandis que le (ii) vient de ce que σ_a revient à faire le changement de variable $x\mapsto ax$, et donc

$$\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi\,\sigma_a\circ w_*\circ\sigma_a\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi(ax)\,w_*\sigma_a\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi(ax^{-1})\,\sigma_a\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi(x^{-1})\,\mu=\int_{\mathscr{O}_F^*}\phi\,w_*\mu.$$

Le (iv) vient juste de ce que $\mathbf{1}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F}(\frac{1}{x})=\mathbf{1}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F}(x)$.

Remarque 2.15. — L'application $\phi\mapsto\phi\circ w$, avec $\phi\circ w(x)=\phi(\frac{1}{x})$ laisse stable $\mathscr{C}^r(\mathscr{O}_F^*)$. Par dualité, on en déduit que w_* laisse stable $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F^*)$.

2.5.2. L'élément H. — On a $\frac{\varphi(T)}{T^q}\in 1+\pi T^{-q}\mathscr{O}_L[[T]]$, ce qui fait que la série définissant $\log\frac{\varphi(T)}{T^q}$ converge dans $\mathscr{E}^{(0,r_2]}$ et donc définit un élément de $\mathscr{R}$. On note H l'élément

$$H=-\Omega\,\tfrac{1}{q}(1-\varphi\psi)(\log\tfrac{\varphi(T)}{T^q})$$

de $\mathscr{R}$; formellement, on a $H=\Omega(1-\varphi\psi)(\log T)$.

Lemme 2.16. — $\phi_H=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^{-1}$.

Démonstration. — Comme H est dans l'image de $\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}=1-\varphi\psi$, la fonction ϕ_H est à support dans $\mathscr{O}_F^*$. Par ailleurs, $\partial H=-\frac{\Omega}{q}(1-\varphi\psi)\partial\log\frac{\varphi(T)}{T^q}$. Or

$$\partial\log\frac{f}{g}=f^{-1}\partial f-g^{-1}\partial g,\quad\text{et } \varphi(T)^{-1}\partial\varphi(T)=\pi\varphi(T^{-1}\partial T)$$

est tué par $1-\varphi\psi$. On a donc $\partial H=\Omega\,(1-\varphi\psi)\cdot(T^{-1}\partial T)$. Comme $\partial T=\frac{1}{\Omega}$ modulo $T\mathscr{O}_L[[T]]$, il s'ensuit que $\phi_{\partial H}$ est la restriction à $\mathscr{O}_F^*$ de $x\mapsto\mathrm{rés}_0(\eta(-x,T)T^{-1}dT)=1$. Le résultat s'en déduit grâce à la formule $\phi_{\partial H}(x)=x\phi_H(x)$.

Lemme 2.17. — (i) $\nabla H \in \mathscr{R}^+ \boxtimes \mathscr{O}_F^*$.

(ii) $\nabla H \in t\mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ *et* $\nabla H - w_*(\nabla H) \in t\mathscr{R}^+ \boxtimes \mathscr{O}_F^*$.

(iii) *Si* $\lambda \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ *est la distribution vérifiant* $A_\lambda = \nabla H$, *alors* $\int_{\mathscr{O}_F^*} \lambda = \frac{q-1}{q}$.

Démonstration. — On a $\nabla H = t\partial H = \Omega(1-\varphi\psi)\cdot(tT^{-1}\frac{dT}{dt})$ (cf. preuve du lemme 2.16). On en tire le (i) et le premier énoncé du (ii) car $T^{-1}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{\Omega T\ell'(T)} \in \mathscr{R}$. Maintenant, si $\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$, l'appartenance de A_μ à $t\mathscr{R}^+$ équivaut à la nullité de $\int_{\mathscr{O}_F^*} \alpha$ pour tout caractère localement constant α de $\mathscr{O}_F^*$ (prop. 2.13, ces caractères forment une base de l'espace des fonctions localement constantes sur $\mathscr{O}_F^*$). Soit λ (resp. λ_0) la distribution dont la transformée d'Amice-Katz est ∇H (resp. $(1-\varphi\psi)\cdot T^{-1}t$). Comme $\nabla H - (1-\varphi\psi)\cdot T^{-1}t \in t\mathscr{R}^+$, les distributions λ et λ_0 prennent la même valeur en tout caractère localement constant. Par ailleurs, $T^{-1}t$ s'annule en tout point de π^n-division non nul, et vaut 1 en 0. On en déduit que $\int_{a+\pi^n\mathscr{O}_F} \lambda = \int_{a+\pi^n\mathscr{O}_F} \lambda_0 = \frac{1}{q^n}$ pour tous $a \in \mathscr{O}_F^*$ et $n \geq 1$, ce qui démontre le (iii). Il s'ensuit aussi que $\int_{\mathscr{O}_F^*} \alpha\,\lambda = \int_{\mathscr{O}_F^*} \alpha\,\lambda_0 = 0$ si α est un caractère localement constant non trivial de $\mathscr{O}_F^*$, et donc que $\int_{\mathscr{O}_F^*} \alpha\,(\lambda - w_*\lambda) = 0$ pour tout caractère localement constant α.

Le second énoncé du (ii) s'en déduit, ce qui permet de conclure.

Lemme 2.18. — *L'équation* $\nabla Y = -w_*(\nabla H)$ *a une unique solution* Y *dans* $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ *et* $\phi_Y(x) = -\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^{-1}$.

Démonstration. — Comme $\nabla = t\partial$, et comme $w_*(\nabla H) \in t\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ d'après le lemme 2.17, l'existence et l'unicité de Y résultent de la bijectivité de ∂ sur $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. Enfin, il résulte du (ii) du lemme 2.17 que $\partial H + \partial Y \in \mathscr{R}^+$ et donc que $x\phi_H + x\phi_Y = 0$. Le lemme 2.16 permet donc de conclure.

2.5.3. Prolongement de w_* *à* $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. —

Proposition 2.19. — *Il existe un unique prolongement continu de* w_* *à* $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ *vérifiant* $\nabla\circ w_* = -w_*\circ\nabla$. *De plus,* w_* *vérifie aussi :*

(i) $w_* = \partial w_* \partial$,

(ii) $\sigma_a \circ w_* = w_* \circ \sigma_{a^{-1}}$, *pour tout* $a \in \mathscr{O}_F^*$,

(iii) $w_* \circ \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} = \mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F} \circ w_*$, *pour tous* $i \in \mathscr{O}_F^*$ *et* $n \geq 1$.

Démonstration. — L'unicité d'un prolongement éventuel est une conséquence du résultat plus général suivant :

Lemme 2.20. — *Si* $f : \mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^* \to \mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ *est linéaire, continue, identiquement nulle sur* $\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, *et s'il existe* $\kappa \in L$ *tel que* $\nabla\circ f = f\circ(\kappa - \nabla)$, *alors* $f = 0$.

Démonstration. — Si δ est un caractère analytique de $\mathscr{O}_F^*$ vérifiant $\kappa(\delta) = -\kappa$, et si $\nabla\circ f = f\circ(\kappa-\nabla)$, alors

$$\nabla\circ(f\circ m_\delta) = f\circ(\kappa-\nabla) = f\circ m_\delta\circ(\kappa-(\nabla-\kappa(\delta))) = (f\circ m_\delta)\circ\nabla,$$

ce qui permet de se ramener au cas $\kappa = 0$.

Maintenant, la condition $\nabla \circ f = -f \circ \nabla$ implique que $\nabla^k \circ f = (-1)^k f \circ \nabla^k$, pour tout $k \geq 1$. Comme $\nabla = t\partial$ est injective sur $\mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, et comme f est supposée identiquement nulle sur $\mathscr{R}^+ \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, cela implique que $f(z) = 0$ s'il existe $k \geq 1$, tel que $\phi_{\nabla^k z} = 0$. Or $\phi_{\nabla z} = \phi_{t\partial z} = -\phi'_{\partial z} = -(x\phi_z(x))'$, et la condition $\phi_{\nabla^k z} = 0$ équivaut à ce que $x\phi_z(x)$ soit localement polynomiale de degré $\leq k-1$ en $\log x$. Comme les fonctions localement polynomiales en $\log x$ sont denses dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ (cela résulte du (ii) du cor. 2.4, après un changement de variable $y = \log x$), on en déduit que f est identiquement nulle, ce que l'on cherchait à prouver.

Passons à la démonstration de l'existence. Nous allons en fait prouver l'existence d'un prolongement vérifiant (i) et (iii). Si on veut que w_* vérifie $\nabla \circ w_* = -w_* \circ \nabla$, on doit avoir
$$w_* H = Y,$$
et si on veut que (i) soit vérifiée, on doit aussi avoir
$$w_*(\partial^k H) = \partial^{-k} Y,$$
pour tout $k \in \mathbf{Z}$, et même
$$w_*(\partial^k(\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} H)) = \partial^{-k}(\mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F} Y),$$
pour tous $i \in \mathscr{O}_F^*$, $k \in \mathbf{Z}$ et $n \geq 1$, si on veut que (iii) soit vérifié.

Si $n \geq 1$, fixons un système S_n de représentants de $\mathscr{O}_F^*$ modulo π^n. On peut alors écrire tout élément de $\mathrm{LA}_n(\mathscr{O}_F^*)$, de manière unique, sous la forme $\sum_{i\in S_n} \mathbf{1}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \sum_{k\in\mathbf{N}} a_{i,k} \big(\frac{x-i}{\pi^n}\big)^k$, où $a_{i,k} \to 0$ quand $k \to \infty$. Maintenant, $\mathbf{1}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \big(\frac{x-i}{\pi^n}\big)^k$ est l'image par $f \mapsto \phi_f$ de $\big(\frac{\partial-i}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial H$, qui peut aussi s'écrire sous la forme
$$\big(\tfrac{\partial-i}{\pi^n}\big)^k \big(\eta(i,T)\varphi^n \circ \psi^n\big(\eta(-i,T)\partial H\big)\big) = \eta(i,T)\varphi^n \circ \partial^k \circ \psi^n\big(\eta(-i,T)\partial H\big).$$
Il s'ensuit (cf. lemme 2.8 et sa démonstration pour la définition des $E_{a,n}$) que la famille des $\big(\frac{\partial-i}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial H$ est bornée dans $E_{a,n}$, pour tout $a \geq n$. Pour les mêmes raisons, la famille des $\big(\frac{\partial^{-1}-i}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial^{-1} Y = (i\partial)^{-k} \big(\frac{i^{-1}-\partial}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial^{-1} Y$ est bornée dans $E_{a,n}$, pour tout $a \geq n$, ce qui permet de définir $w_*^{(n)}$ sur $E_{a,n}$ par
$$w_*\Big(f + \sum_{i\in S_n}\sum_{k\in\mathbf{N}} a_{i,k} \big(\tfrac{\partial-i}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial H\Big) = w_* f + \sum_{i\in S_n}\sum_{k\in\mathbf{N}} a_{i,k} \big(\tfrac{\partial^{-1}-i}{\pi^n}\big)^k \mathrm{Res}_{i^{-1}+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial^{-1} Y,$$
si $f \in \mathrm{LA}_a(\mathscr{O}_F^*)^*$ et si $a_{i,k} \to 0$ quand $k \to \infty$. Comme
$$\partial^k \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial H = \partial^k \big(\sum_{j \bmod \pi} \mathrm{Res}_{i+j\pi^n+\pi^{n+1}\mathscr{O}_F} \partial H\big),$$
on voit que $w_*^{(n)}$ et $w_*^{(n+1)}$ prennent la même valeur sur les $\partial^k \mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F} \partial H$, et donc sur tout $E_{a,n}$ par continuité et linéarité. On peut donc recoller les $w_*^{(n)}$ pour définir un opérateur continu w_* sur $\mathscr{R} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$.

Il reste à vérifier que w_* vérifie les propriétés demandées, et pour cela il suffit de le vérifier sur les $\partial^k H$ puisque les images de ces fonctions engendrent un sous-espace dense de $(\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*)/(\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*)$. Or le (i) est à la base de la construction, et l'identité $\nabla\circ w_* = -w_*\circ\nabla$ aussi pour H ; les autres formules à démontrer s'en déduisent en utilisant les formules de commutation de σ_a, ∂, ∇ et $\mathrm{Res}_{i+\pi^n\mathscr{O}_F}$.

Remarque 2.21. — (i) On déduit de la rem. 2.15 que w_* laisse stable le sous-ensemble $\mathscr{R}_r\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ des éléments d'ordre r de $\mathscr{R}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$.

(ii) L'action sur $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ induite par celle de w_* est donnée par la formule

$$w_*\phi(x) = -x^{-2}\phi\big(\tfrac{1}{x}\big).$$

En effet, pour $\phi(x) = x^{-1}$, cela résulte des lemmes 2.16 et 2.18. On en déduit le résultat pour $\phi(x) = x^k$, si $k\in\mathbf{Z}$, en utilisant la formule $\partial\circ w_*\circ\partial = w_*$, et le cas général s'en déduit par continuité de w_* et densité de l'espace des polynômes dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$.

Lemme 2.22. — *Si $\delta : \mathscr{O}_F^*\to L^*$, est un caractère localement analytique, alors $m_\delta\circ w_* = w_*\circ m_{\delta^{-1}}$.*

Démonstration. — L'identité est facile à vérifier sur $\mathscr{R}^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ car m_δ est la multiplication par δ. Le cas général s'en déduit en composant avec ∇ et en utilisant le lemme 2.20 (et les formules de commutation avec ∇ : lemme 2.10 et définition de w_*, prop. 2.19).

3. (φ,Γ)-modules et G-modules

3.1. Construction de G-modules

3.1.1. G-faisceaux sur $\mathbf{P}^1$ et P^+-faisceaux sur $\mathscr{O}_F$. — Si M est une représentation de G qui vit sur $\mathbf{P}^1$, le module $M^+ = M\boxtimes\mathscr{O}_F$ des sections sur $\mathscr{O}_F$ du faisceau associé, considéré comme un P^+-module topologique, vit sur $\mathscr{O}_F$. De plus, si M admet un caractère central ω, alors M est complètement déterminée par la donnée du faisceau P^+-équivariant M^+ et l'involution ι de $M^+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ induite par l'action de w (c'est une conséquence du fait que G est engendré par P^+, w et le centre et $\mathbf{P}^1$ est obtenu en recollant $\mathscr{O}_F$ et $w\cdot\mathscr{O}_F$ le long de $\mathscr{O}_F^*$).

Plus précisément, $z\mapsto(\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}z,\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}w{\cdot}z)$ permet de décrire M comme l'ensemble des $(z_1,z_2)\in M^+\times M^+$ vérifiant $\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}z_2 = \iota(\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}z_1)$. L'action de G sur M est alors décrite par les formules du *squelette d'action* (avec $z=(z_1,z_2)$) :

- $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (z_2,z_1)$.
- Si $a\in F^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (\omega(a)z_1,\omega(a)z_2)$.
- Si $a\in\mathscr{O}_F^*$, alors $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)z_1,\omega(a)\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)z_2)$.
- Si $z' = \left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors $\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}z' = \left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1$ et $\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}wz' = \omega(\pi)\psi(z_2)$.

• Si $b\in\pi\mathscr{O}_F$, et si $z'=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z$, alors [15]

$$\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}z'=\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot z_1\ \text{ et }\ \mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}wz'=u_b(\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}(z_2)),$$

où $u_b=\omega(1+b)\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\iota\circ\left(\begin{smallmatrix}(1+b)^{-2}&b(1+b)^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)\circ\iota\circ\left(\begin{smallmatrix}1&1/(1+b)\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ sur $M^+\boxtimes\pi\mathscr{O}_F$.

Les formules pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ viennent de l'identité matricielle $\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)w=\left(\begin{smallmatrix}x&0\\0&x\end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix}x^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, si $x\in F^*$, et celles pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ de l'identité

$$w\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)w=\left(\begin{smallmatrix}1+b&0\\0&1+b\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&-1\\0&1\end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix}(1+b)^{-2}&b(1+b)^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix}1&1/(1+b)\\0&1\end{smallmatrix}\right).$$

Remarque 3.1. — On peut essayer d'utiliser les formules ci-dessus pour construire une représentation de G vivant sur $\mathbf{P}^1$ à partir d'un P^+-faisceau sur $\mathscr{O}_F$, d'un caractère $\omega:F^*\to L^*$, et d'une involution ι des sections sur $\mathscr{O}_F^*$. Le problème est qu'on n'obtient pas forcément une action de G, mais plutôt une action du groupe $\tilde G$ engendré librement par :

– un groupe $\tilde Z\cong F^*$ (on note $z(a)$ l'élément de $\tilde Z$ correspondant à $a\in F^*$),
– un groupe $\tilde A^0\cong\mathscr{O}_F^*$ (on note $\alpha(a)$ l'élément de $\tilde A^0$ correspondant à $a\in\mathscr{O}_F^*$),
– un élément $\tilde w$ d'ordre 2,
– un élément $\alpha(\pi)$,
– et des $\beta(b)$, pour $b\in\pi\mathscr{O}_F$,

dont G est un quotient [16]. Pour que l'action de $\tilde G$ se factorise à travers G, il y a un certain nombre de conditions à vérifier : la plus évidente est que ι *soit ω-compatible*, i.e. que $\alpha(a)\circ\iota=\omega(a)\iota\circ\alpha(a^{-1})$, si $a\in\mathscr{O}_F^*$, car $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)w=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)w\left(\begin{smallmatrix}a^{-1}&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, mais c'est loin d'être suffisant.

3.1.2. Compatibilité et dualité. — Si $\Delta\in\Phi\Gamma_{\mathrm{an}}(\mathscr{R})$, si $\omega\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$, et si ι est une involution de $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, on dit que (Δ,ω,ι) est *compatible* si l'action de $\tilde G$ définie ci-dessus se factorise à travers G. On note alors $\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$ l'espace des sections globales du G-faisceau ainsi défini.

Proposition 3.2. — *Si (Δ,ω,ι) est compatible, il en est de même de $(\check\Delta,\omega^{-1},\iota^*)$, où $\iota^*:\check\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*\to\check\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ est l'involution de $\check\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ adjointe de ι pour $\{\ ,\ \}$. De plus l'accouplement $\{\ ,\ \}_{\mathbf{P}^1}$, défini par la formule*

$$\{\check z,z\}_{\mathbf{P}^1}=\{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}\check z,\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}z\}+\{\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}w\cdot\check z,\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}w\cdot z\},$$

fait de $\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$ et $\check\Delta\boxtimes_{\omega^{-1},\iota^*}\mathbf{P}^1$ les duaux de l'un de l'autre en tant que $L[G]$-modules topologiques.

Démonstration. — La formule ci-dessus fournit une dualité parfaite entre les espaces vectoriels topologiques considérés car l'accouplement $\{\ ,\ \}:\check\Delta\times\Delta\to L$ est un accouplement parfait d'espaces vectoriels topologiques. Il n'y a donc que la G-équivariance

15. La formule pour u_b de **[9]** comporte plusieurs fautes de frappe comme me l'a fait remarquer G. Dospinescu.
16. Via $z(a)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)$, $\alpha(a)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\alpha(\pi)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}p&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$, $\tilde w\mapsto w$, et $\beta(b)\mapsto\left(\begin{smallmatrix}1&b\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.

à vérifier. Or on a aussi

$$\{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F}\check{z}, \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F} z\} = \{\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}\check{z}, \mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F} z\} + \{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}\check{z}, \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} z\},$$

d'après le dernier point de la prop. 1.12. Et comme, par construction,

$$\{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}\check{z}, \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} z\} = \{\iota^* \cdot \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*}\check{z}, \iota \cdot \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} z\} = \{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} w \cdot \check{z}, \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} w \cdot z\},$$

on peut aussi écrire $\{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1}$, en utilisant à nouveau le dernier point de la prop. 1.12, sous la forme

$$\{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F}\check{z}, \mathrm{Res}_{\pi\mathscr{O}_F} z\} + \{\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F} w \cdot \check{z}, \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F} w \cdot z\}.$$

On en déduit que $\{w \cdot \check{z}, w \cdot z\}_{\mathbf{P}^1} = \{\check{z}, z\}_{\mathbf{P}^1}$. Les formules pour les autres générateurs de G utilisés dans le squelette d'action sont alors des conséquences formelles de ce qui précède et de la P^+-équivariance de $\{\ ,\ \}$ (premier point du (ii) de la prop. 1.12).

3.2. (φ, Γ)-modules et $U(\mathfrak{gl}_2)$-modules

Ce qui suit est inspiré de la formule de Dospinescu [**14**].

3.2.1. Construction de $U(\mathfrak{gl}_2)$-modules. — On note

$$a^+ = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad a^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad u^+ = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad u^- = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$$

la base naturelle de $\mathfrak{gl}_2$ et $U(\mathfrak{gl}_2)$ son algèbre enveloppante. Alors $a^+ + a^-$ commute à tout, tandis que

$$a^+u^+ - u^+a^+ = u^+, \ \ a^+u^- - u^-a^+ = -u^-, \ \ u^+u^- - u^-u^+ = a^+ - a^-,$$

et a^+ et a^- commutent. Le centre de $U(\mathfrak{gl}_2)$ est l'algèbre des polynômes en $a^+ + a^-$ et en *le casimir*

$$C = u^+u^- + u^-u^+ + \tfrac{1}{2}(a^+ - a^-)^2 = 2u^+u^- + \tfrac{1}{2}(a^+ - a^-)(a^+ - a^- - 2).$$

Rappelons qu'un (φ, Γ)-module analytique Δ sur $\mathscr{R}$ ou $\mathscr{R}^+$ est muni naturellement d'une action de l'algèbre de Lie $\mathfrak{p}$ du sous-groupe mirabolique de G, l'action de la base naturelle (a^+, u^+) de $\mathfrak{p}$ étant donnée par

$$u^+ \cdot z = tz \ \text{ et } \ a^+ \cdot z = \nabla z.$$

Si $\kappa \in L$, on dit que Δ est *κ-compatible* s'il existe $c \in \mathrm{End}\,\Delta$ tel que

$$\big((2\nabla - \kappa - 1)^2 - c\big) \cdot \Delta \subset t\Delta.$$

Lemme 3.3. — *Si Δ peut se prolonger en un G-faisceau de type analytique sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω, alors Δ est $\kappa(\omega)$-compatible.*

Démonstration. — L'hypothèse implique que Δ est muni d'une action de $U(\mathfrak{gl}_2)$ prolongeant celle de $U(\mathfrak{p})$, telle que $a^+ + a^-$ agisse par $\kappa(\omega)$. Par ailleurs, $2C+1$ commute aux actions de $\left(\begin{smallmatrix} \pi & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F^* & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Il en résulte que $2C+1$ commute aux actions de φ, Γ et à $\eta(b, T)$, pour tout b, et donc aussi à $\mathscr{R}^+$ puisque la sous-algèbre engendrée par les $\eta(b,T)$ est dense dans $\mathscr{R}^+$, et aussi à $\mathscr{R}$ puisque $\mathscr{R}^+[\frac{1}{T}]$ est dense dans $\mathscr{R}$. Autrement dit, $2C+1 \in \operatorname{End}\Delta$.

Par ailleurs, $2C+1 = 4u^+u^- + (2a^+ - \kappa(\omega) - 1)^2 = 4tu^- + (2\nabla - \kappa(\omega) - 1)^2$, ce qui permet de conclure, avec $c = 2C+1$.

Si Δ est de rang ≥ 3, il n'existe pas forcément de κ tel que Δ soit κ-compatible (c'est même rarement le cas). Mais, si Δ est de rang ≤ 2, c'est toujours le cas. Pour énoncer le résultat, commençons par remarquer que, si Δ est indécomposable, de rang 2, alors on est dans un des deux cas suivants :

• $\operatorname{End}(\Delta) = L$

• Il existe un caractère localement analytique δ de F^*, $i \in \mathbf{N}$ et $\ell \in \operatorname{Hom}_{\rm an}(F^*, L)$ tels que Δ soit le (φ,Γ)-module de base e_1, e_2 avec

$$\begin{aligned}
&\varphi(e_1) = \delta(\pi)e_1,\ \varphi(e_2) = p^i\delta(\pi)(e_2 + \ell(\pi)e_1),\\
&\sigma_a(e_1) = \delta(a)e_1,\ \sigma_a(e_2) = a^i\delta(a)(e_2 + \ell(a)e_1).
\end{aligned}$$

(On note $\Delta(\delta,i,\ell)$ ce (φ,Γ)-module.) Dans ce cas, $\operatorname{End}\Delta = L + Lt^iN$, où $N(e_1) = 0$ et $N(e_2) = e_1$.

Proposition 3.4. — (i) *Si $\Delta = \mathscr{R}(\delta)$ ou $\mathscr{R}^+(\delta)$, alors Δ est κ-compatible pour tout κ, et alors $c = (2\kappa(\delta) - \kappa - 1)^2$.*

(ii) *Si Δ est de rang 2 et si $\operatorname{End}(\Delta) = L$, il y a deux cas :*

• *L'opérateur $\Theta_{\rm Sen}$ de Sen n'est pas scalaire, auquel cas, si α, β sont les poids de Hodge-Tate de Δ, alors Δ est κ-compatible si et seulement si $\kappa = \alpha + \beta - 1$, et alors $c = (\alpha - \beta)^2$.*

• *$\Theta_{\rm Sen} = \alpha$, auquel cas Δ est κ-compatible pour tout κ, et $c = (2\alpha - \kappa - 1)^2$.*

(iii) *Si $\Delta = \Delta(\delta, i, \ell)$, alors :*

• *Si $i \neq 0$, alors Δ est κ-compatible si et seulement si $\kappa = 2\kappa(\delta) + i - 1$, et tout c de la forme $i^2 + c_0t^iN$ convient.*

• *Si $i = 0$, Δ est κ-compatible pour tout κ, et*

$$c = (2\kappa(\delta) - \kappa - 1)^2 + 2(2\kappa(\delta) - \kappa - 1)\ell'(1)N.$$

Démonstration. — Cela se démontre sans problème en utilisant le lemme 1.16.

Remarque 3.5. — Si Δ est indécomposable, de rang 2, il ressort de la discussion ci-dessus que c est uniquement déterminé par κ sauf dans le *cas pathologique* où $\Delta = [\mathscr{R}(\delta) - \mathscr{R}(x^i\delta)]$, et $i \geq 1$.

Proposition 3.6. — *Si Δ est κ-compatible, et si c est tel que $\big((2\nabla - \kappa - 1)^2 - c\big)\cdot\Delta \subset t\Delta$, on peut munir Δ d'une unique action de $U(\mathfrak{gl}_2)$, prolongeant celle de $\mathfrak{p}$, grâce aux formules*

$$(a^+ + a^-)\cdot z = \kappa z \ \text{ et } \ C\cdot z = \tfrac{1}{2}(c-1).$$

De plus [17]*,* $g\circ h = \mathrm{Ad}_g(h)\circ g$*, pour tous* $g\in P^+$ *et* $h\in U(\mathfrak{gl}_2)$*.*

Démonstration. — Comme $C = 2u^+u^- + \frac{1}{2}(a^+-a^-)(a^+-a^--2)$, les formules de la proposition impliquent

$$a^- = \kappa - a^+ \ \text{ et } \ u^- = \tfrac{-1}{4t}\big((2\nabla-\kappa-1)^2 - c\big).$$

On en déduit l'unicité.

Pour prouver l'existence, il s'agit de vérifier que les formules ci-dessus définissent bien une action de $\mathfrak{gl}_2$. La relation $a^+u^+ - u^+a^+$ a déjà lieu dans $U(\mathfrak{p})$. Maintenant, par construction, la relation $C = 2u^+u^- + \frac{1}{2}(a^+-a^-)(a^+-a^--2)$ est respectée, et C commute à a^+, a^- et u^+ (car κ, $c\in \mathrm{End}\,\Delta$), et a^+, a^- commutent. En multipliant cette relation à droite et à gauche par a^+, on en déduit que $a^+u^+u^- - u^+u^-a^+ = 0$, et donc $u^+(1+a^+)u^- = u^+u^-a^+$. Comme u^+ est injectif (c'est la multiplication par t), il s'ensuit que $u^-a^+ - a^+u^- = u^-$. Enfin, en multipliant la relation ci-dessus à droite et à gauche par u^+, et en utilisant la relation

$$(a^+-a^-)(a^+-a^--2)u^+ = (a^+-a^-)u^+(a^+-a^-) = u^+(a^+-a^-+2)(a^+-a^-),$$

on obtient

$$\begin{aligned}2u^+(u^+u^- - u^-u^+) &= \tfrac{1}{2}\big(u^+(a^+-a^-)(a^+-a^--2) - (a^+-a^-)(a^+-a^--2)u^+\big)\\ &= 2u^+(a^+-a^-)\end{aligned}$$

et donc $u^+u^- - u^-u^+ = a^+ - a^-$. Cela prouve que les relations décrivant $\mathfrak{gl}_2$ sont respectées par l'action que nous avons définie, et donc que nous avons effectivement défini une action de $U(\mathfrak{gl}_2)$.

Maintenant, si $g\in P^+$, on peut faire agir $h\in U(\mathfrak{gl}_2)$ par $g^{-1}\circ \mathrm{Ad}_g(h)\circ g$. Cette nouvelle action coïncide avec celle de $U(\mathfrak{p})$ puisque l'action de $\mathfrak{p}$ est l'action infinitésimale de P^+, et vérifie les formules ci-dessus sur $a^+ + a^-$ et C puisque ceux-ci commutent avec l'action de P^+ et que c en fait autant. Par unicité, on en déduit la formule demandée.

3.2.2. Unicité d'un prolongement à $\mathbf{P}^1$

Proposition 3.7. — *Soient* Δ *indécomposable, de rang 2 et* $\omega : F^* \to L^*$ *un caractère localement analytique. Si* Δ *n'est pas pathologique, il existe au plus un prolongement de* Δ *en un G-faisceau de type analytique sur* $\mathbf{P}^1$*, de caractère central* ω*.*

Démonstration. — Un tel prolongement est complètement déterminé par la restriction ι de l'action de w sur $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, et même sur $\Delta\boxtimes(1+\pi^n\mathscr{O}_F)$ car on peut conjuguer par l'action de $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$. Or

$$\left(\begin{smallmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^n & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^n & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\pi^{-n} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) = w.$$

17. Ad_g est l'action adjointe de G sur son algèbre de Lie [i.e. $\mathrm{Ad}_g(h) = ghg^{-1}$, le calcul se faisant dans $\mathbf{M}_2(L)$].

Il s'ensuit que ι, sur $\Delta\boxtimes(1+\pi^n\mathscr{O}_F)$, est déterminé par l'action de $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^n & 1\end{smallmatrix}\right)$ sur $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F = \Delta$.

Maintenant, Δ est un espace LF muni d'une action continue de $\mathscr{D}(U)$, où $U = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi\mathscr{O}_F & 1\end{smallmatrix}\right)$. On peut l'écrire comme une limite inductive de fréchets, stable par $\mathscr{D}(U)$ et denses dans Δ. Soit F un de ces fréchets, et soit v une valuation continue sur F. Quitte à raffiner v on peut la supposer invariante par U, ce qui fait que le complété $\widehat{F}$ de F pour v est muni d'une action de $\mathscr{D}(U)$. Comme c'est un banach, l'action de U qui en résulte est analytique, et il existe n tel que $\left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ \pi^n & 1\end{smallmatrix}\right)$ agisse comme l'exponentielle de $\pi^n u^-$ sur $\widehat{F}$, ce qui prouve qu'elle est uniquement déterminée sur $\widehat{F}$, et donc sur F, et donc aussi sur Δ par continuité, par l'action de $U(\mathfrak{gl}_2)$.

Comme celle-ci est uniquement déterminée par $\kappa(\omega)$ d'après la rem. 3.5 et la prop. 3.6, cela permet de conclure.

Remarque 3.8. — (i) La même démonstration prouve que, si Δ est de rang 1 (et donc de la forme $\mathscr{R}(\delta)$), il existe au plus un prolongement de Δ en un G-faisceau sur $\mathbf{P}^1$ de caractère central ω. Dans le chapitre suivant nous construisons un tel prolongement à partir de séries principales.

(ii) Si $\Delta = [\mathscr{R}(\delta_1) - \mathscr{R}(\delta_2)]$, il ressort de la prop. 3.4 et des formules de la prop. 3.6 (et de sa preuve) que, même dans le cas pathologique, le sous-module $\mathscr{R}(\delta_1)$ de Δ est stable par l'action de $U(\mathfrak{gl}_2)$. On en déduit, par les mêmes arguments que dans la preuve de la prop. 3.7, que si Δ se prolonge en un G-faisceau sur $\mathbf{P}^1$ de caractère central ω, il en est de même de $\mathscr{R}(\delta_1)$ et $\mathscr{R}(\delta_2)$ et que l'on a une suite exacte de G-modules

$$0 \to \mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \to \Delta\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \to \mathscr{R}(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \to 0.$$

3.2.3. Involutions $\mathfrak{gl}_2$-compatibles sur $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. — Soit Δ un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}$ ou $\mathscr{R}^+$, muni d'une action de $U(\mathfrak{gl}_2)$ prolongeant celle de $U(\mathfrak{p})$. Soit $\omega : F^* \to L^*$ un caractère localement analytique. On suppose que Δ est $\kappa(\omega)$-compatible et que $a^+ + a^- = \kappa(\omega)$.

Soit ι une involution de $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. On dit que ι est $\mathfrak{gl}_2$-*compatible* si $\iota\circ h = \mathrm{Ad}_w(h)\circ\iota$, pour tout $h\in\mathfrak{gl}_2$. A partir de ω et ι, on définit, comme ci-dessus, une action de $\widetilde{G}$ sur

$$\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1 = \{(z_1,z_2)\in\Delta,\ \mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} z_2 = \iota(\mathrm{Res}_{\mathscr{O}_F^*} z_1)\}.$$

Lemme 3.9. — *Si ι est $\mathfrak{gl}_2$-compatible, il existe sur $\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$ une unique action de $U(\mathfrak{gl}_2)$, prolongeant celle sur Δ, et telle que l'on ait $g\circ h = \mathrm{Ad}_g(h)\circ g$, pour tout $g\in\widetilde{G}$: cette action est donnée par la formule*[18]

$$h\cdot(z_1,z_2) = (h\cdot z_1, \mathrm{Ad}_w(h)\cdot z_2),\quad \textit{si } h\in\mathfrak{gl}_2 \textit{ et } (z_1,z_2)\in\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1.$$

18. Si $g\in\widetilde{G}$, on définit l'action adjointe de g sur $\mathfrak{gl}_2$ comme celle de son image dans G.

Démonstration. — La formule est équivalente à demander que $w \circ h = \mathrm{Ad}_w(h) \circ w$, et elle définit bien un élément de $\Delta \boxtimes_{\omega,\iota} \mathbf{P}^1$ car on a supposé que ι est $\mathfrak{gl}_2$-compatible ; on en déduit l'unicité et la formule potentielle pour l'action de $U(\mathfrak{gl}_2)$.

Que cette formule vérifie bien la compatibilité voulue avec l'action de $\widetilde{G}$ est une conséquence formelle du fait que c'est vrai sur $\mathscr{O}_F$ pour l'action de P^+ (prop. 3.6) et pour celle de ι sur $\mathscr{O}_F^*$ par hypothèse : par exemple, vérifier que $\beta(b) \circ u^+ = u^+ \circ \beta(b)$, si $b \in \pi\mathscr{O}_F$, est évident sur $\mathscr{O}_F$ et, sur $w \cdot \pi\mathscr{O}_F$, cela équivaut à vérifier que

$$g_1 \cdot \iota \cdot g_2 \cdot \iota \cdot g_3 \cdot u^- z = u^- \cdot g_1 \cdot \iota \cdot g_2 \cdot \iota \cdot g_3 \cdot z,$$

pour tout $z \in \Delta \boxtimes \pi\mathscr{O}_F$, avec $g_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1+b & 0 \\ 0 & 1+b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $g_2 = \left(\begin{smallmatrix} (1+b)^{-2} & b(1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et $g_3 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & (1+b)^{-1} \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Or on a $g_3 \cdot u^- z = \mathrm{Ad}_{g_3}(u^-) \cdot g_3 \cdot z$ puisque $z \in \Delta \boxtimes \mathscr{O}_F$, puis

$$\iota \cdot \mathrm{Ad}_{g_3}(u^-) \cdot g_3 \cdot z = \mathrm{Ad}_w \circ \mathrm{Ad}_{g_3}(u^-) \cdot \iota \cdot g_3 z = \mathrm{Ad}_{wg_3}(u^-) \cdot \iota \cdot g_3 z$$

car $g_3 \cdot z \in \Delta \boxtimes (1 + \pi\mathscr{O}_F) \subset \Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, et ainsi de suite... On obtient finalement

$$g_1 \cdot \iota \cdot g_2 \cdot \iota \cdot g_3 \cdot u^- z = \mathrm{Ad}_{g_1 w g_2 w g_3}(u^-) \cdot g_1 \cdot \iota \cdot g_2 \cdot \iota \cdot g_3 \cdot z,$$

ce qui donne le résultat cherché puisque $g_1 w g_2 w g_3 = w\left(\begin{smallmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)w$ commute avec u^-.

4. Série principale et (φ, Γ)-modules analytiques

4.1. La série principale analytique de $\mathbf{GL}_2(F)$

4.1.1. La représentation $B(\delta_1, \delta_2)$. — Soient $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}_{F-\mathrm{an}}(L)$. Notons δ et ω les caractères

$$\delta = \delta_1 \delta_2^{-1} \chi^{-1} \quad \text{et} \quad \omega = \delta_1 \delta_2 \chi^{-1} \quad (\text{et donc } \delta_2 = \omega \chi \delta_1^{-1}).$$

On dit que (δ_1, δ_2) est *générique* si $\delta \notin \{x^k,\ k \in \mathbf{N}\}$ et *spécial* dans le cas contraire.

Soit $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$, l'espace des $\phi : F \to L$ localement analytiques, telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction analytique dans un voisinage de 0. On munit $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ d'une action à gauche de G définie par

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\right)(x) = \delta_2(ad - bc)\delta(a - cx)\phi\left(\tfrac{dx-b}{a-cx}\right).$$

Le dual de $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ s'identifie à un espace de distributions sur $\mathbf{P}^1$, et l'action de G devient :

$$\int_{\mathbf{P}^1} \phi \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \cdot \mu = \delta_1^{-1}\chi(ad - bc) \int_{\mathbf{P}^1} \delta(cx + d)\phi\left(\tfrac{ax+b}{cx+d}\right) \mu(x).$$

Remarque 4.1. — La représentation $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ s'interprète, plus conceptuellement, comme *l'induite analytique* $\mathrm{Ind}_{\bar{B}}^G\, \delta_1\chi^{-1} \otimes \delta_2$ du caractère $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \mapsto \delta_1\chi^{-1}(a)\delta_2(d)$ de $\bar{B}$. Rappelons que, si W est une représentation localement analytique de $\bar{B}$, alors $\mathrm{Ind}_{\bar{B}}^G W$ est l'espace des fonctions $\tilde{\phi} : G \to W$, localement analytiques, telles que $\tilde{\phi}(xh) = h^{-1} \cdot \tilde{\phi}(x)$, pour tous $x \in G$ et $h \in \bar{B}$; cet espace est muni d'une action de G donnée par $(g \cdot \tilde{\phi})(x) = \tilde{\phi}(g^{-1}x)$.

Si $\tilde{\phi} \in \mathrm{Ind}_{\bar{B}}^{G} W$, on peut lui associer $\phi : F \to W$ en posant $\phi(x) = \tilde{\phi}\big(\big(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big)$. Comme

$$\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big)^{-1}\big(\begin{smallmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big) = \big(\begin{smallmatrix} 1 & (dx-b)/(a-cx) \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\big)\big(\begin{smallmatrix} a-cx & 0 \\ c & (ad-bc)/(a-cx) \end{smallmatrix}\big)^{-1},$$

on voit que $\tilde{\phi} \mapsto \phi$ permet d'identifier $\mathrm{Ind}_{\bar{B}}^{G} W$ à l'espace des $\phi : F \to W$, localement analytiques, telles que $x \mapsto \big(\begin{smallmatrix} -x & 0 \\ 1 & 1/x \end{smallmatrix}\big) \cdot \phi\big(\frac{1}{x}\big)$ se prolonge en une fonction localement analytique en 0, muni de l'action de G définie par

$$\big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \cdot \phi\big)(x) = \big(\begin{smallmatrix} a-cx & 0 \\ c & (ad-bc)/(a-cx) \end{smallmatrix}\big) \cdot \phi\big(\tfrac{dx-b}{a-cx}\big).$$

Lemme 4.2. — (i) *Le caractère central de* $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ *est* ω.

(ii) $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ *admet un caractère infinitésimal prenant la valeur* $\kappa(\delta_1) + \kappa(\delta_2) - 1$ *sur* $a^+ + a^-$ *et* $\frac{1}{2}((\kappa(\delta_1) - \kappa(\delta_2))^2 - 1)$ *sur le casimir.*

Démonstration. — Le (i) est clair sur la formule. Pour prouver le (ii), notons simplement κ_1, κ_2 les poids de δ_1 et δ_2. Des calculs immédiats fournissent les formules :

$$u^+ \cdot \phi = -\phi', \quad a^+\phi = (\kappa_1 - 1)\phi - x\phi', \quad u^- \cdot \phi = -(\kappa_1 - \kappa_2 - 1)x\phi + x^2\phi'.$$

Par ailleurs, le (i) implique que

$$a^+ + a^- = \kappa_1 + \kappa_2 - 1 \ \text{ et } \ (a^+ - a^-) \cdot \phi = (\kappa_1 - \kappa_2 - 1)\phi - 2x\phi'.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(a^+ - a^-)^2 \cdot \phi &= \tfrac{1}{2}(\kappa_1 - \kappa_2 - 1)^2\phi - 2(\kappa_1 - \kappa_2 - 2)x\phi' + 2x^2\phi'' \\ u^+u^- \cdot \phi &= (\kappa_1 - \kappa_2 - 1)\phi + (\kappa_1 - \kappa_2 - 3)x\phi' - x^2\phi'' \\ u^-u^+ \cdot \phi &= (\kappa_1 - \kappa_2 - 1)x\phi' - x^2\phi'' \end{aligned}$$

et donc $C \cdot \phi = \frac{1}{2}\big((\kappa_1 - \kappa_2)^2 - 1\big)\phi$, ce qu'il fallait vérifier.

4.1.2. Composantes de Jordan-Hölder. — La représentation $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ n'est, de manière visible, pas toujours irréductible (par exemple, si $\delta = x^k$, les polynômes de degré $\leq k$ forment une sous-représentation $W(\delta_1, \delta_2)$ de dimension $k + 1$). Ses composantes de Jordan-Hölder ont été déterminées par Schneider et Teitelbaum [**27**]. L'énoncé du résultat (prop. 4.4 ci-dessous) va demander un peu de préparation.

- Si $\chi_1, \chi_2 \in \widehat{\mathscr{T}}(L)$ sont localement constants, on note $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ l'espace des $\phi : G \to L$, localement constantes, telles que $\phi\big(\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ c & d \end{smallmatrix}\big)g\big) = \chi_1(a)\chi_2(d)\phi(g)$, pour tous $g \in G$ et $\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\big) \in \bar{B}$. On munit $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ d'une action de G grâce à la formule $(h \cdot \phi)(g) = \phi(h^{-1}g)$.
- On note St la *steinberg* : c'est le quotient de $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(1 \otimes 1)$ par les fonctions constantes.

Les résultats suivants sont parfaitement classiques [**19**, th. 3.3].

Proposition 4.3. — (i) $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ *est une représentation irréductible de* G *sauf si* $\chi_1 = \chi_2$ *ou si* $\chi_2 = |x|^2\chi_1$ *: dans le premier cas,* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ *est une extension de* $\mathrm{St} \otimes \chi_1$ *par* χ_1*, dans le second, c'est une extension de* χ_1 *par* $\mathrm{St} \otimes \chi_1$.

(ii) *Si* $\delta_1 \neq |x|^{\pm 1}\delta_2$*, alors* $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(|x|^{-1}\delta_1 \otimes \delta_2) \cong \mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(|x|^{-1}\delta_2 \otimes \delta_1)$ *(et les deux représentations sont irréductibles).*

• Si $\kappa(\delta) = k \in \mathbf{N}$, on note $B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2)$ l'ensemble des fonctions $\phi : F \to L$, localement polynomiales de degré $\leq k$, telles que $\delta(x)\phi(1/x)$ soit polynomiale, de degré $\leq k$, dans un voisinage de 0. Alors, muni de l'action de G ci-dessus, $B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2)$ est une sous-représentation de $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$, et on a

$$B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2) \cong \big(\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}} x^{-k}\delta \otimes 1\big) \otimes \mathrm{Sym}^k \otimes \delta_2.$$

• Si $\delta = x^k$, avec $k \in \mathbf{N}$, on pose

$$W(\delta_1, \delta_2) = W_k \otimes \delta_2 \ \text{ et } \ \mathrm{St}^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2) = \mathrm{St}_k \otimes \delta_2, \ \text{ avec } W_k = \mathrm{Sym}^k \text{ et } \mathrm{St}_k = \mathrm{St} \otimes \mathrm{Sym}^k.$$

Alors $W(\delta_1, \delta_2)$ est une représentation de dimension finie dont la duale est $W(\delta_1, \delta_2) \otimes \omega^{-1}$ (cela suit de ce que la duale de Sym^k est $\mathrm{Sym}^k \otimes x^{-k}$).

Proposition 4.4. — (i) *Si* $\kappa(\delta) \notin \mathbf{N}$*, alors* $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ *est irréductible.*

(ii) *Si* $\kappa(\delta) = k \in \mathbf{N}$*, alors* $(\frac{d}{dx})^{k+1}$ *induit un morphisme équivariant surjectif de* $B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2)$ *sur* $B^{\mathrm{an}}(x^{-1-k}\delta_1, x^{1+k}\delta_2)$ *dont le noyau est* $B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2)$*, et donc*

$$B^{\mathrm{an}}(\delta_1, \delta_2) = [B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2) - B^{\mathrm{an}}(x^{-1-k}\delta_1, x^{1+k}\delta_2)].$$

(iii) *La représentation* $B^{\mathrm{alg}}(\delta_1, \delta_2)$ *est irréductible sauf si* $\delta = x^k$ *ou* $\delta = |x|^{-2}x^k$*, avec* $k \in \mathbf{N}$*, et on a*

$$B(x^{k+1}|x|\delta_2, \delta_2) = \big[W_k - \mathrm{St}_k - B(|x|, x^{k+1})\big] \otimes \delta_2,$$
$$B(x^{k+1}\delta_2, |x|\delta_2) = \big[\mathrm{St}_k - W_k - B(1, |x|x^{k+1})\big] \otimes \delta_2.$$

4.2. Extensions de composantes de Jordan-Hölder de séries principales

4.2.1. Résultats génériques. — Kohlhaase **[22]** a calculé beaucoup des groupes d'extensions entre séries principales. Nous allons avoir besoin de compléter ses résultats. Commençons par rappeler ce qu'il a démontré.

Soient (δ_1, δ_2) et (δ_1', δ_2') deux couples de caractères analytiques de F^*, et soient $\delta = \delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}$ et $\mathrm{Ext} = \mathrm{Ext}^1_G(B(\delta_1, \delta_2), B(\delta_1', \delta_2'))$.

Proposition 4.5. — (i) *Si* $\kappa(\delta) \notin \mathbf{N}$ *et si* $\delta_1 \neq \delta_2$*, alors* $\mathrm{Ext} = 0$ *sauf si :*

- $(\delta_1', \delta_2') = (\delta_1, \delta_2)$ *où* $\dim \mathrm{Ext} = 2$,
- $(\delta_1', \delta_2') = (\delta_2, \delta_1)$ *où* $\dim \mathrm{Ext} = 1$.

(ii) *Si* $\delta_1 = \delta_2$ (et donc $\kappa(\delta) = -1 \notin \mathbf{N}$)*, alors* $\mathrm{Ext} = 0$ *sauf si* $(\delta_1', \delta_2') = (\delta_1, \delta_2)$.

(iii) *Si* $\kappa(\delta) \in \mathbf{N}$*, alors* $\mathrm{Ext} = 0$ *sauf si* (δ_1', δ_2') *est égal à* (δ_1, δ_2)*,* (δ_2, δ_1) *ou* $(x^{-1-\kappa(\delta)}\delta_1, x^{1+\kappa(\delta)}\delta_2)$.

(iv) *Si* $\kappa(\delta) \in \mathbf{N}$ *et si* $\delta_1 \neq \delta_2 x^{\kappa(\delta)+1}$*, alors* Ext *est :*

- *de dimension* 2 *si* $(\delta_1', \delta_2') = (\delta_1, \delta_2)$
- *de dimension* 1 *si* $(\delta_1', \delta_2') = (\delta_2, \delta_1)$.

Démonstration. — C'est une traduction de [**22**, th. 8.15], en tenant compte du fait que nos extensions sont supposées avoir un caractère central (cela fait passer la dimension de 4 à 2 dans le cas où les deux couples sont égaux).

4.2.2. Extensions de $W(\delta_1,\delta_2)$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$. — Si $\delta = x^k$, avec $k\in\mathbf{N}$, on note $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$ le quotient de $B(\delta_1,\delta_2)$ par $W(\delta_1,\delta_2)$.

Si $\ell\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L)$, on note ℓ^+ la fonction valant 0 sur $\mathscr{O}_F$ et coïncidant avec ℓ en dehors de $\mathscr{O}_F$ (notons que les ℓ^+ forment un L-espace vectoriel de dimension 2 de base v_p^+ et $\log^+$, où log est le logarithme normalisé par $\log p=0$). Soit

$$Y(\delta_1,\delta_2)=\{\phi+Pv_p^+ +Q\log^+,\ \phi\in\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2),\ P,Q\in W(\delta_1,\delta_2)\}.$$

On munit $Y(\delta_1,\delta_2)$ d'une action de G, étendant celle sur $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$, en posant

$$(P\ell^+)\star\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)=\chi\delta_1^{-1}(ad-bc)\,(cx+d)^kP\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)\big(\ell^+\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)+\ell(cx+d)\big).$$

(Le membre de droite est dans $Y(\delta_1,\delta_2)$ car $\ell^+\big(\frac{ax+b}{cx+d}\big)+\ell(cx+d)-\ell^+(x)$ est localement analytique sur $\mathbf{P}^1$.) Si $\ell\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L)$, on note E_ℓ le sous espace $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)\oplus W(\delta_1,\delta_2)\ell^+$ de $Y(\delta_1,\delta_2)$. On a donc

$$\begin{aligned}Y(\delta_1,\delta_2)&=\big[\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)-\big(\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L)\otimes W(\delta_1,\delta_2)\big)\big]\\ E_\ell&=[\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)-W(\delta_1,\delta_2)]\end{aligned}$$

Proposition 4.6. — *L'application $\ell\mapsto E_\ell$ induit un isomorphisme*

$$\mathrm{Ext}^1(W(\delta_1,\delta_2),\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2))\cong\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L).$$

Démonstration. — Il suffit de recopier la preuve [**10**, th. 2.7] dans le cas $F=\mathbf{Q}_p$.

4.2.3. Extensions de B_k par St_k. — On rappelle que $\mathrm{St}_k=\mathrm{St}\otimes W_k$, où $W_k=\mathrm{Sym}^k$. On note B_k la représentation $B(x^{k+1}|x|,1)/W_k$. En tant que B-modules, $\mathrm{St}\otimes W_k$ s'identifie à l'espace $\mathrm{LP}_c^{[0,k]}(\mathbf{Q}_p)$ des fonctions localement polynomiales à support compact dans $\mathbf{Q}_p$ et B_k aux fonctions localement analytiques sur $\mathbf{P}^1$, nulles en ∞ (une telle fonction admet un développement en série de la forme $\sum_{n\geq 1}a_nx^{-n}$ au voisinage de ∞) : en effet, $B(x^{k+1}|x|,1)$ s'identifie aux fonctions ϕ localement analytiques sur $\mathbf{Q}_p$, avec un pôle d'ordre $\leq k$, mais comme on travaille modulo l'espace W_k des polynômes de degré $\leq k$, on peut remplacer ϕ par l'unique élément de $B(x^{k+1}|x|,1)$ qui lui est équivalent et qui s'annule en ∞.

Lemme 4.7. — *L'application naturelle*

$$\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}_k,B(|x|,x^{k+1}))\to\mathrm{Ext}^1_B(\mathrm{St}_k,B(|x|,x^{k+1}))$$

est injective.

Démonstration. — Posons $\Pi_1=B(|x|,x^{k+1})$ et $\Pi_2=\mathrm{St}_k$. Soit $0\to\Pi_1\to\Pi\to\Pi_2\to 0$ une suite exacte d'éléments de $\mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}G$ qui est scindée quand on la restreint à B. Il existe donc $\iota:\Pi_2\to\Pi$, B-équivariant, et on peut écrire tout élément v de Π, de manière unique, sous la forme $v=(v_1,v_2)=v_1+\iota(v_2)$, avec $v_1\in\Pi_1$ et $v_2\in\Pi_2$. Soit $\lambda:\Pi_2\to\Pi_1$, définie par $\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\iota(v)=\lambda(v)+\iota(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v)$. On a alors

$$w\cdot(v_1,v_2)=(w\cdot v_1+\lambda(v_2),w\cdot v_2)\ \text{ et }\ b\cdot(v_1,v_2)=(b\cdot v_1,b\cdot v_2),\ \text{si } b\in B.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 4.8. — (i) *Si $v\in\Pi_2$, on a*

$$\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v)+\lambda(\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\cdot v)=0\quad\text{et}\quad\lambda(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot v)=\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(v).$$

(ii) *Soient $y\in\mathbf{Q}_p$ et $b=\left(\begin{smallmatrix}y&1\\0&-y^{-1}\end{smallmatrix}\right)$, $u=\left(\begin{smallmatrix}1&y\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $u'=\left(\begin{smallmatrix}1&y^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)$. Alors, pour tout $v\in\Pi_2$,*

$$\lambda(b\cdot v)=(u')^{-1}\cdot w\cdot(u\cdot\lambda(v)-\lambda(wuw\cdot v)).$$

Démonstration. — Le (i) est une traduction des identité $w^2=1$ et $w\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)w$, qui impliquent

$$(0,z)=w^2\cdot(0,z)=w\cdot(\lambda(z),w\cdot z)=(w\cdot\lambda(z)+\lambda(w\cdot z),z)$$
$$\begin{aligned}(\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot\lambda(z),\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)w\cdot z)&=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)\cdot(\lambda(z),w\cdot z)=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&d\end{smallmatrix}\right)w\cdot(0,z)\\&=w\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot(0,z)=w\cdot(0,\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z)=(\lambda(\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z),w\left(\begin{smallmatrix}d&0\\0&a\end{smallmatrix}\right)\cdot z)\end{aligned}$$

(ii) Un petit calcul montre que $u=w\cdot u'\cdot w\cdot b\cdot w$. On obtient donc, en utilisant les formules pour les actions de w et B données plus haut,

$$\begin{aligned}(0,u\cdot z)&=wu'wbw\cdot(0,z)=wu'wb\cdot(\lambda(z),w\cdot z)=wu'w\cdot(b\cdot\lambda(z),bw\cdot z)\\&=wu'\cdot(wb\cdot\lambda(z)+\lambda(bw\cdot z),wbw\cdot z)\\&=w\cdot(u'wb\cdot\lambda(z)+u'\cdot\lambda(bw\cdot z),u'wbw\cdot z)\\&=(wu'wb\cdot\lambda(z)+wu'\cdot\lambda(bw\cdot z)+\lambda(u'wbw\cdot z),wu'wbw\cdot z)\\&=(uw\cdot\lambda(z)+wu'\cdot\lambda(bw\cdot z)+\lambda(wu\cdot z),u\cdot z).\end{aligned}$$

Pour en déduire le résultat, il suffit alors de prendre $z=w\cdot v$ et d'utiliser la formule $w\cdot\lambda(z)=-\lambda(w\cdot z)$ du (i).

Revenons à la preuve du lemme 4.7. Appliquons la formule du (ii) du lemme 4.8 à $v=\mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p}x^k$ et à $y\in p\mathbf{Z}_p$. Alors $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\y&1\end{smallmatrix}\right)\cdot v=v$, et la formule devient $\lambda(b\cdot v)=(u')^{-1}\cdot(wuw-1)\cdot\phi$, où l'on a posé $\phi=w\cdot\lambda(v)\in\Pi_1$. Maintenant,

$$(u')^{-1}=\left(\begin{smallmatrix}1&-y^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)\ \text{ et }\ (u')^{-1}wuw=\left(\begin{smallmatrix}1&-y^{-1}\\0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\y&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}0&-y^{-1}\\y&1\end{smallmatrix}\right)$$

et $\big(\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi\big)(x)=\frac{(ad-bc)^{k+1}}{(a-cx)^{k+2}}\phi\big(\frac{dx-b}{a-cx}\big)$ dans Π_1 (les éléments de Π_1 sont localement analytiques sur $\mathbf{P}^1$ avec un zéro d'ordre $\geq k+2$ en ∞ puisque le caractère δ_s est x^{-k-2} dans ce cas) :

• Le membre de droite est donc $x\mapsto(-xy)^{-k-2}\phi\big(\frac{x+y^{-1}}{-xy}\big)-\phi(x+y^{-1})$ et, si x est fixé, est analytique par rapport à y dans un voisinage de 0, avec un zéro en 0 d'ordre $\geq k+2$ (le zéro d'ordre $k+2$ de ϕ en ∞ fournit un zéro d'ordre $2(k+2)$ en 0 pour $y \mapsto \phi\big(\frac{x+y^{-1}}{-xy}\big)$, ce qui contrebalance le pôle d'ordre $k+2$ de $y \mapsto (-xy)^{-k-2}$).

• le membre de gauche est $\lambda\big(x \mapsto \mathbf{1}_{-y-y^2\mathbf{Z}_p}(-xy^{-1}-1)^k\big)$ et est localement polynomial en y^{-1}.

Il en résulte que les deux membres sont identiquement nuls dans un voisinage de 0, ce qui prouve qu'il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que $\operatorname{Ker}\lambda$ contienne $\left(\begin{smallmatrix} y & 1 \\ 0 & -y^{-1}\end{smallmatrix}\right) \cdot v$, si $v_p(y) \geq \ell$. Comme $\operatorname{Ker}\lambda$ est stable par $\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{Q}_p^* & 0 \\ 0 & \mathbf{Q}_p^*\end{smallmatrix}\right)$ d'après le (i) du lemme 4.8, il contient aussi $\left(\begin{smallmatrix} ay^{-1} & 0 \\ 0 & -y\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y & 1 \\ 0 & -y^{-1}\end{smallmatrix}\right) \cdot v = \left(\begin{smallmatrix} a & ay^{-1} \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v$ quels que soient $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et $b \in \mathbf{Q}_p^*$ vérifiant $v_p(b) \geq \ell$), et donc aussi $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v$, si $v_p(a) \geq v_p(b)+\ell$). Il n'est pas difficile de montrer que ces fonctions engendrent Π_2 (en effet, $\left(\begin{smallmatrix} p^n & b \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot v = \mathbf{1}_{b+p^n\mathbf{Z}_p}\big(\frac{x-b}{p^n}\big)^k$), ce qui prouve que λ est identiquement nul et donc que $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$ en tant que représentation de G. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.9. — (i) $\operatorname{Ext}^1_G(\mathrm{St}_k, \mathrm{St}_k) = 0$.
(ii) $\operatorname{Ext}^1_G(\mathrm{St}_k, B(|x|, x^{k+1})) = 0$.
(iii) $\operatorname{Ext}^1_G(\mathrm{St}_k, B_k) = 0$.

Démonstration. — Si Π est une extension de St_k par St_k, alors Π est localement algébrique, et donc isomorphe à $\Pi_0 \otimes \mathrm{Sym}^k$, où Π_0 est localement constante et est un extension de St par St. On peut donc déduire le cas k général du (i) du cas $k=0$ qui est classique.

Passons au (ii). Soit Π une extension de St_k par $B(|x|, x^{k+1})$. Notons u_k l'opérateur $(u^+)^{k+1}$.

• u_k est identiquement nul sur St_k,

• le conoyau de u_k sur $B(|x|, x^{k+1})$ est de dimension finie $\leq k+1$ (en effet u^+ agit comme $\frac{d}{dx}$ et toute fonction ayant un zéro d'ordre $\geq 2k+3$ en ∞ peut se primitiver $k+1$ fois, et donc $B(|x|, x^{k+1})/u_k$ est engendré par les $\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1-\mathbf{Z}_p}x^{-i}$, pour $k+2 \leq i \leq 2k+2$),

• St_k est la somme directe de ses espaces propres pour l'action de a^+ dont les valeurs propres sont $0, 1, \dots, k$ $\big[$ c'est l'espace des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k$ avec action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ donnée par la formule $\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\big)(x) = a^k\phi\big(\frac{x}{a}\big)$ $\big]$, alors que les valeurs propres de a^+ sur $B(|x|, x^{k+1})/u_k$ sont $k+1, k+1+2, \dots, 2k+1$.

Il résulte des 3 points ci-dessus que l'application de connexion de $\mathrm{St}_k^{u_k=0} = \mathrm{St}_k$ dans $B(|x|, x^{k+1})/u_k$ est identiquement nulle, et donc que la suite

$$0 \to B(|x|, x^{k+1})^{u_k=0} \to \Pi^{u_k=0} \to \mathrm{St}_k \to 0$$

est exacte.

Maintenant, $B(|x|, x^{k+1})^{u_k=0}$ est la somme directe de ses espaces propres pour l'action de a^+ dont les valeurs propres sont $-1, -2, \dots, -k-1$ $\big[$ c'est l'espace des fonctions localement polynomiales de degré $\leq k$ avec action de $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ donnée par la formule $\big(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot \phi\big)(x) = a^{-1}\phi\big(\frac{x}{a}\big)$ $\big]$, et donc St_k s'identifie au sous-espace de $\Pi^{u_k=0}$, somme directe des espaces propres de a^+ pour les valeurs propres ≥ 0, et cet espace est stable par B (c'est dû à la relation $a^+u^+ = u^+(a^+ + 1)$ qui montre que l'action de $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \mathbf{Q}_p \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ne peut qu'augmenter les valeurs propres de a^+). Il s'ensuit que St_k s'identifie à un sous-B-module de Π et donc que la restriction de Π à B est scindée. On conclut la preuve du (ii) en utilisant le lemme 4.7.

Le (iii) étant une conséquence des (i) et (ii), puisque B_k est une extension de $B(|x|, x^{k+1})$ par St_k, cela permet de conclure.

4.3. Le G-module $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$

4.3.1. Série principale et G-faisceaux sur $\mathbf{P}^1$. — Si $\delta_1, \delta_2 \in \widehat{\mathscr{T}}_{F-\mathrm{an}}(L)$, on définit $\iota_{\delta_1,\delta_2}$ sur $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ par la formule

$$\iota_{\delta_1,\delta_2}(z \otimes \delta_1) = \big(\delta_1(-1)\, w_* \circ m_{\delta^{-1}}(z)\big) \otimes \delta_1.$$

Il résulte du lemme 2.22 que $\iota_{\delta_1,\delta_2}$ est une involution qui laisse stable $\mathscr{R}^+(\delta_1) \boxtimes \mathscr{O}_F^*$. Si $M = \mathscr{R}(\delta_1)$, $\mathscr{R}^+(\delta_1)$, $\mathscr{R}^-(\delta_1) = \mathscr{R}(\delta_1)/\mathscr{R}^+(\delta_1)$, on note simplement $M \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ le module $M \boxtimes_{\omega,\iota_{\delta_1,\delta_2}} \mathbf{P}^1$. Nous allons prouver que l'action de $\widetilde{G}$ sur $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ se factorise à travers G et dévisser le G-module ainsi défini.

Comme $\iota_{\delta_1,\delta_2}$ laisse stable $\mathscr{R}^+(\delta_1) \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, elle induit des involutions de $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$.

Lemme 4.10. — (i) *L'action induite sur* $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ *coïncide avec celle de w sur $B(\delta_1, \delta_2)$.*

(ii) *L'action induite sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F^*)$ coïncide avec celle de w sur $B(\delta_2, \delta_1)^* \otimes \omega$.*

Démonstration. — L'action de w sur $B(\delta_1, \delta_2)$ envoie ϕ sur

$$x \mapsto \delta_2(-1)\delta(-x)\phi\big(\tfrac{1}{x}\big) = -\delta_1(-1)\delta(x)\phi\big(\tfrac{1}{x}\big).$$

L'action induite par $\iota_{\delta_1,\delta_2}$ envoie ϕ sur

$$x \mapsto \delta_1(-1) w_*(\delta_1^{-1}\delta_2\chi^{-1}\phi)(x) = -\delta_1(-1)x^{-2}\delta_1^{-1}\delta_2\chi^{-1}\big(\tfrac{1}{x}\big)\phi\big(\tfrac{1}{x}\big),$$

et on retrouve l'expression ci-dessus en utilisant le fait que $\chi(x) = x$ si $x \in \mathscr{O}_F^*$.

Enfin,

$$\int_{\mathscr{O}_F^*} \phi\, \iota_{\delta_1,\delta_2}(\mu) = \delta_1(-1) \int_{\mathscr{O}_F^*} \phi\big(\tfrac{1}{x}\big)\, m_{\delta_1^{-1}\delta_2\chi^{-1}}(\mu) = \delta_1(-1) \int_{\mathscr{O}_F^*} \delta_1^{-1}\delta_2\chi^{-1}(x)\phi\big(\tfrac{1}{x}\big)\, \mu,$$

et la comparaison avec l'action de w sur $B(\delta_2, \delta_1)^* \otimes \omega$ est immédiate.

Corollaire 4.11. — (i) $\mathscr{R}^+(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \cong B(\delta_2, \delta_1)^* \otimes \omega$.

(ii) $(\mathscr{R}(\delta_1)/\mathscr{R}^+(\delta_1)) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \cong B(\delta_1, \delta_2)$.

Démonstration. — Compte-tenu du lemme 4.10, il suffit de vérifier que les actions de P^+ sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ induites par celle sur $\mathscr{R}(\delta_1)$ coïncident avec celles sur $B(\delta_2, \delta_1)^* \otimes \omega$ et $B(\delta_1, \delta_2)$ respectivement. Cela découle sans problème du (iii) du th. 2.3.

Proposition 4.12. — *L'action de $\widetilde{G}$ sur $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ se factorise à travers G et on a une suite exacte de G-modules*

$$0\to B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega\to \mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1\to B(\delta_1,\delta_2)\to 0,$$

ou, de manière ́quivalente, une décomposition

$$\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1=[B(\omega\chi\delta_1^{-1},\delta_1)^*\otimes\omega - B(\delta_1,\omega\chi\delta_1^{-1})].$$

Démonstration. — Commençons par vérifier que l'action de $\iota=\iota_{\delta_1,\delta_2}$ est $\mathfrak{gl}_2$-compatible. C'est vrai sur $\mathscr{R}^+(\delta_1)\boxtimes\mathscr{O}_F^*\cong B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$ puisque l'action de $\mathfrak{gl}_2$ est l'action infinitésimale de celle de G. Maintenant, la formule $\iota\circ a^+=a^-\circ\iota$ est immédiate en revenant aux définitions ; il suffit donc de vérifier que $f=\iota\circ u^+-u^-\circ\iota$ est identiquement nul sur $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ sachant qu'il l'est sur $\mathscr{R}^+(\delta_1)\boxtimes\mathscr{O}_F^*$. Or un petit calcul montre que $f\circ\nabla=(\kappa(\omega)-1-\nabla)\circ f$, et le lemme 2.20 permet d'en déduire que $f=0$.

Il s'ensuit que $g\circ h=\mathrm{Ad}_g(h)\circ g$, pour tous $g\in\widetilde{G}$ et $h\in\mathfrak{gl}_2$. En particulier, si g est dans le noyau de $\widetilde{G}\to G$, alors g commute à l'action de $\mathfrak{gl}_2$, et il en est de même de $g-1$. Or $g-1$ est identiquement nul sur $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$ puisque $\widetilde{G}$ y agit à travers G, et donc $g-1$ induit un morphisme $\mathfrak{gl}_2$-équivariant de $B(\delta_1,\delta_2)$ dans $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$. Maintenant, l'ensemble des éléments de $B(\delta_1,\delta_2)$ tués par une puissance de u^+ (resp. de u^-) est dense dans l'espace des fonctions de $B(\delta_1,\delta_2)$ à support compact dans F (resp. dans $\mathbf{P}^1-\{0\}$) car il contient l'espace des fonctions localement polynomiales à support compact dans F (resp. son image par w). Par contre, l'ensemble des éléments de $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$ tués par une puissance de u^+ (resp. de u^-) est contenu dans l'espace des distributions de support $\{\infty\}$ (resp. $\{0\}$) qui est fermé dans $B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega$. Il s'ensuit que $g-1$ envoie les fonctions à support compact dans F sur des distributions à support $\{\infty\}$, et comme $g-1$ commute avec les Res_U (cf. (ii) de la rem. 3.1), cela prouve que $g-1$ est identiquement nul sur $\mathrm{LA}_c(F)$. Pour les mêmes raisons, il l'est aussi sur $w\cdot\mathrm{LA}_c(F)$, et donc $g-1$ est identiquement nul.

Ceci permet de conclure.

Remarque 4.13. — Comme $\mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_F)$ est engendré par w et $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, il résulte du (i) de la rem. 2.21 que, si $r\geq[F:\mathbf{Q}_p]-1$, le sous-module $\mathscr{R}_r(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ de $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathscr{O}_F)$.

Proposition 4.14. — *Le dual de $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ est $\mathscr{R}(\chi\delta_1^{-1})\boxtimes_{\omega^{-1}}\mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — Compte-tenu de la prop. 3.2, il suffit de vérifier que l'adjoint de w sur $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F^*$ est w agissant sur $\mathscr{R}(\chi\delta_1^{-1})\boxtimes_{\omega^{-1}}\mathscr{O}_F^*$. Or ces deux applications satisfont la relation de commutation $\sigma_a\circ f=\omega(a)^{-1}f\circ\sigma_{a^{-1}}$, et les suites exactes

$$0\to B(\delta_2,\delta_1)^*\otimes\omega\to\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to B(\delta_1,\delta_2)\to 0$$
$$0\to B(\delta_1,\delta_2)^*\to\mathscr{R}(\chi\delta_1^{-1})\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to B(\delta_2,\delta_1)\otimes\omega^{-1}\to 0$$

montrent qu'elles coïncident sur $\mathscr{R}^+(\chi\delta_1^{-1}) \boxtimes_{\omega^{-1}} \mathscr{O}_F^* = B(\delta_1,\delta_2)^*$. On conclut en utilisant l'unicité d'un prolongement à $\mathscr{R}(\chi\delta_1^{-1}) \boxtimes_{\omega^{-1}} \mathscr{O}_F^*$ vérifiant la relation de commutation ci-dessus : en prenant la dérivée en $a=1$ de la relation de commutation avec σ_a, on obtient que la différence vérifie $\nabla \circ f = f \circ (\kappa(\omega) - \nabla)$, ce qui permet d'utiliser le lemme 2.20 pour en déduire que $f=0$.

4.3.2. L'opérateur $\partial : \mathscr{R}(\delta_1,\delta_2) \to \mathscr{R}(x\delta_1,\delta_2)$. — On note $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2)$ le module $\mathscr{R}$ muni de l'action de $\bar P^+$ induite par celle de $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, où $\omega = \delta_1\delta_2\chi^{-1}$. Le sous-module $\mathscr{R}^+$ de $\mathscr{R}$ est stable par $\bar P^+$ et on note $\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2)$ le $\bar P^+$-module ainsi obtenu et $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2)$ le $\bar P^+$-module $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2)/\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2)$.

Le dictionnaire d'analyse fonctionnelle p-adique permet d'identifier $\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2)$ et $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2)$ respectivement à $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ munis des actions données par les formules

$$\int_{\mathscr{O}_F} \phi\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot_{\delta_1,\delta_2} \mu\right) = \int_{\mathscr{O}_F} \delta_1(a)\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}(1+bx)\phi\left(\tfrac{ax}{1+bx}\right)\,\mu$$

$$\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot_{\delta_1,\delta_2} \phi\right)(x) = \delta_2(a)\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}(a-bx)\phi\left(\tfrac{x}{a-bx}\right)$$

Proposition 4.15. — *$\partial : \mathscr{R} \to \mathscr{R}$ induit un morphisme $\bar P^+$-équivariant de $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2)$ dans $\mathscr{R}(x\delta_1,\delta_2)$.*

Démonstration. — ∂ envoie $\mathscr{R}^+$ dans $\mathscr{R}^+$ et l'opérateur sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ qu'elle définit est la multiplication par x. Vérifions que cette application est bien $\bar P^+$-équivariante.

$$\begin{aligned}\int_{\mathscr{O}_F} \phi\,\partial\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot_{\delta_1,\delta_2} \mu\right) &= \int_{\mathscr{O}_F} x\phi(x)\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot_{\delta_1,\delta_2} \mu\right) \\ &= \int_{\mathscr{O}_F} \delta_1(a)\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}(1+bx)\tfrac{ax}{1+bx}\phi\left(\tfrac{ax}{1+bx}\right)\,\mu\end{aligned}$$

En regroupant les a de $\delta_1(a)$ et $\frac{ax}{1+bx}$ ainsi que les $1+bx$ de $\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}(1+bx)$ et $\frac{ax}{1+bx}$, on reconnait la formule pour $\int_{\mathscr{O}_F} \phi\,\left(\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1\end{smallmatrix}\right) \cdot_{x\delta_1,\delta_2} \partial\mu\right)$.

Ce qui précède montre que la restriction de ∂ à $\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2)$ est $\bar P^+$-équivariante. Nous allons en déduire le résultat pour $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2)$. La A^+-équivariance résulte des formules $\partial\circ\sigma_a = a\,\sigma_a\circ\partial$ et $\partial\circ\varphi = p\,\varphi\circ\partial$. Il suffit donc de vérifier que ∂ commute [19] à $u(b)$. Pour cela, commençons par vérifier que ∂ commute à u^-. L'action de u^- sur $\mathscr{R}(\delta_1)$ est celle de $\frac{-1}{t}(\nabla-\kappa(\delta_1))(\nabla-\kappa(\delta_2))$, ce qui se traduit par $u^- = \frac{-1}{t}\nabla(\nabla - \kappa(\delta_2\delta_1^{-1}))$ sur $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2)$. De même, $u^- = \frac{-1}{t}\nabla(\nabla-\kappa(\delta_2\delta_1^{-1}x^{-1}))$ sur $\mathscr{R}(x\delta_1,\delta_2)$. Comme $\partial = \frac{1}{t}\nabla$ sur $\mathscr{R}$, on est ramené à vérifier que

$$\frac{1}{t}\nabla\cdot\frac{1}{t}\nabla(\nabla-\kappa(\delta_2\delta_1^{-1})) = \frac{1}{t}\nabla(\nabla-\kappa(\delta_2\delta_1^{-1}x^{-1}))\cdot\frac{1}{t}\nabla,$$

ce qui résulte de ce que $(\nabla-\kappa)\cdot\frac{1}{t} = \frac{1}{t}\cdot(\nabla-\kappa-1)$, car $\nabla = t\frac{d}{dt}$, et de ce que $\kappa(\delta_2\delta_1^{-1}x^{-1}) = \kappa(\delta_2\delta_1^{-1})-1$.

19. Cf. § 0.5 pour la définition de $u(b)$ et $\alpha(a)$.

Maintenant il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) = \exp(bu^-)$ sur $\mathscr{E}^{[r_1,r_1]}$ pour tout $b \in \pi^k \mathscr{O}_F$. Comme ∂ commute à u^-, il s'ensuit que, pour tout $b \in \pi^k \mathscr{O}_F$, $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right)$ commute à ∂ sur $\mathscr{E}^{[r_1,r_1]}$, et donc aussi sur $\mathscr{E}^{]0,r_1]}$ par restriction et donc sur $\mathscr{R}$ par continuité et densité de $\mathscr{E}^{]0,r_1]}$ dans $\mathscr{R}$. Si $b \in \pi \mathscr{O}_F$, on a

$$\begin{aligned} \partial \circ u(b)\alpha(\pi^k) &= \partial \circ \alpha(\pi^k) u(\pi^k b) = \alpha(\pi^k) u(\pi^k b) \circ \partial \\ &= u(b)\alpha(\pi^k) \circ \partial = u(b) \circ \partial \circ \alpha(\pi^k). \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $u(b)$ et ∂ commutent sur l'image de $\alpha(\pi^k)$, c'est-à-dire sur $\mathscr{R} \boxtimes \pi^k \mathscr{O}_F$. Enfin, si $U = \mathscr{O}_F - \pi^k \mathscr{O}_F$, l'opérateur $u(b)\partial u(b)^{-1} - \partial$ commute avec u^- et Res_U, et est identiquement nul sur $\mathscr{R}^+ \boxtimes U$ et donc induit un morphisme u^- équivariant de $\mathrm{LA}(U)$ dans $\mathscr{R} \boxtimes U$. Or un tel morphisme est identiquement nul car le noyau de $(u^-)^k$ sur $\mathscr{R}$ est à support $\{0\}$, alors que la réunion des noyaux des $(u^-)^k$ est dense dans $\mathrm{LA}(U)$, car son image par w est l'espace des fonctions localement polynomiales sur wU qui est dense dans $\mathrm{LA}(wU)$.

5. Cohomologie analytique

Soit H un semi-groupe F-analytique : les exemples que nous avons en vue sont $H = \mathbf{GL}_2(F)$ et ses sous-semi-groupes A^+, P^+, $\bar{P}^+$, $G^+ = \left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F \\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^* \end{smallmatrix}\right) \cap G$, etc.

Si M est un H-module de type analytique [i.e., un espace de type LF (limite inductive de fréchets : $M = \varinjlim_s \varprojlim_r M^{[r,s]}$, où les $M^{[r,s]}$ sont des banachs) muni d'une action de H se prolongeant, par continuité, en une action de $\mathscr{D}(H^0)$ si H^0 est un sous-groupe ouvert compact de H], on note $C^\bullet_{\mathrm{an}}(H, M)$ le complexe

$$0 \longrightarrow C^0_{\mathrm{an}}(H,M) \xrightarrow{d_1} C^1_{\mathrm{an}}(H,M) \xrightarrow{d_2} \cdots,$$

où $C^n_{\mathrm{an}}(H,M)$ est l'espace des fonctions localement analytiques (localement à valeurs dans un $\varprojlim_r M^{[r,s]}$ et dont la composée avec la projection sur $M^{[r,s]}$ est analytique, pour tout r) de H^n dans M (avec $C^0_{\mathrm{an}}(H,M) = M$), et d_{n+1} est la différentielle

$$d_{n+1}c(g_0,\dots,g_n) = g_0\cdot c(g_1,\dots,g_n) + \sum_{i=0}^{n-1}(-1)^{i+1}c(g_0,\dots,g_ig_{i+1},\dots,g_n) + (-1)^{n+1}c(g_0,\dots,g_{n-1}).$$

On note $H^i_{\mathrm{an}}(H,M)$ le i-ème groupe de cohomologie de ce complexe.

5.1. Quelques résultats d'annulation

5.1.1. Cohomologie de U

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $U^n = \left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi^n\mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Lemme 5.1. — *Si $\Delta \in \Phi\Gamma_{\mathrm{an}}(\mathscr{R})$, on a $H^i_{\mathrm{an}}(U^n, \Delta) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, si $i = 0, 1$*

Démonstration. — Le résultat est trivial pour $i = 0$ (car la multiplication par t est injective sur Δ). Il suffit donc de prouver le résultat pour $i = 1$, et nous allons en fait prouver que $H^1(U^n, \Delta) = 0$.

Soit $e_1, \ldots, e_h$ une base de $\pi^n \mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$. Un 1-cocycle continu sur $\left(\begin{smallmatrix} 1 & \pi^n \mathscr{O}_F \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ est complètement déterminé par ses valeurs $c_1, \ldots, c_h$ en les $\left(\begin{smallmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, la relation de cocycle étant équivalente aux relations $(\eta(e_i, T) - 1)c_j = (\eta(e_j, T) - 1)c_i$, pour tous i, j. Mais alors $\frac{c_j}{\eta(e_j,T)-1}$ est un élément de $\mathrm{Fr}(\mathscr{R}) \cdot \Delta$ ne dépendant pas de j ; on le note c. Comme les seuls zéros communs des $\eta(e_j, T) - 1$ sont les points de π^n-torsion qui forment un ensemble fini, et comme $(\eta(e_j, T) - 1)c \in \Delta$ pour tout j, on en déduit que $c \in \Delta$, et donc que notre cocycle est trivial puisque $c_j = (\eta(e_j, T) - 1)c = \left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & e_i \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1\right) \cdot c$ pour tout j.

5.1.2. Le ∇-module sur $\Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$. — Soit $r < r_{n(\Delta)}$ n'appartenant pas à l'ensemble des r_n ; il existe donc $a \geq n(\Delta)$ tel que l'on ait $r_{a+1} < r < r_a$. Soit $s = v^{[r,r]}(\pi^a \ell)$, où ℓ est, le logarithme du Lubin-Tate ; on a aussi $s = v^{[r,r]}([\pi^a] \cdot T)$ car $\ell = \frac{[\pi^a] \cdot T}{\pi^a} \cdot u$, où u est une unité sur $v_p(T) \geq r_a$ et $u(0) = 1$. On en déduit la décomposition suivante

$$\mathscr{E}^{[r,r]} = \bigoplus_{b \bmod \pi^a} \eta(b, T)\mathscr{E}^{[s,s]}([\pi^a] \cdot T) = \bigoplus_{b \bmod \pi^a} \eta(b, T)\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell).$$

Soit $(f_j)_{j \in J}$ une base de $\Delta^{[r,r]}$ sur $\mathscr{E}^{[r,r]}$.

Proposition 5.2. — *Si n est assez grand, ∇ est inversible sur $\eta(i, T)\varphi^n(\Delta^{[r,r]})$ pour tout $i \in \mathscr{O}_F^*$, l'action de $L[\nabla, \nabla^{-1}]$ se prolonge, par continuité, en une action de $\mathscr{E}^{[s,s]}(\frac{\pi^{n+a}\nabla}{\Omega})$ et les $\eta(i + \pi^a b, T)\varphi^n(f_j)$, pour $j \in J$ et b modulo π^a, forment une base de $\eta(i, T)\varphi^n(\Delta^{[r,s]})$ sur $\mathscr{E}^{[s,s]}(\frac{\pi^{n+a}\nabla}{\Omega})$.*

Démonstration. — Les identités

$$\tfrac{\pi^n \nabla}{\Omega}\big(\eta(i, T)\varphi^n(z)\big) = \eta(i, T)\big(i\pi^n \ell \varphi^n(z) + \tfrac{\pi^n \nabla}{\Omega}(\varphi^n(z))\big) = \eta(i, T)\varphi^n\big(i\ell z + \tfrac{\pi^n}{\Omega}\nabla(z)\big)$$

nous ramènent à étudier $H_{n,i}$ sur $\Delta^{[r,r]}$, où $H_{n,i}(z) = i\ell z + \frac{\pi^n}{\Omega}\nabla(z)$, et à prouver que $\Delta^{[r,r]}$ admet une structure de $\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a H_{n,i})$-module et que les $\eta(b, T)f_j$ en forment une base.

On peut écrire $\frac{1}{\Omega}\nabla$ dans la base des $\eta(b, T)f_j$ (sur $\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell)$), et donc écrire $H_{n,i}$ comme un opérateur sur $(\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$, où $I = J \times (\mathscr{O}_F/\pi^a)$, de la forme $H_{n,i}(z) = i\ell z + \pi^n \tilde{\nabla}(z)$ (et $\tilde{\nabla}$ est continu car $\tilde{\nabla}(\lambda z) = \nabla\lambda \cdot z + \lambda\tilde{\nabla} z$, si $\lambda \in \mathscr{E}^{[s,s]}$ et $z \in (\mathscr{E}^{[s,s]})^I$). On est ramené à prouver le résultat suivant, où l'on note $(e_j)_{j \in I}$ la base canonique de $(\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$.

Lemme 5.3. — *Soit $\tilde{\nabla}$ un opérateur continu sur $(\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$. Alors, si n est assez grand, l'opérateur $H_{n,i}$ défini par $H_{n,i}(z) = i\ell z + \pi^n \tilde{\nabla}(z)$ admet un inverse continu sur $(\mathscr{E}^{[s,s]})^I$, qui fait de $(\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$ un $\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a H_{n,i})$-module libre, dont les e_j forment une base.*

Démonstration. — La continuité de $\tilde{\nabla}$ implique qu'il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $h_{n,i} = \frac{\pi^n}{i\ell}\tilde{\nabla}$ soit contractante sur $(\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$ pour tout $n \geq n_0$: il existe un entier $C > 0$ tel que l'on ait $v(h_{n,i}(z)) \geq C + v(z)$, pour tous $z \in (\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a \ell))^I$ et $n \geq n_0$, où v est la valuation définie par $v((z_j)_{j\in I}) = \inf_{j\in I} v^{[s,s]}(z_j)$. Alors $H_{n,i}$ admet comme inverse $z \mapsto H_{n,i}^{-1}(z) = \frac{z}{i\ell} - h_{n,i}(\frac{z}{i\ell}) + h_{n,i}^2(\frac{z}{i\ell}) - \cdots$ En particulier,

$$v((\pi^a H_{n,i})^{-1}(z) - \frac{z}{i\pi^a\ell}) \geq v(z) - v^{[s,s]}(\pi^a\ell) + C,$$

et une récurrence immédiate permet de montrer que

$$v((\pi^a H_{n,i})^k(z) - (i\pi^a\ell)^k z) \geq v(z) + kv^{[s,s]}(\pi^a\ell) + C, \quad \text{pour tous } k \in \mathbf{Z} \text{ et } z \in (\mathscr{E}^{[s,s]}(\pi^a\ell))^I.$$

Ceci implique que si $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k(\pi^a\ell)^k$ converge dans $\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a\ell)$, alors $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k(\pi^a H_{n,i})^k(z)$ converge dans $(\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a\ell))^I$ pour tout $z \in (\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a\ell))^I$, et donc que $(\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a\ell))^I$ est un $\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a H_{n,i})$-module. Par ailleurs, les mêmes estimées montrent que l'application $(F_j(\pi^a\ell))_{j\in I} \mapsto \sum_{j\in I} F_j(\pi^a H_{n,i}) \cdot e_j$ est une isométrie (et donc une injection) de $(\mathscr{E}^{[r,s]}(\pi^a\ell))^I$ dans lui-même qui induit l'identité sur la boule unité modulo p^C ; elle est donc aussi surjective, ce qui permet de conclure.

Corollaire 5.4. — *Si r n'est pas de la forme r_a, alors ∇ est inversible sur $\Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ pour tout n assez grand.*

5.1.3. Cohomologie de A^0 sur $\Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$. — Si $m \geq 1$, soit $A^m = \left(\begin{smallmatrix} 1+\pi^m\mathscr{O}_F & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, et soit $A^0 = \left(\begin{smallmatrix} \mathscr{O}_F^* & 0 \\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$.

Théorème 5.5. — *Si $\Delta \in \Phi\Gamma_{\mathrm{an}}(\mathscr{R})$, alors $H^i_{\mathrm{an}}(A^m, \Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*) = 0$ pour tout $m \in \mathbf{N}$, si $i = 0, 1$.*

Démonstration. — Pour $i = 0$, cela résulte de ce que ∇ est injectif sur $\Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ car inversible sur $\Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, pour tout n assez grand, si r n'est pas de la forme r_a.

Pour $i = 1$, il suffit de prouver le résultat pour $m \geq 1$ (car $H^1(A^m, M) = H^0(A^m/A^{m+1}, H^1(A_{m+1}, M))$ si M est un L-espace vectoriel) ; nous allons en fait prouver que tout cocycle continu $a \mapsto c_a$, sur $1 + \pi^m\mathscr{O}_F$, est trivial (on identifie A^m à $1 + \pi^m\mathscr{O}_F$ de la manière évidente). Pour cela, fixons :

- $e_1, \dots, e_h$ une base de $\mathscr{O}_F$ sur $\mathbf{Z}_p$.
- $r < r_{n(\Delta)}$ pas de la forme r_a, tel que $c(i) = c_{1+\pi^m e_i} \in \Delta^{]0,r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, pour $1 \leq i \leq h$.

Le cor. 5.4 fournit, pour tout n assez grand, des éléments $\alpha(n,i)$ de $\Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, pour $1 \leq i \leq h$, vérifiant $\nabla\alpha(n,i) = c(i)$. Mais alors

$$\beta(n,i) = \tfrac{\nabla}{\sigma_{1+\pi^m e_i}-1} \cdot \alpha(n,i) = \tfrac{1}{\log(1+\pi^m e_i)}\Big(1 - \tfrac{\sigma_{1+\pi^m e_i}-1}{2} + \tfrac{(\sigma_{1+\pi^m e_i}-1)^2}{3} - \cdots\Big)$$

est un élément de $\Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ vérifiant $(\sigma_{1+\pi^m e_i} - 1)\beta(n,i) = c(i)$.

Par ailleurs, la relation de cocycle et la commutativité de A^m fournit la relation $(\sigma_{1+\pi^m e_i} - 1)c(j) = (\sigma_{1+\pi^m e_j} - 1)c(i)$, d'où l'on tire

$$(\sigma_{1+\pi^m e_i} - 1)(\sigma_{1+\pi^m e_j} - 1)(\beta(n,i) - \beta(n,j)) = 0,$$

et donc $\nabla^2(\beta(n,i) - \beta(n,j)) = 0$ et $\beta(n,i) = \beta(n,j)$. Autrement dit, il existe $\beta(n) \in \Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ tel que l'on ait $(\sigma_a - 1)\beta(n) = c_a$, pour tout $a \in 1 + \pi^m\mathscr{O}_F$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que $\beta(n) \in \Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ et, pour ce faire, on peut supposer que L est sphériquement complet (si L' est un corps complet contenant L, on a $(\Delta\widehat{\otimes}_L L') \cap \Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]} = \Delta^{]0,q^{-n}r]}$).

Écrivons $\beta(n)$ sous la forme $\sum_{b\in S_n} \eta(b,T)\varphi^n(\beta(n)_b)$, où les $\beta(n)_b$ sont des éléments de $\Delta^{[r,r]}$. Si $e \in \mathscr{O}_F$, on a alors

$$(\sigma_{1+\pi^n e}-1)\beta(n) = \sum_{b\in S_n} \eta(b,T)\varphi^n\big((\eta(be,T)-1)\beta(n)_b + \eta(be,T)((\sigma_{1+\pi^n e}-1)\beta(n)_b)\big).$$

Comme $(\sigma_{1+\pi^n e}-1)\beta(n) \in \Delta^{]0,r]}$ on en déduit que

$$(\eta(be,T)-1)\beta(n)_b + \eta(be,T)((\sigma_{1+\pi^n e}-1)\beta(n)_b) \in \psi^n(\Delta^{]0,r]}) \subset \Delta^{]0,r]},$$

pour tout $b \in \mathscr{O}_F$. On peut utiliser ce qui précède pour $e = b^{-1}e_1, \ldots, b^{-1}e_h$, et injecter l'existence de $\lambda_1, \ldots, \lambda_h \in \mathscr{R}^+$ tels que $T = \sum_{i=1}^h \lambda_i \cdot (\eta(e_i,T)-1)$ (cette existence résulte de ce que le seul zéro commun des $\eta(e_i,T)-1$ est $T=0$, et de ce que l'on a supposé L sphériquement complet, ce qui fait de $\mathscr{R}^+$ un anneau de Bézout d'après un résultat de Lazard [**23**]). On en déduit que

$$\beta(n)_b + F_{b,n}(\beta(n)_b) \in \Delta^{]0,r]}, \quad \text{avec } F_{b,n} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^h \lambda_i\eta(e_i,T)(\sigma_{1+\pi^n b^{-1}e_i}-1).$$

Maintenant, si n est assez grand, $F_{b,n}$ est contractante sur $\Delta^{[q^{-1}r,r]}$ (si $\log(1+\pi^n b^{-1}e_i) = \pi^n\delta$, on a $\sigma_{1+\pi^n b^{-1}e_i}-1 = \pi^n\delta\nabla + \frac{1}{2}(\pi^n\delta\nabla)^2 + \cdots$). On en déduit l'appartenance de $\beta(n)_b$ à $\Delta^{[q^{-1}r,r]}$ et donc celle de $\beta(n)$ à $\Delta^{[q^{-n-1}r,q^{-n}r]}$. Comme $\Delta^{[q^{-n-1}r,q^{-n}r]} \subset \Delta^{[q^{-n-1}r,q^{-n-1}r]}$, on en déduit que $\beta(n) = \beta(n+1)$, et donc que $\beta(n) \in \cap_{k\in\mathbf{N}}\Delta^{[q^{-n-k-1}r,q^{-n-k}r]} = \Delta^{]0,q^{-n}r]}$.

Ceci permet de conclure.

5.2. Extensions de (φ,Γ)-modules et cohomologie de A^+.— Les extensions analytiques de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ sont classifiées par $H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$. (Si E est une extension de $\mathscr{R}$ par $\mathscr{R}(\delta)$, on choisit un relèvement e de $1 \in \mathscr{R}$ dans E, et alors $g \mapsto (g-1)\cdot e$ est un 1-cocycle analytique sur A^+ dont la classe ne dépend pas du choix de e.)

Le calcul de $H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ se fait en utilisant la suite exacte $0 \to \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta \to \mathscr{R}(\delta) \to \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta \to 0$ de A^+-modules. On note :

- Φ^+ le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\pi^{\mathbf{N}} & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et $\varphi = \left(\begin{smallmatrix}\pi & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ son générateur,
- A^0 le groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathscr{O}_F^* & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ et, σ_a, si $a \in \mathscr{O}_F^*$, l'élément $\left(\begin{smallmatrix}a & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ de A^0.

On a $A^+ = \Phi^+ \times A^0$, ce qui permet de dévisser la cohomologie de A^+. Par ailleurs, on peut souvent simplifier les calculs en passant à l'algèbre de Lie : si M est muni d'une action localement analytique de A^+ (et donc en particulier d'un opérateur $\nabla = \lim_{a\to 1}\frac{\sigma_a-1}{a-1}$ commutant à A^+), on note $H^i_{\mathrm{Lie}}(A^+,M)$ les groupes de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow M \xrightarrow{x\mapsto(\nabla x,(\varphi-1)x)} M\oplus M \xrightarrow{(a,b)\mapsto(\varphi-1)a-\nabla b} M \longrightarrow 0\ .$$

On dispose d'une application naturelle $H^i_{\rm an}(A^+,M)\to H^0(A^0,H^i_{\rm Lie}(A^+,M))$, envoyant le cocycle $g\mapsto c(g)$ sur $(c'(1),c(\varphi))$.

Lemme 5.6. — *Si* $M\in\{\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta,\ \mathscr{R}(\delta),\ {\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta\}$ *l'application naturelle* $H^i_{\rm an}(A^+,M)\to H^0(A^0,H^i_{\rm Lie}(A^+,M))$ *est un isomorphisme.*

Démonstration. — Recopier la preuve de [**17**, th. 4.2].

On peut dévisser les groupes $H^i_{\rm Lie}(A^+,M)$ sous la forme

$$\begin{aligned}
H^0_{\rm Lie}(A^+,M) &= M^{\nabla=0,\varphi=1} = H^0_{\rm Lie}(A^0,H^0(\Phi^+,M))\\
H^1_{\rm Lie}(A^+,M) &= \big[\big(M^{\varphi=1}/\nabla\big)-\big(M/(\varphi-1)\big)^{\nabla=0}\big)\big]\\
&= \big[H^1_{\rm Lie}(A^0,H^0(\Phi^+,M))-H^0_{\rm Lie}(A^0,H^1(\Phi^+,M))\big]\\
H^2_{\rm Lie}(A^+,M) &= M/(\nabla,\varphi-1) = H^1_{\rm Lie}(A^0,H^1(\Phi^+,M))
\end{aligned}$$

(On pourrait renverser les rôles de $\varphi-1$ et ∇ pour la description du H^1, mais le conoyau de $\varphi-1$ a, en général, de meilleures propriétés topologiques que celui de ∇.)

Remarquons que ∇ agit trivialement sur $H^i_{\rm Lie}(A^0,M)$, $H^i_{\rm Lie}(A^+,M)$, et donc que A^0 agit de manière localement constante sur ces groupes. Il s'ensuit que prendre les invariants par A^0 est exact, et donc que l'on a :

$$\begin{aligned}
H^0_{\rm an}(A^+,M) &= H^0_{\rm an}(A^0,H^0(\Phi^+,M))\\
H^1_{\rm an}(A^+,M) &= \big[H^1_{\rm an}(A^0,H^0(\Phi^+,M))-H^0_{\rm an}(A^0,H^1(\Phi^+,M))\big]\\
H^2_{\rm an}(A^+,M) &= H^1_{\rm an}(A^0,H^1(\Phi^+,M))
\end{aligned}$$

5.3. Cohomologie de Φ^+. — Soit $\delta\in\widehat{\mathscr{T}}(L)$.

5.3.1. Les groupes $H^i(\Phi^+,{\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ et $H^i(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})$. — La proposition suivante détermine la structure de $H^i(\Phi^+,M)$, comme A^0 module, si $M={\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$ ou $M=\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$. On a bien évidemment $H^i(X,M)=0$, si $i\neq 0,1$.

Proposition 5.7. — (i) $H^0(\Phi^+,{\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)=0$.

(ii) *Si $\delta(\pi)\notin\{\pi^i,\ i\in\mathbf{N}\}$, alors*
- $H^0(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})=H^1(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})=0$,
- $H^1(\Phi^+,{\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)\cong{\rm LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta$

(iii) *Si $\delta(\pi)=\pi^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, alors*[20]
- $H^0(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})\cong H^1(\Phi^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})\cong L(x^i\delta^{-1})$,

20. Si η est un caractère de $\mathscr{O}_F^*$, on note $L(\eta)$ le L-espace vectoriel de dimension 1 sur lequel $\sigma_a\in A^0$ agit par multiplication par $\eta(a)$.

• $H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ *vit dans une suite exacte*

$$0 \to L(x^{-i}\delta) \longrightarrow \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta \longrightarrow H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta) \longrightarrow L(x^{-i}\delta) \longrightarrow 0$$

Démonstration. — $H^0(\Phi^+, M\otimes\delta)$ est le noyau de $\delta(\pi)\varphi - 1$ agissant sur M, et $H^1(\Phi^+, M\otimes\delta)$ est son conoyau. La proposition est donc la combinaison des lemmes 5.9 et 5.10 ci-dessous.

Remarque 5.8. — Dans le cas $\delta(\pi) = \pi^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, le sous-espace $L(x^{-i}\delta)$ de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta$ est la droite engendrée par $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^i$, l'application de $H^1(\Phi^+, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ dans $L(x^{-i}\delta)$ est celle qui envoie le cocyle $g \mapsto \phi_g$ sur $\phi_g^{(i)}(0)$.

5.3.2. Action de φ sur $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$

Lemme 5.9. — *Soit $\alpha \in L^*$. Alors $1-\alpha\varphi : \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F) \to \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ est injectif*

De plus :

• *si $\alpha \notin \{\pi^i,\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ est un supplémentaire de $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$.*

• *Si $\alpha = \pi^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, alors $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*) \cap (1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ est la droite $L\cdot\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^i$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*) + (1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ est l'orthogonal de $\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$.*

Démonstration. — Si ϕ est dans le noyau de $1-\alpha\varphi$, on a $\phi = \alpha^n\varphi^n(\phi)$, pour tout n. Par suite ϕ est à support dans $\pi^n\mathscr{O}_F$ pour tout n, et donc est identiquement nulle par continuité en 0. D'où l'injectivité de $1-\alpha\varphi$.

Si $(1-\alpha\varphi)\phi$ est à support dans $\mathscr{O}_F^*$, on a $\psi((1-\alpha\varphi)\phi) = 0$, et donc $(\psi-\alpha)\cdot\phi = 0$ et $\phi(x) = \alpha^{-1}\phi(\pi x)$, pour tout x. Alors $\phi(x) = \alpha^{-n}\phi(\pi^n x)$, pour tout x, ce qui montre que ϕ est analytique sur $\mathscr{O}_F$ tout entier, et que si $\phi(x) = \sum_{i\geq 0} a_i x^i$ sur $\mathscr{O}_F$, alors $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i(1-\alpha^{-1}\pi^i)x^i$ est identiquement nul sur $\mathscr{O}_F$. Ceci implique que $a_i(1-\alpha^{-1}\pi^i) = 0$, pour tout i ; on en déduit que l'intersection de $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ et de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ est nulle si $\alpha \notin \{\pi^i,\ i \in \mathbf{N}\}$ et est la droite $L\cdot\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^i$, si $\alpha = \pi^i$ avec $i \in \mathbf{N}$.

Par ailleurs, si $\phi \in \mathrm{An}(\pi^n\mathscr{O}_F)$ (et vérifie $\phi^{(i)}(0) = 0$ dans le cas $\alpha = \pi^i$), on peut écrire ϕ sous la forme $\sum_{j=0}^{+\infty} a_j\mathbf{1}_{\pi^n\mathscr{O}_F}x^j$ (avec $a_i = 0$ si $\alpha = \pi^i$) et alors la fonction $\phi - (1-\alpha\varphi)\big(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{a_j}{1-\alpha\pi^{-j}}\mathbf{1}_{\pi^{n-1}\mathscr{O}_F}x^j\big)$ est identiquement nulle sur $\pi^n\mathscr{O}_F$. Il s'ensuit que l'on peut écrire tout élément ϕ de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ (vérifiant $\phi^{(i)}(0) = 0$ dans le cas $\alpha = \pi^i$), sous la forme $\phi_1 + (1-\alpha\varphi)\phi_2$, avec ϕ_1 nulle dans un voisinage de 0 et donc de la forme $\sum_{n=0}^{N}\phi_{1,n}$, avec $\phi_{1,n}$ à support dans $\pi^n\mathscr{O}_F^*$. On peut alors écrire $\phi_{1,n}$ sous la forme $\varphi^n\psi^n(\phi_{1,n}) = (1-(1-\alpha\varphi))^n\psi^n(\alpha^{-n}\phi_{1,n})$, et un développement de $(1-(1-\alpha\varphi))^n$ exprime $\phi_{1,n}$ comme la somme d'un élément de $(1-\alpha\varphi)\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)$ et de $\psi^n(\alpha^{-n}\phi_{1,n})$ qui est à support dans $\mathscr{O}_F^*$.

On en déduit le résultat.

5.3.3. Action de φ sur $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$

Lemme 5.10. — *Soit $\alpha \in L^*$.*

(i) *Si* $\alpha \notin \{\pi^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, *alors* $1-\alpha\varphi : \mathscr{D}(\mathscr{O}_F) \to \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ *est un isomorphisme.*

(ii) *Si* $\alpha = \pi^{-i}$, *avec* $i \in \mathbf{N}$, *le noyau de* $1-\alpha\varphi : \mathscr{D}(\mathscr{O}_F) \to \mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ *est* $L \cdot \mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$ *et* $1-\alpha\varphi$ *induit un isomorphisme de* $\{\mu \in \mathscr{D}(\mathscr{O}_F),\ \int_{\mathscr{O}_F} x^i\mu = 0\}$ *sur lui-même.*

Démonstration. — On utilise l'isomorphisme $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F) \cong \mathscr{R}^+$ fourni par la transformée d'Amice-Katz. Soit $k > -v_\pi(\alpha)$ un entier. Si $f \in \mathscr{R}^+$ a un zéro d'ordre $\geq k$ en 0, la série $\sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha^n\varphi^n(f)$ converge dans $\mathscr{R}^+$ vers un élément g ayant un zéro d'ordre $\geq k$ en 0 et vérifiant $(1-\alpha\varphi)\cdot g = f$. Il s'ensuit que $1-\alpha\varphi$ induit une bijection de $T^k\mathscr{R}^+$. On conclut en remarquant que $\mathscr{R}^+/T^k\mathscr{R}^+ = \oplus_{j=0}^{k-1} Lt^j$ et $(1-\alpha\varphi)\cdot t^j = (1-\alpha\pi^j)t^j$ (pour retraduire ce qu'on obtient en termes de distribution, il suffit alors de remarquer que la transformée d'Amice-Katz de $\mathrm{d}^i\mathrm{Dir}_0$ est t^i).

5.4. Cohomologie de A^0

Soit $\eta : \mathscr{O}_F^* \to L^*$ un caractère localement F-analytique. On voit η comme un caractère de A^0 de la manière habituelle.

Lemme 5.11. — (i) *Si* $\eta \neq 1$, *alors* $H^i_{\mathrm{an}}(A^0, L(\eta)) = 0$, *si* $i = 0, 1$.

(ii) $H^0_{\mathrm{an}}(A^0, L) = L$ *et* $H^1_{\mathrm{an}}(A^0, L)$ *est le* L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $\sigma_a \mapsto \log a$.

Démonstration. — Le résultat concernant H^0 est immédiat. Maintenant, ∇ agit par multiplication par $\kappa(\eta)$ sur $L(\eta)$, et donc $H^1_{\mathrm{Lie}}(A^0, L(\eta))$ est nul (et donc a fortiori $H^1_{\mathrm{an}}(A^0, L(\eta)))$ sauf si η est localement constant où il est égal à $L(\eta)$. On en déduit le résultat concernant la dimension en passant au H^0 ; la description explicite du H^1 dans le cas $\eta = 1$ est alors immédiate une fois que l'on connaît la dimension.

Proposition 5.12. — (i) $\nabla + \kappa(\eta)$ *est surjectif sur* $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$ *et son noyau est l'ensemble des* $\phi\,\eta$, *avec* ϕ *localement constante.*

(ii) $H^0_{\mathrm{an}}(A^0, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*) \otimes \eta)$ *est le* L*-espace vectoriel de dimension* 1 *engendré par* $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}\eta$, *et* $H^1_{\mathrm{an}}(A^0, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*) \otimes \eta) = 0$.

Démonstration. — $\nabla\phi(x) = \lim_{a\to 1} \frac{\phi(x/a)-\phi(x)}{a-1} = -x\phi'(x)$. Il s'ensuit que

$$(\nabla + \kappa(\eta))(\phi\,\eta) = -x(\phi'\eta + \kappa(\eta)x^{-1}\phi\,\eta) + \kappa(\eta)\phi\,\eta = \nabla(\phi)\,\eta.$$

Quitte à conjuguer par la multiplication par η, on peut donc supposer que $\kappa(\eta) = 0$, auquel cas le (i) est équivalent à la surjectivité de $\phi \mapsto \phi'$ et à ce qu'une fonction localement F-analytique de dérivée nulle est localement constante.

Comme $\nabla(\phi \otimes \eta) = ((\nabla + \kappa(\eta))\phi) \otimes \eta$, le (ii) est une conséquence immédiate du (i) en prenant les points fixes sous A^0.

5.5. Cohomologie de A^+

5.5.1. A valeurs dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$ *et* $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1}$

Proposition 5.13. — (i) *Si* $\delta\notin\{x^i,\ i\in\mathbf{N}\}$, *alors*
- $H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})=0$, *pour* $j=0,1,2$.
- $\dim_L H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)=0,1,0$, *si* $j=0,1,2$.

(ii) *Si* $\delta=x^i$, *avec* $i\in\mathbf{N}$, *alors*
- $\dim_L H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta^{-1})=1,2,1$ *si* $j=0,1,2$.
- $\dim_L H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)=0,2,1$, *si* $j=0,1,2$.

Démonstration. — On a (utiliser les remarques suivant le lemme 5.6) :
- $\dim_L H^0_{\mathrm{an}}(A^+,M)=\dim_L H^0_{\mathrm{an}}(A^0,H^0(\Phi^+,M))$,
- $\dim_L H^1_{\mathrm{an}}(A^+,M)=\dim_L H^0_{\mathrm{an}}(A^0,H^1(\Phi^+,M))+\dim_L H^1_{\mathrm{an}}(A^0,H^0(\Phi^+,M))$
- $\dim_L H^2_{\mathrm{an}}(A^+,M)=\dim_L H^1_{\mathrm{an}}(A^0,H^1(\Phi^+,M))$.

La proposition est donc une conséquence immédiate des prop. 5.7 et 5.12 sauf si $\delta(\pi)=\pi^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, où il faut travailler un peu plus pour calculer $H^j_{\mathrm{an}}(A^0,H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta))$. Supposons donc que $\delta(\pi)=\pi^i$, avec $i\in\mathbf{N}$ et notons simplement LA le module $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$.

- Soit $X=\big(\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)/L\cdot(\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^i)\big)\otimes\delta$. La prop. 5.7 fournit une suite exacte $0\to X\to H^1(\Phi^+,\mathrm{LA})\to L(x^{-i}\delta)\to 0$. Comme $H^1_{\mathrm{an}}(A^0,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta)=0$ (prop. 5.12), la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte $0\to L(x^{-i}\delta)\to\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta\to X\to 0$ et le lemme 5.11 montrent que $H^0_{\mathrm{an}}(A^0,X)$ a même dimension que $H^0_{\mathrm{an}}(A^0,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\delta)$, c'est-à-dire 1, et que $H^1_{\mathrm{an}}(A^0,X)=0$. On déduit alors de la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte $0\to X\to H^1(\Phi^+,\mathrm{LA})\to L(x^{-i}\delta)\to 0$, et de la nullité de $H^1_{\mathrm{an}}(A^0,X)$, que :

$$\dim H^0_{\mathrm{an}}(A^0,H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}))=1+\dim H^0_{\mathrm{an}}(A^0,L(x^{-i}\delta))=\begin{cases}1 & \text{si } \delta\neq x^i,\\ 2 & \text{si } \delta=x^i,\end{cases}$$

$$\dim H^1_{\mathrm{an}}(A^0,H^1(\Phi^+,\mathrm{LA}))=\dim H^1_{\mathrm{an}}(A^0,L(x^{-i}\delta))=\begin{cases}0 & \text{si } \delta\neq x^i,\\ 1 & \text{si } \delta=x^i.\end{cases}$$

Proposition 5.14. — (i) *Si* $\delta\notin\{x^i,\ i\in\mathbf{N}\}$, *alors* $H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ *est de dimension* 1, *engendré par la classe du cocycle* $g\mapsto(g-1)\cdot((\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}\delta)\otimes\delta)$.

(ii) *Si* $\delta=x^i$, *avec* $i\in\mathbf{N}$, *alors l'application envoyant* ℓ *sur la classe du cocycle* $g\mapsto(g-1)\cdot((\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^i\ell)\otimes\delta)$ *induit un isomorphisme de l'espace* $\mathrm{Hom}(F^*,L)$, *de dimension* 2, *sur* $H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$.

Démonstration. — Il est clair sur la construction que l'on a bien défini des cocycles. Comme les espaces au départ et à l'arrivée ont la même dimension, il suffit donc, pour conclure, de vérifier que les cocycles ainsi construits ne sont pas des cobords. Autrement dit, que l'on ne peut pas avoir $(g-1)\cdot((\phi-f)\otimes\delta)=0$, pour tout

$g\in A^+$, avec $\phi\in\mathrm{LA}$ et $f=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}\delta$ ou $f=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^i\ell$, ce qui est clair car la condition $(\varphi-1)\cdot((\phi-f)\otimes\delta)=0$ implique que ϕ et f coïncident sur $\mathscr{O}_F-\{0\}$.

5.5.2. A valeurs dans $\mathscr{R}(\delta)$

Lemme 5.15. — (i) *$H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))=0$ si $\delta\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$ et $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))=L\cdot t^i\otimes\delta$, si $\delta=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$.*

(ii) *L'application naturelle $H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)\to H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ est injective.*

Démonstration. — On déduit de la nullité (cf. prop. 5.13) de $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta\chi^{-1})$ le (ii) et le fait que $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ est isomorphe à $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$, et donc est nul (resp. de dimension 1) si $\delta\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$ (resp. si $\delta=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$). Pour conclure, il suffit de constater que $t^i\otimes x^{-i}$ est bien invariant par A^+.

Théorème 5.16. — *Les $H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ sont des L-espaces vectoriels de dimension finie. Plus précisément :*

- *Si $\delta\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}\cup\{x^i\chi,\ i\in\mathbf{N}\}$, alors $\dim H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))=0,1,0$, si $j=0,1,2$.*
- *Si $\delta=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$, alors $\dim H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))=1,2,0$, si $j=0,1,2$.*
- *Si $\delta=x^i\chi$, avec $i\in\mathbf{N}$, alors $\dim H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))=0,2,1$, si $j=0,1,2$.*

Démonstration. — La dimension de $H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ se calcule en utilisant la suite exacte longue de cohomologie déduite de la suite exacte $0\to\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta\to\mathscr{R}(\delta)\to\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta\to 0$ et la prop. 5.13 pour la dimension de la cohomologie des deux termes extérieurs.

• Si $\delta\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$, on a $H^j_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)=0$, pour tout j, ce qui nous fournit un isomorphisme

$$H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))\cong H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta),$$

et permet de déduire la dimension de $H^i_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ de la prop. 5.13.

• Si $\delta=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$, la nullité de $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta)$ fournit un isomorphisme $H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)\cong H^0_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$, ce qui fournit la dimension du H^0.

Pour prouver la nullité du H^2, il suffit, puisque $H^2_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta)=0$ (prop. 5.13 (i)), de prouver que l'application $H^2_{\mathrm{Lie}}(A^+,\mathscr{D}\otimes\delta)\to H^2_{\mathrm{Lie}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ est identiquement nulle. Or $H^2_{\mathrm{Lie}}(A^+,M)=M/(\varphi-1,\nabla)$ et il résulte du lemme 5.10 que $(\varphi-1)(\mathscr{D}\otimes\delta)$ est le sous-espace de codimension 1 des μ vérifiant $\int_{\mathscr{O}_F}x^i\mu=0$. Soit H l'élément construit au n° 2.5.2. Comme $t^i\otimes x^{-i}$ est stable par A^0, on a $\nabla(t^iH\otimes\delta)=(t^i\nabla H)\otimes x^{-i}$. Or, d'après le lemme 2.17, il existe $\lambda\in\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)$ dont la transformée d'Amice-Katz est ∇H, et $\int_{\mathscr{O}_F}\mu=\frac{q-1}{q}$. La transformée inverse λ_i de $t^i\nabla H$ est $\mathrm{d}^i\lambda$, et donc $\int_{\mathscr{O}_F}x^i\lambda_i=i!\frac{q-1}{q}\neq 0$. On en déduit que $(\varphi-1,\nabla)\cdot\mathscr{R}(\delta)$ contient $\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$, ce qui permet de conclure.

Enfin, pour calculer le H^1, on utilise la nullité de $H^2_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{R}(\delta))$ établie ci-dessus. On en déduit que l'application $H^1_{\mathrm{an}}(A^+,\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\chi^{-1}\delta)\to H^2_{\mathrm{an}}(A^+,\mathscr{D}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ est un isomorphisme pour des raisons de dimension ; il en est donc de même de l'application $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{D}(\mathscr{O}_F) \otimes \delta) \to H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ puisque $H^0_{\mathrm{an}}(A^+, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F) \otimes \chi^{-1}\delta) = 0$. Il s'ensuit que $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ est de dimension 2.

Remarque 5.17. — Il résulte de la démonstration que :

- L'application naturelle de $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$ dans $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathrm{LA}(\mathscr{O}_F) \otimes \chi^{-1}\delta)$ est un isomorphisme si $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$.
- Si $\delta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$, cette application est identiquement nulle, et l'injection de $L\,t^i \otimes x^{-i}$ dans $\mathscr{R}(x^{-i})$ induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, Lt^i \otimes x^{-i}) \cong H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$; plus généralement, si $N \geq i$, l'injection de $\oplus_{n \leq N} L\,t^n \otimes x^{-i}$ dans $\mathscr{R}(x^{-i})$ induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \oplus_{n \leq N} L\,t^n \otimes x^{-i}) \cong H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta))$.

5.6. Cohomologie de $\bar{P}^+$

Soient $\delta_1, \delta_2, \eta \in \widehat{\mathscr{T}_{\mathrm{an}}}(L)$, et soit

$$\omega = \eta\delta_1\delta_2\chi^{-1}.$$

Comme $\bar{P}^+$ stabilise $\mathscr{O}_F$, le sous-module $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathscr{O}_F$ de $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est stable par $\bar{P}^+$. On note $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$ le $\bar{P}^+$-module

$$\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta) = \big(\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathscr{O}_F\big) \otimes \delta_2^{-1}.$$

Notons $\mathscr{R}^+(\delta_1, \delta_2, \eta)$ le sous-module de $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$ correspondant à $\mathscr{R}^+$, et $\mathscr{R}^-(\delta_1, \delta_2, \eta)$ le quotient de $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$ par $\mathscr{R}^+(\delta_1, \delta_2, \eta)$. On a donc des isomorphismes de $\bar{P}^+$-modules

$$\mathscr{R}^+(\delta_1, \delta_2, \eta) \cong (B(\chi\delta_1^{-1}, \chi\delta_1^{-1}\eta^{-1}) \boxtimes \mathscr{O}_F)^* \otimes \delta_2^{-1}$$
$$\mathscr{R}^-(\delta_1, \delta_2, \eta) \cong (B(\delta_1, \delta_2\eta) \boxtimes \mathscr{O}_F) \otimes \delta_2^{-1}.$$

Par ailleurs, en tant que A^+-modules, $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$, $\mathscr{R}^+(\delta_1, \delta_2, \eta)$ et $\mathscr{R}^-(\delta_1, \delta_2, \eta)$ sont respectivement isomorphes à $\mathscr{R}^+(\delta_1\delta_2^{-1})$, $\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1})$ et $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F) \otimes \delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}$. Comme on connaît $H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ (th. 5.16), le résultat suivant permet de calculer $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta))$.

Proposition 5.18. — *L'application de restriction de $\bar{P}^+$ à A^+ induit un isomorphisme $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)) \cong H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ dans les cas suivants :*

- *η est localement constant,*
- *$\delta_1\delta_2^{-1} = |\ |$ et η est quelconque,*
- *$\delta_1\delta_2^{-1} = 1$ et η est quelconque.*

Dans les autres cas, $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)) = 0$, sauf, peut-être, si $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$ avec $i \geq 1$ et $\kappa(\eta) = 1$.

Démonstration. — L'injectivité fait l'objet du lemme 5.22 ; la démonstration de la surjectivité est différente suivant que $\delta_1\delta_2^{-1} \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$ ou que $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{N}$.

• Si $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$, on part du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\rm an}(A^+,\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1})) \arrow[d] \\ H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)) \arrow[r] & H^1_{\rm an}(A^+,{\rm LA}\otimes\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}) \end{tikzcd}$$

Les flèches verticales sont des isomorphismes d'après la rem. 5.17 (pour celle de droite) et le lemme 5.27 (pour celle de gauche), et celle du bas en est un d'après le lemme 5.24, ce qui prouve que celle du haut en est un aussi, ce que l'on cherche à démontrer.

• Si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$, les deux flèches verticales du diagramme précédent sont nulles, et au lieu de la projection de $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ sur $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)$, on utilise le sous-module $L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)$ de $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ engendré par les t^j, pour $j\leq N$ (en ayant pris $N\geq i$). On a alors un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} H^1_{\rm an}(\bar P^+,L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)) \arrow[r] \arrow[d] & H^1_{\rm an}(A^+,L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)) \arrow[d] \\ H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)) \arrow[r] & H^1_{\rm an}(A^+,\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1})) \end{tikzcd}$$

La flèche du bas est injective d'après le lemme 5.22, comme on l'a mentionné plus haut. La flèche de droite est un isomorphisme d'après la rem. 5.17 et celle du haut en est un d'après le lemme 5.21 ; il s'ensuit que celle du bas est surjective, et donc est un isomorphisme ce que l'on cherchait à prouver.

Remarque 5.19. — La preuve montre que la flèche de gauche est aussi un isomorphisme. Autrement dit, on a prouvé que, *si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, avec $i\geq 1$, et si $\kappa(\eta)\neq 1$, l'application naturelle $H^1_{\rm an}(\bar P^+,L_N(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta))$ est un isomorphisme si N est assez grand.*

5.6.1. Le $\bar P$-module $L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)$ et sa cohomologie. — Si $n\in\mathbf{N}$, notons ${\rm Dir}_0^{[n]}$ la dérivée divisée n-ième de la masse de Dirac en 0 (vue comme élément du dual de $B(\chi,\delta_1^{-1},\chi\delta_2^{-1}\eta^{-1})$ qui n'est autre que $\mathscr{R}^+(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$; dans cette identification, ${\rm Dir}_0^{[n]}$ correspond à $\frac{t^n}{n!}\otimes\delta_1$). Si $N\in\mathbf{N}$, on note $L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)$ le L-espace vectoriel engendré par les ${\rm Dir}_0^{[n]}$, pour $n\leq N$.

Lemme 5.20. — (i) *Si $\delta:F^*\to L^*$ est un caractère, et si $\kappa\in L$, les formules*

$$\left(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_n=a^n\delta(a)e_n\ \text{ et }\ \left(\begin{smallmatrix}1&0\\b&1\end{smallmatrix}\right)\cdot e_n=\sum_{i=0}^n\binom{\kappa-i}{n-i}b^{n-i}e_i,\ \textit{si } a\in F^* \textit{ et } b\in F,$$

définissent, pour tout $N\in\mathbf{N}$, une structure de $L[\bar P^+]$-module $L_N(\delta,\kappa)$ sur $\oplus_{n=0}^N L\cdot e_n$.

(ii) *Si $N\in\mathbf{N}$, alors $L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)$ est stable par $\bar P^+$, et isomorphe à $L_N(\delta,\kappa)$, avec $\delta=\delta_1\delta_2^{-1}$ et $\kappa=\kappa(\eta\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1})$.*

Démonstration. — On peut déduire le (i) du (ii) puisque le couple $(\delta_1\delta_2^{-1}, \kappa(\eta\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}))$ est arbitraire. Comme la formule $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Dir}_0^{[n]} = a^n\delta(a)\mathrm{Dir}_0^{[n]}$ est immédiate sur l'identification de $\mathrm{Dir}_0^{[n]}$ avec $(\frac{t^n}{n!} \otimes \delta_1) \otimes \delta_2^{-1}$, il suffit de prouver que $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Dir}_0^{[n]} = \sum_{i=0}^n \binom{\kappa-i}{n-i} b^{n-i}\mathrm{Dir}_0^{[i]}$. Or

$$\int_{\mathbf{P}^1} \phi\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot \mathrm{Dir}_0^{[n]} = \int_{\mathbf{P}^1} \eta\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}(1+bx)\phi\left(\tfrac{x}{1+bx}\right) \mathrm{Dir}_0^{[n]},$$

et comme $\eta\delta_2\delta_1^{-1}\chi^{-1}(1+bx) = (1+bx)^\kappa$ au voisinage de 0, la formule à démontrer est une conséquence de l'identité

$$\tfrac{1}{n!}\left[(1+bx)^\kappa\phi\left(\tfrac{x}{1+bx}\right)\right]^{(n)} = \sum_{i=0}^n \binom{\kappa-i}{n-i} b^{n-i}(1+bx)^{\kappa-n-i}\tfrac{1}{i!}\phi^{(i)}\left(\tfrac{x}{1+bx}\right).$$

(Cette identité se démontre par récurrence sur n en utilisant les formules

$$((1+bx)^{\kappa-n-i})' = (\kappa-n-i)b(1+bx)^{\kappa-n-i-1} \quad \text{et} \quad \left[\phi\left(\tfrac{x}{1+bx}\right)\right]' = (1+bx)^{-2}\phi'\left(\tfrac{x}{1+bx}\right);$$

le passage de n à $n+1$ se fait grâce à l'identité

$$(\kappa-n-i)\binom{\kappa-i}{n-i} + i\binom{\kappa-i+1}{n-i+1} = (n+1)\binom{\kappa-i}{n-i+1}$$

qui se démontre en mettant $\frac{(\kappa-i)\cdots(\kappa-n+1)}{(n-i+1)!}$ en facteur : on est alors ramené à vérifier que $(n+1-i)(\kappa-n-i) + i(\kappa-i+1) = (n+1)(\kappa-n)$, ce qui ne pose pas de problème.)

Lemme 5.21. — (i) *Si $\delta \notin \{x^{-i},\ i \in \mathbf{N}\}$, alors $H^j_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, L_N(\delta,\kappa)) = 0$ pour tous $j, N \in \mathbf{N}$ et $\kappa \in L$.*

(ii) *Si $\delta = 1$, alors $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, L_N(\delta,\kappa)) \to H^1_{\mathrm{an}}(A^+, L_N(\delta,\kappa)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*, L)$ est un isomorphisme pour tout κ.*

(iii) *Si $\delta = x^{-i}$ avec $i \geq 1$, et si $N > i$, alors $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, L_N(\delta,\kappa)) = 0$ si $\kappa \neq i, i-1$, et l'application $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, L_N(\delta,\kappa)) \to H^1_{\mathrm{an}}(A^+, L_N(\delta,\kappa)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*, L)$ est un isomorphisme si $\kappa = i-1$ et est identiquement nulle si $\kappa = i$.*

Démonstration. — On utilise la suite exacte $1 \to \bar{U} \to \bar{P}^+ \to A^+ \to 1$ pour dévisser la cohomologie de $\bar{P}^+$. On vérifie facilement, en utilisant l'action infinitésimale de $\bar{U}$, que $H^0_{\mathrm{an}}(\bar{U}, L_N(\delta,\kappa))$ est l'espace engendré par e_0 si $\kappa \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$ et est l'espace engendré par e_0 et $e_{\kappa+1}$ dans le cas contraire ; il est donc isomorphe à $L(\delta)$ ou $L(\delta) \oplus L(\delta x^{\kappa+1})$ en tant que A^+-module.

De même, $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{U}, L_N(\delta,\kappa))$ est l'espace engendré par e_N si $\kappa \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$ et est l'espace engendré par e_N et e_κ dans le cas contraire ; il est donc isomorphe à $L(\delta x^N)$ ou $L(\delta x^N) \oplus L(\delta x^\kappa)$ en tant que A^+-module.

Comme $H^i_{\mathrm{an}}(A^+, L(\eta)) = 0$, pour tout i, si $\eta \neq 1$, on en déduit le (i). Le reste se démontre via la suite spectrale de Hochshild-Serre (ou, plus simplement, la suite d'inflation-restriction).

5.6.2. Injectivité de la restriction de $\bar{P}^+$ à A^+

Lemme 5.22. — *Si M est un des modules $\mathscr{R}^?(\delta_1,\delta_2,\eta)$, avec $? \in \{\ ,+,-\}$, la restriction $H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,M)\to H^1_{\rm an}(A^+,M)$ est injective sauf si $\delta_1\delta_2=x^{-i}$ avec $i\geq 1$, $\kappa(\eta)=1$ et $M=\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ ou $\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2,\eta)$.*

Démonstration. — Notons M_1, M_2 et M_3 respectivement les $\bar{P}^+$-modules $\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2,\eta)$, $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ et $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)$. On a une suite exacte $0\to M_1\to M_2\to M_3\to 0$. Par ailleurs, en tant que A^+-modules, M_1, M_2 et M_3 sont respectivement isomorphes à $\mathscr{R}^+(\delta_1\delta_2^{-1})$, $\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1})$ et ${\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}$. Le cas de M_2 se déduit donc, par une chasse au diagramme, des cas de M_1 et M_3 en utilisant l'injectivité de $H^1_{\rm an}(A^+,\mathscr{R}^+(\delta_1\delta_2^{-1}))\to H^1_{\rm an}(A^+,\mathscr{R}(\delta_1\delta_2^{-1}))$ (cf. lemme 5.15 (ii)).

Soit $g\mapsto c_g$ un 1-cocycle sur $\bar{P}^+$ dont l'image dans $H^1_{\rm an}(A^+,M)$ est nulle. Quitte à retrancher à $g\mapsto c_g$ un 1-cobord, on peut supposer que $c_g=0$ pour tout $g\in A^+$. La relation $\alpha(\pi^k)u(\pi^{k+1})=u(\pi)\alpha(\pi^k)$ se traduit par l'identité $\alpha(\pi^k)\cdot c_{u(\pi^{k+1})}=c_{u(\pi)}$, et comme $\alpha(\pi^k)$ envoie M dans $M\boxtimes\pi^k\mathscr{O}_F$, on en déduit que $c_{u(\pi)}$ est à support $\{0\}$.

• Dans le cas de M_3, cela prouve que $c_{u(\pi)}=0$ et donc que $c_g=0$ pour tout g, ce que l'on cherchait à démontrer (sans condition).

• Dans le cas de M_1, cela prouve que $c_{u(\pi)}$ est de la forme $\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_i t^i\otimes\delta_1\delta_2^{-1}$, où la série $\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_iX^i$ est de rayon de convergence infini. On a alors $c_{u(\pi^{k+1})}=\sum_{i\in\mathbf{N}}\alpha_i(\pi^{-i}\delta_1^{-1}\delta_2(\pi))^k t^i\otimes\delta_1\delta_2^{-1}$. Or $c_{u(\pi^{k+1})}$ tend vers 0 quand k tend vers $+\infty$, et donc $\alpha_i=0$ si $i>v_p(\delta_2(\pi))-v_p(\delta_1(\pi))$. Il s'ensuit que le cocycle $g\mapsto c_g$ est à valeurs dans $\oplus_{i\leq N}L\ t^i\otimes\delta_1\delta_2^{-1}\cong L_N(\delta_1,\delta_2,\eta)$, si N est assez grand, ce qui permet d'utiliser le lemme 5.21 pour conclure.

Corollaire 5.23. — (i) *Si $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$, alors $H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2,\eta))=0$ et l'application naturelle $H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))$ est injective.*

(ii) *Si $\delta_1\delta_2^{-1}=x^{-i}$, avec $i\in\mathbf{N}$, et si $\kappa(\eta)=0$, l'application naturelle $H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))$ est identiquement nulle.*

Démonstration. — Le (i) résulte de ce que $H^1_{\rm an}(A^+,M_1)=0$ sous l'hypothèse du corollaire (prop. 5.13 (i)).

Le (ii) résulte de l'énoncé analogue pour A^+ (rem. 5.17) et du lemme 5.22.

5.6.3. Cohomologie des séries principales

Lemme 5.24. — *$H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))=0$ sauf si η est localement constant ou si $\delta_1\delta_2^{-1}=|\ |$ où la restriction de $\bar{P}^+$ à A^+ induit un isomorphisme*

$$H^1_{\rm an}(\bar{P}^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))\cong H^1_{\rm an}(A^+,{\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}).$$

Démonstration. — Notons M le $\bar{P}^+$-module $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))\cong(B(\delta_1,\eta\delta_2)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F)\otimes\delta_2^{-1}$; en tant que A^+-module M est isomorphe à ${\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta$, avec

$$\delta=\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}.$$

Quitte à modifier notre cocycle par un cobord (et à multiplier tout par une constante), on peut supposer que l'image dans $H^1_{\rm an}(A^+,{\rm LA}(\mathscr{O}_F)\otimes\delta)$ est de la forme $g\mapsto(g-1)\cdot h$, avec $h=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}\delta$ si δ n'est pas analytique en 0 (i.e. pas de la forme x^i avec $i\in\mathbf{N}$) $h=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^i\ell$, avec $\ell\in{\rm Hom}(F^*,L)$, si $\delta=x^i$ avec $i\in\mathbf{N}$.

On rajoute à ${\rm LA}(\mathscr{O}_F)$ les combinaisons linéaires des translatés de h par $\bar P^+$ (i.e. des fonctions de la forme $\eta\delta(a-bx)h\big(\frac{x}{a-bx}\big)$ pour $\left(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\right)\in\bar P^+$), et on étend l'action de $\bar P^+$ à l'espace M' ainsi obtenu. Le cocycle $g\mapsto c'_g=c_g-(g-1)\cdot h$, à valeurs dans M', est alors nul sur A^+. La relation $\alpha(\pi^k)u(\pi^{k+1})=u(\pi)\alpha(\pi^k)$ se traduit par l'identité $\alpha(\pi^k)\cdot c'_{u(\pi^{k+1})}=c'_{u(\pi)}$, et comme $\alpha(\pi^k)$ envoie $\mathscr{O}_F$ dans $\pi^k\mathscr{O}_F$, on en déduit que $c'_{u(\pi)}$ est à support $\{0\}$ et donc est nul. Autrement dit, on a $c_{u(\pi)}=(u(\pi)-1)\cdot h$.

Comme $\bar P^+$ est topologiquement engendré par $u(\pi)$ et A^+, il s'ensuit que $c_g=(g-1)\cdot h$ pour tout $g\in\bar P^+$. Si $g=\left(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\right)$, cette relation devient

$$c_g(x)=\eta\big(\tfrac{a}{a-bx}\big)\delta(a-bx)h\big(\tfrac{x}{a-bx}\big)-h(x). \tag{5.25}$$

Cette fonction est localement analytique sauf, peut-être, au voisinage de 0 où elle coïncide avec :

- $x\mapsto\big(\eta\big(\frac{a}{a-bx}\big)-1\big)\delta(x)$ si δ n'est pas de la forme x^i, avec $i\in\mathbf{N}$,
- $x\mapsto\big(\eta\big(\frac{a}{a-bx}\big)-1\big)x^i\ell(x)-\eta\big(\frac{a}{a-bx}\big)x^i\ell(a-bx)$ si $\delta=x^i$ et $i\in\mathbf{N}$.

Il s'ensuit que c_g est analytique autour de 0 pour tout $g\in\bar P^+$ si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :

- η est localement constant, car alors $\eta=1$ dans un voisinage de 0 et donc c_g est identiquement nul dans un voisinage de 0 (si δ n'est pas de la forme x^i, avec $i\in\mathbf{N}$; dans le cas contraire, c'est vrai du terme $x\mapsto\big(\eta\big(\frac{a}{a-bx}\big)-1\big)x^i\ell(x)$ tandis que l'autre est localement anaytique).
- $\delta(x)=\frac{1}{x}$ et η est quelconque car le zéro de $x\mapsto\eta\big(\frac{a}{a-bx}\big)-1$ compense le pôle de $\frac{1}{x}$.

On en déduit le résultat.

Remarque 5.26. — $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)$ est un sous-$\bar P^+$-module de $B(\delta_1,\delta_2\eta)\otimes\delta_2^{-1}$, et on peut donc s'intéresser à l'image de l'application naturelle de $H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))$ dans $H^1_{\rm an}(\bar P^+,B(\delta_1,\delta_2\eta)\otimes\delta_2^{-1})$. Il résulte de la démonstration ci-dessus que les éléments de $H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))$ sont représentés par des cocycles de la forme $g\mapsto c_g$, où c_g est donné par la formule (5.25).

- *Si $\eta=1$ et si δ n'est pas de la forme x^i, avec $i\in\mathbf{N}$*, alors $h=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}\delta$, et on a aussi $c_g(x)=-\delta(a-bx)h^+\big(\frac{x}{a-bx}\big)+h^+(x)=((1-g)\cdot h^+)(x)$, si $h^+=h-\delta=\mathbf{1}_{F-\mathscr{O}_F}\delta$. Or $h^+\in B(\delta_1,\delta_2)$, et donc *l'application naturelle*

$$H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\rm an}(\bar P^+,B(\delta_1,\delta_2\eta)\otimes\delta_2^{-1})$$

est identiquement nulle.

- *Si $\eta=1$ et si $\delta=x^i$, avec $i\in\mathbf{N}$*, alors $h=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^i\ell$, avec $\ell\in{\rm Hom}_{\rm an}(F^*,L)$. Si $\ell^+=\mathbf{1}_{\mathbf{P}^1-\mathscr{O}_F}\delta$, alors $x^i\ell^+\in E_\ell$, où E_ℓ est l'extension de $W(\delta_1,\delta_2)$ par ${\rm St}^{\rm an}(\delta_1,\delta_2)$

de la prop. 4.6, et $c_g = (1-g)\cdot(x^i\ell^+)$ dans $E_\ell\otimes\delta_2^{-1}$. Il s'ensuit que *l'application naturelle*

$$H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,E_\ell\otimes\delta_2^{-1})$$

est identiquement nulle.

• *Si $\delta = x^{-1}$ et $\eta = x^{-i}$, avec i entier ≥ 1,* les polynômes de degré $\leq i-1$ forment un sous-$\bar P^+$-module $W(\delta_1,\delta_2x^{-i})\otimes\delta_2^{-1}$ de $B(\delta_1,\delta_2x^{-i})\otimes\delta_2^{-1}$ (le quotient est $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2x^{-i})\otimes\delta_2^{-1}$). Maintenant, notre cocycle devient $g\mapsto(g-1)\cdot\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^{-1}$. Or on peut encore mettre ce cocycle sous la forme $(g-1)\cdot(x^{-1}-\mathbf{1}_{F-\mathscr{O}_F}x^{-1})$, et comme $\mathbf{1}_{F-\mathscr{O}_F}x^{-1}\in B(\delta_1,\delta_2x^{-i})$ et $\big(\big(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\big)-1\big)\cdot x^{-1}=\frac{1}{x}\big((1-\frac{b}{a}x)^i-1\big)$ est un polynôme de degré $\leq i-1$, on en déduit que *l'application naturelle*

$$H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2x^{-i})\otimes\delta_2^{-1})$$

est identiquement nulle.

5.6.4. Descente de $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ à une série principale

Lemme 5.27. — *L'application naturelle $H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta))\to H^1_{\mathrm{an}}(\bar P^+,\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta))$ est un isomorphisme, si $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$.*

Démonstration. — On a déjà prouvé (cor. 5.23) que cette application est injective. Pour prouver la surjectivité, partons d'un cocycle $g\mapsto c_g$ à valeurs dans $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)$. Comme $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$, on peut, quitte à tout multiplier par une constante, supposer que $c_g=(g-1)\cdot h$, où h la fonction ci-dessus, est localement analytique en dehors de 0, et sa restriction à $\pi^n\mathscr{O}_F^*$ est à valeurs dans $\alpha^n\mathscr{O}_L$, où $\alpha=\delta_1\delta_2^{-1}(\pi)$.

Commençons par supposer que $v_p(\alpha\chi(\pi))>0$. Soit z_0 un relèvement de $\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}h$ dans $\mathscr{R}$ et, si $n\in\mathbf{N}$, soit $z_n=(\alpha\chi(\pi))^n\varphi^n(z_0)$ de telle sorte que $\phi_{z_n}=\mathbf{1}_{\pi^n\mathscr{O}_F^*}h$. $\big[$Si $h(x)=x^i\ell(x)$, avec $i\in\mathbf{N}$ et $\ell\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L)$, il faut modifier ce qui précède, en introduisant z_0' tel que $\phi_{z_0'}=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F^*}x^i$, et poser $z_n=(\alpha\chi(\pi))^n\varphi^n(z_0-n\ell(\pi)z_0')$.$\big]$ Il est alors formellement clair que $g\mapsto c_g'=\sum_{n\in\mathbf{N}}(g-1)\cdot z_n$ est un 1-cocycle analytique qui relève $g\mapsto c_g$ puisque $\sum_{n\in\mathbf{N}}\phi_{z_n}=h$. Le problème, pour justifier cette assertion, est que la série des z_n ne converge pas dans l'espace qu'il faudrait (si elle le faisait notre cocycle serait un cobord), et donc qu'il faut faire quelques contorsions.

Si $n\in\mathbf{N}$, on pose $g_n=\big(\begin{smallmatrix}\pi^{-n}&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)g\big(\begin{smallmatrix}\pi^n&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$, et on a $g_n=\big(\begin{smallmatrix}a&0\\\pi^nb&1\end{smallmatrix}\big)$ si $g=\big(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\big)$, ce qui fait que les g_n vivent dans un compact si g varie dans un compact.

Soit $r=v_\pi(\alpha)$, et soit X le sous-$\mathscr{O}_L$-module de $L[[T]]+T^{-1}L[[T^{-1}]]$ engendré par l'image de la boule unité de $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F)$ (cf. rem. 2.5) par la transformée d'Amice-Katz et $T^{-1}\mathscr{O}_L\{T^{-1}\}$ (séries en T^{-1} à coefficients dans $\mathscr{O}_L$ tendant vers 0 à l'infini). On pose $z_0'=0$ si h n'est pas de la forme $x^i\ell(x)$ de manière à avoir des formules uniformes. On peut prendre z_0 et z_0' dans $\pi^{-N}X$, si N est assez grand, et alors $g_n\cdot z_0$ et $g_n\cdot z_0'$ appartiennent à $\pi^{-N}X$, pour tout n (quitte à augmenter N un peu) : cela résulte de la rem. 4.13. Alors la série

$$\sum_{n\in\mathbf{N}}(g-1)\cdot z_n=\sum_{n\in\mathbf{N}}(\alpha\chi(\pi))^n\varphi^n\big((g_n-1)\cdot(z_0-n\ell(\pi)z_0')\big)$$

converge dans $\pi^{-N}X$, et la somme appartient à $\mathscr{R}_r$ puisque $\sum_{n\in\mathbf{N}}(g-1)\cdot\phi_{z_n}=(g-1)\cdot h=c_g$ est localement analytique sur $\mathscr{O}_F$.

Il résulte de ce qui précède que $g\mapsto c_g'$ est un 1-cocycle sur $\bar{P}^+$, à valeurs dans $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ (et même dans $\mathscr{R}_r(\delta_1,\delta_2,\eta)$ avec des notations évidentes), qui relève $g\mapsto c_g$. Pour conclure, il suffit alors de vérifier que $g\mapsto c_g'$ est localement analytique . Pour cela, il suffit de le vérifier, grâce à la propriété de cocycle, dans un voisinage de $g=1$. Or

$$\big(\big(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\big)-1\big)\cdot z_0=\ell(a)z_0'+y(a,b)\ \text{ et }\ \big(\big(\begin{smallmatrix}a&0\\b&1\end{smallmatrix}\big)-1\big)\cdot z_0'=y'(a,b),$$

où y et y' sont des fonctions localement analytiques sur $\mathscr{O}_F^*\times\mathscr{O}_F$ à valeurs dans $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F)$. Notons z' la somme (dans X) de la série $\sum_{n\in\mathbf{N}}(\alpha\chi(\pi))^n\varphi^n(z_0')$; alors $z'\in\mathscr{R}_r$: c'est clair si $z_0'=0$ et si $z_0'\neq 0$, on a $\phi_{z'}=\mathbf{1}_{\mathscr{O}_F}x^i$ sur $\mathscr{O}_F-\{0\}$, et donc sur $\mathscr{O}_F$ tout entier par continuité ; en particulier, $\phi_{z'}$ est localement analytique. On peut alors écrire c_g' sous la forme

$$c_g'=\ell(a)z'+\sum_{n\in\mathbf{N}}(\alpha\chi(\pi))^n\varphi^n\big(y(a,\pi^nb)-n\ell(\pi)y'(a,\pi^nb)\big)$$

et la série définit une fonction localement analytique sur $\mathscr{O}_F^*\times\mathscr{O}_F$ à valeurs dans $\mathscr{D}_r(\mathscr{O}_F)$, ce qui permet de conclure dans le cas $v_p(\alpha\chi(\pi))>0$.

Dans le cas général, on choisit un entier $k>-v_\pi(\alpha\chi(\pi))$ et on utilise l'opérateur $\bar{P}^+$-équivariant $\partial^k:\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\to\mathscr{R}(x^k\delta_1,\delta_2,\eta)$. Soit $g\mapsto c_g$ un 1-cocycle à valeurs dans $\mathscr{R}^-(\delta_1,\delta_2,\eta)$. Comme ∂^k est $\bar{P}^+$-équivariant, $g\mapsto\partial^kc_g$ est un 1-cocycle à valeurs dans $\mathscr{R}^-(x^k\delta_1,\delta_2,\eta)$, et comme $k>-v_\pi(\alpha\chi(\pi))$, on peut utiliser le cas $v_p(\alpha\chi(\pi))>0$ pour relever ce cocycle en un cocycle $g\mapsto c_g'$ à valeurs dans $\mathscr{R}(x^k\delta_1,\delta_2,\eta)$. Par construction, si $\tilde{c}_g$ est un relèvement de c_g dans $\mathscr{R}(x^k\delta_1,\delta_2,\eta)$, alors $c_g'-\partial^k\tilde{c}_g\in\mathscr{R}^+(x^k\delta_1,\delta_2,\eta)$; il existe donc $y_g\in\tilde{c}_g+\mathscr{R}^+(\delta_1,\delta_2,\eta)$, solution de l'équation $\partial^ky_g=c_g'$ car ∂ est surjective sur $\mathscr{R}^+$. Comme y_g n'est bien déterminé qu'à addition près d'un polynôme de degré $<k$ en t, cela implique que $(g,g')\mapsto g\cdot y_{g'}-y_{gg'}+y_g$ est un 2-cocycle à valeurs dans $L_{k-1}(\delta_1,\delta_2,\eta)$. Or l'hypothèse $\delta_1\delta_2^{-1}\notin\{x^{-i},\ i\in\mathbf{N}\}$ implique que $H^2(\bar{P}^+,L_{k-1}(\delta_1,\delta_2,\eta))=0$ (cf. lemme 5.21) et donc que l'on peut modifier y_g, en lui ajoutant un polynôme de degré $<k$ en t, de manière que $g\mapsto y_g$ soit un 1-cocycle. Par construction, ce cocycle est un relèvement de $g\mapsto c_g$, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.28. — Il ressort de la preuve que l'on peut en fait trouver un relèvement d'ordre fini, i.e. à valeurs dans $\mathscr{R}_r(\delta_1,\delta_2,\eta)$, pour un r convenable.

6. La correspondance $\Delta \mapsto \Pi(\Delta)$

Soient δ_1, δ_2 deux caractères localement analytiques de F^*. L'objet de ce chapitre est la construction, à partir d'une extension *non triviale* Δ de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, d'une représentation $\Pi(\Delta)$ de G, localement analytique, indécomposable, admettant un caractère central et dont la semi-simplifiée est la somme des semi-simplifiées de $B(\delta_1, \delta_2)$ et $B(\delta_2, \delta_1)$ (le caractère central de $\Pi(\Delta)$ est donc ω).

On note $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1))$ le groupe des extensions de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ dans la catégorie des (φ, Γ)-modules analytiques. Si $\delta = \delta_2^{-1}\delta_1$, on a

$$\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1)) \cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}, \mathscr{R}(\delta)) \cong H^1_{\mathrm{an}}(A^+, \mathscr{R}(\delta)).$$

6.1. Extensions de $\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$. — Soient δ_1, δ_2, η des caractères de F^*, et $\omega = \eta\delta_1\delta_2\chi^{-1}$. On dispose des G-modules $\mathscr{R}(\delta_i) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ et de dévissages

$$0 \to B(\delta_{3-i}\eta, \delta_i)^* \otimes \omega \to \mathscr{R}(\delta_i) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \to B(\delta_i, \delta_{3-i}\eta) \to 0.$$

La construction de $\Pi(\Delta)$ repose sur le résultat suivant.

Théorème 6.1. — *$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{an}}\big(\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1, \mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1\big)$ est naturellement isomorphe à $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}(\delta_2), \mathscr{R}(\delta_1))$ dans les cas suivants :*
- *η est localement constant,*
- *$\delta_1\delta_2^{-1} = |\ |$ et η est quelconque,*
- *$\delta_1\delta_2^{-1} = 1$ et η est quelconque.*

Dans les autres cas, ce groupe est nul, sauf, peut-être, si $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$ avec $i \geq 1$ et $\kappa(\eta) = 1$.

Démonstration. — On note :
- $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta) \boxtimes \mathbf{P}^1$ le $\bar{P}$-module [21] $\big(\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1\big) \otimes \delta_2^{-1}$.
- $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$ le sous-$\bar{P}^+$-module $(\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathscr{O}_F) \otimes \delta_2^{-1}$ de $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta) \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Le théorème s'obtient en combinant la prop. 5.18 et le résultat suivant.

Proposition 6.2. — *On dispose d'un isomorphisme naturel*

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{an}}\big(\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1, \mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1\big) \cong H^1_{\mathrm{an}}\big(\bar{P}^+, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)\big).$$

Démonstration. — Cela résulte de la combinaison des lemmes 6.3 (réciprocité de Frobenius qui permet de descendre de G à $\bar{P}$), 6.4 (lemme de Shapiro pour descendre de $\bar{P}$ à $\bar{P}^+$) et 6.5 (descente de $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta) \boxtimes \mathbf{P}^1$ à $\mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta)$).

Lemme 6.3. — $\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{an}}\big(\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1, \mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1\big) \cong H^1_{\mathrm{an}}\big(\bar{P}, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, \eta) \boxtimes \mathbf{P}^1\big)$.

Démonstration. — $\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est le dual de $\mathrm{Ind}_B^G\big(\chi\delta_1^{-1}\eta^{-1} \otimes \delta_2^{-1}\big) \cong \mathrm{Ind}_{\bar{B}}^G\big(\delta_2^{-1} \otimes \chi\delta_1^{-1}\eta^{-1}\big)$, et donc

$$\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{an}}\big(\mathscr{R}^+(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1, \Pi) \cong \mathrm{Ext}^1_{\bar{B},\mathrm{an}}(\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1\eta, \Pi),$$

21. Si δ est un caractère de F^*, on voit aussi δ comme un caractère de $\bar{P}$ en posant $\delta\big(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{smallmatrix}\big) = \delta(a)$.

si Π est une représentation de G de type analytique (lemme de Shapiro, cf. [**22**, th. 5.7]). Maintenant, on ne s'intéresse qu'aux représentations avec un caractère central, et comme $\delta_2\otimes\chi^{-1}\delta_1\eta$ et $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ ont même caractère central, à savoir ω, on ne change pas le groupe d'extensions en passant de $\bar B$ à $\bar P$. Le résultat s'en déduit.

Lemme 6.4. — *Si M est un $\bar P$-module, la restriction de $\bar P$ à $\bar P^+$ induit un isomorphisme $H^1_{\rm an}(\bar P,M)\cong H^1_{\rm an}(\bar P^+,M)$.*

Démonstration. — L'injectivité est une conséquence de ce que $\bar P^+$ engendre $\bar P$. Plus précisément, si $g\in\bar P$, il existe $n\in\mathbf{N}$ tel que $g\alpha^n\in\bar P^+$, où l'on a posé $\alpha=\alpha(\pi)$, et la relation de cocycle fournit la formule $c_g=c_{g\alpha^n}-g\cdot c_{\alpha^n}$. Réciproquement, si $h\mapsto c_h$ est un 1-cocycle sur $\bar P^+$, la formule précédente ne dépend pas du choix de n tel que $g\alpha^n\in\bar P^+$ car $c_{g\alpha^{n+1}}=g\alpha^n\cdot c_\alpha$, si $g\alpha^n\in\bar P^+$, et $c_{\alpha^{n+1}}=\alpha^nc_\alpha+c_{\alpha^n}$. Elle définit un 1-cocycle sur $\bar P^+$ car :

- $c_{h\alpha^{n+m}}=\alpha^n\cdot c_{\alpha^{-n}h\alpha^{n+m}}+c_{\alpha^n}$ et donc $c_{\alpha^{-n}h\alpha^{n+m}}=\alpha^{-n}(c_{h\alpha^{n+m}}-c_{\alpha^n})$, si $\alpha^{-n}h\alpha^{n+m}\in\bar P^+$,
- Si $g\alpha^n\in\bar P^+$ et $\alpha^{-n}h\alpha^{n+m}\in\bar P^+$, alors

$$\begin{aligned}c_{gh}&=c_{(g\alpha^n)(\alpha^{-n}h\alpha^{n+m})}-gh\cdot c_{\alpha^{n+m}}\\&=g\alpha^n\cdot(c_{\alpha^{-n}h\alpha^{n+m}})+c_{g\alpha^n}-gh\cdot c_{\alpha^{n+m}}\\&=g\cdot(c_{h\alpha^{n+m}}-c_{\alpha^n})+c_g+g\cdot c_{\alpha^n}-gh\cdot c_{\alpha^{n+m}}\\&=g\cdot(c_h+h\cdot c_{\alpha^{n+m}})+c_g-gh\cdot c_{\alpha^{n+m}}=g\cdot c_h+c_g\end{aligned}$$

(Le passage de la deuxième ligne à la troisième utilise le point précédent.)

On en déduit la surjectivité, ce qui permet de conclure.

Lemme 6.5. — *L'inclusion $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\subset\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\boxtimes\mathbf{P}^1$ induit un isomorphisme*

$$H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta))\cong H^1_{\rm an}(\bar P^+,\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\boxtimes\mathbf{P}^1).$$

Démonstration. — Notons M et M_1, M_2 respectivement le module $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\boxtimes\mathbf{P}^1$ et ses sous-modules $\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)$ et $(\mathscr{R}(\delta_1,\delta_2,\eta)\boxtimes(\mathbf{P}^1-\mathscr{O}_F))$. Les sous-modules M_1 et M_2 sont stables par $\bar P^+$ et on a $M=M_1\oplus M_2$, ce qui permet de ramener l'énoncé à démontrer à la nullité de $H^1_{\rm an}(\bar P^+,M_2)$.

Commençons par prouver que $H^1_{\rm an}\big(\big(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\big),M_2\big)=0$. En conjuguant par $w\big(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$, on est ramené à prouver que $H^1_{\rm an}\big(\big(\begin{smallmatrix}1&\pi\mathscr{O}_F\\0&1\end{smallmatrix}\big),\mathscr{R}\big)=0$, ce qui est un cas particulier du lemme 5.1.

Soit maintenant, $g\mapsto c_g$ un 1-cocyle sur $\bar P^+$, à valeurs dans M_2. Quitte à retrancher un cobord, on peut, d'après ce qui précède, s'arranger pour que $c_g=0$ pour tout $g\in\big(\begin{smallmatrix}1&0\\\pi\mathscr{O}_F&1\end{smallmatrix}\big)$). Maintenant, l'identité [22] $\alpha(a)u(a\pi)=u(\pi)\alpha(a)$ fournit la relation $\alpha(a)c_{u(a\pi)}+c_{\alpha(a)}=u(\pi)c_{\alpha(a)}+c_{u(\pi)}$, et donc $c_{\alpha(a)}=u(\pi)c_{\alpha(a)}$. Comme $u(\pi)-1$ est injectif sur M_2, cela implique que $c_{\alpha(a)}=0$ pour tout $a\in\mathscr{O}_F-\{0\}$ et, comme $c_g=0$

22. Avec $\alpha(\pi)=\big(\begin{smallmatrix}\pi&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$, $\alpha(a)=\big(\begin{smallmatrix}a&0\\0&1\end{smallmatrix}\big)$ et $u(x)=\big(\begin{smallmatrix}1&0\\x&1\end{smallmatrix}\big)$.

pour tout $g \in \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ \pi\mathscr{O}_F & 1 \end{smallmatrix}\right)$ la relation de cocycle montre que $c_g = 0$ pour tout $g \in \bar{P}^+$. On en déduit le résultat.

6.2. Construction d'involutions $\mathfrak{gl}_2$-compatibles. — Soit $\Delta \in \Phi\Gamma_{\mathrm{an}}(\mathscr{R})$ vivant dans une suite exacte $0 \to \Delta_1 \to \Delta \overset{\mathrm{pr}}{\to} \mathscr{R}(\delta) \to 0$. On suppose que Δ est muni d'une action de $U(\mathfrak{gl}_2)$ prolongeant celle de $U(\mathfrak{p})$, telle que $a^+ + a^-$ agisse par multiplication par κ. On note Δ_+ l'image inverse de $\mathscr{R}^+(\delta)$ dans Δ.

Proposition 6.6. — *Si $\iota : \Delta_+ \boxtimes \mathscr{O}_F^* \to \Delta_+ \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ est une involution vérifiant les conditions suivantes :*
- *ι laisse stable $\Delta_1 \boxtimes \mathscr{O}_F^*$,*
- *ι envoie $\eta(i,T)\varphi^n(\Delta_+^{]0,r]})$ dans $\eta(\frac{1}{i},T)\varphi^n(\Delta_+^{]0,r]})$ et $\eta(i,T)\varphi^n(\Delta_1^{]0,r]})$ dans $\eta(\frac{1}{i},T)\varphi^n(\Delta_1^{]0,r]})$, et s'étend par continuité en une application de $\eta(i,T)\varphi^n(\Delta_1^{[r,r]})$ dans $\eta(\frac{1}{i},T)\varphi^n(\Delta_1^{[r,r]})$, si n est assez grand et $r \leq r(\Delta)$.*
- *ι est $\mathfrak{gl}_2$-compatible.*

Alors ι admet un unique prolongement $\mathfrak{gl}_2$-compatible à $\Delta \boxtimes \mathscr{O}_F$, et ce prolongement laisse stable $\Delta^{]0,s]} \boxtimes \mathscr{O}_F^*$ si s est assez petit.

Démonstration. — Soient $\alpha = \kappa(\delta)$ et $\beta = \kappa + 1 - \delta$. La $\mathfrak{gl}_2$-compatibilité de ι implique, en particulier, que

$$\iota \circ (\nabla + 1 - \alpha) = (\beta - \nabla) \circ \iota.$$

Choisissons un relèvement e de $1 \otimes \delta$ dans Δ ; quitte à remplacer e par $\delta(\pi)^N \psi^N(e)$, pour N assez grand, on peut supposer que $e \in \Delta^{]0,r(\Delta)]}$, ce que nous ferons. On pose

$$e_{n,i} = \eta(i,T)\varphi^n(e), \quad \text{si } n \in \mathbf{N} \text{ et } i \in \mathscr{O}_F^*.$$

Soit $z \in \Delta \boxtimes \mathscr{O}_F^*$, et soit $r \geq r(\Delta)$ tel que $z \in \Delta^{]0,r]}$. Quitte à diminuer r, on peut supposer que r n'est pas de la forme r_m, pour $m \in \mathbf{N}$.

Choisissons aussi un système S_n de représentants de $\mathscr{O}_F^*$ modulo π^n. Si $n \in \mathbf{N}$, on peut écrire z sous la forme $\sum_{i \in S_n} \eta(i,T)\varphi^n(z_{n,i})$, avec $z_{n,i} \in \psi^n(\Delta^{]0,r]}) \subset \Delta^{]0,r]} \subset \Delta^{[r,r]}$.

Fixons $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que les conclusions de la prop. 5.2 s'appliquent pour $n \geq n_0$ (on pose $s = v^{[r,r]}(\pi^a \ell)$, où a est tel que $r_{a+1} < r < r_a$ comme dans cette proposition). Il résulte alors de cette proposition que l'on peut écrire $\mathrm{pr}(z)$ sous la forme

$$\mathrm{pr}(z) = \sum_{i \in S_n} F_i\big(\tfrac{\pi^{n+a}(\nabla + 1 - \alpha)}{\Omega}\big) \cdot \mathrm{pr}(e_{n,i}),$$

où $e_{n,i} = \eta(i,T)\varphi^n(e)$ et $F_i \in \mathscr{E}^{[s,s]}$. Mais alors $z - \sum_{i \in S_n} F_i\big(\frac{\pi^{n+a}(\nabla+1-\alpha)}{\Omega}\big) \cdot e_{n,i}$ appartient à $\oplus_{i \in S_n} \eta(i,T)\varphi^n(\Delta_1^{[r,r]})$, et on doit (et peut) avoir

$$\iota(z) = \iota\big(z - \sum_{i \in S_n} F_i\big(\tfrac{\pi^{n+a}(\nabla+1-\alpha)}{\Omega}\big) \cdot e_{n,i}\big) + \sum_{i \in S_n} F_i\big(\tfrac{\pi^{n+a}(\beta - \nabla)}{\Omega}\big) \cdot \iota(e_{n,i}),$$

où le terme dans le second membre définit un élément de $\oplus_{i\in S_n}\eta(i,T)\varphi^n(\Delta^{[r,r]})$. Il reste à vérifier que ce qu'on obtient est indépendant du choix de n, est à valeurs dans $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, et que l'application ι ainsi définie est bien $\mathfrak{gl}_2$-compatible.

• Notons $\iota_n(z)$ la valeur de $\iota(z)$ correspondant au choix de n. S'il existe $k\in\mathbf{N}$ tel que $(\nabla+1-\alpha)^k(z)\in\Delta_+$, alors $(\nabla+1-\alpha)^kF_i\big(\frac{\pi^{n+a}(\nabla+1-\alpha)}{\Omega}\big)$ est une série entière en $\nabla+1-\alpha$. On en déduit que $(\beta-\nabla)^k\iota\big(z-\sum_{i\in S_n}F_i\big(\frac{\pi^{n+a}(\nabla+1-\alpha)}{\Omega}\big)\big)$, qui est égal à $\iota\big((\nabla+1-\alpha)^kz-\sum_{i\in S_n}(\nabla+1-\alpha)^kF_i\big(\frac{\pi^{n+a}(\nabla+1-\alpha)}{\Omega}\big)\big)$ grâce à la $\mathfrak{gl}_2$ compatibilité dans Δ_1, est aussi égal à $\iota\big((\nabla+1-\alpha)^kz\big)-\sum_{i\in S_n}(\beta-\nabla)^kF_i\big(\frac{\pi^{n+a}(\beta-\nabla)}{\Omega}\big)\cdot\iota(e_{n,i})$, grâce à la $\mathfrak{gl}_2$-compatibilité dans Δ^+. On a donc $(\beta-\nabla)^k\iota_n(z)=\iota\big(\big(\nabla+1-\alpha)^k(z)\big)$, ce qui permet de prouver que $\iota_n(z)$ ne dépend pas de n dans le cas considéré.

Le cas général s'en déduit par continuité en remarquant que les images dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\cong\mathscr{R}(\delta)\boxtimes\mathscr{O}_F^*/\mathscr{R}(\delta)\boxtimes\mathscr{O}_F^*\cong\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*/\Delta_+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, sont exactement les fonctions localement polynomiales (poynomiales sur $i+\pi^n\mathscr{O}_F$ pour tout $i\in\mathscr{O}_F^*$) car $\nabla+1-\alpha$ induit l'opérateur $\phi\mapsto\phi'$ sur $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$, et que ces fonctions sont denses dans tous les espaces qui interviennent.

• On déduit de l'indépendance par rapport au choix de n, l'appartenance de $\iota(z)$ à $\oplus_{i\in S_n}\eta(i,T)\varphi^n\big(\Delta^{[1/e,1/e]}\big)$, et donc à $\Delta^{[q^{-n}r,q^{-n}r]}$, pour tout $n\geq n_0$, et en prenant l'intersection, celle de $\iota(z)$ à $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ (et même à $\Delta^{]0,q^{-n_0}r]}\boxtimes\mathscr{O}_F^*$).

• Enfin, pour prouver que ι est $\mathfrak{gl}_2$ compatible, il s'agit de vérifier que $\iota\circ a^+=a^-\circ\iota$ et $\iota\circ u^+=u^-\circ\iota$. Compte-tenu de ce que $a^++a^-=\alpha+\beta-1$ et $a^+=\nabla$, la première formule est équivalente à l'identité $\iota\circ(\nabla+1-\alpha)=(\beta-\nabla)\circ\iota$ qui a été utilisée dans la construction de ι. Pour prouver la seconde, il suffit de vérifier que $f=\iota\circ u^+-u^-\circ\iota$ est identiquement nulle sur $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$ sachant qu'il l'est sur $\Delta_+\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, et qu'on peut donc considérer f comme un endomorphisme de $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*/\Delta_+\boxtimes\mathscr{O}_F^*\cong\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\chi^{-1}\delta$. Or un petit calcul utilisant les formules $u^-a^--a^-u^-=-u^-$, $a^+u^+-u^+a^+=u^+$ et $\iota\circ a^+=a^-\circ\iota$ montre que l'on a $f\circ(\nabla+1-\alpha)=(\beta-\nabla)\circ f$. Comme $\beta-\nabla$ est injectif sur $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, on en déduit que f est nul sur tout élément de $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)\otimes\chi^{-1}\delta$ tué par une puissance de $\nabla+1-\alpha$, et donc sur toute fonction localement polynomiale. On conclut par densité de l'espace des fonctions localement polynomiales dans $\mathrm{LA}(\mathscr{O}_F^*)$.

6.3. Le G-module $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$. — Rappelons que

$$G^+=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F\\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^*\end{pmatrix}\cap G,\quad \bar{B}^+=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & 0\\ \pi\mathscr{O}_F & \mathscr{O}_F^*\end{pmatrix},\quad \bar{P}^+=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & 0\\ \pi\mathscr{O}_F & 1\end{pmatrix}\quad P^+=\begin{pmatrix}\mathscr{O}_F-\{0\} & \mathscr{O}_F\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Alors G^+, agissant sur $\mathbf{P}^1$, envoie $\mathscr{O}_F$ dans lui-même, et tout élément de G envoyant $\mathscr{O}_F$ dans lui-même peut s'écrire, de manière unique, sous la forme π^nh, avec $n\in\mathbf{Z}$ et $h\in G^+$.

Rappelons aussi qu'un P^+-module localement analytique peut être vu comme un (φ,Γ)-module analytique sur $\mathscr{R}^+$; il en est donc de même d'un G^+-module, par restriction à P^+.

Le résultat suivant précise l'isomorphisme $\mathrm{Ext}^1_{G,\mathrm{an}}(\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1, \mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1)\cong \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ du th. 6.1 (quand le premier groupe n'est pas nul).

Proposition 6.7. — *Soit E une extension non triviale de $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$.*

(i) *E contient un unique sous-G^+-module Δ_+ extension de $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathscr{O}_F$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathscr{O}_F$.*

(ii) *Il existe un* (unique) (φ,Γ)*-module Δ sur $\mathscr{R}$, extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, tel que Δ_+ soit l'image inverse de $\mathscr{R}^+(\delta_2)$ dans Δ.*

(iii) *$\Delta_+\boxtimes \mathscr{O}_F^*$ est stable par w et, si ι est l'involution de $\Delta_+\boxtimes \mathscr{O}_F^*$ induite par w, alors $E=\Delta_+\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$.*

(iv) *ι s'étend de manière unique en une involution $\mathfrak{gl}_2$-compatible de $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, et $\Delta\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$ est un G-module, extension de $\mathscr{R}(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — Le G^+-module $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathscr{O}_F$ est le dual de $\mathrm{Ind}_{B^+}^{G^+}\delta_2^{-1}\otimes\chi\delta_1^{-1}\eta^{-1}$. Il résulte du lemme de Shapiro et du lemme 6.5, que

$$\mathrm{Ext}^1_{G^+}(\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega \mathscr{O}_F, \mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega (\mathbf{P}^1-\mathscr{O}_F))=0.$$

On en déduit l'existence de Δ_+ et son unicité est une conséquence de l'injectivité de $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\ \pi&1\end{smallmatrix}\right)-1$ sur $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega(\mathbf{P}^1-\mathscr{O}_F)$ (ce qui apparaît aussi dans la démonstration du lemme 6.5) : si $X\subset E$ est une G^+-extension de $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F$ par $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F$, et si e est un relèvement de $1\otimes\delta_2\in\mathscr{R}^+(\delta_2)$, alors $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\ \pi&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot e\in\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F$. Mais on peut aussi écrire e sous la forme $e'+z$, avec $e'\in\Delta_+$ et $z\in\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega(\mathbf{P}^1-\mathscr{O}_F)$, et on en déduit que $\big(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\ \pi&1\end{smallmatrix}\right)-1\big)\cdot z\in\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathscr{O}_F$, et donc que $z=0$. Ceci démontre le (i).

Le (ii) est immédiat : les extensions de $\mathscr{R}^+(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ et de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$ sont classifiées par les mêmes données, à savoir le cocycle $g\mapsto(\delta_2(g)^{-1}g-1)e$ sur A^+, où e est un relèvement de $1\otimes\delta_2$.

Pour démontrer le (iii), il s'agit de vérifier que la suite $0\to\Delta_+\boxtimes\mathscr{O}_F^*\to\Delta_+\oplus\Delta_+\to E\to 0$ est exacte (la première flèche est $x\mapsto(x,-x)$, la seconde est $(y,z)\mapsto y+w\cdot z$). Or l'identité $w\left(\begin{smallmatrix}\pi&i\\ 0&1\end{smallmatrix}\right)=\left(\begin{smallmatrix}\pi&i^{-1}\\ 0&1\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}-i^{-1}&0\\ \pi&i\end{smallmatrix}\right)$, et l'appartenance de $\left(\begin{smallmatrix}-i^{-1}&0\\ \pi&i\end{smallmatrix}\right)$ à G^+ si $i\in\mathscr{O}_F^*$, impliquent que $w(\Delta\boxtimes(i+\pi\mathscr{O}_F))$ est inclus dans $\Delta\boxtimes(i^{-1}+\pi\mathscr{O}_F)$, et donc lui est égal puisque w est une involution. On en déduit la stabilité par w de $\Delta\boxtimes\mathscr{O}_F^*$, et pour terminer de démontrer le (iii), il suffit de vérifier que $(y,z)\mapsto y+w\cdot z$ induit une surjection de $\Delta_+\oplus\Delta_+$ sur E_+, ce qui résulte du fait que cette application induit des surjections de $\mathscr{R}(\delta_1)\oplus\mathscr{R}(\delta_1)$ sur $\mathscr{R}(\delta_1)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$ et de $\mathscr{R}^+(\delta_2)\oplus\mathscr{R}^+(\delta_2)$ sur $\mathscr{R}^+(\delta_2)\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$.

L'existence et l'unicité d'une extension de ι est un cas particulier de la prop. 6.6. Le reste du (iv) se démontre exactement comme la prop. 4.12 : la $\mathfrak{gl}_2$-compatibilité de ι fournit, si g est dans le noyau de $\widetilde{G}\to G$, un morphisme $g-1$ de $B(\delta_2,\delta_1)$ dans $\Delta_+\boxtimes_{\omega,\iota}\mathbf{P}^1$, qui est $\mathfrak{gl}_2$-équivariant. On montre qu'un tel morphisme est nul en remarquant que la réunion des noyaux des $(u^+)^k$ est dense dans $B(\delta_2,\delta_1)$, alors qu'elle est concentrée en ∞ dans $\Delta_+ \boxtimes_{\omega,\iota} \mathbf{P}^1$ puisque u^+ est injectif sur $\Delta_+ \boxtimes F$ (c'est la multiplication par t) ; cf. la preuve de la prop. 4.12 pour les détails.

Théorème 6.8. — *Soient Δ un (φ,Γ)-module de rang 2 sur $\mathscr{R}$, non irréductible mais indécomposable, et $\omega : F^* \to L^*$ un caractère localement analytique. Si Δ est $\kappa(\omega)$-admisible, alors Δ admet un unique prolongement en un G-faisceau sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω.*

Démonstration. — Cela résulte de la conjonction des prop. 3.4 et 6.10 qui discutent de la condition de $\kappa(\omega)$-compatibilité, de la prop. 3.8 qui fournit une décomposition

$$\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = [\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 - \mathscr{R}(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1],$$

et des th. 6.1 et prop. 6.7 qui analysent les modules de ce type.

Corollaire 6.9. — *Si Δ est une extension de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$, et si le G-faisceau $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ existe, son dual est $\check{\Delta} \boxtimes_{\omega^{-1}} \mathbf{P}^1$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la prop. 3.2.

Proposition 6.10. — *Si $\Delta = [\mathscr{R}(\delta_1) - \mathscr{R}(\delta_2)]$ est indécomposable, l'opérateur de Sen est scalaire si et seulement si on est dans un des deux cas suivants :*
- $\delta_1 = |\ |\delta_2$,
- $\delta_1 = \delta_2$ *et* $\Delta \cong \Delta(\delta_1, 0, v_p)$.

Démonstration. — En tordant par δ_2^{-1}, on se ramène au cas $\Delta = [\mathscr{R}(\delta) - \mathscr{R}]$ et $\Theta_{\rm Sen} = 0$, ce qui implique, en particulier, que $\kappa(\delta) = 0$ et donc que $\delta = 1$ dans un voisinage de 1. Soit e un relèvement dans Δ de $1 \in \mathscr{R}$. La condition $\Theta_{\rm Sen} = 0$ équivaut à $\nabla e \in t\Delta$, et comme $\nabla e \in \mathscr{R}(\delta)$, on a $\nabla(e) = tz \otimes \delta$, avec $z \in \mathscr{R}$. Par ailleurs $(1-\varphi)e = y \otimes \delta$ avec $y \in \mathscr{R}$, et on a

$$\nabla y = (1 - \delta(\pi)\varphi)tz, \quad \text{soit } \partial y = (1 - q\delta(\pi)\varphi)z.$$

Il y a deux cas :

- $q\delta(\pi) \neq 1$. La relation implique $0 = \text{rés}_0(\partial y\, dt) = (1 - q\delta(\pi))\text{rés}_0(z\, dt)$, et donc $\text{rés}_0(z\, dt) = 0$, ce qui implique qu'il existe $z' \in \mathscr{R}$ tel que $z = \partial z'$. Quitte à remplacer e par $e - z' \otimes \delta$, on peut supposer que $\nabla e = 0$. Il s'ensuit que $W = \{x \in \Delta,\ \nabla x = 0\}$ est un L-espace vectoriel de dimension 2, stable par φ et Γ, et que $\Delta = \mathscr{R} \otimes W$. Il n'est pas difficile d'en conclure, en utilisant le fait que Δ est indécomposable et $\Theta_{\rm Sen} = 0$, que $\Delta \cong \Delta(1, 0, v_p)$.
- $q\delta(\pi) = 1$. Il existe alors $z' \in \mathscr{R}$ et $\lambda \in L$ tels que $z = \partial z' + \lambda \frac{\ell'(T)}{T}$. Quitte à remplacer e par $e - z' \otimes \delta$ et à changer la base de $\mathscr{R}(\delta)$, on peut supposer que $z = \frac{\ell'(T)}{T}$. On en déduit que $y = \frac{1}{q}\log(T^q/\varphi(T))$ (à une constante près que l'on peut faire disparaître en ajoutant une constante à e), et que $(\sigma_a - 1)e = \log(\sigma_a(T)/T) \otimes \delta$

(à addition près de $\lambda\otimes\delta$ que l'on peut faire disparaître en ajoutant $\lambda' t\otimes\delta$ à e) si $\delta(a)=1$, grâce à la relation

$$\begin{aligned}(1-\varphi)((\sigma_a-1)e)=(\sigma_a-1)((1-\varphi)e)&=(\sigma_a-1)\cdot\big(\frac{1}{q}\log(T^q/\varphi(T))\otimes\delta\big)\\ &=(1-\varphi)\cdot\big(\log(\sigma_a(T)/T)\otimes\delta\big).\end{aligned}$$

Autrement dit, la restriction du cocycle $a\mapsto(\sigma_a-1)e$ au noyau de δ sur $\mathscr{O}_F^*$ est le cocycle $a\mapsto(\sigma_a-1)\cdot((\log T)\otimes\delta)$, où on fait agir σ_a sur $\log T$ par la formule évidente $\sigma_a(\log T)=\log T+\log(\sigma_a(T)/T)$. On a donc $(\sigma_a-1)e=(\sigma_a-1)\cdot\big(((\log T)\otimes\delta)+u\big)$, pour tout $a\in\mathscr{O}_F^*$, où $u\in(\mathscr{R}\oplus L\log T)\otimes\delta$ est fixe par le noyau de δ. Comme $(\sigma_a-1)e\in\mathscr{R}$, cela équivaut à ce que $\delta-1$ soit identiquement nul sur $\mathscr{O}_F^*$, et donc $\delta=|\ |$.

Ceci permet de conclure.

6.4. La représentation $\Pi(\Delta)$

Théorème 6.11. — *Si* $\eta=1$ (et donc $\omega=\chi^{-1}\det\Delta$)*, il existe une unique représentation localement analytique* $\Pi(\Delta)$ *de* G*, telle que l'on ait une suite exacte*

$$0\to\Pi(\Delta)^*\otimes\omega\to\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1\to\Pi(\Delta)\to 0.$$

De plus :

- *Si* δ *n'est pas de la forme* x^i*, avec* $i\in\mathbf{N}$*, alors* $\Pi(\Delta)=[B(\delta_1,\delta_2)-B(\delta_2,\delta_1)]$.
- *Si* $\delta=x^i$*, avec* $i\in\mathbf{N}$*, alors* $\Pi(\Delta)=[E_\ell-B(\delta_2,\delta_1)]$*, où* $\ell\in\mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*,L)$ *est déterminé par l'extension* Δ *de* $\mathscr{R}(\delta_2)$ *par* $\mathscr{R}(\delta_1)$*, et* E_ℓ *est l'extension de* $W(\delta_1,\delta_2)$ *par* $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)$ *qui lui correspond (prop. 4.6).*

Démonstration. — On peut utiliser la suite exacte de la rem. 3.8 et ce que l'on sait des composantes de Jordan-Hölder des séries principales analytiques pour filtrer $\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1$.

- Si δ n'est pas de la forme x^i, avec $i\in\mathbf{N}$, on a

$$\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1=\big[B_2^*\otimes\omega-B_1-B_1^*\otimes\omega-B_2\big],$$

où $B_1=B(\delta_1,\delta_2)$ et $B_2=B(\delta_2,\delta_1)$.

- Si $\delta=x^i$, avec $i\in\mathbf{N}$, on a $B_1=[W-\mathrm{St}^{\mathrm{an}}]$, avec

$$W=W(\delta_1,\delta_2)\cong W^*\otimes\omega\ \text{ et }\ \mathrm{St}^{\mathrm{an}}=\mathrm{St}^{\mathrm{an}}(\delta_1,\delta_2)=B(\delta_1,\delta_2)/W(\delta_1,\delta_2),$$

et donc

$$\begin{aligned}\Delta\boxtimes_\omega\mathbf{P}^1&=\big[B_2^*\otimes\omega-W-\mathrm{St}^{\mathrm{an}}-B_1^*\otimes\omega-B_2\big]\\ &=\big[B_2^*\otimes\omega-W-\mathrm{St}^{\mathrm{an}}-(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^*\otimes\omega-W-B_2\big]\end{aligned}$$

Pour démontrer le résultat, on est donc amené à prouver que l'extension au centre est scindée de manière à séparer les fréchets des limites inductives de banachs. Il y a quatre cas.

$\diamond$ Si δ n'est pas de la forme x^i ou $x^{-i}\chi^{-1}$, avec $i \in \mathbf{N}$, cela résulte du premier point de la rem. 5.26. Il s'ensuit que $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est une extension de Π_1 par $\Pi_2^* \otimes \omega$, où Π_1 et Π_2 sont des extensions de B_2 par B_1. La non trivialité de l'extension Π_2 résulte de celle de l'extension de $B_1^* \otimes \omega$ par $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$. Enfin, $\Pi_1 = \Pi_2$ car $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est autodual (à torsion près par ω).

$\diamond$ Si $\delta = x^i$, avec $i \in \mathbf{N}$, on utilise le second point de la rem. 5.26. Soit $\ell \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*, L)$ correspondant à l'extension Δ de $\mathscr{R}(\delta_2)$ par $\mathscr{R}(\delta_1)$. Notons X_ℓ l'extension de $B_1^* \otimes \omega$ par E_ℓ, définie par $X_\ell = (E_\ell \oplus X)/\mathrm{St}^{\mathrm{an}}$, où X est l'extension de $B_1^* \otimes \omega$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}}$ vivant dans $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$. Il résulte du second point de la rem. 5.26 que X_ℓ est scindée ; c'est donc une extension de $W \oplus W$ par $\mathrm{St}^{\mathrm{an}} \oplus ((\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^* \otimes \omega)$. Maintenant, X est l'image inverse dans X_ℓ de W, plongé diagonalement dans $W \oplus W$; c'est donc une extension de E_ℓ par $(\mathrm{St}^{\mathrm{an}})^* \otimes \omega$. Il s'ensuit que $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est une extension de Π_1 par $\Pi_2^* \otimes \omega$, où Π_1 est une extension non triviale de $B(\delta_2, \delta_1)$ par E_ℓ, et on montre que $\Pi_1 = \Pi_2$ en utilisant l'autodualité (à torsion près) de $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$.

$\diamond$ Si $\delta = x^{-i}\chi^{-1}$ (et donc $\delta_1\delta_2^{-1} = x^{-i}$), avec $i \geq 1$, cela résulte de ce que l'application naturelle de $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, \mathscr{R}(\delta_1, \delta_2, 1))$ dans $H^1_{\mathrm{an}}(\bar{P}^+, \mathscr{R}^-(\delta_1, \delta_2, 1))$ est identiquement nulle (cor. 5.23 (ii)).

$\diamond$ Si $\delta_1\delta_2^{-1} = 1$, on obtient des induites de représentations de dimension 2, cf. n° 6.5

Remarque 6.12. — (i) Si $\delta_1\delta_2^{-1}$ n'est pas de la forme x^{-i} ou $x^i\chi$, avec $i \in \mathbf{N}$, le th. 6.11 fournit une extension non triviale de $B(\delta_2, \delta_1)$ par $B(\delta_1, \delta_2)$; cette extension est celle dont la prop. 4.5 assure l'existence et l'unicité.

(ii) Si $\eta \neq 1$ est localement constant, le G-module $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ n'admet pas de décomposition sous la forme $[\Pi_1^* - \Pi_2]$, avec $\Pi_1, \Pi_2 \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{la}} G$.

6.5. Le cas $\mathrm{End}\,\Delta \neq L$

6.5.1. Le cas $\delta_1 = \delta_2$. — Si $\delta_1\delta_2^{-1} = 1$, et si η est quelconque, les représentations de G qui apparaissent sont toutes des induites de représentations de $\bar{B}$ (et pas seulement des extensions de telles représentations).

Soit $\ell \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*, L)$. On peut associer à ℓ le $\bar{B}$-module $W_\ell = Le_1 \oplus Le_2$, avec action de $\bar{B}$ donnée par les formules

$$\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_1 = e_1 \ \text{ et } \ \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ b & d \end{smallmatrix}\right) \cdot e_2 = e_2 + \ell(a\,d^{-1})e_1.$$

On note alors $W_\ell(\delta, \eta)$ le $\bar{B}$-module $W_\ell \otimes (\chi^{-1}\delta \otimes \delta\eta)$. Alors

$$E_\ell(\delta, \delta\eta) = \mathrm{Ind}_{\bar{B}}^G W_\ell(\delta, \eta)$$

est une extension de $B(\delta, \delta\eta)$ par elle-même admettant un caractère central.

Par ailleurs, on peut fabriquer un (φ, Γ)-module

$$\Delta(\delta, \ell) = \mathscr{R} \otimes_L W_\ell(\delta, \eta),$$

en considérant $W_\ell(\delta, \eta)$ comme un A^+-module par restriction de l'action de $\bar{B}$ (il ne dépend pas de η ; c'est le (φ, Γ)-module $\Delta(\delta, 0, \ell)$ de la prop. 3.4). On a alors une suite exacte

$$0 \to E_\ell(\delta\eta,\delta)^* \otimes \omega \to \Delta(\delta,\ell) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 \to E_\ell(\delta,\delta\eta) \to 0,$$

dans laquelle $E_\ell(\delta\eta,\delta)^* \otimes \omega$ est le sous-module $\Delta(\delta,\ell)^+ \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, où $\Delta(\delta,\ell)^+$ est le sous-module $\mathscr{R}^+ \otimes W_\ell(\delta,\eta)$ de $\Delta(\delta,\ell)$ (on remarquera que $\mathscr{R}^+ \otimes W_\ell(\delta,\eta)$ est stable par l'action de A^+ et donc est un (φ,Γ)-module sur $\mathscr{R}^+$).

Il résulte du second point du (iii) de la prop. 3.4 que le casimir n'agit par un scalaire que si $\kappa(\eta) = 0$ ou si $\ell'(1) = 0$.

6.5.2. Le cas $\delta_2 = x^i\delta_1$, avec $i \geq 1$. — Si $\ell \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{an}}(F^*, L)$, le (φ,Γ)-module $\Delta(\delta,i,\ell)$ s'identifie au sous-module de $\Delta(\delta,\ell)$, image inverse de $t^i\mathscr{R}(\delta)$ dans la suite exacte $0 \to \mathscr{R}(\delta) \to \Delta(\delta,\ell) \to \mathscr{R}(\delta) \to 0$.

Si $\omega = x^i\delta^2\chi^{-1}$, le sous-module $\Delta(\delta,i,\ell) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ de $\Delta(\delta,\ell) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ est alors stable par G, ce qui fournit une construction du prolongement de $\Delta(\delta,i,\ell)$ en un G-faisceau sur $\mathbf{P}^1$, de caractère central ω. Ce faisceau n'admet pas de caractère infinitésimal si $\ell'(1) \neq 0$.

La représentation $\Pi(\Delta(\delta,i,\ell))$ est un quotient de $E_\ell(x^i\delta,\delta)$. Plus précisément,

$$E_\ell(x^i\delta,\delta) = [B(x^i\delta,\delta) - B(x^i\delta,\delta)] = [B(x^i\delta,\delta)^{\mathrm{alg}} - B(\delta,x^i\delta) - B(x^i\delta,\delta)]$$

et $\Pi(\Delta(\delta,i,\ell))$ est le quotient de $E_\ell(x^i\delta,\delta)$ par le $B(x^i\delta,\delta)^{\mathrm{alg}}$ ci-dessus. C'est une extension de $B(x^i\delta,\delta)$ par $B(\delta,x^i\delta)$ comme il se doit.

6.6. Le cas $\delta_1\delta_2^{-1} = |\ |$

6.6.1. L'extension de $\mathscr{R}$ par $\mathscr{R}(|\ |)$. — Si $\delta_1\delta_2^{-1} = |\ |$, alors $\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{an}}(\mathscr{R}(\delta_2),\mathscr{R}(\delta_1))$ est de dimension 1 ; on note Δ l'extension non triviale correspondante. D'après le th. 6.1 et la prop. 6.7, on peut définir, pour tout η, le G-module $\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$, avec $\omega = \delta_1\delta_2\chi^{-1}\eta$, extension de $\mathscr{R}(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$ par $\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1$. Si $\eta = x^{-i}$, avec $i \in \mathbf{Z}$, ce module se dévisse de manière intéressante.

Le cas $i = 0$ est couvert par le th. 6.11 ; nous supposerons donc $i \neq 0$ dans ce qui suit et, pour alléger les notations, nous supposerons $\delta_2 = x^i$ et $\delta_1 = |\ |x^i$ (le cas général s'en déduit en tordant tout par $x^{-i}\delta_2 \circ \det$), et donc $\omega = x^{i-1}$. On note Δ_i l'extension $\mathscr{R}(x^i)$ par $\mathscr{R}(|\ |x^i)$. On a donc $\Delta_i = \Delta_0 \otimes x^i$.

On rappelle que $W_k = \mathrm{Sym}^k$ et $\mathrm{St}_k = \mathrm{St} \otimes W_k$, si $k \in \mathbf{N}$.

Proposition 6.13. — *Il existe $\Pi_i, \Pi'_i \in \mathrm{Rep}^{\mathrm{an}}(G)$ telles que*

$$\Delta_i \boxtimes_{x^{i-1}} \mathbf{P}^1 = [(\Pi'_i)^* \otimes x^{i-1} - \Pi_i].$$

De plus, $\Pi'_{-i} = \Pi_i \otimes x^{-i}$ et $\Pi_{-i} = \Pi'_i \otimes x^{-i}$ *et, si $i > 0$,*

- $\Pi_i = [B(|\ |,x^i) - W_{i-1} - B(1,x^i|\ |)]$,
- $\Pi'_i = \big[(\mathrm{St}_{i-1} \oplus \mathrm{St}_{i-1}) - B(|\ |,x^i) - W_{i-1} - B(1,x^i|\ |)\big]$.

Démonstration. — On a $\check{\Delta}_i = \Delta_{-i} \otimes x$, et donc

$$(\Delta_i \boxtimes_{x^{i-1}} \mathbf{P}^1)^* = (\Delta_{-i} \boxtimes_{x^{-i-1}} \mathbf{P}^1) \otimes x$$

On en déduit que
$$\Pi'_{-i} = \Pi_i \otimes x^{-i} \text{ et } \Pi_{-i} = \Pi'_i \otimes x^{-i}.$$
Maintenant, soient $B_1 = B(1, x^i|\ |)$ et $B_2 = B(|\ |, x^i)$. Alors
$$\mathscr{R}(\delta_1) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = [B_1^* \otimes \omega - B(x^i|\ |, 1)] \quad \text{et} \quad \mathscr{R}(\delta_2) \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = [B_2^* \otimes \omega - B(x^i, |\ |)],$$
et donc
$$\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = [B_1^* \otimes \omega - B(x^i|\ |, 1) - B_2^* \otimes \omega - B(x^i, |\ |)].$$
Par ailleurs, (cf. prop. 4.4),
$$B(x^i|\ |, 1) = [W_{i-1} - \mathrm{St}_{i-1} - B_2] \text{ et } B(x^i, |\ |) = [\mathrm{St}_{i-1} - W_{i-1} - B_1].$$
Il résulte du troisième point de la rem. 5.26 que l'extension intermédiaire de $B_2^* \otimes \omega$ par $B(x^i|\ |, 1)/W_{i-1}$ est scindée, et donc $[B(x^i|\ |, 1) - B_2^* \otimes \omega] = [W_{i-1} - B_2^* \otimes \omega - \mathrm{St}_{i-1} - B_2]$ et
$$\Delta \boxtimes_\omega \mathbf{P}^1 = [B_1^* \otimes \omega - W_{i-1} - B_2^* \otimes \omega - \mathrm{St}_{i-1} - B_2 - \mathrm{St}_{i-1} - W_{i-1} - B_1]$$
On conclut en utilisant la nullité de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}_{i-1}, B_2)$ et de $\mathrm{Ext}^1_G(\mathrm{St}_{i-1}, \mathrm{St}_{i-1})$ (prop. 4.9).

6.6.2. Application aux (φ, Γ)-modules semi-stables non cristallins. — Soit M le (φ, N)-module défini par
$$M = Le_1 \oplus Le_2, \quad \varphi(e_1) = q^{-1}e_1,\ \varphi(e_2) = e_2, \quad Ne_2 = e_1,\ Ne_1 = 0.$$
Alors [23] $\Delta = (\mathscr{R}_{\log} \otimes_L M)^{N=0}$, et $\Delta^+_{\mathrm{dif},n} = L_n[[t]] \otimes M$, si $n \geq 1$.

Si $k \geq 1$, et si $\mathscr{L}$ est une droite de M, on définit le (φ, Γ)-module $\Delta_{k,\mathscr{L}}$ par
$$\Delta_{k,\mathscr{L}} = \{z \in \Delta,\ \iota_n(z) \in L_n[[t]] \otimes \mathscr{L} + t^k L_n[[t]] \otimes M, \text{ pour tout } n \text{ assez grand}\}.$$
Alors
$$t^k\Delta \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \subset \Delta \quad \text{et} \quad \Delta/\Delta_{k,\mathscr{L}} \cong \Delta_{k,\mathscr{L}}/t^k\Delta \cong \mathscr{R}/t^k\mathscr{R}.$$
De plus
$$\Delta_{k,\mathscr{L}} = \begin{cases} [\mathscr{R}(|\ |x^k) - \mathscr{R}] \text{ et est isocline} & \text{si } \mathscr{L} \neq Le_1, \\ [\mathscr{R}(|\ |) - \mathscr{R}(x^k)] \text{ et n'est pas isocline} & \text{si } \mathscr{L} = Le_1. \end{cases}$$

Remarque 6.14. — Si $k \geq 1$, les $\Delta_{k,\mathscr{L}}$, pour $\mathscr{L} \neq Le_1$, décrivent (à torsion près par un caractère non ramifié) l'ensemble des (φ, Γ)-modules analytiques, de rang 2 sur $\mathscr{R}$, semi-stables et non cristallins, à poids de Hodge-Tate 0 et k. (Le cas $\mathscr{L} = Le_1$ produit un vilain petit canard.)

23. On note $\mathscr{R}_{\log}$ l'anneau $\mathscr{R}[\log T]$ On étend φ, σ_a et ι_n à $\mathscr{R}_{\log}$ par :
$$\varphi(\log T) = q \log T + \log \tfrac{\varphi(T)}{T^q}, \quad \sigma_a(\log T) = \log T + \log \tfrac{\sigma_a(T)}{T} \quad \text{et} \quad \iota_n(\log T) = \log([\pi^{-n}] \cdot T).$$
(Comme $\frac{\varphi(T)}{T^q} - 1$ est divisible par π, la série définissant $\log \frac{\varphi(T)}{T^q}$ converge dans $\mathscr{E}^\dagger$; celle définissant $\log \frac{\sigma_a(T)}{T}$ converge dans $\mathscr{R}^+$.) On note N la $\mathscr{R}$-dérivation de $\mathscr{R}_{\log}$ envoyant $\log T$ sur $\frac{-q}{q-1}$; on a $N\varphi = q\varphi N$ et $N\sigma_a = \sigma_a N$, si $a \in \mathscr{O}_F^*$.

Soient

$$\omega = (x|x|)^{-1} \det \Delta = x^{-1}, \quad \mathrm{LL}_p(M) = \mathrm{St} \quad \text{et} \quad \Pi(M,k) = \Pi'_k,$$

si $k \in \mathbf{Z}$ (où Π'_k est la représentation de la prop. 6.4). Le résultat suivant fait écho au th. 0.6 de [**11**].

Théorème 6.15. — (i) *Si $k \in \mathbf{Z}$, on a une suite exacte*

$$0 \to \Pi(M,k)^* \otimes x^k\omega \to \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \to \Pi(M,-k) \otimes x^k \to 0.$$

(ii) *Si $k \geq 1$,*

- $\Pi(M,k)^{\mathrm{alg}} = M \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M) \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big)$.
- *Les injections $t^k\Delta \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \subset \Delta$ se prolongent en des injections G-équivariantes*

$$t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1 \subset \Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$$

et induisent les suites exactes :

$$0 \to \Pi(M,k)^{\mathrm{alg}} \to \Pi(M,k) \to \Pi(M,-k) \otimes x^k \to 0,$$
$$0 \to \mathscr{L} \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M) \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big) \to \Pi(M,k) \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}}) \to 0,$$
$$0 \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \to \Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}}) \to \Pi(M,-k) \otimes x^k \to 0,$$

et l'isomorphisme :

$$\Pi(\Delta_{k,\mathscr{L}})^{\mathrm{alg}} \cong (M/\mathscr{L}) \otimes \big(\mathrm{LL}_p(M) \otimes \mathrm{Sym}^{k-1}\big).$$

Démonstration. — Le (i) est une traduction de la prop. 6.13. Le premier point du (ii) est une conséquence de la description de $\Pi(M,k)$ de la prop. 6.13. Le fait que $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ et $t^k\Delta \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ soient stables résulte de la prop. 2.4 de [**11**]. Par unicité (prop. 3.7), $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes_{x^k\omega} \mathbf{P}^1$ est le faisceau $\Delta_{k,\mathscr{L}} \boxtimes \mathbf{P}^1$ du th. 6.11. Le reste du théorème peut se prouver en combinant la prop. 6.13 et le second point du th. 6.11.

Références

[1] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. **148** (2002), 219–284.

[2] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[3] L. Berger, Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors, prépublication (2013).

[4] G. Chenevier, Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$, Math. Ann. **355** (2013), 1469–1525.

[5] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[6] P. Colmez, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque **330** (2010), 13–59.

[7] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[8] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 213–262.

[9] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[10] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol.1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 286–358.

[11] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, preprint 2015.

[12] P. Colmez and G. Dospinescu, Complétés universels de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[13] P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Cambridge Math. J. **2** (2014), 1–47.

[14] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[15] G. Dospinescu, Équations différentielles p-adiques et foncteurs de Jacquet analytiques, *Automorphic Forms and Galois Representations Vol.1*, London Math. Soc. Lect. Note Series **415** (2014), 359–374.

[16] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras, Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique, preprint 2015.

[17] L. Fourquaux et B. Xie, Triangulable $\mathscr{O}_F$ analytic (φ_q, Γ)-modules of rank 2, Algebra & Number Theory **7** (2013), 2545–2592.

[18] M. de Ieso, Espaces de fonctions de classe $\mathscr{C}^r$ sur $\mathscr{O}_F$, Indag. Math. **24** (2013), 530–556.

[19] H. Jacquet et R. Langlands, Automorphic forms on $\mathbf{GL}(2)$, Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[20] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[21] M. Kisin et W. Ren, Galois representations and Lubin-Tate groups, Doc. Math. **14** (2009), 441–461.

[22] J. Kohlhaase, The cohomology of locally analytic representations, J. Reine Angew. Math. **651** (2011), 187–240.

[23] M. Lazard, Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. IHES **14** (1962), 47–75.

[24] R. Liu, B. Xie, Y. Zhang, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. **45** (2012), 167–190.

[25] E. Nagel, p-adic Fourier Theory of differentiable functions, preprint 2013.

[26] P. Schneider et J. Teitelbaum, p-adic Fourier theory, Doc. Math. **6** (2001), 447–481.

[27] P. Schneider et J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to $\mathbf{GL}_2$, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 443–468.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.jussieu.fr`