LE PROGRAMME DE LANGLANDS p-ADIQUE

par

Pierre Colmez

Abstract. — We give a loose introduction to the circle of ideas around the p-adic local Langlands correspondence.

1. Introduction

L'introduction de méthodes p-adiques pour l'étude des formes modulaires (ou automorphes) a déjà une longue histoire (cf. [**127, 92, 93, 40**] pour des étapes importantes, et [**69**] pour une vue d'ensemble), mais la démonstration du théorème de Fermat par Wiles [**141**] a introduit de nouvelles techniques et donné une forte impulsion au sujet. Cela a débouché sur la création d'un avatar p-adique du programme mis au point par Langlands [**107**], mais dont les contours sont encore très flous. Dans ce texte(1), nous nous intéressons au seul cas vraiment bien compris, à savoir celui de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ pour lequel les choses marchent tellement bien qu'il est difficile de ne pas rêver à un énoncé général même si les travaux portant sur d'autres groupes montrent que la situation est plus compliquée que ce que l'étude de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ pourrait suggérer.

2. Préliminaires

2.1. Nombres p-adiques

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des nombres premiers. Si $p \in \mathscr{P}$, on note $\mathbf{Q}_p$ le complété de $\mathbf{Q}$ pour la *norme p-adique*(2) $|\ |_p$. La norme $|\ |_p$ est ultramétrique, ce qui fait que

(1) La longueur imposée a fait disparaître beaucoup de détails [**54**] que j'aurais aimé rajouter ; le lecteur pourra consulter [**22, 14, 25, 24**] pour d'autres points de vue.

(2) Si $a = p^k a' \in \mathbf{Z}$, avec a' premier à p, on définit la *valuation p-adique* $v_p(a)$ de a par $v_p(a) = k$, et on pose $v_p(0) = +\infty$; on a $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$, ce qui permet d'étendre v_p à $\mathbf{Q}$ en posant

$\mathbf{Z}_p = \{x \in \mathbf{Q}_p,\ |x|_p \leq 1\}$ est un sous-anneau de $\mathbf{Q}_p$ (c'est *l'anneau des entiers p-adiques*), et on a $\mathbf{Q}_p = \mathbf{Z}_p[\frac{1}{p}]$. Comme $\mathbf{Z}_p/p^n\mathbf{Z}_p = \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ pour tout n, on obtient une construction algébrique de $\mathbf{Q}_p$ en définissant $\mathbf{Z}_p$ comme la limite projective(3) $\varprojlim \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ des $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$, et en prenant pour $\mathbf{Q}_p$ le corps des fractions de $\mathbf{Z}_p$.

L'existence de ces deux points de vue sur $\mathbf{Q}_p$ permet de mélanger des techniques d'analyse fonctionnelle classique (espaces de Banach, de Fréchet, etc.) et des techniques très algébriques. Les § 12-16 utilisent pleinement cette possibilité.

Si L est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, la norme $|\ |_p$ et la valuation v_p s'étendent de manière unique à L, et on note $\mathscr{O}_L = \{x \in L,\ |x|_p \leq 1\}$ l'anneau des entiers de L, $\mathfrak{m}_L$ l'idéal maximal $\{x \in L,\ |x|_p < 1\}$ de $\mathscr{O}_L$, et $k_L = \mathscr{O}_L/\mathfrak{m}_L$ le corps résiduel de L ; c'est une extension finie de $\mathbf{F}_p = \mathbf{Z}_p/p\mathbf{Z}_p$.

2.2. Adèles

D'après un théorème d'Ostrowski, les complétés de $\mathbf{Q}$ sont exactement $\mathbf{R}$ et les $\mathbf{Q}_p$, pour $p \in \mathscr{P}$. Plonger $\mathbf{Q}$ dans $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{Q}_p$ revient à « localiser » en ∞ ou en p, ce qui fournit des informations « locales » et permet de définir des invariants « locaux ». Pour rétablir un point de vue « global », on utilise tous les complétés simultanément, ce qui conduit à l'anneau $\mathbf{A}$ des *adèles* de $\mathbf{Q}$: c'est l'ensemble des $(x_\infty, x_2, x_3, \dots)$, où $x_\infty \in \mathbf{R}$, $x_p \in \mathbf{Q}_p$ et $x_p \in \mathbf{Z}_p$ pour presque tout p. On plonge $\mathbf{Q}$ diagonalement dans $\mathbf{A}$, et alors $\mathbf{Q}$ est discret dans $\mathbf{A}$ (bien qu'il soit dense dans chacun des complétés), et $\mathbf{A}/\mathbf{Q}$ est un groupe compact.

3. Le mystérieux groupe $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$

Soit $\overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}$ le sous-corps des nombres algébriques. Ce corps contient des nombres comme $\sqrt{2}$, $i = \sqrt{-1}$, $\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[7]{\sqrt{2} + 3\sqrt[3]{5}}, \dots, e^{2i\pi/n}, \dots$ (tous ces nombres s'expriment à partir de $\mathbf{Q}$ par radicaux(4), mais $\overline{\mathbf{Q}}$ contient aussi des nombres qui ne peuvent pas s'écrire sous cette forme comme les racines du polynôme $X^5 - X - 1$ par exemple (Galois, 1828).) L'objet de la théorie algébrique des nombres est l'étude de ce corps $\overline{\mathbf{Q}}$, et en particulier de son groupe de symétries(5) $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ qui est un groupe topologique(6), encore fort mystérieux malgré plus de 150 ans d'investigations.

$v_p(\frac{a}{b}) = v_p(a) - v_p(b)$, et on a $v_p(x+y) \geq \inf(v_p(x), v_p(y))$, ce qui fait que $x \mapsto |x|_p = p^{-v_p(x)}$ est une norme ultramétrique (i.e. $|x+y|_p \leq \sup(|x|_p, |y|_p)$ sur $\mathbf{Q}$.

(3) Ensemble des $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n \in \mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ et, pour tout n, x_n est l'image de x_{n+1} modulo p^n.

(4) I.e. en utilisant uniquement l'addition, la multiplication et l'extraction de racines n-ièmes.

(5) Ensemble des bijections $\sigma : \overline{\mathbf{Q}} \to \overline{\mathbf{Q}}$ respectant l'addition et la multiplication (i.e. $\sigma(x+y) = \sigma(x) + \sigma(y)$ et $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ pour tous $x, y \in \overline{\mathbf{Q}}$).

(6) La topologie considérée est la plus faible rendant continue l'action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ sur $\overline{\mathbf{Q}}$ (muni de la topologie discrète) ; c'est la topologie de groupe profini obtenue en voyant $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ comme la limite projective des groupes de Galois des extensions finies de $\mathbf{Q}$.

On note $\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}} \subset \mathbf{Q}^{\mathrm{solv}} \subset \overline{\mathbf{Q}}$ les extensions de $\mathbf{Q}$ engendrées par les racines de l'unité $e^{2i\pi/n}$, pour $n \geq 1$ (resp. les nombres s'exprimant par radicaux). La théorie de Galois fournit des surjections $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{solv}}) \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$ et un isomorphisme $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}) \cong \prod_\ell \mathbf{Z}_\ell^*$ (on note $\chi_\ell : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{Z}_\ell^*$ le composé de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}} \twoheadrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$ et $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}}) \to \mathbf{Z}_\ell^*$; c'est le *caractère cyclotomique*, et il est caractérisé par le fait que $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi_\ell(\sigma)}$, si $\zeta^{\ell^n} = 1$). D'après le th. de Kronecker-Weber, $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{cycl}})$ est le plus grand quotient abélien de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, et la théorie de Galois implique que $\mathrm{Aut}(\mathbf{Q}^{\mathrm{solv}})$ est le plus grand quotient résoluble de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, mais on n'a toujours pas de vraie description de ce groupe et donc on ne comprend pas vraiment $\mathbf{Q}^{\mathrm{solv}}$.

4. Représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ et fonctions L

4.1. Représentations géométriques

Une manière naturelle d'essayer de comprendre un groupe est d'étudier ses représentations. Nous allons nous intéresser aux représentations de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ de dimension finie (égale à 2 la plupart du temps) sur une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, c'est à dire aux espaces vectoriels V de dimension finie sur L munis d'une action L-linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$. Une telle action est équivalente à la donnée d'un morphisme continu de groupes $\rho_V : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}(V)$, et nous parlerons indifféremment de la représentation V ou de la représentation ρ_V.

Dans ce contexte, Fontaine et Mazur [**82**] ont dégagé la notion de *représentation géométrique*, en imposant des conditions « locales » en presque tout $\ell \in \mathscr{P}$: une L-représentation *irréductible* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ est géométrique si elle est :
- non ramifiée(7) sauf en un nombre fini de nombres premiers ℓ,
- potentiellement log-cristalline(8) en p.

Exemples 1. — (i) En dimension 1, les représentations géométriques sont de la forme $\chi_p^n \eta$, où $n \in \mathbf{Z}$ et η est d'ordre fini.

(ii) Les représentations d'image finie sont géométriques.

(iii) Si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, on dispose, sur $E(\mathbf{C})$, d'une loi d'addition dont l'élément neutre est ∞. Ce groupe est isomorphe à $\mathbf{C}/\Lambda$, où Λ est un réseau de $\mathbf{C}$; l'ensemble $E[p^n] \cong \frac{1}{p^n}\Lambda/\Lambda$ des points de p^n-torsion est donc un $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$-module de rang 2, et est muni d'une action de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ car la loi d'addition est donnée par des formules rationnelles à coefficients rationnels. On définit le *module de Tate* comme l'ensemble des $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, avec $x_n \in E[p^n]$ et $p \cdot x_{n+1} = x_n$, pour tout n. On obtient de la sorte un $\mathbf{Z}_p$-module de rang 2, avec action linéaire continue de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et en inversant p, cela nous donne une représentation V_E, de dimension 2 sur $\mathbf{Q}_p$, qui

(7) Cela signifie que ρ_V est trivial sur le sous-groupe d'inertie I_ℓ, cf. § 8, et donc qu'elle se factorise à travers $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}/I_\ell \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_\ell/\mathbf{F}_\ell)$.

(8) Cf. n° 10.2 pour la définition de cette notion.

est géométrique[9]. Cet exemple a joué un rôle fondamental pour le développement de la théorie.

(iv) Plus généralement[10], les représentations provenant de la géométrie (i.e. les sous-quotients de représentations de la forme $H^i_{\rm et}(X,\mathbf{Q}_p)$, où X est une variété algébrique lisse définie sur $\mathbf{Q}$) sont géométriques[11], et Fontaine et Mazur conjecturent [**82**] que toute représentation géométrique provient de la géométrie (à torsion près par un caractère de la forme χ_p^n, avec $n\in\mathbf{Z}$), ce qui a des conséquences assez remarquables et plutôt surprenantes[12] au vu du peu de conditions imposées.

4.2. Fonctions L

A une représentation géométrique irréductible V, de dimension d, est attachée une fonction L complexe $L(V,s)=\prod_{\ell\in\mathscr{P}}\frac{1}{P_\ell(\ell^{-s})}$, où $P_\ell=1+a_{1,\ell}X+\cdots$ est un polynôme[13] de degré $\leq d$ et égal à d sauf pour un nombre fini de ℓ. Cette fonction L détermine complètement V (à isomorphisme près), et on peut (conjecturalement [**59, 8, 18, 84, 78**]) lire sur ses valeurs aux entiers des tas d'informations fines concernant la représentation V. Par exemple, si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, l'ordre du zéros de $L(E,s)=L(V_E,s)$ en $s=1$ est conjecturalement égal au rang (comme $\mathbf{Z}$-module) du groupe $E(\mathbf{Q})$ (conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer).

Si V est la représentation triviale (i.e. $V=L$ et $\rho_V(g)=1$ pour tout g), alors $L(V,s)=\zeta(s)$, où ζ est la fonction zêta de Riemann. Elle admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s=1$, et une équation fonctionnelle $\frac{\Gamma(s/2)}{\pi^{s/2}}\zeta(s)=\frac{\Gamma((1-s)/2)}{\pi^{(1-s)/2}}\zeta(1-s)$ reliant les valeurs en s et $1-s$. Plus généralement, si ρ_V est de la forme χ_p^n, avec $n\in\mathbf{Z}$, alors $L(V,s)=\zeta(s-n)$.

---

(9) Si E a bonne réduction (ce qui est le cas pour presque tout ℓ), la réduction modulo ℓ induit un isomorphisme de $E[p^n]\cong E(\overline{\mathbf{F}}_\ell)[p^n]$, et V_E est non ramifiée en ℓ ; que V_E soit potentiellement log-cristalline a été démontré par Fontaine [**80**] (cf. [**41, 42**] pour une autre approche).

(10) Si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, alors $V_E=H^1_{\rm et}(E,\mathbf{Q}_p)\otimes\chi_p$.

(11) Que la représentation $H^i_{\rm et}(X,\mathbf{Q}_p)$ soit non ramifiée pour presque tout ℓ est une conséquence du fait que X a bonne réduction sauf en un nombre fini de ℓ et du théorème de changement de base propre en cohomologie étale. Qu'elle soit potentiellement log-cristalline a été conjecturé par Fontaine [**80**], et est une conséquence des théorèmes de comparaison p-adiques démontrés par Tsuji [**133, 134**], Faltings [**71**] et Nizioł [**112, 113**] (après des travaux de Tate [**132**], Bloch-Kato [**17**], Fontaine-Messing [**83**], Kato [**96**], etc.) par 3 méthodes différentes (que ces méthodes fournissent le même morphisme de comparaison a été démontré par Nizioł [**114**]) ; la méthode de Faltings a été décortiquée par Gabber et Ramero [**85, 86**], revisitée par Andreatta, Brinon et Iovita [**1, 2**], et simplifiée par Scholze [**125**] ; une autre voie d'approche a récemment été découverte par Beilinson [**9, 10**] et Bhatt [**16**].

(12) Chacune des conditions locales peut se déformer de manière continue, alors que les représentations provenant de la géométrie forment un ensemble dénombrable.

(13) On a $P_\ell=\det\big(1-X(\mathrm{Frob}_\ell|V^{I_\ell})\big)$.

Si V n'est pas de la forme χ_p^n, on conjecture que la fonction $s \mapsto L(V,s)$, qui est holomorphe dans un demi-plan $\mathrm{Re}(s) > c$, admet un prolongement analytique à $\mathbf{C}$, avec une équation fonctionnelle du genre de celle de la fonction ζ.

Exemples 2. — (i) Si $\dim V = 1$, le théorème de Kronecker-Weber implique que $L(V,s)$ est, à translation de la variable près, une fonction L de Dirichlet (i.e. de la forme $\sum_{n\geq 1} \frac{\chi(n)}{n^s}$, où $\chi : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ est un caractère) ; elle admet les propriétés attendues.

(ii) Si ρ_V est d'image finie, $L(V,s)$ est une fonction L d'Artin, et le prolongement analytique de $L(V,s)$ a été conjecturé par Artin (1923). Le cas de dimension 2 est en grande partie démontré grâce aux travaux de Langlands-Tunnell [**108, 136**] et de Khare et Wintenberger [**99, 100**] ; le cas de dimension ≥ 3 est totalement ouvert. On sait quand même, grâce à Brauer, que $L(V,s)$ admet un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$.

(iii) Si E est la courbe elliptique $E_{A,B,C}$ d'équation $y^2 = X(X-A)(X+B)$ (et $A+B=C$), et si $A = a^p$, $B = b^p$ et $C = c^p$, avec a,b,c entiers et p premier ≥ 5, Ribet [**117**], reprenant une suggestion de Frey (basée sur une construction d'Hellegouarch) précisée par Serre [**128**], a prouvé que $L(E_{A,B,C},s)$ n'avait pas les propriétés attendues. Comme Wiles [**141**] a démontré que toutes les $L(E_{A,B,C},s)$ ont les propriétés attendues, cela lui a permis de démontrer, enfin !, le théorème de Fermat.

5. Formes modulaires et fonctions L

Soit D un entier, et soit $\Gamma_0(D)$ le sous-groupe de $\mathbf{SL}_2(\mathbf{Z})$ des matrices $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ vérifiant $c \equiv 0$ modulo D. Si $k \geq 1$ est un entier, et si $\chi : (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^* \to \mathbf{C}^*$ est un caractère de Dirichlet, une forme *quasi-modulaire* f, de poids k, niveau D et caractère χ, est une fonction holomorphe sur $\mathscr{H} = \{z,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$, telle que $f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = \chi(d)(cz+d)^k f(z)$ quel que soit $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(D)$. Une forme quasi-modulaire est en particulier périodique de période 1, et donc a un développement de Fourier (*q-développement*) du type $f(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(f) q^n$, avec $q = e^{2i\pi z}$. On dit que f est une *forme modulaire* si $a_n(f) = 0$ pour $n < 0$, et s'il existe $c > 0$ tel que $a_n(f) = O(n^c)$. Cette dernière condition permet d'associer à f une fonction L définie par

$$L(f,s) = \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} \big(f(iy) - a_0(f)\big)\, y^s \,\frac{dy}{y} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)}{n^s},$$

qui possède un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier et vérifie une équation fonctionnelle reliant s et $k-s$. On dit que f est *primitive*, si $L(f,s)$ est holomorphe sur $\mathbf{C}$ et admet :

- un développement en produit de facteurs d'Euler

$$L(f,s) = \prod_{p\mid D} \frac{1}{1 - a_p(f)p^{-s}} \prod_{p\nmid D} \frac{1}{1 - a_p(f)p^{-s} + \chi(p)p^{k-1-2s}},$$

• une équation fonctionnelle du type $\Lambda(f, k-s) = w\Lambda(f^*, s)$, où $f^*(z) = \overline{f(-\overline{z})}$, w est un nombre complexe de module 1, et $\Lambda(f,s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s}\, D^{s/2}\, L(f,s)$.

L'existence de formes primitives relève du miracle, mais Atkin et Lehner [**3**] ont démontré que les $f(\frac{az+b}{d})$, où f décrit les formes primitives de poids k, et a, b, d les entiers ($a \neq 0$ et $d \neq 0$) forment une famille génératrice de l'espace vectoriel engendré par les formes modulaires « nulles à l'infini », de poids k et de tout niveau.

6. Représentations galoisiennes attachées aux formes modulaires

La conjecture suivante [**139**] est le point de départ du programme de Langlands [**107**].

Conjecture 3. — (Taniyama-Weil) *Si E est une courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$, il existe une forme modulaire f_E, primitive de poids 2, telle que $L(E,s) = L(f_E, s)$.*

Shimura [**129, 130, 131**] a démontré de nombreux cas de cette conjecture : plus précisément, Shimura a prouvé que si $f = \sum_{n\geq 1} a_n q^n$ est primitive de poids 2, de caractère trivial, et si les a_n sont rationnels, alors il existe une courbe elliptique(14) E_f telle que $L(E_f, s) = L(f,s)$.

Wiles [**141**] a prouvé cette conjecture dans le cas des courbes elliptiques $E_{A,B,C}$; ses méthodes ont été raffinées par Breuil-Conrad-Diamond-Taylor [**26**], ce qui leur a permis de démontrer le cas général.

Deligne [**57**] et Serre [**60**] ont étendu(15) le résultat de Shimura en poids quelconque : si f est primitive, il existe une représentation géométrique ρ_f, irréductible, de dimension 2 sur une extension finie L_f de $\mathbf{Q}_p$, telle que $L(\rho_f, s) = L(f,s)$. De plus, cette représentation est *impaire* (le déterminant de la conjugaison complexe est -1).

Si on combine la conjecture de Fontaine-Mazur avec la correspondance de Langlands globale, on tombe sur la conjecture suivante qui implique les propriétés conjecturales souhaitées pour $L(V,s)$.

Conjecture 4. — *Soit V une représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, géométrique à poids(16) de Hodge-Tate distincts, irréductible, de dimension 2. Si V est impaire, alors il existe une forme*

(14)La courbe E_f est un quotient de la *courbe modulaire* $Y_0(D) = \mathscr{H}/\Gamma_0(D)$, et il a conjecturé que toute courbe elliptique définie sur $\mathbf{Q}$ est de cette forme, ce qui (compte-tenu de ses résultats) renforce la conjecture de Taniyama-Weil (dans l'utre sens, l'implication « Taniyama-Weil $\Rightarrow$ Shimura » est une conséquence de la conjecture de Tate pour les courbes elliptiques prouvée en toute généralité par Faltings [**70**]) ; une courbe elliptique de cette forme a une arithmétique extrêmement riche [**97**].

(15)Ce résultat est une des premières constructions de représentations galoisiennes attachées à des formes automorphes. Il a été suivi par beaucoup d'autres (cf. [**38**]) qu'il serait impossible d'énumérer ici. Signalons juste que toutes les représentations construites satisfaisaient une condition d'autodualité que Harris, Lan, Taylor et Thorne [**89**] viennent tout juste de faire sauter. Ceci ouvre la voie à l'établissement d'une version potentielle de la correspondance de Langlands globale (en poids régulier) sans la condition d'autodualité de [**4**].

(16)Cf. n° 10.2 pour la définition de cette notion.

modulaire primitive f et $n \in \mathbf{Z}$ tels que V soit isomorphe à $\rho_f \otimes \chi_p^n$ ou, de manière équivalente, tels que $L(V,s) = L(f, s-n)$.

Remarque 5. — Si V est paire, la conjecture de Fontaine-Mazur implique que V n'existe pas. Ceci a été démontré par Calegari [**32, 33**] (avec quelques restrictions sur la réduction modulo p des représentations considérées).

Les travaux de Wiles [**141**] fournissent une stratégie pour démontrer ce genre d'énoncés :

• Démontrer le même énoncé modulo p : si $\rho : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}} \to \mathbf{GL}_2(k_L)$ est impaire, alors il existe une forme primitive f telle que ρ soit isomorphe à(17) $\overline{\rho_f}$. (Ce résultat, conjecturé par Serre [**128**], n'a pas l'air vraiment plus facile que celui que l'on cherche à démontrer, mais c'est maintenant un théorème grâce aux travaux de Khare et Wintenberger [**99, 100**] avec l'aide de Kisin [**103**].)

• Classifier les ρ_V et les g primitives telles que $\overline{\rho}_V = \rho = \overline{\rho}_g$, et montrer que les deux ensembles sont les mêmes.

Pour que ceci ait une chance de marcher, il faut imposer des conditions « locales » en tous les nombres premiers ℓ (cf. §§ 7-10 pour la définition des invariants intervenant dans ces conditions locales), et s'assurer que ces conditions se correspondent bien (compatibilité entre le local et le global, § 11). Pour $\ell \neq p$, la correspondance de Langlands locale classique (et sa version modulo p, cf. [**137, 138**]) nous dit ce qu'il faut faire ; le cas $\ell = p$ est plus délicat et conduit [**19, 20, 21**] à la correspondance de Langlands locale p-adique [**52**] pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

7. Formes modulaires et représentations de $\mathbf{GL}_2$

Si $D \in \mathbf{N}$, soit K^D le sous-groupe de $\mathbf{GL}_2(\widehat{\mathbf{Z}}) = \prod_{\ell \in \mathscr{P}} \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ des $h = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, avec $c \in D\widehat{\mathbf{Z}}$. Si χ est un caractère de Dirichlet modulo D, on fabrique un caractère linéaire $\tilde{\chi}$ de K^D, en posant $\tilde{\chi}(h) = \chi(\overline{d})$, où l'on a noté $\overline{d}$ l'image de d dans $(\widehat{\mathbf{Z}}/D\widehat{\mathbf{Z}})^* = (\mathbf{Z}/D\mathbf{Z})^*$. On a alors $\tilde{\chi}(\gamma) = \chi(d)$, si $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma_0(D)$.

Le groupe $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ est le produit restreint(18) de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ et des $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$, pour $\ell \in \mathscr{P}$.

Proposition 6. — (i) *Tout élément de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ peut s'écrire sous la forme $\gamma g_\infty \kappa$, avec $\gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$, $g_\infty \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})^+ = \{g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R}),\ \det g > 0\}$, et $\kappa \in K^D$.*

(17)Si V est une L-représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$, et si M est un $\mathscr{O}_L$-réseau de V, la compacité de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ implique que $M' = \sum_{g \in \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}} g \cdot M$ est encore un réseau de V, qui est stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par construction. En réduisant modulo $\mathfrak{m}_L$, cela fournit une représentation $\overline{\rho}_V$ dont la semi-simplifiée ne dépend pas du choix de M.

(18)I.e. l'ensemble des $(g_\infty, g_2, g_3, \dots)$, avec $g_\infty \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$, $g_\ell \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ et $g_\ell \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ sauf pour un nombre fini de ℓ.

(ii) *Cette écriture est unique à multiplication près de γ à droite par $\alpha \in \Gamma_0(D)$ et de g_∞ et κ à gauche par α^{-1}.*

Soit f primitive, telle que $(cz+d)^{-k} f\big(\frac{az+b}{cz+d}\big) = \chi(d) f(z)$, si $\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\big) \in \Gamma_0(D)$. On peut utiliser la décomposition de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ ci-dessus pour attacher à f une fonction ϕ_f sur $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$, grâce à la formule,

$$\phi_f(x) = \tilde{\chi}(h)^{-1} \Big(\frac{(a_\infty d_\infty - b_\infty c_\infty)^{1/2}}{c_\infty i + d_\infty}\Big)^k f\Big(\frac{a_\infty i + b_\infty}{c_\infty i + d_\infty}\Big), \quad \text{si } x = \gamma g_\infty h \text{ et } g_\infty = \big(\begin{smallmatrix} a_\infty & b_\infty \\ c_\infty & d_\infty \end{smallmatrix}\big).$$

Le (ii) de la prop. 6 montre que ceci ne dépend pas de la décomposition de x choisie, et on a $\phi_f(\gamma g) = \phi_f(g)$ pour tous $\gamma \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ et $g \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$. On note Π_f l'espace engendré par les $g \mapsto \phi_f(gh)$, pour $h \in \mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$. Par construction, cet espace est muni d'une action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ [donnée par $(h \cdot \phi)(g) = \phi(gh)$] ; cette action est irréductible, et comme $\mathbf{GL}_2(\mathbf{A})$ est essentiellement le produit de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ et des $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$, on peut factoriser[19] Π_f sous la forme $\Pi_f = \Pi_{f,\infty} \otimes \big(\otimes_{\ell \in \mathscr{P}} \Pi_{f,\ell}\big)$, où $\Pi_{f,\infty}$ (resp. $\Pi_{f,\ell}$) est une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{R})$ (resp. $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$).

8. Groupe de Galois et groupe de Weil de $\mathbf{Q}_\ell$

On fixe une clôture algébrique $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ de $\mathbf{Q}_\ell$, et on note $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_\ell/\mathbf{Q}_\ell)$ de $\mathbf{Q}_\ell$ (il revient au même de fixer une extension de $|\ |_\ell$ à $\overline{\mathbf{Q}}$; on peut alors prendre pour $\overline{\mathbf{Q}}_\ell$ la clôture intégrale de $\mathbf{Q}_\ell$ dans le complété de $\overline{\mathbf{Q}}$ pour $|\ |_\ell$, et $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ s'identifie au sous-groupe de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}}$ qui sont des isométries pour $|\ |_\ell$).

On note $\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}$ l'extension de $\mathbf{Q}_\ell$ engendrée par les racines de l'unité d'ordre premier à ℓ ; c'est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}_\ell$ de groupe de Galois $\widehat{\mathbf{Z}}$ (complété profini de $\mathbf{Z}$, isomorphe à $\prod_p \mathbf{Z}_p$) dont un générateur topologique est le *frobenius* Frob_ℓ qui envoie une racine de l'unité ζ sur ζ^ℓ. On dispose donc d'une surjection de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ sur $\widehat{\mathbf{Z}}$, et on note I_ℓ le noyau : c'est le *sous-groupe d'inertie*[20] de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$. On définit le *groupe de Weil* $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ comme l'image inverse de $\mathbf{Z} \subset \widehat{\mathbf{Z}}$ dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$; on a donc une suite exacte de groupes $1 \mapsto I_\ell \to \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathbf{Z} \to 1$, et on note deg l'application de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ dans $\mathbf{Z}$.

On note $\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{mod}}$ l'extension de $\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}$ obtenue en rajoutant les $\ell^{1/n}$, avec n premier à ℓ. Alors $\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{mod}}$ est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}_\ell$, et donc aussi de $\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{nr}}$, et le *groupe d'inertie modérée* $I_\ell^{\mathrm{mod}} = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{mod}}/\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{nr}})$ est isomorphe à $\prod_{p \neq \ell} \mathbf{Z}_p$. Ce groupe est

---

[19] Il s'agit d'un produit tensoriel restreint : pour presque tout ℓ, l'espace des invariants de $\Pi_{f,\ell}$ sous l'action de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_\ell)$ est de dimension 1 ; on en choisit une base a_ℓ, et $\otimes_{v \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}} \Pi_{f,v}$ désigne l'espace des $(\otimes_v x_v)_{v \in \mathscr{P} \cup \{\infty\}}$ avec $x_\ell = a_\ell$ pour presque tout ℓ.

[20] On peut aussi définir I_ℓ comme le sous-groupe des σ tels que $\sigma(x) - x \in \mathfrak{m}_\ell = \{y \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell, |y|_\ell < 1\}$, si $x \in \mathscr{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell} = \{x \in \overline{\mathbf{Q}}_\ell,\ |x|_\ell \leq 1\}$; comme $\mathscr{O}_{\overline{\mathbf{Q}}_\ell}/\mathfrak{m}_\ell$ est une clôture algébrique de $\mathbf{F}_\ell$, cela fournit un isomorphisme $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}/I_\ell \cong \mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{F}}_\ell/\mathbf{F}_\ell)$, et Frob_ℓ induit l'isomorphisme $x \mapsto x^\ell$ de $\overline{\mathbf{F}}_\ell$.

muni d'une action de Frob_ℓ par conjugaison[(21)], et l'action induite sur chaque $\mathbf{Z}_p$ est la multiplication par ℓ.

On note I_ℓ^+ le noyau de la projection $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell} \to I_\ell^{\mathrm{mod}}$; c'est un pro-ℓ-groupe (tous ses quotients finis sont de cardinal une puissance de ℓ) appelé le *sous-groupe d'inertie sauvage* de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$. Il admet une filtration par les *groupes de ramification supérieure*[(22)] [**126**].

9. La correspondance de Langlands locale classique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$

Une *représentation du groupe de Weil-Deligne* de $\mathbf{Q}_\ell$ (ou $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$-représentation), de dimension d sur L, est un L-espace vectoriel de dimension d muni :

- d'une action continue de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ pour laquelle I_ℓ *agit à travers un quotient fini*,
- d'un opérateur linéaire N vérifiant $\rho_V(g) \circ N = \ell^{-\deg g} N \circ \rho_V(g)$, pour tout $g \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$.

La correspondance de Langlands locale[(23)] est une bijection entre les classes d'isomorphismes de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$-représentations de dimension d sur L et les L-représentations lisses, admissibles[(24)], essentiellement[(25)] irréductibles de $\mathbf{GL}_d(\mathbf{Q}_\ell)$. Cette bijection est normalisée via les facteurs locaux des fonctions L.

Nous allons expliciter le résultat pour[(26)] $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_\ell)$. Si χ_1, χ_2 sont des caractères localement constants de $\mathbf{Q}_\ell^*$, on note $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ l'espace des $\phi : G \to L$, localement

---

(21) Si g est un relèvement de Frob_ℓ dans $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_\ell^{\mathrm{mod}}/\mathbf{Q}_\ell)$, alors $h \mapsto ghg^{-1}$ est un automorphisme de I_ℓ^{mod} qui ne dépend pas du choix de g.

(22) Une description directe de cette filtration, en termes de l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ de Fontaine [**76, 79**], peut se trouver dans [**47**]. Il s'agit d'un invariant très fin. En effet, on dispose, grâce à Jannsen et Wingberg [**94**], d'une description par générateurs et relations du groupe topologique $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ ou, plus généralement, du groupe de Galois $\mathscr{G}_K$ absolu d'un corps local K (i.e. une extension finie d'un $\mathbf{Q}_\ell$). Il en résulte que l'on ne peut retrouver, à partir du groupe topologique abstrait $\mathscr{G}_K$, que le cardinal du corps résiduel de K, et donc sa caractéristique ℓ, le degré de l'extension $K/\mathbf{Q}_\ell$, et le nombre de racines de l'unité d'ordre une puissance de ℓ dans K. Par contre, Mochizuki [**110**] a montré qu'à partir de la filtration par les groupes de ramification supérieure, on pouvait retrouver K (à isomorphisme près).

(23) Cette correspondance a été établie en toute généralité par Harris et Taylor [**88**], et par Henniart [**91**] ; une preuve simplifiée a récemment été obtenue par Scholze [**124**]. La démonstration de Harris et Taylor fournit, de surcroît, une réalisation géométrique de la correspondance dans la cohomologie de tours de revêtements d'espaces de déformations de groupes formels (version locale des courbes modulaires) ; d'autres réalisations géométriques peuvent se trouver dans [**72**].

(24) Une représentation Π est lisse si $g \mapsto g \cdot v$ est localement constante pour $v \in \Pi$; elle est admissible si Π^K est de dimension finie pour tout sous-groupe ouvert K.

(25) Il y a plusieurs normalisations possibles pour la correspondance ; si on veut qu'elle envoie des L-représentations sur des L-représentations, il faut prendre la normalisation à la Tate [**58**], et pas la normalisation unitaire. Par ailleurs, la compatibilité local-global dans la correspondance de Langlands p-adique suggère fortement [**67, 29**] qu'il faut inclure quelques représentations non irréductibles du côté de $\mathbf{GL}_d(\mathbf{Q}_\ell)$.

(26) Dans le cas $d = 2$, cette correspondance a été établie il y a longtemps (par Jacquet-Langlands [**95**] si $p \geq 3$, et par Tunnell [**135**] et Kutzko [**106**] si $p = 2$), et on dispose d'une réalisation géométrique particulièrement satisfaisante [**140**] ; c'est le seul cas où l'on a une preuve purement locale [**30**] (les

constantes, telles que $\phi\big(\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\big)g\big) = \chi_1(a)\chi_2(d)\phi(g)$, pour tous $g \in G$ et $\big(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d\end{smallmatrix}\big) \in B$. On munit $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\chi_1 \otimes \chi_2)$ d'une action de G grâce à la formule $(h\cdot\phi)(g) = \phi(gh)$. Si δ_1, δ_2 sont localement constants, on note $B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2)$ la représentation $\mathrm{Ind}^{\mathrm{lisse}}(\delta_2 \otimes |\ |^{-1}\delta_1)$.

Proposition 7. — (i) *$B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2)$ est une représentation irréductible de G sauf si $\delta_2 = |\ |^{-1}\delta_1$ ou si $\delta_2 = |\ |\delta_1$: dans le premier (resp. second) cas, $B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2)$ est une extension de $\mathrm{St} \otimes \delta_2$ par δ_2 (resp. de δ_1 par $\mathrm{St} \otimes \delta_1$), où St est la steinberg.*

(ii) *Si $\delta_2 \neq |x|^{\pm 1}\delta_1$, alors $B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2) \cong B^{\mathrm{lisse}}(\delta_2, \delta_1)$.*

Les composantes de Jordan-Hölder des $B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2)$ sont dites *de la série principale*; les autres représentations irréductibles, admissibles, lisses, de $\mathbf{Gl}_2(\mathbf{Q}_\ell)$ sont dites *supercuspidales*. On les obtient par induction à partir de sous-groupes ouverts compacts (théorie des types [**31, 90**]).

Si M est une $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$-représentation de dimension 2, non de la forme $\delta \oplus \delta$, on note $\mathrm{LL}_\ell(M)$ la représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qui lui correspond. Si M est non irréductible, la semi-simplifiée de M, vue comme représentation de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$, est de la forme $\delta_1 \oplus \delta_2$, et on peut supposer $\delta_2 \neq |\ |^{-1}\delta_1$. Alors $\mathrm{LL}_\ell(M) = B^{\mathrm{lisse}}(\delta_1, \delta_2)$ sauf si $N \neq 0$ (ce qui implique que $\delta_2 = |\ |\delta_1$), où $\mathrm{LL}_\ell(M) = \mathrm{St} \otimes \delta_1$.

Si M est absolument irréductible comme représentation de $W_{\mathbf{Q}_\ell}$, alors $\mathrm{LL}_\ell(M)$ est supercuspidale.

10. Représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$

On fixe une extension finie L de $\mathbf{Q}_p$, et on s'intéresse aux représentations continues $\rho_V : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell} \to \mathbf{GL}(V)$, où V est un L-espace vectoriel de dimension finie d.

10.1. Le cas $\ell \neq p$. — On note π_p la projection de I_ℓ sur le facteur $\mathbf{Z}_p$ de $I_\ell^{\mathrm{mod}} \cong \prod_{p \neq \ell} \mathbf{Z}_p$. Grothendieck a remarqué [**87**] que, pour des raisons topologiques[(27)], il existe $N_V : V \to V$, et un sous-groupe d'indice fini $I \subset I_\ell$ tel que $\rho_V(h) = \exp(\pi_p(h)N_V)$ pour tout $h \in I$, et que l'on a $\rho_V(g) \circ N = \ell^{-\deg g} N \circ \rho_V(g)$, pour tout $g \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ (ceci implique, en particulier, que N_V est nilpotent et commute à l'action de I_ℓ).

Ceci permet d'associer à V une $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$-représentation : on choisit un relèvement φ_ℓ de Frob_ℓ dans $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$, et on munit V de l'action de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ définie par $\rho'_V(g) =$

réalisations géométriques de [**88, 72**] n'utilisent que des objets locaux, mais les démonstrations du fait que ces objets réalisent la correspondance font appel à des arguments globaux).

(27) Comme $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$ est compact, il stabilise un réseau de V, ce qui prouve que l'image de ρ_V est incluse dans un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_L)$. Or le noyau de l'application $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_L) \to \mathbf{GL}_d(k_L)$ un prop-p-groupe d'indice fini dans $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_L)$, alors que le noyau J de π_p est un groupe profini dont tous les quotients finis sont d'ordre premier à p. Il s'ensuit que l'application $\mathbf{GL}_d(\mathscr{O}_L) \to \mathbf{GL}_d(k_L)$ est injective sur $\rho_V(J)$, ce qui montre que $\rho_V(J)$ est fini, et que la restriction de ρ_V à I_ℓ se factorise presque par π_p.

$\rho_V(g)\exp(-\pi_p(\varphi_\ell^{-\deg g})N_V)$; alors le couple (ρ'_V, N_V) définit une $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_\ell}$-représentation $\mathrm{WD}(\rho_V)$ dont la classe d'isomorphisme ne dépend pas des choix faits. On ne perd pas d'information en passant de ρ_V à $\mathrm{WD}(\rho_V)$ puisque la donnée de (ρ'_V, N_V) permet de reconstruire ρ_V sur $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_\ell}$ et donc, par continuité, sur $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$.

10.2. Le cas $\ell = p$. — Si $\ell = p$, l'image du sous-groupe d'inertie sauvage n'a aucune raison topologique d'être finie et, de fait, cette image est en général infinie. Il s'ensuit que la classification des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ est nettement plus compliquée que celle des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$, si $\ell \neq p$, car il y en a beaucoup plus. Pour tenter d'isoler les représentations venant de la géométrie, Fontaine [**80**] a introduit la catégorie des représentations *potentiellement log-cristallines*(28) qui sont précisément celles auxquelles on peut attacher une $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-représentation (cf. (i) de la rem. 9). L'énoncé du résultat (th. 8) va demander un peu de préparation.

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, on note $\mathscr{G}_K \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ son groupe de Galois absolu, et on pose $K_0 = K \cap \mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$. Une représentation potentiellement log-cristalline devient log-cristalline sur une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, et il suffit donc de décrire celles qui deviennent log-cristallines sur K. Pour ce faire, on définit les notions suivantes :

• Un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-*module rationnel sur* K est un $L \otimes K_0$-module libre muni d'une action semi-linéaire de φ (qui agit sur K_0 par Frob_p), d'une action semi-linéaire de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ agissant à travers le quotient fini $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{G}_K$ et commutant à φ, et d'un opérateur linéaire N commutant à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$.

• Une *filtration* sur un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module Δ, rationnel sur K, est la donnée d'une suite décroissante de sous-$(L \otimes K)$-modules Δ_K^i, pour $i \in \mathbf{Z}$, de $\Delta_K = K \otimes_{K_0} \Delta$, stables par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ (agissant par $g \otimes g$), vérifiant $\Delta_K^i = \Delta_K$ si $i \ll 0$ et $\Delta_K^i = 0$ si $i \gg 0$, et tels que $\Delta_K^i/\Delta_K^{i+1}$ soit libre sur $L \otimes K$ pour tout i. Les *poids de Hodge-Tate* de Δ sont les entiers i tels que $\Delta_K^{-i+1} \neq \Delta_K^{-i}$; ils sont comptés avec multiplicité $\mathrm{rg}_{L\otimes K}(\Delta_K^{-i}/\Delta_K^{-i+1})$.

Si Δ est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module rationnel *filtré* (i.e. muni d'une filtration) sur K, on peut lui associer deux invariants numériques $t_N(\Delta)$ et $t_H(\Delta)$ définis par

$$t_N(\Delta) = \frac{1}{[K_0 : \mathbf{Q}_p]} v_p\big(\det \varphi^{[K_0:\mathbf{Q}_p]}\big) \quad \text{et} \quad t_H(\Delta) = \sum_{i\in\mathbf{Z}} i \cdot \dim_K(\Delta_K^i/\Delta_K^{i+1}).$$

(28)Ces représentations sont appelées traditionnellement *potentiellement semi-stables*, mais cette terminologie est en conflit avec la notion de semi-stabilité pour les fibrés vectoriels sur une courbe. Ceci est devenu particulièrement gênant depuis les travaux de Fargues et Fontaine [**73, 74**] qui fournissent une démonstration du th. 8 (conjecture « faiblement admissible implique admissible » de Fontaine [**75, 80**]) via l'étude des fibrés sur le complété de la courbe affine $\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{N=0,\varphi=1})$ (l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{N=0,\varphi=1}$ (cf. note 29) s'est avéré, à la surprise générale des experts du sujet, être un anneau principal). La démonstration de Fargues et Fontaine éclaire d'un jour nouveau les démonstrations antérieures [**56, 43, 12, 13, 102**] de cette conjecture.

On dit que Δ est *faiblement admissible* si on a $t_H(\Delta) = t_N(\Delta)$ et $t_H(\Delta') \leq t_N(\Delta')$ pour tout sous-F-espace vectoriel Δ' de Δ stable par φ et N (Δ'_K étant muni de la filtration induite).

Théorème 8. — *La catégorie des représentations devenant log-cristallines sur K est équivalente à celle des $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-modules filtrés faiblement admissibles, rationnels sur K.*

Remarque 9. — (i) Il résulte du théorème que se donner une représentation potentiellement log-cristalline revient à se donner un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module filtré faiblement admissible [29], ce qui est un objet nettement plus facile à comprendre (cf. § 14 pour la construction de tels objets).

(ii) On peut **[81, 29]** transformer un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module en $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module en faisant agir $g \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p} \subset \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par $\varphi^{-\deg g} g$. Réciproquement, on peut transformer un $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module en $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module par une recette un peu plus compliquée qui peut demander de remplacer L par une extension finie, ce qui n'est pas gênant pour ce qui nous intéresse. Les deux recettes sont inverses l'une de l'autre, ce qui permet de décrire une représentation potentiellement log-cristalline V en terme d'un $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ et d'une filtration faiblement admissible sur $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$. Les *poids de Hodge-Tate* de V sont alors ceux de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$.

11. Compatibilité local-global

Si $\ell \in \mathscr{P}$, on note $\rho_{f,\ell}$ la restriction de ρ_f à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_\ell}$. Le résultat suivant traduit la compatibilité des correspondances de Langland globale $\rho_f \leftrightarrow \Pi_f$ et locale[30].

Théorème 10. — *Soit f une forme modulaire primitive, de poids $k \geq 2$.*

(i) *Si $\ell \neq p$, alors $\mathrm{LL}_\ell(\mathrm{WD}(\rho_{f,\ell})) = \Pi_{f,\ell}$.*

(ii) *$\rho_{f,p}$ est potentiellement log-cristalline à poids de Hodge-Tate 0 et $k-1$, et $\mathrm{LL}_p(D_{\mathrm{pst}}(\rho_{f,p})) = \Pi_{f,p}$.*

---

[29] La construction explicite de ce module n'est pas indispensable pour ce que l'on va en faire. Elle repose sur la contruction d'anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, munis d'actions continues de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et de structures additionnelles : $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ est muni d'opérateurs φ et N commutant à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et vérifiant $N\varphi = p\varphi N$; $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est muni d'une filtration descendante par les $\mathbf{B}^i_{\mathrm{dR}}$, pour $i \in \mathbf{Z}$, qui est stable par $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si K est une extension finie galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, on a $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_K} = K$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}^{\mathscr{G}_K} = K_0$. Cela fait que, si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation (le cas d'une L-représentation s'en déduit en rajoutant une action linéaire de L) de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, le K_0-module libre $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V/K) = (\mathbf{B}_{\mathrm{st}} \otimes V)^{\mathscr{G}_K}$ est un $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module rationnel sur K (les actions de φ et N provenant de $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$, et celle de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}/\mathscr{G}_K$ étant l'action résiduelle de celle de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$), de rang $\leq \dim_L V$. On dit que V *devient log-cristalline sur K* si $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V/K)$ est de rang $\dim_L V$. La filtration sur $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V/K)_K = K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V/K)$ est induite par son injection dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$.

[30] Ce résultat, fruit des efforts de Carayol, Deligne, Langlands, Saito et Scholl **[36, 123, 118]**, a été amplement généralisé (cf. **[38, 4, 34, 35, 89]** pour les résultats les plus récents).

Remarque 11. — (i) Comme $\mathrm{WD}(\rho_{f,\ell})$ détermine $\rho_{f,\ell}$, il s'ensuit que la connaissance de $\Pi_{f,\ell}$ détermine complètement $\rho_{f,\ell}$ si $\ell \neq p$. Ce n'est pas le cas (en général) si $\ell = p$ car cette connaissance ne permet de retrouver que la $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-représentation $D_{\mathrm{pst}}(\rho_{f,p})$, mais pas la filtration qui permettrait de reconstruire $\rho_{f,p}$. La question est donc : y a-t-il un moyen naturel d'encoder cette filtration du côté des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$?

(ii) L'idée de Breuil a été que ceci devrait être possible en considérant des complétions p-adiques de la représentation localement algébrique(31) $\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}} = \Pi_{f,p} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}$. Comme $\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}$ est de longueur finie comme représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, elle admet un *complété universel*(32) $\widehat{\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}}$, et tout complété de $\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}$ en est un quotient (on fera attention au fait que ce complété universel pourrait fort bien être nul). La question ci-dessus devient : y a-t-il un moyen naturel d'associer un quotient irréductible de $\widehat{\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}}$ à une filtration admissible sur $D_{\mathrm{pst}}(\rho_{f,p})$?

12. Représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Une L-représentation unitaire de G est un L-banach muni d'une action continue de G laissant stable la boule unité. Nous aurons besoin d'imposer une condition de finitude ; on note :

• $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, catégorie des $\mathscr{O}_L[G]$-modules Π, lisses, admissibles(33), de longueur finie, et admettant un caractère central (34),

• $\mathrm{Rep}_L G$, catégorie des $L[G]$-modules Π munis d'un $\mathscr{O}_L$-réseau Π_0 stable par G, tel que $\Pi_0 = \varprojlim \Pi_0/p^n\Pi_0$ et $\Pi_0/p^n\Pi_0 \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}G$, pour tout n.

Exemples 12. — (i) Soit $s = (\delta_1, \delta_2)$ un couple de caractères unitaires de $\mathbf{Q}_p^*$. On note δ_s et ω_s les caractères $\delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1}$ et $\delta_1\delta_2\chi^{-1}$. On définit $B(\delta_1, \delta_2)$ comme l'induite continue(35) du caractère $\delta_2 \otimes \chi^{-1}\delta_1$ de B. L'application $\tilde{\phi} \mapsto \phi$, où $\phi(x) = \tilde{\phi}\big(\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & x \end{smallmatrix}\right)\big)$ permet d'identifier $B(\delta_1, \delta_2)$ à l'espace des $\phi : \mathbf{Q}_p \to L$ continues, telles que $\delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction continue dans un voisinage de 0, muni de l'action à gauche de G définie par $g \cdot \phi = \phi \star g$, où

$$(12.1) \qquad \big(\phi \star \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\big)(x) = \delta_1^{-1}\chi(ad-bc)\delta_s(cx+d)\phi\Big(\frac{ax+b}{cx+d}\Big).$$

---

(31) Sym^{k-1} désigne la puissance symétrique $(k-1)$-ième de la représentation naturelle de dimension 2 de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$; qu'il faille considérer $\Pi_{f,p} \otimes \mathrm{Sym}^{k-2}$ et pas seulement $\Pi_{f,p}$ est suggéré par la construction de la représentation ρ_f ou par la forme de $\Pi_{f,\infty}$.

(32) On choisit $v_1, \ldots, v_k$ engendrant $\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}$, et on considère le $\mathscr{O}_L[\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)]$-module M engendré par $v_1, \ldots, v_k$; alors $\widehat{\Pi_{f,p}^{\mathrm{alg}}} = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \varprojlim (M/p^n M)$.

(33) Cf. note 24. D'après [**6, 19**], l'admissibilité est conséquence des autres conditions.

(34) I.e. il existe $\omega_\Pi : \mathbf{Q}_p^* \to \mathscr{O}_L^*$ tel que $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{smallmatrix}\right) \cdot v = \omega_\Pi(a)v$ pour tous $a \in \mathbf{Q}_p^*$ et $v \in \Pi$.

(35) I.e. l'espace des $\phi : G \to L$, continues, telles que $\phi\big(\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right)g\big) = \chi_1(a)\chi_2(d)\phi(g)$, pour tous $g \in G$ et $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ 0 & d \end{smallmatrix}\right) \in B$.

Alors $B(\delta_1, \delta_2)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_L G$, de caractère central ω_s, qui est irréductible sauf si $\delta_2 = \chi^{-1}\delta_1$, où l'espace des fonctions constantes est une sous-representation de dimension 1 isomorphe à $\delta_2 \circ \det$ et le quotient est $\mathrm{St} \otimes (\delta_2 \circ \det)$, où St est *la steinberg* et est irréductible.

(ii) Les représentations de la forme $B(\delta_1, \delta_2)$ et leurs composantes de Jordan-Hölder sont dites *ordinaires*. Les objets absolument irréductibles de $\mathrm{Rep}_L G$ qui ne sont pas ordinaires sont dits *supersinguliers*. Le § 14 donne un procédé de construction de représentations supersingulières ; la classification complète de ces objets fait l'objet de la correspondance de Langlands locale p-adique du § 16.

13. La théorie locale du corps de classe

On note $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$ l'extension de $\mathbf{Q}_p$ obtenue en rajoutant les racines de l'unité d'ordre une puissance de p. C'est une extension galoisienne de $\mathbf{Q}_p$, et le *caractère cyclotomique* $\chi : \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \to \mathbf{Z}_p^*$, défini par $\sigma(\zeta) = \zeta^{\chi(\sigma)}$ pour toute racine de l'unité ζ d'ordre une puissance de p, induit un isomorphisme $\mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q}_p) \cong \mathbf{Z}_p^*$; on note $a \mapsto \sigma_a$ l'inverse de cet isomorphisme.

Le groupe de Galois de l'extension $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q}_p$ est abélien, et il résulte de l'analogue local du th. de Kronecker-Weber que ce groupe est le plus grand quotient abélien de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Il s'ensuit que le plus grand quotient abélien de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ est isomorphe à $\mathbf{Q}_p^*$ (l'isomorphisme inverse fait agir ap^k par Frob_p^{-k} sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ et par σ_a sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cycl}}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$ et $k \in \mathbf{Z}$). Cela permet d'identifier les caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ et ceux de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$.

Si δ est un caractère *unitaire* de $\mathbf{Q}_p^*$ (i.e. si δ est à valeurs dans $\mathscr{O}_L^*$), alors δ se prolonge par continuité à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, ce qui permet aussi de voir δ comme un caractère de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. On obtient de la sorte une bijection entre les caractères de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et les caractères unitaires de $\mathbf{Q}_p^*$ que l'on peut voir comme la *correspondance de Langlands locale p-adique pour* $\mathbf{GL}_1(\mathbf{Q}_p)$. Par exemple $x \mapsto x|x|_p$, qui est unitaire, correspond au caractère cyclotomique χ. Si δ est un caractère unitaire de $\mathbf{Q}_p^*$, on note $L(\delta)$ la représentation de dimension 1 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ qui lui correspond.

14. Complété universel de représentations localement algébriques

14.1. Construction de $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-modules filtrés faiblement admissibles

Soient $\eta_1, \eta_2 : \mathbf{Q}_p^* \to L^*$ deux caractères localement constants.

• On note $\Delta(\eta_1, \eta_2)$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module défini par[36] $\Delta(\eta_1, \eta_2) = L\, e_1 \oplus L\, e_2$, et $g(e_j) = \eta_j(g) e_j$ si $g \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, $N(e_j) = 0$.

• Si $\eta_2 = \eta_1 |\ |^{-1}$, on note $\Delta^N(\eta_1, \eta_2)$ le $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-module défini par $g(e_j) = \eta_j(g) e_j$ si $g \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, $N(e_2) = e_1$ et $N(e_1) = 0$.

[36] Si $\eta_1 = \eta_2$, on remplace la formule $g(e_2) = \eta_2(g) e_2$ par $g(e_2) = \eta_2(g)(e_2 + e_1)$.

Si $a < b \in \mathbf{Z}$, et si $\Delta = \Delta(\eta_1,\eta_2), \Delta^N(\eta_1,\eta_2)$, la philosophie de Breuil nous dit qu'à une filtration faiblement admissible sur Δ, à poids de Hodge-Tate $-a$, $-b$, devrait correspondre naturellement un complété de $\mathrm{LL}_p(\Delta)\otimes \det^{-b}\otimes\mathrm{Sym}^{b-a-1}$. Le th. 13 ci-dessous en fournit une confirmation éclatante.

Les filtrations faiblement admissibles sur Δ sont faciles à classifier : si on veut qu'il en existe et que l'objet correspondant soit irréductible, il faut que

$$a < \inf(v_p(\eta_1(p)), v_p(\eta_2(p))) \text{ et } v_p(\eta_1(p)) + v_p(\eta_2(p)) = a + b.$$

Dans ce cas, il y a une unique filtration faiblement admissible (à isomorphisme près) sur $\Delta(\eta_1,\eta_2)$, à savoir celle telle que $\mathrm{Fil}^i_\infty\Delta(\eta_1,\eta_2) = L\,(e_1+e_2)$ si $a < i \leq b$. Par contre, pour tout $\mathscr{L}\in L$, il y a une filtration faiblement admissible $\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}}$ sur $\Delta^N(\eta_1,\eta_2)$, à savoir celle telle que $\mathrm{Fil}^i_{\mathscr{L}}\Delta(\eta_1,\eta_2) = L\,(\mathscr{L}e_1+e_2)$ si $a<i\leq b$, et les filtrations correspondant à deux $\mathscr{L}$ distincts fournissent des objets non isomorphes.

Soient $\delta_1 = \eta_1 x^{-a}$ et $\delta_2 = \eta_2 x^{-b}$. On note $\mathscr{S}(a,b)$ l'ensemble des triplets $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})$, où $\delta_1 = \eta_1 x^{-a}$, $\delta_2 = \eta_2 x^{-b}$ avec η_1, η_2, a, b vérifiant les conditions ci-dessus, et $\mathscr{L} = \infty$ si $\delta_s = \delta_1\delta_2^{-1}\chi^{-1} \neq x^{b-a-1}$ (cas *générique*) et $\mathscr{L}\in\mathbf{P}^1(L)$ si $\delta_s = x^{b-a-1}$ (cas *spécial*).

Si $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L}) \in \mathscr{S}(a,b)$, on note $\Delta(s)$ la $\mathrm{WD}_{\mathbf{Q}_p}$-représentation $\Delta(\eta_1,\eta_2)$ (resp. $\Delta^N(\eta_1,\eta_2)$), si $\mathscr{L}(s)=\infty$ (resp. si $\mathscr{L}(s)\in L$), et $V(s)$ la représentation de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ attachée à $(\Delta(s),\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$.

14.2. Construction de représentations unitaires de G.

Soit $s = (\delta_1,\delta_2,\mathscr{L})\in\mathscr{S}(a,b)$.

- On note $B^{\mathrm{alg}}(s)$ la représentation $\mathrm{LL}_p(\Delta(s))\otimes\det^{-b}\otimes\mathrm{Sym}^{b-a-1}$. Si s est générique (resp. si s est spécial et $\mathscr{L}\neq\infty$), elle s'identifie à l'espace des fonctions $\phi : \mathbf{Q}_p\to L$, localement polynomiales de degré $\leq b-a-1$, telles que $\delta_s(x)\phi(1/x)$ soit polynomiale, de degré $\leq b-a-1$, dans un voisinage de 0 (resp. au quotient de cet espace par celui des polynômes de degré $\leq b-a-1$), avec action de G donnée par la formule (12.1).
- On pose $u = v_p(\eta_1(p)) - a$. Si s est générique (resp. spécial), on note $B(s)$ l'espace des $\phi:\mathbf{Q}_p\to L$ de classe[37] $\mathscr{C}^u$ telles que $x\mapsto\delta_s(x)\phi(1/x)$ se prolonge en une fonction de classe $\mathscr{C}^u$ en 0 (resp. le quotient de cet espace par celui des polynômes de degré $\leq b-a-1$), avec action de G donnée par la formule (12.1).
- Si s est générique (resp. spécial), on note $M(s)$ le sous-espace de $B(s)$ engendré par 1 et les $\delta_s(x-a)$ (resp. les[38] $\delta_s(x-a)\log_{\mathscr{L}}(x_a)$), pour $a\in\mathbf{Q}_p$; c'est un espace stable par G et on note $\Pi(s)$ le quotient de $B(s)$ par l'adhérence de $M(s)$.

[37] Rappelons [**49**] que ϕ est de classe $\mathscr{C}^u$ si $\phi(a+x)$ a un développement limité à l'ordre $[u]$ en tout a, et si le reste est $o(|x|^u)$, uniformément (en a) sur tout compact.

[38] Si $\mathscr{L}\in L$, on note $\log_{\mathscr{L}} : \mathbf{Q}_p^*\to L$ le logarithme normalisé par $\log_{\mathscr{L}} p = \mathscr{L}$, et si $\mathscr{L}=\infty$, on définit $\log_{\mathscr{L}}$ par $\log_\infty = v_p$.

Théorème 13. — (i) *Si s est générique, le complété universel de $B^{\mathrm{alg}}(s)$ est $\Pi(s)$, et $\Pi(s)$ est un objet irréductible, non nul, de* $\mathrm{Rep}_L G$.

(ii) *Si s est spécial, le complété universel de $B^{\mathrm{alg}}(s)$ est $B(s)$; ce n'est pas une représentation admissible de G, mais son quotient $\Pi(s)$ est un objet irréductible, non nul, de $\mathrm{Rep}_L G$, et les $\Pi(s)$ correspondant à deux valeurs de $\mathscr{L}$ différentes sont non isomorphes.*

Remarque 14. — (i) La description des complétés universels se fait par de pures méthodes de théorie des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, cf. [**21, 27, 115, 64, 67**]. Par contre, il semble difficile de prouver, par ces méthodes, que ces complétés universels sont non nuls[39].

(ii) L'étude des propriétés de $\Pi(s)$ se fait via la théorie des (φ,Γ)-modules rappelée au § 15 ; elle établit un lien direct entre $\Pi(s)$ et (le (φ,Γ)-module attaché à) la représentation $V(s)$. Le cas spécial a été étudié dans [**46**] (inédit, mais voir [**51**]), et la méthode a été adaptée par Berger et Breuil [**15**] pour traiter le cas générique. L'idée de faire intervenir les (φ,Γ)-modules a été suggérée par un travail de Breuil [**23**] dans lequel il démontrait la non nullité de $\Pi(s)$, dans le cas où s est spécial et provient d'une forme modulaire f, en exhibant un élément du dual de $\Pi(s)$ relié à la fonction L p-adique associée à f. Or il existe [**45**] une construction de cette fonction L p-adique qui utilise le (φ,Γ)-module associé à la représentation $\rho_{f,p}$.

(iv) Si s est spécial, $B(s)$ admet la représentation $\Pi(\delta_1,\delta_2,\infty)$ parmi ses quotients irréductibles, alors que Fil_∞ ne fait pas partie des filtrations faiblement admissibles que l'on peut mettre sur $\Delta(s)$. Une manière d'expliquer ce phénomène est de constater que multiplier e_1 par $\mathscr{L}$ permet d'écrire $(\Delta(\eta_1,\eta_2),\mathrm{Fil}_\infty)$ comme la limite de $(\Delta^N(\eta_1,\eta_2),\mathrm{Fil}_{\mathscr{L}})$ quand $\mathscr{L}\to\infty$.

15. Représentations galoisiennes et (φ,Γ)-modules

On pose $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+=\mathscr{O}_L[[T]]$ et $\mathscr{E}^+=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{p}]$. On définit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ comme le complété de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+[\frac{1}{T}]$ pour la topologie p-adique ; c'est l'anneau des séries de Laurent $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_kT^k$, avec $a_k\in\mathscr{O}_L$ et $\lim_{k\to-\infty} v_p(a_k)=+\infty$. On note $\mathscr{E}=\mathscr{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{p}]$ le corps des fractions de $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Ces anneaux s'interprètent en termes d'analyse fonctionnelle p-adique [**49, 50**], ce qui fournit un guide assez précieux pour munir les modules sur ces anneaux d'actions diverses et variées.

Remarque 15. — D'après Mahler, les $\binom{x}{n}$, pour $n\in\mathbf{N}$, forment une base orthonormale de l'espace $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ des fonctions continues sur $\mathbf{Z}_p$. Ceci se traduit par :

• l'application $f\mapsto\phi_f$ induit un isomorphisme $\mathscr{E}/\mathscr{E}^+\cong\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$, où $\phi_f(x)$ est, si $x\in\mathbf{Z}_p$, le résidu en 0 de la forme différentielle $(1+T)^{-x}f(T)\frac{dT}{1+T}$.

[39] On peut y arriver [**20, 28**] en réduisant modulo p, mais les calculs deviennent vite inextricables.

• la *transformée d'Amice* $\mu \mapsto A_\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}(1+T)^x\mu$ induit un isomorphisme de l'espace $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ des *mesures* sur $\mathbf{Z}_p$ [dual topologique de $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$] sur $\mathscr{E}^+$.

On munit $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, et $\mathscr{E}$ d'actions $\mathscr{O}_L$-linéaires continues de $\Gamma = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}_p^{\mathrm{cycl}}/\mathbf{Q}_p)$ et du frobenius φ, respectant les structures d'anneaux, en envoyant T sur $\varphi(T) = (1+T)^p - 1$ et $\sigma_a(T) = (1+T)^a - 1$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$. Ces actions commutent entre elles.

Si $A = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ ou $\mathscr{E}$, un (φ,Γ)-*module* D sur A est un A-module de type fini muni d'actions semi-linéaires continues de φ et Γ commutant entre elles. Un (φ,Γ)-module D sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$ (resp. $\mathscr{E}$) est *étale* si $\varphi(D)$ engendre D comme $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-module (resp. s'il possède un $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$-réseau qui est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$).

On note $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathscr{E}$. La raison pour introduire ces objets est l'équivalence de catégories de Fontaine [**77**].

Théorème 16. — *On a une équivalence*[40] *de catégories* $\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p} \cong \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$.

Remarque 17. — (i) Ce théorème dit que se donner une L-représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ revient à se donner un (φ,Γ)-module D, étale sur $\mathscr{E}$. Si V est potentiellement log-cristalline, on a donc deux descriptions de V, et on dispose d'une recette [**11, 44**] permettant de passer de l'une à l'autre (i.e. une description de $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ à partir de D, et réciproquement), ce qui intervient dans la démonstration du th. 13.

(ii) Un des intérêts de passer de V à D est qu'un (φ,Γ) module est naturellement un P^+-module, où P^+ est le semi-groupe $\left(\begin{smallmatrix}\mathbf{Z}_p-\{0\} & \mathbf{Z}_p\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, l'action de P^+ étant donnée par la formule $\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot z = (1+T)^b\varphi^k\circ\sigma_a(z)$, si $k\in\mathbf{N}$, $a\in\mathbf{Z}_p^*$ et $b\in\mathbf{Z}_p$. On n'est donc plus très loin d'une représentation de G. Si $D = \mathscr{E}$, l'action de P^+ laisse stable $\mathscr{E}^+$ et donc induit des actions sur $\mathscr{C}^0(\mathbf{Z}_p)$ et $\mathscr{D}_0(\mathbf{Z}_p)$. Celles-ci sont les actions naturelles :

$$\left(\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\phi\right)(x) = \begin{cases} a^{-1}\phi\left(\frac{x-b}{p^k a}\right), & \text{si } x\in b+p^k\mathbf{Z}_p,\\ 0 & \text{si } x\notin b+p^k\mathbf{Z}_p,\end{cases}\qquad \int_{\mathbf{Z}_p}\phi\,\left(\begin{smallmatrix}p^k a & b\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\cdot\mu = \int_{\mathbf{Z}_p}\phi(p^k a x+b)\,\mu.$$

16. La correspondance p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Si D est un (φ,Γ)-module étale, de torsion sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$, le plus grand sous-$\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$-module compact D^+ de D, stable par φ, permet de reconstruire D : on a $D = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D^+$. La description de la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ utilise la construction [**52**, chap. IV] d'un foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$; celle-ci passe par la construction d'un objet $D_W^+(\Pi)$, jouant le rôle de D^+.

[40] On peut parfaitement utiliser cette équivalence de catégories comme une boite noire ; elle repose sur la construction d'un anneau $\mathbf{A}$, muni d'actions de φ et de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ commutant entre elles, telles que $\mathbf{A}^{\varphi=1} = \mathscr{O}_L$ et $\mathbf{A}^{\ker\chi} = \mathscr{O}_{\mathscr{E}}$. Si $V\in\mathrm{Rep}_L\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, alors $\mathbf{D}(V) = (\mathbf{A}\otimes_{\mathscr{O}_L} V)^{\ker\chi}$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$ (l'action de φ vient de $\mathbf{A}$, celle de Γ est l'action résiduelle de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) et, comme $\mathbf{A}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}\mathbf{D}(V) = \mathbf{A}\otimes_{\mathscr{O}_L} V$, on retrouve V par la formule $V = (\mathbf{A}\otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}}\mathbf{D}(V))^{\varphi=1}$.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, on choisit $W \subset \Pi$, de longueur finie sur $\mathscr{O}_L$, stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$, engendrant Π comme $\mathscr{O}_L[G]$-module. Alors Π est engendré (comme $\mathscr{O}_L$-module) par les $\left(\begin{smallmatrix} p^n & b \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, pour $n \in \mathbf{Z}$ et $b \in \mathbf{Q}_p$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$. On note $D_W^+(\Pi)$ l'ensemble des[41] $\mu \in \Pi^\vee$ identiquement nuls sur $\left(\begin{smallmatrix} p^n & a \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \cdot W$, si $a + p^n\mathbf{Z}_p \not\subset \mathbf{Z}_p$. Alors $D_W^+(\Pi)$ est stable par P^+, ce qui en fait un (φ, Γ)-module sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+$, où T agit par $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) - 1$, σ_a par $\left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ et φ par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. On note $\mathbf{D}(\Pi)$ le (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi) = \mathscr{O}_{\mathscr{E}} \otimes_{\mathscr{O}_{\mathscr{E}}^+} D_W^+(\Pi)$; il ne dépend pas du choix de W.

Théorème 18. — (i) *Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, alors $\mathbf{D}(\Pi)$ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathscr{O}_{\mathscr{E}}$.*

(ii) *Le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{D}(\Pi)$ est contravariant et exact.*

Remarque 19. — Le point délicat dans la démonstration de ce théorème est de prouver que $\mathbf{D}(\Pi)$ est de longueur finie. L'exactitude du foncteur $\mathbf{D}$ permet de se ramener au cas où Π est irréductible, et on utilise la classification des représentations irréductibles de Barthel-Livné [**6, 7**] et Breuil [**19**].

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$, on choisit un réseau Π_0 de Π stable par G, et on définit $\mathbf{D}(\Pi)$ par $\mathbf{D}(\Pi) = L \otimes_{\mathscr{O}_L} \varprojlim \mathbf{D}(\Pi/p^n\Pi)$. Alors $\mathbf{D}(\Pi)$ est un objet de $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathscr{E})$, et on définit $\mathbf{V}(\Pi)$ comme le *dual de Tate* $\mathrm{Hom}(V, L(\chi))$, de la représentation V associée à $\mathbf{D}(\Pi)$ par l'équivalence de catégories de Fontaine. Le foncteur $\Pi \to \mathbf{V}(\Pi)$ est alors covariant et exact ; c'est la *correspondance de Langlands locale p-adique.*

Théorème 20. — (i) *Si Π est de dimension 1, alors $\mathbf{V}(\Pi) = 0$.*

(ii) *Si δ_1, δ_2 sont unitaires, alors $\mathbf{V}(B(\delta_1, \delta_2)) = L(\delta_1)$.*

(iii) *Si $s \in \mathscr{S}(a, b)$, alors $\mathbf{V}(\Pi(s)) = V(s)$.*

(iv) *$\mathbf{V}$ induit une bijection de l'ensemble des supersingulières sur l'ensemble des objets absolument irréductibles de dimension 2 de $\mathrm{Rep}\,\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$* (au moins si $p \geq 5$)

Remarque 21. — (i) les points (i) et (ii) sont relativement immédiats.

(ii) Le (iii) est un calcul direct (et fastidieux...) à la base du th. 13.

(iii) La surjectivité dans le point (iv) s'obtient à partir du (iii) par un procédé de prolongement analytique ([**52**, chap. II, IV] ou [**105**]), en utilisant le fait que les $V(s)$ sont zariski-denses [**48, 105, 37, 111**] dans l'espace des représentations[42] de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(iv) On peut reconstruire [**52**, chap. II, IV] la représentation Π à partir du (φ, Γ)-module $\mathbf{D}(\Pi)$. Ceci fournit une description explicite de la bijection $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ inverse de $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ du (iv) du théorème. La recette permet de plus d'associer à une représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2, qui n'est pas absolument irréductible, une

---

(41) $\Pi^\vee = \mathrm{Hom}(\Pi, L/\mathscr{O}_L)$ est le dual de Π, avec action de G définie par $\langle g \cdot \mu, v \rangle = \langle \mu, g^{-1} \cdot v \rangle$.

(42) Il reste un cas, si $p = 2$, où ceci n'a pas été formellement vérifié : celui où la semi-simplifiée de la représentation résiduelle est triviale (à torsion près par un caractère), mais c'est par pure paresse.

représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ telle que $\mathbf{V}(\mathbf{\Pi}(V)) = V$; dans ce cas, $\mathbf{\Pi}(V)$ n'est pas absolument irréductible et ses composantes de Jordan-Hölder sont ordinaires.

(v) Le fait que $\dim \mathbf{V}(\Pi) = 2$, si Π est supersingulière, n'a rien d'évident a priori. Cela a été démontré par Paskunas [**116**] (au moins si $p \geq 5$) qui a obtenu une description complète de la catégorie $\mathrm{Rep}_L G$ en termes de $\mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$.

(vi) La fonctorialité de la correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ est très utile pour toutes sortes de questions [**68**] (par exemple pour établir son existence [**105**]) ; c'est un gros avantage de la correspondance p-adique sur la classique. Par contre, il manque (pour le moment) une réalisation géométrique de cette correspondance. Une telle réalisation permettrait peut-être d'intuiter la forme que doit prendre la correspondance en général.

(vii) Emerton [**68**] a établi une compatibilité entre la correspondance locale p-adique et une correspondance globale (cf. [**27, 23**], pour des résultats antérieurs) ; cela a des applications à la conjecture de Fontaine-Mazur (voir plus bas).

(viii) Le (ii) du th. 22 ci-dessous montre que la correspondance p-adique encode la classique, et confirme la philosophie de Breuil.

Si $\Pi \in \mathrm{Rep}_L G$, on dit que $v \in \Pi$ est *localement algébrique* si $g \mapsto g \cdot v$ est localement polynomiale en a, b, c, d et $(ad - bc)^{-1}$, où $g = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$. On note Π^{alg} l'ensemble des vecteurs localement algébriques de Π ; c'est une sous-G-représentation de Π.

Théorème 22. — *Soit* $V \in \mathrm{Rep}_L \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, *absolument indécomposable, de dimension* 2.

(i) $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}} \neq 0$ *si et seulement si* V *est potentiellement log-cristalline à poids de Hodge-Tate distincts* $a < b$.

(ii) *Si c'est le cas,* $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}} = \mathrm{LL}_p(\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)) \otimes \det^a \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1}$.

Remarque 23. — (i) On commence par déterminer les vecteurs localement analytiques ([**52**, chap. V] et [**55**]) de $\mathbf{\Pi}(V)$ (on sait qu'il en existe grâce à Schneider-Teitelbaum [**122**]) ; cela utilise des raffinements de la théorie des (φ, Γ)-modules [**39, 11, 98, 44**]. Ensuite, on peut caractériser $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}}$ en utilisant l'algèbre enveloppante de l'algèbre de Lie [**120**] ; c'est l'approche de Dospinescu [**61, 63**], nettement plus naturelle que celle de [**52**, chap. VI].

(ii) Si V n'est pas absolument irréductible ou si $s \in \mathscr{S}(a, b)$, on peut déterminer $\Pi(s)^{\mathrm{alg}}$ à partir des composantes de Jordan-Hölder [**119, 66, 53, 62, 109**] des vecteurs localement analytiques de $\Pi(s)$.

(iii) Dans les autres cas, $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{alg}} = \mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lc}} \otimes \det^a \otimes \mathrm{Sym}^{b-a-1}$ où $\mathbf{\Pi}(V)^{\mathrm{lc}}$ est supercuspidale et ne dépend [**52**, chap. VI] que du $(\varphi, N, \mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p})$-module $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$, et pas de la filtration, ce qui permet de choisir une filtration correspondant à une forme modulaire et d'utiliser les travaux d'Emerton [**65, 67, 68**] pour démontrer le (ii). La démonstration a donc recours à un argument global dont il serait bon de pouvoir se passer.

(iv) Emerton [**68**] et Kisin [**104**] savent, chacun de son côté, en déduire la conjecture de Fontaine-Mazur dans la plupart des cas, par deux adaptations différentes de la stratégie évoquée au § 6, ce que l'on peut résumer par : « Le prolongement analytique p-adique permet de démontrer l'existence de prolongements analytiques de fonctions complexes ! »

Références

[1] F. Andreatta et O. Brinon, Acyclicité géométrique de $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$ relatif, Comment. Math. Helvetici (à paraître).

[2] F. Andreatta et A. Iovita, Global applications of relative (φ, Γ)-modules II, J. Inst. Math. Jussieu (à paraître).

[3] A. Atkin et J. Lehner, Hecke operators on $\Gamma_0(m)$, Math. Ann. **185** (1970) 134–160.

[4] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty et R. Taylor, Potential automorphy and change of weight, preprint 2010.

[5] T. Barnet-Lamb, T. Gee, D. Geraghty et R. Taylor, Local-global compatibility for $\ell = p$. II, preprint 2011.

[6] L. Barthel et R. Livné, Irreducible modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[7] L. Barthel et R. Livné, Modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

[8] A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, J. Soviet Math. **30** (1985) 2036–2070.

[9] A. Beilinson, p-adic periods and derived de Rham cohomology, J. A.M.S. **25** (2012), 715–738.

[10] A. Beilinson, On the crystalline period map, preprint 2012.

[11] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. Math. **148** (2002), 219-284.

[12] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[13] L. Berger, Construction de (ϕ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, Algebra Number Theory **2** (2008), 91–120.

[14] L. Berger, La correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, *Séminaire Bourbaki 2009/2010*, exp. 1017, Astérisque **339** (2011), 157–180.

[15] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[16] B. Bhatt, p-adic derived de Rham cohomology, preprint 2012.

[17] S. Bloch et K. Kato, p-adic étale cohomology, Publ. I.H.E.S. **63** (1986), 107–152.

[18] S. Bloch et K. Kato, L functions and Tamagawa numbers of motives, in *The Grothendieck Festschrift*, vol. 1, Prog. in Math. **86**, 333–400, Birkhaüser, 1990.

[19] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Comp. Math. **138** (2003) 165–188.

[20] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu **2** (2003), 23–58.

[21] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. E.N.S. **37** (2004) 559–610.

[22] C. Breuil, Introduction générale, Astérisque **319** (2008), 1–12.

[23] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, Astérisque **331** (2010), 65–115.

[24] C. Breuil, The emerging p-adic Langlands programme, Proceedings of I.C.M. 2010, Vol. II, 203–230.

[25] C. Breuil, Correspondance de Langlands p-adique, compatibilité local-global et applications, *Séminaire Bourbaki 2010/2011*, exp. 1031, Astérisque (à paraître).

[26] C. Breuil, B. Conrad, F. Diamond et R. Taylor, On the modularity of elliptic curves over $\mathbf{Q}$: wild 3-adic exercises, J. A.M.S. **14** (2001), 843–939.

[27] C. Breuil et M. Emerton, Représentations p-adiques ordinaires de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et compatibilité local-global, Astérisque **331** (2010), 255–315.

[28] C. Breuil et A. Mézard, Représentations semi-stables de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, demi-plan p-adique et réduction modulo p, Astérisque **331** (2010), 117–178.

[29] C. Breuil et P. Schneider, First steps towards p-adic Langlands functoriality, J. Reine Angew. Math. **610** (2007), 149–180.

[30] C. Bushnell et G. Henniart, The local Langlands conjecture for $\mathbf{GL}(2)$, Grundlehren der Math. Wiss. **335**, Springer-Verlag, 2006.

[31] C. Bushnell et P. Kutzko, *The admissible dual of* $\mathrm{GL}(N)$ *via compact open subgroups*, Annals of Mathematics Studies **129**, Princeton University Press, 1993.

[32] F. Calegari, Even Galois representations and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **185** (2011), 1–16.

[33] F. Calegari, Even Galois Representations and the Fontaine-Mazur Conjecture. II, Journal of the A.M.S. **25** (2012), 533–554.

[34] A. Caraiani, Local-global compatibility and the action of monodromy on nearby cycles, preprint 2010.

[35] A. Caraiani, Monodromy and local-global compatibility for $\ell = p$, preprint 2012.

[36] H. Carayol, Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986) 409–468.

[37] G. Chenevier, Sur la densité des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbf{Q}_p$, Math. Annalen (à paraître).

[38] G. Chenevier et M. Harris, Construction of automorphic Galois representations, II, prépublication 2009.

[39] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[40] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[41] P. Colmez, Périodes p-adiques des variétés abéliennes, Math. Ann. **292** (1992), 629–644.

[42] P. Colmez, *Intégration sur les variétés p-adiques*, Astérisque **248** (1998).

[43] P. COLMEZ, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[44] P. COLMEZ, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Séminaire Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[45] P. COLMEZ, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Séminaire Bourbaki 2002/03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251–319.

[46] P. COLMEZ, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication 2004.

[47] P. COLMEZ, Conducteur d'Artin d'une représentation de de Rham, Astérisque **319** (2008), 187–212.

[48] P. COLMEZ, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[49] P. COLMEZ, Fonctions d'une variable p-adique, Astérisque **330** (2010), 13–59.

[50] P. COLMEZ, (φ,Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 61–153.

[51] P. COLMEZ, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 213–262.

[52] P. COLMEZ, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ,Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[53] P. COLMEZ, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$: vecteurs localement analytiques, *Automorphic forms and Galois representations, proceedings of the LMS Durham Symposium 2011*, F. Diamond, P. Kassaei, M. Kim (ed.).

[54] P. COLMEZ, Représentations p-adiques et (φ,Γ)-modules, en préparation.

[55] P. COLMEZ et G. DOSPINESCU, Complétés universels de représentations localement analytiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, en préparation.

[56] P. COLMEZ et J-M. FONTAINE, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1–43.

[57] P. DELIGNE, Formes modulaires et représentations ℓ-adiques, *Séminaire Bourbaki 1968/69*, exp. 343, SLN **179** (1971) 139–172.

[58] P. DELIGNE, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L, *Modular functions of one variable, II* Lecture Notes in Math. **349**, Springer, 1973.

[59] P. DELIGNE, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales, dans Automorphic forms, representations and L-functions, Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979) 313–346.

[60] P. DELIGNE et J-P. SERRE, Formes modulaires de poids 1, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **7** (1974), 507–530.

[61] G. DOSPINESCU, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Math. Annalen (à paraître).

[62] G. DOSPINESCU, Équations différentielles p-adiques et foncteurs de Jacquet analytiques, *Automorphic forms and Galois representations, proceedings of the LMS Durham Symposium 2011*, F. Diamond, P. Kassaei, M. Kim (ed.).

[63] G. DOSPINESCU et V. PASKUNAS, en préparation.

[64] M. EMERTON, p-adic L-functions and unitary completions of representations of p-adic reductive groups Duke Math. J. **130** (2005), 353–392.

[65] M. EMERTON, On the interpolation of systems of eigenvalues attached to automorphic Hecke eigenforms, Invent. Math. **164** (2006), 1–84.

[66] M. EMERTON, Jacquet modules of locally analytic representations of p-adic reductive groups. I. Construction and first properties, Ann. E.N.S. **39** (2006), 775–839.

[67] M. EMERTON, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 279–393.

[68] M. EMERTON, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathbf{GL}_{2,\mathbf{Q}}$, preprint 2008.

[69] M. EMERTON, p-adic families of modular forms [after Hida, Coleman, and Mazur], *Séminaire Bourbaki 2009-2010*, exp. 1013, Astérisque **339** (2011).

[70] G. FALTINGS, Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern, Invent. Math. **73** (1983), 349–366.

[71] G. FALTINGS, Almost étale extensions, Astérisque **279** (2002), 185–270.

[72] L. FARGUES, Cohomologie des espaces de modules de groupes p-divisibles et correspondances de Langlands locales, Astérisque **291** (2004), 1–199.

[73] L. FARGUES et J-M. FONTAINE, Vector bundles on curves and p-adic Hodge theory, *Automorphic forms and Galois representations, proceedings of the LMS Durham Symposium 2011*, F. Diamond, P. Kassaei, M. Kim (ed.).

[74] L. FARGUES et J-M. FONTAINE, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, en préparation.

[75] J-M. FONTAINE, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[76] J-M. FONTAINE, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[77] J.-M. FONTAINE, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[78] J.-M. FONTAINE, Valeurs spéciales de fonctions L des motifs, *Séminaire Bourbaki 1991/92*, exp. 751, Astérisque **206**, 205-249, 1992.

[79] J-M. FONTAINE, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques* exp. II, Astérisque **223** (1994), 59–102.

[80] J-M. FONTAINE, Représentations p-adiques semi-stables, *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994) 113–184.

[81] J-M. FONTAINE, Représentations ℓ-adiques semi-stables, *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994) 321–347.

[82] J-M. FONTAINE et B. MAZUR, Geometric Galois representations, *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, 1995.

[83] J.-M. FONTAINE et W. MESSING, p-adic periods and p-adic étale cohomology, *Current Trends in Arithmetical Algebraic Geometry*, Contemporary Math. **67** (1987), 179–207.

[84] J.-M. FONTAINE et B. PERRIN-RIOU, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions L, dans *Motives (Seattle)*, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, vol. **55**, part 1, 599-706, 1994.

[85] O. GABBER et L. RAMERO, Almost ring theory, Lecture Notes in Mathematics **1800**, Springer-Verlag, 2003.

[86] O. GABBER et L. RAMERO, Foundations of almost ring theory - Sixth Release 2012.

[87] A. GROTHENDIECK, *Correspondance Grothendieck-Serre*, lettres des 24/9/64 et 3-5/10/64, Documents Mathématiques **2**, S.M.F. 2001.

[88] M. HARRIS et R. TAYLOR, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[89] M. HARRIS, K. LAN, R. TAYLOR et J. THORNE, en préparation.

[90] G. HENNIART, Représentations des groupes réductifs p-adiques, *Séminaire Bourbaki 1990/91*, exp. 736, Astérisque **201-203** (1991) 193–219.

[91] G. HENNIART, Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour $\mathbf{GL}_n$ sur un corps p-adique, Invent. Math. **139** (2000), 439-455.

[92] H. HIDA, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 231–273.

[93] H. HIDA, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. **85** (1986), 545–613.

[94] U. JANNSEN et K. WINGBERG, Die Struktur der absoluten Galoisgruppe $\mathfrak{p}$-adischer Zahlkörper, Invent. Math. **70** (1982/83), 71–98.

[95] H. JACQUET et R. LANGLANDS, Automorphic forms on $\mathbf{GL}(2)$, Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[96] K. KATO, Semi-stable reduction and p-adic étale cohomology, Astérisque **223**, (1994), 269–293.

[97] K. KATO, p-adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, Astérisque **295** (2004), 117–290.

[98] K. KEDLAYA, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[99] C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER, Serre's modularity conjecture (I), Invent. Math. **178** (2009), 485–504.

[100] C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER, Serre's modularity conjecture (II), Invent. Math. **178** (2009), 505–586.

[101] M. KISIN, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[102] M. KISIN, Crystalline representations and F-crystals, *Algebraic geometry and number theory*, 459–496, Progr. Math. **253**, Birkhäuser, 2006.

[103] M. KISIN, Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations, Invent. Math.**178** (2009), 587–634.

[104] M. KISIN, The Fontaine-Mazur conjecture for $\mathbf{GL}_2$, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 641–690.

[105] M. KISIN, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations, Astérisque **330** (2010), 511–528.

[106] P. KUTZKO, The Langlands conjecture for Gl_2 of a local field, Ann. of Math. **112** (1980), 381–412.

[107] R. LANGLANDS, Lettre à André Weil, 1967.

[108] R. LANGLANDS, Base change for GL(2), Annals of Mathematics Studies **96**, Princeton University Press 1980.

[109] R. LIU, B. XIE, Y. ZHANG, Locally Analytic Vectors of Unitary Principal Series of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Ann. E.N.S. (à paraître).

[110] S. MOCHIZUKI, A version of the Grothendieck conjecture for p-adic local fields, Internat. J. Math. **8** (1997), 499–506.

[111] K. NAKAMURA, Zariski density of crystalline representations for any p-adic field, preprint 2011.

[112] W. NIZIOŁ, Crystalline Conjecture via K-theory, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **31** (1998), 659–681.

[113] W. NIZIOŁ, Semistable Conjecture via K-theory, Duke Math. J. **141** (2008), 151–178.

[114] W. NIZIOŁ, On uniqueness of p-adic period morphisms, Pure Appl. Math. Q. **5** (2009), 163–212.

[115] V. PASKUNAS, On some crystalline representations of $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q_p})$, Algebra and Number Theory **3** (2009), 411–421.

[116] V. PASKUNAS, The image of Colmez's Montréal functor, prépublication 2010.

[117] K. RIBET, On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms, Invent. Math. **100** (1990), 431–476.

[118] T. SAITO, Modular forms and p-adic Hodge theory, Inventiones Math. **129** (1997), 607–620.

[119] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to $\mathbf{GL}_2$, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 443–468.

[120] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, (with an appendix by D. PRASAD), $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, Representation Theory **5** (2001), 111–128.

[121] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380.

[122] P. SCHNEIDER et J. TEITELBAUM, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.

[123] A. SCHOLL, Motives for modular forms, Invent. Math. **100** (1990) 419–430.

[124] P. SCHOLZE, The local Langlands correspondence for $\mathbf{GL}_n$ over p-adic fields, preprint 2010.

[125] P. SCHOLZE, Perfectoid spaces, preprint 2011.

[126] J-P. SERRE, *Corps locaux*, Deuxième édition. Publications de l'Université de Nancago, No. VIII. Hermann, Paris, 1968. 245 pp.

[127] J-P. SERRE, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular functions of one variable, III, pp. 191–268. Lecture Notes in Math. **350**, Springer, 1973.

[128] J-P. SERRE, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), 179–230.

[129] G. SHIMURA, *Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions*, Kanô Memorial Lectures 1, Pub. of the Math. Soc. of Japan **11**, 1971.

[130] G. SHIMURA, On elliptic curves with complex multiplication as factors of the Jacobians of modular function fields, Nagoya Math. J. **43** (1971) 199–208.

[131] G. SHIMURA, On the factors of the jacobian variety of a modular function field, J. Math. Soc. Japan **25** (1973) 523–544.

[132] J. TATE, p-divisible groups, *Proc. Conf. Local Fields* (*Driebergen, 1966*) 158–183 Springer, Berlin.

[133] T. Tsuji, p-adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. Inv. Math. **137** (1999), 233–411.

[134] T. Tsuji, Semi-stable conjecture of Fontaine-Jannsen : a survey, Astérisque **279** (2002), 323–370.

[135] J. Tunnell, On the local Langlands conjecture for $\mathbf{GL}(2)$, Invent. Math. **46** (1978), 179–200.

[136] J. Tunnell, Artin's conjecture for representations of octahedral type, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **5** (1981), 173–175.

[137] M.-F. Vigneras, Correspondance de Langlands semi-simple pour $\mathrm{GL}(n, F)$ modulo $\ell \neq p$, Invent. Math. **144** (2001), 177–223.

[138] M.-F. Vigneras, Banach ℓ-adic representations of p-adic groups. Astérisque **330** (2010), 1–11.

[139] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. **168** (1967), 149–156.

[140] J. Weinstein, On the stable reduction of modular curves, preprint 2010.

[141] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. **141** (1995) 443–551.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.jussieu.fr`