
**CONSTRUCTION DE REPRÉSENTATIONS DE $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$,
NOTES DU COURS DE M2**

par

Pierre Colmez

Table des matières

I. Opérations analytiques sur les (φ, Γ) -modules.....	2
I.1. Image directe par un difféomorphisme local.....	2
1. Le théorème d'inversion locale.....	2
2. Le cas d'un difféomorphisme local de \mathbf{Z}_p dans \mathbf{Z}_p	3
3. Le cas général.....	5
4. L'image directe d'une composée.....	6
I.2. Multiplication par une fonction continue.....	7
1. Généralités.....	7
I.3. Dualité.....	8
I.4. Torsion par un caractère.....	9
II. Construction de représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	10
II.1. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G	10
1. Construction.....	11
2. Squelette de l'action de G	14
3. Torsion par un caractère.....	15
4. Dualité.....	16
5. Lien entre $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$	17
II.2. Les sous-modules $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$	18
1. Propriétés conditionnées à la stabilité par G	19
2. La représentation conditionnelle $\mathbf{\Pi}(D)$ de G	21
3. Dualité.....	23
4. Résultats en famille.....	23
II.3. (φ, Γ) -modules de rang 2 et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$	25
1. La représentation $\mathbf{\Pi}(D)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attachée à un (φ, Γ) -module de rang 2.....	25
2. Réduction à une famille zariski-dense.....	26
III. Appendice : compléments sur $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et ses sous-modules.....	27
III.1. Le foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	27
1. Exactitude du foncteur $D \mapsto D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	27
2. Les sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules de $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	28
3. Lien entre $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$	29
4. L'application rés ₀ : $D \rightarrow D^{\natural}/D^{\natural}$	30

I. Opérations analytiques sur les (φ, Γ) -modules

Le but de ce chapitre est de définir, en s'inspirant des formules pour l'image directe d'une mesure par un difféomorphisme local ou pour la multiplication d'une mesure par une fonction continue, des opérations analytiques sur n'importe quel (φ, Γ) -module étale. Le cas des mesures correspond au (φ, Γ) -module trivial $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ et même, plus précisément, à son sous- (φ, Γ) -module $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\natural} = \mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ (l'identité de $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^{\natural}$ et $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ rend la convergence des formules bien meilleure dans le cas du module trivial que dans le cas général où l'existence des limites est un peu miraculeuse).

Dans tout ce chapitre, les (φ, Γ) -modules considérés sont étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Les résultats s'étendent aux objets de $\Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{E})$ par linéarité.

I.1. Image directe par un difféomorphisme local

1. Le théorème d'inversion locale

Si U et V sont deux ouverts compacts de \mathbf{Q}_p , on dit que $f : U \rightarrow V$ est un *difféomorphisme* si f est bijectif, de classe \mathcal{C}^1 , et si son inverse est de classe \mathcal{C}^1 (la prop. I.1.1 ci-dessous montre que cette dernière condition est en fait automatique).

On dit que $f : U \rightarrow V$ est un *difféomorphisme local* si f est de classe \mathcal{C}^1 , et si f' ne s'annule pas sur U .

Un difféomorphisme $f : a + p^k\mathbf{Z}_p \rightarrow b + p^\ell\mathbf{Z}_p$ est dit *régulier* si $v_p(f'(x))$ est constant sur $a + p^k\mathbf{Z}_p$ et s'il transforme un système de représentants de $a + p^k\mathbf{Z}_p$ modulo $p^n\mathbf{Z}_p$ en un système de représentants de $b + p^\ell\mathbf{Z}_p$ modulo $p^{n+\ell-k}\mathbf{Z}_p$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Proposition I.1.1. — *Soient U, V des ouverts compacts de \mathbf{Q}_p et $f : U \rightarrow V$ de classe \mathcal{C}^1 . Si $a \in U$ est tel que $f'(a) \neq 0$, alors il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que f induise un difféomorphisme régulier de $a + p^k\mathbf{Z}_p$ sur $f(a) + f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$.*

Démonstration. — L'énoncé est invariant par composition à droite et à gauche par des applications affines, ce qui permet de se ramener au cas $a = f(a) = 0$ et $f'(a) = 1$, et l'énoncé étant local, on peut supposer $U \subset \mathbf{Z}_p$.

Comme f est de classe \mathcal{C}^1 sur U , on peut écrire $f(x+y) - f(x) - f'(x)y$ sous la forme $y\varepsilon(x, y)$, avec $v_p(\varepsilon(x, y)) \geq a(v_p(y))$ et $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$. En particulier, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $p^k\mathbf{Z}_p \subset U$ et

$$v_p(\varepsilon(x_1, x_2 - x_1)) \geq 1, \text{ si } v_p(x_2 - x_1) \geq k, \quad \text{et} \quad v_p(f'(x) - 1) \geq 1, \text{ si } v_p(x) \geq k.$$

Soit alors $F(z, x) = x - f(x) + z$. On a

$$F(z, x_1) - F(z, x_2) = (x_2 - x_1)(\varepsilon(x_1, x_2 - x_1) + (f'(x_1) - 1)),$$

et comme $v_p(\varepsilon(x_1, x_2 - x_1) + (f'(x_1) - 1)) \geq 1$, si $x_1, x_2 \in p^k\mathbf{Z}_p$, la fonction $x \mapsto F(z, x)$ est contractante sur $p^k\mathbf{Z}_p$, pour tout $z \in p^k\mathbf{Z}_p$. Elle admet donc un unique point fixe, noté $g(z)$, et ce point fixe est l'unique solution de l'équation $f(x) = z$ dans $p^k\mathbf{Z}_p$.

Enfin, on a $v_p(f'(x)) = 0$, si $x \in p^k \mathbf{Z}_p$, et comme $v_p(\varepsilon(x, y)) \geq 1$, si $x, y \in p^k \mathbf{Z}_p$, on en déduit que $v_p(f(x+y) - f(x)) = v_p(y)$, ou encore que $v_p(f(x_1) - f(x_2)) = v_p(x_1 - x_2)$, si $x_1, x_2 \in \mathbf{Z}_p$. Ceci permet de montrer :

- que f transforme un système de représentants modulo p^n en un système de représentants modulo p^n ,
- que $v_p(g(z_1) - g(z_2)) = v_p(f(g(z_1)) - f(g(z_2))) = v_p(z_1 - z_2)$, et donc que g est continue,
- que g est surjective puisque son image est compacte, et dense d'après le premier point, et donc que $g \circ f = \mathrm{id}$,
- que $g^{[1]}(x, y) = \frac{g(y) - g(x)}{y - x}$ est bornée sur $p^k \mathbf{Z}_p \times p^k \mathbf{Z}_p$ privé de la diagonale.

Pour conclure, il suffit donc de prouver que g est de classe \mathcal{C}^1 ou, autrement dit, que $g^{[1]}$ s'étend par continuité à $p^k \mathbf{Z}_p \times p^k \mathbf{Z}_p$, ce qui suit de ce que $g^{[1]}(x, y) = f^{[1]}(g(y), g(x))^{-1}$.

2. Le cas d'un difféomorphisme local de \mathbf{Z}_p dans \mathbf{Z}_p

Si $n \in \mathbf{N}$, la notation I_n désigne un système de représentants de \mathbf{Z}_p modulo $p^n \mathbf{Z}_p$.

Soit $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ un difféomorphisme local. Si μ est une mesure sur \mathbf{Z}_p , son image directe par f est la mesure $f_* \mu$ sur \mathbf{Z}_p définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi f_* \mu = \int_{\mathbf{Z}_p} (\phi \circ f) \mu$. Sa transformée d'Amice est donc

$$A_{f_* \mu} = \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(x)} \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \int_{i+p^n \mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(x)} \mu.$$

Par ailleurs, $f(x) = f(i) + f'(i)(x-i) + (x-i)\varepsilon(i, x-i)$, où $\varepsilon(x, y) \rightarrow 0$, quand $y \rightarrow 0$, uniformément pour $x \in \mathbf{Z}_p$. On en déduit que $A_{f_* \mu}$ est aussi la limite de

$$\sum_{i \in I_n} \int_{i+p^n \mathbf{Z}_p} (1+T)^{f(i)+f'(i)(x-i)} \mu = \sum_{i \in I_n} \int_{\mathbf{Z}_p} (1+T)^x \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-i f'(i)} \cdot \mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p} \mu.$$

Comme $\begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-i f'(i)} = \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p} = \mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient finalement :

$$A_{f_* \mu} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_\mu \right).$$

Cette dernière formule a un sens pour n'importe quel (φ, Γ) -module étale et suggère l'énoncé du lemme I.1.2 ci-dessous.

Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Si $D \in \Phi \Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x \in X_n$, d'éléments de D , tend uniformément vers 0, s'il existe une suite décroissante $(M_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de treillis de D vérifiant $\bigcap_{n \in \mathbf{N}} M_n = 0$, telle que $a_{x,n} \in M_n$ pour tout $x \in X_n$. Si tel est le cas, on a $M_n \subset D^+$ pour n assez grand, ce qui permet d'imposer à M_n d'être stable par φ , si n est assez grand.

Si $D \in \Phi \Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, on dit qu'une suite de familles $a_{x,n}$, pour $x \in X_n$, d'éléments de D , tend uniformément vers 0, si elle tend uniformément vers 0 modulo p^k , pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Lemme I.1.2. — Soit $f : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ un difféomorphisme régulier.

(i) Si $z \in D$, la suite de terme général

$$u_n = \sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)$$

converge dans D vers une limite $f_* z$ qui ne dépend pas du choix des I_n , et l'application $f_* : D \rightarrow D$ ainsi définie est \mathcal{O}_L -linéaire continue.

(ii) De plus, $\text{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(f_* z - u_n)$ tend vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$ uniformément pour $i \in I_n$.

Démonstration. — Le cas général se déduit du cas de torsion par limite projective; on peut donc supposer D de torsion. L'indépendance de la limite par rapport au choix des I_n suit de son existence (si on a deux choix, on en fabrique un troisième en panachant et l'existence des limites montre que les trois limites sont égales).

Si $i \in \mathbf{Z}_p$, soit $r_{n,i}(z) = \psi^n \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)$. On a alors

$$\text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) = \varphi^n(r_{n,i}(z)) \quad \text{et} \quad u_n = \sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^n(r_{n,i}(z)).$$

Maintenant,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p^{n-1} \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) &= \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{i+p^{n-1} \mathbf{Z}_p}(z) = \sum_{j \in I_n \cap i+p^{n-1} \mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{j+p^n \mathbf{Z}_p}(z) \\ &= \sum_{j \in I_n \cap i+p^{n-1} \mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 1 & j-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) = \sum_{j \in I_n \cap i+p^{n-1} \mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 1 & j-i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^n(r_{n,j}(z)) \end{aligned}$$

Ceci permet, en notant i_j l'élément de I_{n-1} dans la classe de j modulo p^{n-1} d'écrire $u_n - u_{n-1}$ sous la forme

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \sum_{j \in I_n} \left(\begin{pmatrix} f'(j) & f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} f'(i_j) & f(i_j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & j-i_j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \cdot \varphi^n(r_{n,j}(z)) \\ &= \sum_{j \in I_n} \begin{pmatrix} 1 & f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^n((g_j - h_{n,j}) \cdot r_{n,j}(z)), \end{aligned}$$

avec $g_j = \begin{pmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $h_{n,j} = \begin{pmatrix} f'(i_j) & p^{-n}(f(i_j) + f'(i_j)(j-i_j) - f(j)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (et $g_j - h_{n,j}$ désigne la différence dans $\mathcal{O}_L[G]$ et pas dans $\mathbf{M}_2(\mathbf{Z}_p) \dots$). Comme f est de classe \mathcal{C}^1 et comme $v_p(j - i_j) \geq n - 1$, il existe $a : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ tendant vers $+\infty$ en $+\infty$, telle que l'on ait

$$v_p(f'(j) - f'(i_j)) \geq a(n) \quad \text{et} \quad v_p(p^{-n}(f(i_j) + f'(i_j)(j - i_j) - f(j))) \geq a(n),$$

quel que soit $j \in I_n$. On a alors $g_j^{-1} h_{n,j} \in \begin{pmatrix} 1+p^{a(n)} \mathbf{Z}_p & p^{a(n)} \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ car $v_p(f'(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, étant donné que f est supposé régulier.

Par ailleurs, les fonctions $r_{n,j}$ sont \mathcal{O}_L -linéaires continues, la continuité étant uniforme en $n \in \mathbf{N}$ et $j \in \mathbf{Z}_p$ car si M est un treillis de D , il existe un treillis M' de D contenant tous les $\psi^n \left(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)$, pour $j \in \mathbf{Z}_p$ et $n \in \mathbf{N}$ (en effet, on a $\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \in M$ pour tout $j \in \mathbf{Z}_p$ et il existe $n(M)$ tel que $\psi^n(M) \subset D^\sharp$, pour tout $n \geq n(M)$). On en déduit, en utilisant la continuité de l'action de $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sur D , l'existence de n_0 et d'une suite décroissante de treillis $(M_n)_{n \geq n_0}$ de D , stables par φ , dont l'intersection est nulle, et telle que $(g_j - h_{n,j}) \cdot r_{n,j}(z) = g_j(1 - g_j^{-1} h_{n,j}) \cdot r_{n,j}(z) \in M_n$, pour tout $j \in \mathbf{Z}_p$, et tout $z \in M$. On a alors $u_n - u_{n-1} \in M_n$, et donc $u_n - u_{n-1}$ tend vers

0 uniformément sur M , ce qui prouve que la série converge vers une application \mathcal{O}_L -linéaire continue. On en déduit le (i).

Le (ii) se démontre de même en remarquant que, si $z \in M$, alors

$$\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(u_{n+k+1} - u_{n+k}) = \sum_{j \in I_{n+k+1}, f(j) \in i+p^n\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 1 & f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \varphi^{n+k+1}((g_j - h_{n+k+1,j}) \cdot r_{n+k+1,j}(z))$$

appartient à M_{n+k+1} , ce qui implique que $\mathrm{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z - u_n) \in M_{n+k+1}$, pour tout $i \in \mathbf{Z}_p$, et permet de conclure, vu les conditions satisfaites par les M_n .

3. Le cas général

Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , et si n est assez grand, la notation $I_n(U)$ désigne un système de représentants de U modulo $p^n\mathbf{Z}_p$.

Proposition I.1.3. — Soient U, V deux ouverts compacts de \mathbf{Q}_p et $f : U \rightarrow V$, un difféomorphisme local.

(i) $z \in D \boxtimes U$, la suite de terme général

$$u_n = \sum_{i \in I_n(U)} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right)$$

converge dans $(D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_c$ vers une limite f_*z appartenant à $D \boxtimes V$ et ne dépendant pas du choix des $I_n(U)$.

(ii) L'application $f_* : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes V$ ainsi définie est \mathcal{O}_L -linéaire continue.

(iii) $\mathrm{Res}_{j+p^n\mathbf{Z}_p}(f_*z - u_n) \rightarrow 0$, quand $n \rightarrow +\infty$, uniformément pour $j \in V$.

Démonstration. — f étant de classe \mathcal{C}^1 et f' ne s'annulant pas, U étant compact, il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $a \in U$, f soit un difféomorphisme de $a + p^k\mathbf{Z}_p$ sur $f(a) + f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$. En écrivant U comme une réunion disjointe (finie) de $a + p^k\mathbf{Z}_p$, pour $a \in A \subset U$, on obtient une décomposition de $D \boxtimes U$ sous la forme $D \boxtimes U = \bigoplus_{a \in A} D \boxtimes (a + p^k\mathbf{Z}_p)$, et on est donc ramené à prouver le résultat dans le cas où $U = a + p^k\mathbf{Z}_p$, $V = f(a) + f'(a)p^k\mathbf{Z}_p$ et f est régulier. Nous aurons besoin du résultat suivant qui résulte d'un calcul immédiat.

Lemme I.1.4. — Si $h \in P(\mathbf{Q}_p)$ et si $f : U \rightarrow \mathbf{Q}_p$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors pour tout $x \in U$, on a

$$\begin{pmatrix} (h \circ f)'(x) & h \circ f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = h \begin{pmatrix} f'(x) & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} (f \circ h)'(x) & f \circ h(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(h(x)) & f(h(x)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ell(h),$$

où $\ell(h)$ est la partie linéaire $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de $h = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit alors $h_1 = \begin{pmatrix} p^k f'(a) & f(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $h_2 = \begin{pmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $g = h_1^{-1} \circ f \circ h_2$ de telle sorte que $g : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathbf{Z}_p$ vérifie les conditions du lemme I.1.2. Soit $I_n = \{p^{-k}(j - a), j \in I_{n+k}(U)\} = h_2^{-1}(I_{n+k}(U))$; c'est un système de représentants de \mathbf{Z}_p modulo p^n puisque f est régulier. En utilisant le lemme I.1.4, on peut écrire u_n sous la forme

$$u_n = \sum_{i \in I_n} h_1 \begin{pmatrix} g'(i) & g(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Res}_{p^{n+k}\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -(a+p^k i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right).$$

Or on a

$$\begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \text{Res}_{p^{n+k}\mathbf{Z}_p} = \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} p^{-k} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -(a+p^k i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_2^{-1}.$$

On obtient donc

$$u_n = h_1 \left(\sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} g^{(i)} & g^{(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} h_2^{-1}(z) \right) \right).$$

Comme $h_2^{-1}(z) \in D \boxtimes \mathbf{Z}_p = D$, le terme dans la parenthèse tend vers $g_*(h_2^{-1}(z))$ d'après le lemme I.1.2. On en déduit l'existence de f_* et la formule $f_* = h_1 \circ g_* \circ h_2^{-1}$ qui permet de démontrer la proposition.

Remarque I.1.5. — (i) Si $h \in P(\mathbf{Q}_p)$ est identifié au difféomorphisme de \mathbf{Q}_p qu'il induit, alors $h_* = h$.

(ii) Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme local, et si $h \in P(\mathbf{Q}_p)$, il ressort de la démonstration ci-dessus (ou d'un calcul direct) que

$$(f \circ h)_* = f_* \circ h = f_* \circ h_* \quad \text{et} \quad (h \circ f)_* = h \circ f_* = h_* \circ f_*.$$

4. L'image directe d'une composée

Proposition I.1.6. — Si U, V, W sont des ouverts compacts de \mathbf{Q}_p , et si $f : U \rightarrow V$ et $g : V \rightarrow W$ sont des difféomorphismes locaux, alors

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

Démonstration. — Comme d'habitude, il suffit de traiter le cas où

$$U = a + p^k \mathbf{Z}_p, \quad V = f(a) + f'(a)p^k \mathbf{Z}_p, \quad W = g \circ f(a) + (g \circ f)'(a)p^k \mathbf{Z}_p,$$

et f, g sont des difféomorphismes réguliers. Posons

$$h_1 = \begin{pmatrix} p^k & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} p^k f'(a) & f(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_3 = \begin{pmatrix} p^k (g \circ f)'(a) & g \circ f(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad f_1 = h_2^{-1} \circ f \circ h_1, \quad g_1 = h_3^{-1} \circ g \circ h_2,$$

de telle sorte que f_1 et g_1 sont des difféomorphismes réguliers de \mathbf{Z}_p sur \mathbf{Z}_p . On a $f = h_2 \circ f_1 \circ h_1^{-1}$ et donc $f_* = h_2 \circ (f_1)_* \circ h_1^{-1}$ d'après la rem. I.1.5. De même $g = h_3 \circ g_1 \circ h_2^{-1}$ et donc $g_* = h_3 \circ (g_1)_* \circ h_2^{-1}$. On en déduit que $g_* \circ f_* = h_3 \circ (g_1)_* \circ (f_1)_* \circ h_1^{-1}$ et $(g \circ f)_* = h_3 \circ (g_1 \circ f_1)_* \circ h_1^{-1}$. On est donc ramené à prouver que $(g_1 \circ f_1)_* = (g_1)_* \circ (f_1)_*$; autrement dit, il suffit de prouver le résultat dans le cas $U = V = W = \mathbf{Z}_p$ et f, g sont des difféomorphismes réguliers de \mathbf{Z}_p sur \mathbf{Z}_p . On a alors

$$\begin{aligned} g_*(f_*(z)) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \begin{pmatrix} g^{(i)} & g^{(i)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_*(z) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in f^{-1}(I_n)} \begin{pmatrix} g^{(f(j))} & g^{(f(j))} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_*(z) \right) \end{aligned}$$

Or, d'après le (ii) du lemme I.1.2,

$$\begin{aligned} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} f_*(z) \right) &= \begin{pmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{f(j)+p^n\mathbf{Z}_p} (f_*(z)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f^{(j)} & f^{(j)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) + \varepsilon_{n,j}(z), \end{aligned}$$

où $\varepsilon_{n,j}(z)$ tend vers 0, quand n tend vers $+\infty$, uniformément pour $j \in \mathbf{Z}_p$. Comme

$$\begin{pmatrix} 1 & -f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(j) & f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} g'(f(j)) & g(f(j)) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f'(j) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (g \circ f)'(j) & g \circ f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

on obtient aussi

$$g_*(f_*(z)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in f^{-1}(I_n)} \begin{pmatrix} (g \circ f)'(j) & g \circ f(j) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -j \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) = (g \circ f)_*(z),$$

ce qui permet de conclure.

I.2. Multiplication par une fonction continue

1. *Généralités.* — Soit $\alpha : \mathbf{Z}_p \rightarrow \mathcal{O}_L$ une fonction continue. Si μ est une mesure sur \mathbf{Z}_p , on peut multiplier μ par α : la mesure $m_\alpha(\mu)$ que l'on obtient est définie par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi m_\alpha(\mu) = \int_{\mathbf{Z}_p} \alpha \phi \mu$. Sa transformée d'Amice est donc

$$A_{m_\alpha(\mu)} = \int_{\mathbf{Z}_p} \alpha(x)(1+T)^x \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \int_{i+p^n \mathbf{Z}_p} \alpha(x)(1+T)^x \mu.$$

Comme α est continue, $\alpha(x) - \alpha(i)$ tend vers 0 sur $i + p^n \mathbf{Z}_p$, uniformément pour $i \in \mathbf{Z}_p$. On a donc aussi

$$A_{m_\alpha(\mu)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \int_{i+p^n \mathbf{Z}_p} \alpha(i)(1+T)^x \mu = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n} \alpha(i) \mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p} A_\mu.$$

Cela suggère le résultat suivant :

Proposition I.2.1. — Soient U un ouvert compact de \mathbf{Q}_p et $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L)$. Alors, si $z \in D \boxtimes U$, la suite de terme général

$$u_n = \sum_{i \in I_n(U)} \alpha(i) \mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(z)$$

tend vers une limite $m_\alpha(z) \in D \boxtimes U$ qui ne dépend pas du choix des $I_n(U)$, et l'application $m_\alpha : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes U$ ainsi définie est \mathcal{O}_L -linéaire continue.

Démonstration. — Si D est de torsion, il existe $\ell \in \mathbf{N}$ tel que D soit tué par p^ℓ . Comme U est compact, α est uniformément continue et il existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tel que $a + p^{n_0} \mathbf{Z}_p \subset U$, pour tout $a \in U$, et $\alpha \bmod p^\ell$ soit constante modulo p^{n_0} . La suite u_n est alors constante pour $n \geq n_0$, ce qui permet de conclure dans le cas où D est de torsion. Le cas général s'en déduit par limite projective.

Remarque I.2.2. — L'action de Γ n'a pas été utilisée dans la construction de m_α (en effet, la définition de $\mathrm{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}$ n'utilise que la structure de $\mathcal{O}_\varepsilon^+$ -module et les actions de φ et ψ). La même formule permet donc de définir une application $m_\alpha : \mathbf{A} \boxtimes U \rightarrow \mathbf{A} \boxtimes U$, où \mathbf{A} est l'anneau de Fontaine, et on retrouve $m_\alpha : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes U$ en étendant l'application m_α à $(\mathbf{A} \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathbf{V}(D)) \boxtimes U$, qui contient $D \boxtimes U$, par $m_\alpha(a \otimes v) = m_\alpha(a) \otimes v$, si $a \in \mathbf{A}$ et $v \in \mathbf{V}(D)$.

Proposition I.2.3. — Si $\alpha, \beta \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L)$, alors

$$m_\alpha \circ m_\beta = m_\beta \circ m_\alpha = m_{\alpha\beta}.$$

Démonstration. — Si D est de torsion, tué par p^ℓ , soit n_0 tel que $a + p^{n_0}\mathbf{Z}_p \subset U$, pour tout $a \in U$, et α et $\beta \bmod p^\ell$ soient constantes modulo p^{n_0} . On a alors $\text{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(m_\alpha(z)) = \alpha(i) \text{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$ pour tout $n \geq n_0$ et tout $i \in U$. On en déduit que

$$m_\beta(m_\alpha(z)) = \sum_{i \in I_{n_0}(U)} \beta(i) \text{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(m_\alpha(z)) = \sum_{i \in I_{n_0}(U)} \beta(i)\alpha(i) \text{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z) = m_{\alpha\beta}(z).$$

Ceci permet de conclure dans le cas où D est de torsion. Le cas général s'en déduit par limite projective.

Proposition I.2.4. — Soient U, V des ouverts compacts de \mathbf{Q}_p . Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme local, et si $\alpha \in \mathcal{C}(V, \mathcal{O}_L)$, alors

$$f_* \circ m_{\alpha \circ f} = m_\alpha \circ f_*.$$

Démonstration. — Comme dans la démonstration de la prop. I.1.3, on peut se ramener, quitte à subdiviser U , au cas où f est un difféomorphisme régulier de U sur V ; en particulier, $v_p(f'(x)) = r$ est constant sur U et $f(I_n(U))$ est un système de représentants de V modulo p^{n+r} , pour tout n assez grand.

Maintenant, si D est de torsion, on a $m_{\alpha \circ f}(z) = \sum_{i \in I_n(U)} \alpha(f(i)) \text{Res}_{i+p^n\mathbf{Z}_p}(z)$, pour tout n assez grand, et donc

$$\begin{aligned} f_* \circ m_{\alpha \circ f}(z) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} m_{\alpha \circ f}(z) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \alpha(f(i)) \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) \end{aligned}$$

Par ailleurs, il résulte du (iii) de la prop. I.1.3 et de ce que f est un difféomorphisme régulier, que $\begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) - \text{Res}_{f(i)+p^{n+r}\mathbf{Z}_p}(f_*z)$ tend vers 0 uniformément pour $i \in U$, quand n tend vers $+\infty$. On a donc aussi

$$f_* \circ m_{\alpha \circ f}(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j \in f(I_n(U))} \alpha(j) \text{Res}_{j+p^{n+r}\mathbf{Z}_p}(f_*z) = m_\alpha \circ f_*(z).$$

Ceci permet de conclure dans le cas d'un module de torsion; le cas général s'en déduit par limite projective.

Comme $\text{Res}_{U'} = m_{1_{U'}}$, on déduit des prop. I.2.3 et I.2.4 les résultats suivants.

Proposition I.2.5. — Soient $U' \subset U$ et V des ouverts compacts de \mathbf{Q}_p .

- (i) Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme local, alors $\text{Res}_{f(U')} \circ f_* = f_* \circ \text{Res}_{U'}$.
- (ii) Si $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L)$, alors $m_\alpha \circ \text{Res}_{U'} = \text{Res}_{U'} \circ m_\alpha$.

I.3. Dualité

Proposition I.3.1. — (i) Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , si $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L^*)$, et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{m_\alpha(x), m_{\alpha^{-1}}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.

(ii) Si $f : U \rightarrow V$ est un difféomorphisme entre deux ouverts compacts de \mathbf{Q}_p , et si $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, alors $\{f_*x, f_*y\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$.

Démonstration. — Par définition, on a

$$m_\alpha(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \alpha(i) \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x) \quad \text{et} \quad m_{\alpha^{-1}}(y) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \alpha(i)^{-1} \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(y).$$

Ceci permet, en utilisant l'orthogonalité de $\check{D} \boxtimes U$ et $D \boxtimes V$ si $U \cap V = \emptyset$, de montrer que

$$\begin{aligned} \{m_\alpha(x), m_{\alpha^{-1}}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \{\alpha(i) \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x), \alpha(i)^{-1} \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \{\operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x), \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(y)\}_{\mathbf{Q}_p}, \end{aligned}$$

et tous les termes de la dernière somme sont égaux à $\{x, y\}_{\mathbf{Q}_p}$, par orthogonalité de $\check{D} \boxtimes U$ et $D \boxtimes V$ si $U \cap V = \emptyset$. Ceci démontre le (i).

Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p assez grand pour que $x \in \check{D} \boxtimes U$ et $y \in D \boxtimes U$, et si z est x ou y , alors

$$f_*x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right).$$

Maintenant, $\begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right)$ et $\begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \right)$ appartiennent respectivement à $\check{D} \boxtimes (f(i) + f'(i)p^n \mathbf{Z}_p)$ et $D \boxtimes (f(i) + f'(i)p^n \mathbf{Z}_p)$. Or f étant un difféomorphisme, les $f(i) + f'(i)p^n \mathbf{Z}_p$, pour $i \in I_n(U)$, sont disjoints, si n est assez grand. On en déduit, en utilisant la $P(\mathbf{Q}_p)$ -équivariance de $\{ \cdot, \cdot \}_{\mathbf{Q}_p}$ et l'orthogonalité de $\check{D} \boxtimes U$ et $D \boxtimes V$ si $U \cap V = \emptyset$, que

$$\begin{aligned} \{f_*x, f_*y\}_{\mathbf{Q}_p} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \left\{ \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right), \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \right) \right\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \left\{ \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right), \operatorname{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} y \right) \right\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x), \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(y) \right\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \left\{ \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(x), \operatorname{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(y) \right\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{Q}_p} \end{aligned}$$

Ceci démontre le (ii) et termine la démonstration de la proposition.

I.4. Torsion par un caractère. — Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, et si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$ est un caractère continu, on définit un (φ, Γ) -module $D \otimes \delta$, isomorphe à D en tant que $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module (on note $x \mapsto x \otimes \delta$ l'isomorphisme de D sur $D \otimes \delta$), en tordant les actions de φ et Γ par δ , c'est-à-dire en posant :

$$\sigma_a(x \otimes \delta) = (\delta(a) \sigma_a(x)) \otimes \delta \quad \text{et} \quad \varphi(x \otimes \delta) = (\delta(p) \varphi(x)) \otimes \delta.$$

Lemme I.4.1. — (i) Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in P(\mathbf{Q}_p)$ et si $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors $g \cdot (z \otimes \delta) = (\delta(a)g \cdot z) \otimes \delta$.
(ii) Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p et si $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, alors $\operatorname{Res}_U(z \otimes \delta) = (\operatorname{Res}_U z) \otimes \delta$.
(iii) Si $z \in D \boxtimes U$ et si $\alpha \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L)$, alors $m_\alpha(z \otimes \delta) = m_\alpha(z) \otimes \delta$.

(iv) Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , si $f : U \rightarrow \mathbf{Q}_p$ est un difféomorphisme local, et si $z \in D \boxtimes U$, alors $f_*(z \otimes \delta) = (f_* \circ m_{\delta \circ f'}(z)) \otimes \delta$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Compte-tenu du (i) et de l'additivité de Res_U , il suffit de vérifier le (ii) pour $U = a + p^n \mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Z}_p$, auquel cas le résultat suit de la formule $\text{Res}_{a+p^n \mathbf{Z}_p} = (1+T)^a \circ \varphi^n \circ \psi^n \circ (1+T)^{-a}$, et du fait que $z \mapsto z \otimes \delta$ commute aux multiplications par $(1+T)^a$ et $(1+T)^{-a}$, et commute à φ^n et ψ^n à multiplication près par des facteurs $\delta(p)^n$ et $\delta(p)^{-n}$ qui ont le bon goût de se compenser.

Le (iii) et le (iv) se démontrent par le même genre de techniques; nous ne traiterons que le (iv) qui est le plus délicat. En revenant à la définition, et en utilisant les (i) et (ii), on obtient :

$$\begin{aligned} f_*(z \otimes \delta) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (z \otimes \delta) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sum_{i \in I_n(U)} \delta(f'(i)) \begin{pmatrix} f'(i) & f(i) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z \right) \right) \otimes \delta = (f_* \circ m_{\delta \circ f'}(z)) \otimes \delta. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

II. Construction de représentations de $\text{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

Dans ce chapitre, on construit (th. II.1.4) une représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G à partir de n'importe quel (φ, Γ) -module D et de n'importe quel caractère unitaire continu δ de \mathbf{Q}_p^* . Cette représentation de G n'a aucune raison d'avoir de bonnes propriétés en général, mais on montrera que si D est irréductible de rang 2 (sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ ou \mathcal{E}) et si δ est judicieusement choisi, alors $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ vit dans une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{\Pi}(D) \rightarrow 0,$$

de représentations de G , où $\mathbf{\Pi}(D)$ est une représentation unitaire de G . La correspondance $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$ possède, elle, les propriétés que l'on souhaite d'une correspondance de Langlands locale p -adique (via l'équivalence de catégories de Fontaine pour passer des (φ, Γ) -modules aux représentations p -adiques de $\mathcal{S}_{\mathbf{Q}_p}$).

II.1. La représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G

Soient D un (φ, Γ) -module étale et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$ un caractère continu. On dispose d'une action de $P(\mathbf{Q}_p)$ sur le module $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $(D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ si $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{E})$); on la prolonge en une action de B en faisant agir un élément $\begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$ du centre par multiplication par $\delta(d)$. La représentation de B ainsi obtenue est notée $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ (resp. $(D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_b$).

Remarque II.1.1. — (i) En partant de $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p)$, l'action de B que l'on obtient sur $(\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_b = \mathcal{D}_0(\mathbf{Q}_p)$ est celle définie par

$$\int_{\mathbf{Q}_p} \phi(x) \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \mu = \int_{\mathbf{Q}_p} \delta(d) \phi\left(\frac{ax+b}{d}\right) \mu.$$

(ii) Soit $\Pi(\delta)$ l'espace des fonctions continues $\phi : \mathbf{Q}_p \rightarrow L$, telles que $x \mapsto \delta(x)\phi(1/x)$ se prolonge par continuité en 0. On munit $\Pi(\delta)$ d'une action de G , avec $g \cdot \phi = \phi \star g^{-1}$, et

$$(\phi \star \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix})(x) = \delta(cx + d)\phi\left(\frac{ax + b}{cx + d}\right).$$

Si $\mu \in \Pi(\delta)^*$, soient $\mu_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}\mu$ et $\mu_2 = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\mu$ les éléments de $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ définis par

$$\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \mu_1 = \langle \mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} \phi \rangle \quad \text{et} \quad \int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \mu_2 = \langle \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} \phi \rangle.$$

Comme \mathbf{P}^1 s'obtient en recollant, via $x \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}x$, deux copies de \mathbf{Z}_p le long de \mathbf{Z}_p^* , l'application $\mu \mapsto (\mu_1, \mu_2)$ induit un isomorphisme de $\Pi(\delta)^*$ sur

$$\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = \{(\mu_1, \mu_2) \in \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p) \times \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_2) = w_{\delta}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\mu_1))\},$$

avec $\int_{\mathbf{Z}_p^*} \phi w_{\delta}(\lambda) = \int_{\mathbf{Z}_p^*} \delta(x)\phi(1/x) \lambda$. De plus, l'application

$$\text{Res}_{\mathbf{Q}_p} : \Pi(\delta)^* \cong \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p) \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p,$$

envoyant μ sur $(\mu^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$, où $\mu^{(n)} \in \mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ est défini par $\int_{\mathbf{Z}_p} \phi(x) \mu^{(n)} = \langle \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mu, \mathbf{1}_{\mathbf{Z}_p} \phi \rangle$, est B -équivariante.

Nous allons imiter cette description de $\Pi(\delta)^*$ à partir de $\mathcal{D}_0(\mathbf{Z}_p)$ pour construire une représentation $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de G , et une application B -équivariante $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ dont l'image est incluse dans $(D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_b$, si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$.

1. Construction

Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, et si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p ne contenant pas $-\frac{d}{c}$, on note $\alpha_g \in \mathcal{C}^0(U, \mathcal{O}_L)$ la fonction définie par $\alpha_g(x) = \delta(cx + d)$. Comme g induit un difféomorphisme de U sur gU qui est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p puisque U ne contient pas $-\frac{c}{d}$, on dispose des opérateurs $m_{\alpha_g} : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes U$ et $g_* : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes gU$ et on note $H_g : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes gU$ l'opérateur $g_* \circ m_{\alpha_g}$.

Lemme II.1.2. — (i) Si $g = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$, alors H_g est la multiplication par $\delta(d)$.

(ii) Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, et si $z \in D \boxtimes U$, alors

$$H_g(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in I_n(U)} \delta(ci + d) \begin{pmatrix} g^{(i)} & \\ & g^{(i)} \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right).$$

Démonstration. — Le (i) est immédiat. Si D est de torsion, et si n est assez grand, on a $\text{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p} m_{\alpha_g}(z) = \delta(ci + d) \text{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p} z$, d'après la note I.2.2; la formule du (ii) s'en déduit en revenant à la définition de g_* . Le cas général en résultant par limite projective, cela permet de conclure.

Soit $w_{\delta} : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ la restriction de H_w , et soit

$$D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1 = \{z = (z_1, z_2) \in D \times D, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_{\delta}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))\}.$$

Remarque II.1.3. — (i) Le lemme II.1.2 fournit la formule suivante pour $w_\delta : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$:

$$w_\delta(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \delta(i) \begin{pmatrix} -i^{-2} & i^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right).$$

(ii) On peut aussi utiliser la formule $\text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \text{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}$ et le fait que la multiplication par $\delta(i)$ coïncide avec l'action de $\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, pour obtenir :

$$w_\delta(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \begin{pmatrix} -i^{-1} & 2 \\ 0 & i \end{pmatrix} \text{Res}_{i+p^n \mathbf{Z}_p}(z).$$

(iii) On peut enfin traduire la première formule purement en termes de (φ, Γ) -modules ; on obtient (en ayant fait le changement de variable $i \mapsto i^{-1}$) :

$$w_\delta(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i \in \mathbf{Z}_p^* \bmod p^n} \delta(i^{-1}) (1+T)^i \sigma_{-i^2} \cdot \varphi^n \psi^n \left((1+T)^{-i^{-1}} z \right) = m_{\delta^{-1}} \circ w_*(z).$$

Les trois expressions ci-dessus ont chacune leur utilité.

Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , et si $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, on définit $\text{Res}_U(z) \in D \boxtimes U$, par

$$\text{Res}_U(z) = \text{Res}_{U \cap \mathbf{Z}_p}(z_1) + H_w(\text{Res}_{wU \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) = \text{Res}_{U \cap p\mathbf{Z}_p}(z_1) + H_w(\text{Res}_{wU \cap \mathbf{Z}_p}(z_2)),$$

l'égalité des deux expressions résultant de la condition $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) = w_\delta(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1))$.

Théorème II.1.4. — Il existe sur $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ une unique action $(g, z) \mapsto g \cdot z$ de G telle que

$$\text{Res}_U(g \cdot z) = H_g(\text{Res}_{g^{-1}U \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{gw}(\text{Res}_{(gw)^{-1}U \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)),$$

pour tout ouvert compact U de \mathbf{Q}_p .

Démonstration. — En appliquant la formule ci-dessus pour $U = \mathbf{Z}_p$ et $g = \text{id}$, on voit que l'on doit avoir $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z) = z_1$, et en faisant de même pour $U = \mathbf{Z}_p$ et $g = w$, on obtient

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot z) = H_w(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_1)) + \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(z_2) + \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2) = z_2.$$

On en déduit l'unicité car $g \cdot z$ doit être égal à

$$(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot z), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot (g \cdot z))) = (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot z), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg \cdot z)),$$

si on veut une action de groupe, et que l'on a imposé

$$\begin{aligned} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot z) &= H_g(\text{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{gw}(\text{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)), \\ \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg \cdot z) &= H_{wg}(\text{Res}_{wg^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{wgw}(\text{Res}_{(wgw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier que ceci définit bien une action de groupe. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants.

Lemme II.1.5. — Si $g_1, g_2 \in G$, alors $H_{g_1 g_2} : D \boxtimes U \rightarrow D \boxtimes g_1 g_2 U$ est égal à $H_{g_1} \circ H_{g_2}$, si ni $g_2 U$, ni $g_1 g_2 U$, ne contiennent ∞ .

Démonstration. — En utilisant les prop. I.1.6, I.2.3 et I.2.4, on obtient

$$H_{g_1} \circ H_{g_2} = (g_1)_* \circ m_{\alpha_{g_1}} \circ (g_2)_* \circ m_{\alpha_{g_2}} = (g_1 \circ g_2)_* \circ m_{(\alpha_{g_1} \circ g_2)\alpha_{g_2}},$$

et un calcul immédiat montre que $g_1 \circ g_2 = g_1 g_2$ et $(\alpha_{g_1} \circ g_2)\alpha_{g_2} = \alpha_{g_1 g_2}$, ce qui permet de conclure.

Lemme II.1.6. — *Si $g^{-1}U$ ne contient pas ∞ , alors $\text{Res}_U \circ H_g = H_g \circ \text{Res}_{g^{-1}U}$.*

Démonstration. — On a, d'après la prop. I.2.5,

$$\text{Res}_U \circ H_g = \text{Res}_U \circ g_* \circ m_{\alpha_g} = g_* \circ \text{Res}_{g^{-1}U} \circ m_{\alpha_g} = g_* \circ m_{\alpha_g} \circ \text{Res}_{g^{-1}U} = H_g \circ \text{Res}_{g^{-1}U}.$$

Revenons à la démonstration du théorème. Soient donc $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, $g, h \in G$ et $h \cdot z = (x_1, x_2) \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$. D'après ce qui précède, on a

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot (h \cdot z)) = H_g(\text{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(x_1)) + H_{gw}(\text{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(x_2)).$$

Comme

$$\begin{aligned} x_1 &= H_h(\text{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{hw}(\text{Res}_{(hw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \\ x_2 &= H_{wh}(\text{Res}_{(wh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{whw}(\text{Res}_{(whw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \end{aligned}$$

le terme $H_g(\text{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(x_1))$ peut se réécrire en utilisant les lemmes II.1.6 et II.1.5, sous la forme

$$\begin{aligned} &H_g \left(\text{Res}_{g^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p} \left(H_h(\text{Res}_{h^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{hw}(\text{Res}_{(hw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \right) \right) \\ &= H_{gh}(\text{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap h^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{ghw}(\text{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap (hw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \end{aligned}$$

De même, $H_{gw}(\text{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(x_2))$ peut se réécrire sous la forme

$$\begin{aligned} &H_{gw} \left(\text{Res}_{(gw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p} \left(H_{wh}(\text{Res}_{(wh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{whw}(\text{Res}_{(whw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \right) \right) \\ &= H_{gh}(\text{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap (wh)^{-1}p\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1)) + H_{ghw}(\text{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap (whw)^{-1}p\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2)) \end{aligned}$$

Or $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap h^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p$ et $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap (wh)^{-1}p\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p$ forment une partition de $(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p$, ce qui fait que la somme des deux termes faisant intervenir z_1 est égale à $H_{gh}(\text{Res}_{(gh)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap \mathbf{Z}_p}(z_1))$. De même, la somme des deux termes faisant intervenir z_2 est égale à $H_{ghw}(\text{Res}_{(ghw)^{-1}\mathbf{Z}_p \cap p\mathbf{Z}_p}(z_2))$, ce qui montre que l'on a

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot (h \cdot z)) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(gh \cdot z).$$

En appliquant ceci au triplet $(w, g, h \cdot z)$ au lieu du triplet (g, h, z) , on en déduit que

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot (g \cdot (h \cdot z))) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wg \cdot (h \cdot z)),$$

et en faisant de même avec les triplets (wg, h, z) , puis (w, gh, z) , on obtient

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot (g \cdot (h \cdot z))) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(wgh \cdot z) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(w \cdot (gh \cdot z)).$$

Comme on a déjà démontré plus haut que $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(g \cdot (h \cdot z)) = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(gh \cdot z)$, on en déduit l'égalité de $g \cdot (h \cdot z)$ et $gh \cdot z$. Ceci permet de conclure.

Remarque II.1.7. — (i) On a établi en cours de route que si $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, alors $z_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ et $z_2 = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z$.

(ii) Si U, V sont des ouverts compacts de \mathbf{Q}_p tels que U et wV forment une partition de \mathbf{P}^1 , avec U contenant 0, l'application $z \mapsto (\text{Res}_U(z), \text{Res}_V(wz))$ induit un isomorphisme de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ sur $(D \boxtimes U) \oplus (D \boxtimes V)$, l'isomorphisme réciproque étant

$$(y_1, y_2) = (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap U} y_1 + H_w(\text{Res}_{w\mathbf{Z}_p \cap V} y_2), \text{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap V} y_2 + H_w(\text{Res}_{w\mathbf{Z}_p \cap U} y_1)).$$

Ceci s'applique à $U = \mathbf{Z}_p$ et $V = p\mathbf{Z}_p$, ou à $U = p\mathbf{Z}_p$ et $V = \mathbf{Z}_p$; en particulier, la connaissance de $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ et $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz$, ou celle de $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z$ et $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz$, détermine z .

2. Squelette de l'action de G

Si $\iota : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est une involution, soit

$$D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \times D, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_2 = \iota(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} z_1)\}.$$

Si $z = (z_1, z_2)$, on définit $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z$ par $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = z_1$. On remarquera qu'un élément (z_1, z_2) de $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ est entièrement déterminé par la donnée de $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z_1$ et $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2$, ou celle de $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_1$ et $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z_2$.

On définit un *squelette d'action de G* sur $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ en posant, si $z = (z_1, z_2)$:

- $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot z = (z_2, z_1)$.
- Si $a \in \mathbf{Q}_p^*$, alors $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \cdot z = (\delta(a)z_1, \delta(a)z_2)$.
- Si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, alors $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = (\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1, \delta(a) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_2)$.
- Si $z' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$, alors $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z' = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_1$ et $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz' = \delta(p)\psi(z_2)$.
- Si $b \in p\mathbf{Z}_p$, et si $z' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z$, alors $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z' = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_1$ et $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} wz' = u_b(\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_2))$, où

$$u_b = \delta^{-1}(1+b) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \iota \circ \begin{pmatrix} (1+b)^2 & b(1+b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \circ \iota \circ \begin{pmatrix} 1 & 1/(1+b) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ sur } D \boxtimes p\mathbf{Z}_p.$$

Il n'y a aucune raison pour que ceci définisse une action de G (une telle action serait unique puisque G est engendré par w , le centre, les $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $a \in \mathbf{Z}_p^*$, $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et les $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, pour $b \in p\mathbf{Z}_p$, mais pour obtenir une action de G , il faudrait que les relations entre ces générateurs soient respectées). De fait, la seule involution ι fournissant une action intéressante de G est $\iota = w_{\delta}$, mais considérer un ι général ajoute un peu de flexibilité. Nous allons commencer par vérifier que $\iota = w_{\delta}$ donne bien naissance à une action de G . Plus précisément, on a le résultat suivant.

Proposition II.1.8. — *Si $\iota = w_{\delta}$, les \mathcal{O}_L -modules $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1 \cong D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ sont munis du même squelette d'action de G . En particulier, le squelette d'action de G sur $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ supporte une action de G .*

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que l'action de G sur $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est bien donnée par les formules ci-dessus avec $\iota = w_{\delta}$. Les deux premières formules sont des évidences. La troisième suit de ce que $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ commute à $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, si $a \in \mathbf{Z}_p^*$, et donc $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1$, et de ce que $w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w$, donc

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \delta(a) \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot wz = \delta(a) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} wz = \delta(a) \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_2.$$

Pour démontrer la quatrième, on remarque que $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1$, et comme $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi \circ \text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, on a

$$\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \right) = \delta(p) \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w z \right) = \delta(p) \psi \left(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w z \right) = \delta(p) \psi(z_2).$$

Enfin, pour démontrer la dernière, on remarque que, si $b \in p\mathbf{Z}_p$, alors $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laisse stable \mathbf{Z}_p et $w(p\mathbf{Z}_p)$. On a donc $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1$, et

$$\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \left(w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right) \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w z = \left(w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \right) \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2.$$

Or

$$w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w = \begin{pmatrix} (b+1)^{-1} & 0 \\ 0 & (b+1)^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} (b+1)^2 & b(b+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & (b+1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, $\begin{pmatrix} 1 & (b+1)^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ envoie $p\mathbf{Z}_p$ dans $1 + p\mathbf{Z}_p$, et w et $\begin{pmatrix} (b+1)^2 & b(b+1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ laissent stables $1 + p\mathbf{Z}_p$. L'action de w se fait donc à travers w_δ chaque fois que w apparaît dans la formule ci-dessus pour $w \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w$. On tombe donc bien sur la formule définissant u_b , ce qui permet de conclure.

Proposition II.1.9. — *Si M est un sous- P^+ -module de D stable par ψ , et si $M \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ est stable par w_δ , alors $M \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1, z_1, z_2 \in M\}$ est stable par G .*

Démonstration. — C'est évident sur les formules du squelette d'action.

Lemme II.1.10. — *Soit M un $(\varphi, \psi, P(\mathbf{Z}_p))$ -module et $\iota : M \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow M \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ une involution telle que le squelette d'action sur $M_{\delta, \iota} \boxtimes \mathbf{P}^1$ supporte une action de G . Soient $M_0 \supset M_1$ des sous- \mathcal{O}_L -modules de M vérifiant :*

- M_0 et M_1 sont stables par $P(\mathbf{Z}_p)$,
- M_0 et M_1 sont stables par $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}$ et $\psi(M_0) \subset M_1$, $\varphi(M_1) \subset M_0$,
- $M_0 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ sont stables par ι .

Alors $M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1 = \{(z_1, z_2) \in M \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1, z_1, z_2 \in M_0\}$ est stable par $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Z}_p)$.

Démonstration. — Il est clair sur les formules du squelette d'action que $M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par w et $\begin{pmatrix} \mathbf{Z}_p^* & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; il suffit donc de vérifier la stabilité par $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z}_p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Soient donc $b \in \mathbf{Z}_p$ et $z = (z_1, z_2) \in M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. On a aussi $z = z_1 + w \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2$ et donc $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z_1 + \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \psi(z_2)$. Maintenant, $\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z_1 = (1 + T)^b z_1 \in M_0 = M_0 \boxtimes \mathbf{Z}_p \subset M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il suffit donc de se consacrer au second terme que l'on peut réécrire sous la forme $w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot (y_1 + y_2)$, avec $y_1 = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\psi(z_2)) \in M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ et $y_2 = \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(\psi(z_2)) \in M_1 \boxtimes p\mathbf{Z}_p$. Il résulte alors des hypothèses sur M_1 que $w \begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot y_1 \in M_1 \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$. On en déduit que $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot y_1 \in M_0 \boxtimes p\mathbf{Z}_p$, puis que $w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot y_1 \in M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Enfin, on déduit de la formule du squelette d'action pour $\begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ agissant sur $D \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p)$ l'appartenance de $\begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot y_2$ à $M_1 \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p)$, et donc celle de $w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \begin{pmatrix} 1 & pb \\ 0 & 1 \end{pmatrix} w \cdot y_2$ à $M_0 \boxtimes w(p\mathbf{Z}_p) \subset M_0 \boxtimes \mathbf{P}^1$. Ceci permet de conclure.

3. Torsion par un caractère

Proposition II.1.11. — *Si η, δ sont deux caractères continus de \mathbf{Q}_p^* , alors*

$$D(\eta) \boxtimes_{\delta \eta^2} \mathbf{P}^1 = (D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \otimes (\eta \circ \det).$$

Démonstration. — Si $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G$, on note $\alpha_{\eta,g}$ au lieu de α_g la fonction $x \mapsto \eta(cx + d)$. Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , et si $z \in D \boxtimes U$, une application successive des (iii), (iv) du lemme I.4.1 et de la prop. I.2.4, nous donne :

$$\begin{aligned} H_{\delta\eta^2,g}(z \otimes \eta) &= g_*(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z \otimes \eta)) = g_*(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z) \otimes \eta) \\ &= m_{\eta \circ g' \circ g^{-1}} \circ g_*(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z)) \otimes \eta = g_* \circ m_{\eta \circ g'}(m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(z)) \otimes \eta. \end{aligned}$$

Comme $g'(x) = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$, on a

$$(\eta \circ g'(x)) m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}}(x) = \frac{\eta(ad-bc)}{\eta^2(cx+d)} \delta\eta^2(cx+d) = \eta(ad-bc)\delta(cx+d),$$

et donc $m_{\eta \circ g'} \circ m_{\alpha_{\delta\eta^2,g}} = m_{(\eta \circ g')\alpha_{\delta\eta^2,g}} = \eta(ad-bc)m_{\alpha_{\delta,g}}$. Ceci permet de conclure.

4. Dualité

Lemme II.1.12. — (i) Si $h \in G$, si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p tel que hU ne contient pas ∞ , et si $x \in \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $y \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, alors

$$\{\text{Res}_{hU}(h \cdot x), \text{Res}_{hU}(h \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{\text{Res}_U(x), \text{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p}.$$

(ii) Soit $(\coprod_{i \in I} U_i) \amalg (\coprod_{j \in J} V_j)$ une partition finie de \mathbf{P}^1 en ouverts compacts tels que ∞ n'appartienne à aucun des U_i et 0 n'appartienne à aucun des V_j . Alors, si $x \in \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ et $y \in D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, la somme

$$\sum_{i \in I} \{\text{Res}_{U_i}(x), \text{Res}_{U_i}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \sum_{j \in J} \{\text{Res}_{wV_j}(w \cdot x), \text{Res}_{wV_j}(w \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p}$$

ne dépend que de x et y et pas de la partition de \mathbf{P}^1 .

Démonstration. — On a

$$\begin{aligned} \{\text{Res}_{hU}(h \cdot x), \text{Res}_{hU}(h \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} &= \{h \cdot \text{Res}_U(x), h \cdot \text{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \{h_*(m_{\alpha_h^{-1}}(\text{Res}_U(x))), h_*(m_{\alpha_h}(\text{Res}_U(y)))\}_{\mathbf{Q}_p} = \{\text{Res}_U(x), \text{Res}_U(y)\}_{\mathbf{Q}_p}, \end{aligned}$$

la dernière égalité s'obtenant en appliquant le (ii) puis le (i) de la prop. I.3.1. Ceci démontre le (i).

Pour démontrer le (ii), il suffit de prouver que le résultat reste inchangé si on raffine la partition, ce qui suit de l'orthogonalité de $\check{D} \boxtimes U$ et $D \boxtimes V$ si $U \cap V = \emptyset$, et qu'il reste aussi inchangé si on transforme un U_i en V_j , ce qui suit du (i) appliqué à $h = w$.

On note $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ l'accouplement sur $(\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$ dont le (ii) du lemme précédent affirme l'existence (il est à valeurs dans L/\mathcal{O}_L , \mathcal{O}_L ou L suivant que D est un objet de $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$, $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ ou $\Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$). En partant de la partition $\mathbf{Z}_p \amalg w(p\mathbf{Z}_p)$ de \mathbf{P}^1 , on obtient la formule

$$\{(z_1, z_2), (z'_1, z'_2)\}_{\mathbf{P}^1} = \{z_1, z'_1\} + \{\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z_2, \text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} z'_2\} = \{z_1, z'_1\} + \{\psi(z_2), \psi(z'_2)\},$$

la dernière égalité venant de ce que $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} = \varphi\psi$ et $\{\varphi(z), \varphi(z')\} = \{z, z'\}$.

Théorème II.1.13. — L'accouplement $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ est parfait et G -équivariant.

Démonstration. — On a $\{x, y\}_{\mathbf{P}^1} = \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(x), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}(y)\} + \{\mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w \cdot x), \mathrm{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(w \cdot y)\}$. On déduit la perfection de $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$ sur $(\check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1) \times (D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1)$ de celle de $\{, \}$ sur $(\check{D} \boxtimes \mathbf{Z}_p) \times (D \boxtimes \mathbf{Z}_p)$ et sur $(\check{D} \boxtimes p\mathbf{Z}_p) \times (D \boxtimes p\mathbf{Z}_p)$.

Pour montrer que $\{, \}_{\mathbf{P}^1}$ est G -équivariant, on peut, si $g \in G$, partitionner \mathbf{P}^1 sous la forme $U_1 \amalg U_2 \amalg U_3 \amalg U_4$ de telle sorte que :

- U_1 ne contienne pas ∞ et gU_1 ne contienne pas ∞ ,
- U_2 ne contienne pas ∞ et gU_2 ne contienne pas 0 ,
- U_3 ne contienne pas 0 et gU_3 ne contienne pas ∞ ,
- U_4 ne contienne pas 0 et gU_4 ne contienne pas 0 .

Alors

$$\begin{aligned} \{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{P}^1} &= \{\mathrm{Res}_{gU_1}(g \cdot x), \mathrm{Res}_{gU_1}(g \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wgU_2}(wg \cdot x), \mathrm{Res}_{wgU_2}(wg \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &\quad + \{\mathrm{Res}_{gU_3}(g \cdot x), \mathrm{Res}_{gU_3}(g \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wgU_4}(wg \cdot x), \mathrm{Res}_{wgU_4}(wg \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p}, \end{aligned}$$

et en appliquant le (i) du lemme II.1.12 à $h = g$ pour U_1 , $h = wg$ pour U_2 , $h = gw$ pour U_3 et $h = wgw$ pour U_4 , on obtient

$$\begin{aligned} \{g \cdot x, g \cdot y\}_{\mathbf{P}^1} &= \{\mathrm{Res}_{U_1}(x), \mathrm{Res}_{U_1}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{U_2}(x), \mathrm{Res}_{U_2}(y)\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &\quad + \{\mathrm{Res}_{wU_3}(w \cdot x), \mathrm{Res}_{wU_3}(w \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} + \{\mathrm{Res}_{wU_4}(w \cdot x), \mathrm{Res}_{wU_4}(w \cdot y)\}_{\mathbf{Q}_p} = \{x, y\}_{\mathbf{P}^1}. \end{aligned}$$

Ceci permet de conclure.

5. Lien entre $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$

Soit $\iota : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ une involution. On suppose que les formules du squelette d'action définissent une action de G sur $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ (c'est, d'après la prop. II.1.8, le cas si $\iota = w_{\delta}$, et donc ce qui suit s'applique à $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$).

Proposition II.1.14. — (i) Si $z \in D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$, alors $(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z)_{n \in \mathbf{N}}$ appartient à $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(ii) L'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} : D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1 \rightarrow D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ ainsi définie est B -équivariante.

(iii) Si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p , alors $\mathrm{Res}_U \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} = \mathrm{Res}_U$.

(iv) Le noyau de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est $(0, D^{\mathrm{nr}}) = \{(0, \alpha), \alpha \in D^{\mathrm{nr}}\}$.

Démonstration. — En revenant aux formules du squelette d'action pour l'action de $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on obtient

$$\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z \right) = \delta(p)^{-1} \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} (w \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot wz) = \delta(p)^{-1} (\delta(p) \psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot wz)) = \psi(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z).$$

Autrement dit, $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \circ \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \psi \circ \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$, ce qui permet de démontrer le (i). La commutation de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ à l'action de $g \in B$ suit alors formellement des formules du squelette d'action et de ce que, par hypothèse, ces formules définissent une action de G . Le (iii) est immédiat sur la définition, si $U \subset \mathbf{Z}_p$; le cas général s'en déduit en utilisant le (ii). Enfin, si $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$, les propriétés suivantes sont équivalentes (la dernière équivalence suit de la définition de D^{nr}) :

- $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z = 0$;
- $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z = 0$ et $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p - p\mathbf{Z}_p} z = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $z_1 = 0$ et $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p - p^n\mathbf{Z}_p} z_2 = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p - p^n\mathbf{Z}_p} w \cdot z = w(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p - p\mathbf{Z}_p} z) = 0$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;

- $z_1 = 0$ et $z_2 = \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z_2 \in \varphi^n(D)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$;
- $z_1 = 0$ et $z_2 \in D^{\text{nr}}$.

Ceci permet de conclure.

Remarque II.1.15. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{E})$, l'image de $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est incluse dans $(D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_b$.

Le module $(D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p)_c$ s'identifie naturellement à un sous- B -module de $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ (si U est un ouvert compact de \mathbf{Q}_p et $z \in D \boxtimes U$, alors $(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p \cap U} z, w(\text{Res}_{w\mathbf{Z}_p \cap U} z))$ est un élément bien défini de $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$). Il n'en est pas de même de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{Q}_p$ (il y a une condition à l'infini). Le résultat suivant permet de considérer $\tilde{D} = (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\text{pc}}$ comme un sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module de $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$, ce que nous ferons sans plus de commentaires.

Lemme II.1.16. — (i) Si $z \in \tilde{D}$, alors $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p}(z)$ a une limite dans $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$.

(ii) L'application $\iota : \tilde{D} \rightarrow D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ qui s'en déduit est $P(\mathbf{Q}_p)$ -équivariante.

(iii) On a $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p} \circ \iota = \text{id}$ sur \tilde{D} .

Démonstration. — $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z - \text{Res}_{p^{1-n}\mathbf{Z}_p} z = \text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z$ s'écrit, dans $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$ sous, la forme

$$(0, w \cdot \text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p^*} z) = (0, w \begin{pmatrix} p^{-n} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z) = (0, \delta(p)^{-n} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iota(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z)).$$

Or $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z = \varphi^n(\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z)$ tend vers 0 car $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z$ tend vers 0 dans \tilde{D} . On en déduit que $\delta(p)^{-n} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iota(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z)$, qui est égal à $\delta(p)^{-n} \varphi^n(\iota(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z))$ tend aussi vers 0, et donc que $\text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z - \text{Res}_{p^{1-n}\mathbf{Z}_p} z$ tend vers 0 dans $D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$. Ceci permet de démontrer le (i). Le reste suit, par continuité, de la prop. II.1.14.

Lemme II.1.17. — Si $z \in \tilde{D}$ est tel que $\text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z \rightarrow 0$ pour la topologie p -adique quand $n \rightarrow +\infty$, alors $w \cdot z \in \tilde{D}$.

Démonstration. — Écrivons z sous la forme $z = (z_1, z_2) \in D \boxtimes_{\delta, \iota} \mathbf{P}^1$. Si $\text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z \rightarrow 0$ pour la topologie p -adique, $w \cdot z$ est somme de la série $z_2 + \sum_{n=1}^{+\infty} \delta(p)^n \varphi^{-n}(\iota(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(\varphi^{-n} \text{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z_1)))$, qui est une série convergente dans \tilde{D} .

II.2. Les sous-modules $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$

Le module $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -module, et comme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ est l'extension du banach $\mathcal{C}^0(\mathbf{Z}_p, \mathcal{O}_L)$ par son dual, le module $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est topologiquement du même type. Or ce que l'on cherche en vue d'une correspondance de Langlands locale p -adique, ce sont des représentations de G « de type banach ». Il semble probable que, dans le cas général, on ne puisse pas dévisser $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ par des représentations de G dont une est de type banach et l'autre de type dual de banach, mais dans les cas où il est raisonnable d'espérer que c'est le cas (i.e. en dimension 2, avec le bon choix de δ), tout se passe bien comme nous le verrons.

On note :

- $\text{Rep}_{\text{tors}} G$ la catégorie des $\mathcal{O}_L[G]$ -modules Π , lisses (i.e. $g \mapsto g \cdot v$ est localement constante sur G , pour tout $v \in \Pi$), de longueur finie (un tel module est alors automatiquement admissible

au sens que Π^K est de longueur finie sur \mathcal{O}_L pour tout sous-groupe ouvert compact K de G), admettant un caractère central,

- $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ la catégorie des \mathcal{O}_L -modules Π , sans torsion, séparés et complet pour la topologie p -adique, munis d'une action \mathcal{O}_L -linéaire de G telle que $\Pi/p^k \Pi \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ pour tout $k \in \mathbf{N}$,
- $\mathrm{Rep}_L G$ la catégorie des L -banach Π munis d'une action de G et d'un \mathcal{O}_L -réseau stable par G qui est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ (une telle représentation est dite *unitaire*).

Dans la suite,

- une \mathcal{O}_L -représentation de G désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$ ou de $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$,
- une représentation p -adique de G désigne un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ ou $\mathrm{Rep}_L G$.

Si $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$ est un caractère continu, on note respectivement $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}}^\delta G$, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L}^\delta G$ et $\mathrm{Rep}_L^\delta G$ les sous-catégories de $\mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$, $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ et $\mathrm{Rep}_L G$ constituées des objets sur lesquels $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in Z$ agit par multiplication par $\delta(a)$.

1. *Propriétés conditionnées à la stabilité par G .* — Si D est un (φ, Γ) -module étale et si $\delta \in \widehat{\mathcal{T}}(\mathcal{O}_L)$, soit

$$D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1, \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p\}.$$

Remarque II.2.1. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est la limite projective des $D_k^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, où $D_k = D/p^k D$, et donc $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est la limite projective des $D_k^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$; si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$, et si D_0 est un $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ -réseau de D stable par φ et Γ , alors $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = L \cdot (D_0^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un sous- \mathcal{O}_L -module saturé de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et donc $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un sous- \mathcal{O}_L -module saturé de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

On définit le sous- \mathcal{O}_L -module $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de manière un peu différente suivant que D est un objet de $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$, $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$:

- si D est un objet de $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$, on pose $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1, \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p\}$,
- si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, le sous- \mathcal{O}_L -module $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} = \{z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1, \mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p\}$ de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ n'est pas forcément saturé; on note $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ son saturé (i.e. l'ensemble des $z \in D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ tels que $p^k z \in (D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ pour tout k assez grand).

Remarque II.2.2. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est la limite projective des $(D/p^k D)^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est l'intersection de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ avec $(L \cdot D)^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

(ii) Dans tous les cas, $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est un sous- \mathcal{O}_L -module de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ (c'est clair si D est un objet de $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$); si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, cela suit de ce que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est saturé dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. De plus, $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient le sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -module $\tilde{D}^+ \cong (D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$ de $\tilde{D} \cong (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{\mathrm{pc}}$.

(iii) Le module $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$ s'injecte dans $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)/(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p) \cong D^\sharp/D^\sharp$ (resp. dans son quotient par son sous- \mathcal{O}_L -module de torsion) si D est un objet de $\Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$ ou $\Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ (resp. si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$). Il en résulte que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ si D est irréductible de rang ≥ 2 sur \mathcal{E} ou sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

(iv) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ s'injecte dans le sous- \mathcal{O}_L -module de torsion de D^\sharp/D^\sharp ; c'est donc un \mathcal{O}_L -module de longueur finie.

Comme $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est B -équivariante, $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ sont stables par B , mais pas, a priori, par G .

Remarque II.2.3. — (i) Si $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ et $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ sont stables par G , alors ils sont compacts. En effet, ils sont fermés dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ car $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est continue, et si $X \in \{D^{\natural}, D^{\sharp}\}$, alors $X \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est inclus dans $\{z \in D \boxtimes \mathbf{P}^1, \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in X \text{ et } \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} w \cdot z \in X\}$ qui est compact. On en déduit que $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est le plus grand sous- \mathcal{O}_L -module compact de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ stable par G : en effet, l'image d'un tel ensemble par $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est compacte et stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, et donc est incluse dans $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

(ii) Sous la même hypothèse, $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ induit une surjection de $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ sur $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. En effet, l'image est compacte et donc fermée et elle contient \tilde{D}^+ qui est dense dans $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Par contre, $D^{\sharp} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ n'a aucune raison, en général, de se surjecter sur $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Lemme II.2.4. — Soient $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$, un caractère continu. Si M est un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact de $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, stable par G et contenant $D^{\natural} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, alors son orthogonal M^{\perp} est un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact de $\check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$, stable par G et contenu dans $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Démonstration. — M^{\perp} est stable par G et fermé car $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ est continu et G -équivariant. De plus, $M \subset D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'après le (i) de la rem. II.2.3, et donc M^{\perp} contient $D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p$. Comme il est stable par G , il contient aussi $D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p + w \cdot (D^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p)$, ce qui prouve que M^{\perp} est ouvert. Il ne reste donc plus qu'à prouver qu'il est contenu dans $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Or M contient $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ qui contient $D^+ \boxtimes \mathbf{Z}_p$, ce qui implique que tout élément z de M^{\perp} vérifie $\{\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, x\} = 0$, pour tout $x \in D^+$. Cette dernière condition équivaut à $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z \in \check{D}^{\natural}$ par définition de \check{D}^{\natural} , et M^{\perp} étant stable par G , on a $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} \begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} z \in \check{D}^{\natural}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc $z \in \check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.2.5. — Soient $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow \mathcal{O}_L^*$, un caractère continu. Si $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ possède un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact M stable par G , alors $D^{\natural} \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$ est stable par G .

Démonstration. — Commençons par remarquer que l'image M' de M par $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$ est compacte et stable par $P(\mathbf{Q}_p)$ puisque M l'est. Comme de plus, M est ouvert dans $D \boxtimes_{\delta} \mathbf{P}^1$, son image par $\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ engendre D . Il en résulte, d'après le th. III.1.5, que M' contient $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Maintenant $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est, par construction, stable par $P(\mathbf{Q}_p)$; il en est donc de même de $M + (D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$. Soit alors $z \in D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$. Il existe $y \in M$ tel que $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}(z - y) = 0$, ce qui signifie, d'après le (iv) de la prop. II.1.14, que $z - y$ est de la forme $(0, \alpha)$, avec $\alpha \in D^{\text{mf}}$. On a alors $w \cdot z = (\alpha, 0) + w \cdot y$, et comme $(\alpha, 0) \in D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$, on en déduit que $M + (D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est stable par w , et donc aussi par G . Son orthogonal M' est alors un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact de $\check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$, qui est stable par G et inclus dans $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'après le lemme II.2.4. On déduit donc de ce qui précède, appliqué à M' et \check{D} au lieu de M et D , que $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact de $\check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$, stable par G . En réitérant le raisonnement en partant de l'orthogonal de $\check{D}^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ (inclus dans $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ d'après le lemme II.2.4), on en déduit que $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est un sous- \mathcal{O}_L -module ouvert compact de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$, stable par G .

Proposition II.2.6. — $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G si et seulement si $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ l'est.

Démonstration. — Le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ se déduit du cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$ en tensorisant par L ; on suppose donc que D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ dans ce qui suit.

Commençons par supposer que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G et montrons que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ l'est. Il suffit de vérifier que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par w . Soit $P \in \mathcal{O}_L[X]$, unitaire, tel que $P(\psi)$ tue D^\sharp/D^\sharp . Si $\alpha = \begin{pmatrix} p^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors $P(\alpha)$ envoie $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et donc aussi $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$ dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$. Soit $z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$. D'après ce qui précède, on a $P(\alpha) \cdot z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$, et comme $D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$ est, par hypothèse, stable par w , on a $w \cdot P(\alpha) \cdot z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$. Maintenant $w \cdot P(\alpha) = Q(\alpha^{-1}) \cdot w$, où $Q(X) = P(\delta(p)X)$ est un polynôme unitaire à coefficients dans \mathcal{O}_L , et on a $Q(\alpha^{-1}) \cdot (w \cdot z) \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$. D'après la prop. III.1.15, cela implique $w \cdot z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{P}^1$, ce qui permet de conclure.

Supposons maintenant que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G . Si $k \in \mathbf{N}$, soit $D_k = D/p^k D$. L'image de $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D_k \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G pour tout k . Or cette image est compacte puisque $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ l'est (rem. II.2.3) et ouverte car $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient \tilde{D}^{++} qui se surjecte sur \tilde{D}_k^{++} , ce qui fait qu'elle contient $(D_k^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p) + w \cdot (D_k^{++} \boxtimes \mathbf{Z}_p)$. On est donc dans les conditions d'applications du lemme II.2.5; on en déduit la stabilité de $D_k^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par G et, en passant à la limite projective (si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$), celle de $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et de son saturé $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Ceci permet de conclure.

2. *La représentation conditionnelle $\mathbf{\Pi}(D)$ de G .* — On suppose que $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G , et on note $\mathbf{\Pi}(D)$ le quotient de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Lemme II.2.7. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{tors}} G$.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$.

(iii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D) \in \mathrm{Rep}_L G$.

Démonstration. — Le (i) a déjà été démontré (lemme II.2.5). Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, alors $\mathbf{\Pi}(D)$ est le quotient de $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$, qui est la limite projective des $\mathbf{\Pi}(D/p^k D)$, par son sous- \mathcal{O}_L -module de torsion, ce qui permet de déduire le (ii) du (i). Le (iii) s'en déduisant en tensorisant par L , cela permet de conclure.

On rappelle que l'on dispose d'une application rés₀ : $D \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\sharp/D^\sharp$.

Lemme II.2.8. — Si $z \in \tilde{D}$ vérifie rés₀(z) = 0, alors il existe $x \in \tilde{D}^+$ et $y \in \tilde{D}$ tels que $z = x + w \cdot y$.

Démonstration. — D'après la prop. III.1.17, on peut écrire z sous la forme $x + y'$, avec $x \in \tilde{D}^+$ et $y' \in \tilde{D}$ vérifiant $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} y' \rightarrow 0$ p -adiquement, quand $n \rightarrow +\infty$. D'après le lemme II.1.17, il existe $y \in \tilde{D}$ tel que $y' = w \cdot y$. Ceci permet de conclure.

On définit une application rés_∞ : $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 \rightarrow D^\sharp/D^\sharp$ en posant rés_∞(z) = rés₀($w \cdot z$).

Corollaire II.2.9. — (i) Tout élément de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans le noyau de rés_∞ peut s'écrire sous la forme $z = x + w \cdot y$, avec $x \in \tilde{D}$, et $y \in \tilde{D}^+$.

(ii) $D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1 = \tilde{D}^+ + w \cdot \tilde{D}^+$ [resp. $(D^\sharp \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} = \tilde{D}^+ + w \cdot \tilde{D}^+$ si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$].

Démonstration. — Le (i) suit directement (en appliquant w) du lemme II.2.8. Pour démontrer le (ii), on commence par remarquer que l'on peut écrire tout élément $z = (z_1, z_2)$ de⁽¹⁾ $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, sous la forme $\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p}(z_1) + w \cdot z_2$, et comme $z_2 \in D^\natural$, on a $\text{rés}_\infty(z) = 0$. Il résulte alors du (i) qu'il existe $y \in \tilde{D}^+$ tel que $x = z - w \cdot y \in \tilde{D}$. Par ailleurs, $\tilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, et donc $w \cdot \tilde{D}^+ \subset D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$. On en déduit l'appartenance de x à $\tilde{D} \cap (D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) = \tilde{D}^+$, ce qui permet de conclure.

Corollaire II.2.10. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$, l'application rés_∞ est identiquement nulle sur $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et induit la suite exacte suivante de B -modules :

$$0 \rightarrow \tilde{D}/\tilde{D}^+ \rightarrow \mathbf{\Pi}(D) \rightarrow D^\natural/D^\natural \rightarrow 0.$$

(ii) Si D est irréductible de rang ≥ 2 sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ ou \mathcal{E} , alors l'injection naturelle de \tilde{D}/\tilde{D}^+ dans $\mathbf{\Pi}(D)$ est un isomorphisme de $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules.

Démonstration. — Le (i) suit directement du cor. II.2.9. Le (ii) est une conséquence du cor. II.2.9 et de ce que D^\natural/D^\natural est de torsion (resp. nul) si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$ est irréductible de rang ≥ 2 et de ce que \tilde{D} est saturé dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Proposition II.2.11. — Si $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$, alors $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est le dual (de Pontryagin) de \tilde{D}/\tilde{D}^+ .

Démonstration. — Si $z \in \tilde{D}$, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $z - \text{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} z \in \tilde{D}^+$. Autrement dit, il existe n tel que l'image de z modulo \tilde{D}^+ soit dans l'image de $D \boxtimes p^{-n}\mathbf{Z}_p = \varphi^{-n}(D)$. On en déduit que \tilde{D}/\tilde{D}^+ est la réunion croissante des $\varphi^{-n}(D)/\varphi^{-n}(D^+)$ ou, ce qui revient au même, la limite inductive des D/D^+ relativement aux applications de transitions toutes égales à φ . Son dual est donc la limite projective des \check{D}^\natural relativement aux applications ψ , c'est-à-dire $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Ceci permet de conclure.

Corollaire II.2.12. — (i) Si D est un (φ, Γ) -module irréductible sur $k_\mathcal{E}$, alors \tilde{D}/\tilde{D}^+ est un $P(\mathbf{Q}_p)$ -module irréductible.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{et}}$, alors \tilde{D}/\tilde{D}^+ est un $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ -module de longueur finie.

Démonstration. — Le (i) résulte, par dualité, du cor. III.1.6. Le (ii) s'en déduit, par dévissage, en utilisant l'exactitude des foncteurs $D \mapsto \tilde{D}$ et $D \mapsto \tilde{D}^{++}$ et la finitude du \mathcal{O}_L -module $\tilde{D}^+/\tilde{D}^{++}$.

Corollaire II.2.13. — $\mathbf{\Pi}(D)$ est un objet de $\text{Rep}_{\text{tors}} G$.

Démonstration. — La seule chose qui n'ait pas déjà été vérifiée est qu'il est de longueur finie sur $\mathcal{O}_L[G]$, or il est déjà de longueur finie sur $\mathcal{O}_L[P(\mathbf{Q}_p)]$ d'après le corollaire précédent et le cor. II.2.10.

⁽¹⁾Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{et}}(\mathcal{O}_\mathcal{E})$, il faut remplacer $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ dans tout ce qui suit.

3. *Dualité.* — On suppose encore que $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G .

Théorème II.2.14. — $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ sont exactement orthogonaux pour $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$.

Démonstration. — Notons simplement $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ les espaces $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$. Comme $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par w et que $\{ , \}_{\mathbf{P}^1}$ est équivariant sous l'action de w , il suffit, compte-tenu du (ii) du cor. II.2.9, de prouver que $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est orthogonal à \tilde{D}^+ , pour démontrer l'orthogonalité de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. Soit donc $x = (x_1, x_2) \in \check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et soit $y \in \tilde{D}^+$. On peut décomposer y sous la forme $y_0 + y^+$, avec $y_0 \in D^{\mathrm{nr}}$ et $y^+ \in \tilde{D}^{++}$. On a alors $\{x, y_0\}_{\mathbf{P}^1} = \{x_1, y_0\} = 0$ puisque $y_0 \in D^{\mathrm{nr}} \subset D^+$, et $x_1 \in \check{D}^\natural$.

Par ailleurs, y^+ est la limite de $\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+$ dans $D \boxtimes \mathbf{P}^1$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \{x, y^+\}_{\mathbf{P}^1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{x, \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+\}_{\mathbf{Q}_p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x, \mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+\}_{\mathbf{Q}_p} \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} x), \varphi^n(\mathrm{Res}_{p^{-n}\mathbf{Z}_p} y^+)\} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \{\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right), \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \varphi^n(y^+)\}, \end{aligned}$$

et comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x \right)$ varie dans \check{D}^\natural qui est compact, tandis que $\varphi^n(y^+)$ tend vers 0, un passage à la limite montre que $\{x, y^+\}_{\mathbf{P}^1} = 0$. On en déduit l'orthogonalité de $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ et $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Maintenant, si D est de torsion, l'inclusion de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)^\perp$ dans $\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ a déjà été démontrée (lemme II.2.4), ce qui permet de conclure, si $D \in \Phi\Gamma_{\mathrm{tors}}^{\mathrm{et}}$.

Supposons maintenant $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ et posons $D_k = D/p^k D$ si $k \in \mathbf{N}$. Alors :

- on a des suites exactes

$$0 \rightarrow D^{\mathrm{nr}} \rightarrow (D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}} \rightarrow D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow D_k^{\mathrm{nr}} \rightarrow D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 \rightarrow D_k^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow 0,$$

- la réduction modulo p^k induit une surjection de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ sur $D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$,
- il existe $c \in \mathbf{N}$ tel que p^c tue le conoyau de $D^{\mathrm{nr}} \rightarrow D_k^{\mathrm{nr}}$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

On en déduit que l'image de $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ contient $p^c(D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)$, et donc que si $z \in \check{D} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est orthogonal à $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ (ce qui équivaut à ce que z soit orthogonal à $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ qui est la limite projective des $D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$), alors $p^c z$ est orthogonal à $D_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Il résulte donc du cas de torsion que, modulo p^k , on a $p^c z \in \check{D}_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, et donc que $p^c z \in \varprojlim \check{D}_k^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1 = (\check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et $z \in \check{D}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$. D'où le résultat si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$; le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L , cela permet de conclure.

Corollaire II.2.15. — $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est stable par G , et si $\check{\Pi} = \check{D} \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1 / \check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$, alors $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est le dual de $\check{\Pi}$ tandis que $\check{D}^\natural \boxtimes_{\delta^{-1}} \mathbf{P}^1$ est le dual de $\Pi = \mathbf{\Pi}(D)$.

4. Résultats en famille

Soit S une \mathcal{O}_L -algèbre quotient de $\mathcal{O}_L[[X_1, \dots, X_d]]$, sans p -torsion et de corps résiduel k_L . On note \mathfrak{m}_S l'idéal maximal de S . Alors S est la limite projective des $S_n = S/\mathfrak{m}_S^n$ et S_n est une \mathcal{O}_L -algèbre finie pour tout n . On note \mathcal{X} l'espace analytique $\mathrm{Spec} S$. Si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, on note \mathfrak{m}_s l'idéal premier de S lui correspondant.

On note $S \widehat{\otimes}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ la limite projective des $S_n \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, que l'on munit d'actions S -linéaires de φ et Γ , en faisant agir φ par $1 \otimes \varphi$ et $\gamma \in \Gamma$ par $1 \otimes \gamma$ sur chaque $S_n \otimes_{\mathcal{O}_L} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$.

Un (φ, Γ) -module étale sur $S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ est un $(S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_\mathcal{E})$ -module libre⁽²⁾ de rang fini, muni d'actions semi-linéaires commutant entre elles de φ et Γ , telles que $\varphi(D)$ engendre D sur $S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_\mathcal{E}$. Un tel module peut être vu comme une famille de (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ variant analytiquement sur \mathcal{X} : si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, alors $D_s = D \otimes_S (S/\mathfrak{m}_s)$ est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ et si $\delta \in \widehat{\mathcal{T}}(S)$, on définit le $S[G]$ -module $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ par les formules du § II.1, et alors $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est la limite projective des $(S_n \otimes_S D) \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, ce qui en fournit une définition alternative, les $S_n \otimes_S D$ pouvant être vus comme des objets de $\Phi\Gamma_{\text{tors}}^{\text{ét}}$ en oubliant l'action de S_n .

On définit $D^\natural \subset D$ comme la limite projective des $(S_n \otimes_S D)^\natural$. L'action de ψ passant à la limite, on dispose du $S[P(\mathbf{Q}_p)]$ -module $D^\natural \boxtimes_{\mathbf{Q}_p}$. On définit $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ comme l'image inverse dans $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ de $D^\natural \boxtimes_{\mathbf{Q}_p}$ par $\text{Res}_{\mathbf{Q}_p}$. Si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, la réduction modulo \mathfrak{m}_s envoie $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$.

On définit \widetilde{D} comme la limite projective des $\widetilde{\mathcal{O}}_\mathcal{E} \otimes_{\mathcal{O}_\mathcal{E}} (S_n \otimes_S D)$, et on note \widetilde{D}^{++} l'ensemble des $x \in \widetilde{D}$ tels que $\varphi^n(x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Lemme II.2.16. — *La réduction modulo \mathfrak{m}_s induit des surjections*

$$D^\natural \rightarrow D_s^\natural \quad \text{et} \quad \widetilde{D}^{++} \rightarrow \widetilde{D}_s^{++}.$$

Démonstration. — Cela suit de l'exactitude à droite du foncteur $\mapsto D^\natural$ et de l'exactitude du foncteur $D \mapsto \widetilde{D}^{++}$.

Soient D un (φ, Γ) -module étale sur $S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_\mathcal{E}$ et $\delta : \mathbf{Q}_p^* \rightarrow S^*$ un caractère continu. **On suppose que $(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ est stable par G** , et on note $\mathbf{\Pi}(D)$ le $S[G]$ -module $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$.

Proposition II.2.17. — *Si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, alors $D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est stable par G , et l'application naturelle $\mathbf{\Pi}(D) \rightarrow \mathbf{\Pi}(D_s)$ est surjective, où $\mathbf{\Pi}(D_s) = (D_s \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)/(D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$.*

Démonstration. — Si A est un quotient fini de S et si $D_A = A \otimes_S D$, l'image de $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ dans $D_A \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ est compacte, stable par G , et contient $M = D_A^{++}$ puisque $D^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ contient \widetilde{D}^{++} et que l'application naturelle $\widetilde{D}^{++} \rightarrow \widetilde{D}_A^{++}$ est surjective. Comme $M + w \cdot M$ est un ouvert de $D_A \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, on est dans les conditions d'application du lemme II.2.5, ce qui permet d'en déduire la stabilité de $D_A^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, si $A = S/\mathfrak{m}_s$ (et donc $A \cong \mathcal{O}_L$), et si $A_n = S_n \otimes_S A$, alors A_n est fini pour tout n et A est la limite projective des A_n . Comme le module $(D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)_{\text{ns}}$ est la limite projective des $D_{A_n}^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$, il est stable par G ; il en est donc de même de $D_s^\natural \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$.

Enfin, l'application $z \mapsto (\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z, \varphi^{-1}(\text{Res}_{p\mathbf{Z}_p} w \cdot z))$ est un isomorphisme de S -modules de $D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1$ sur $D \oplus D$. On en déduit la surjectivité de $(D \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1) \rightarrow (D_s \boxtimes_\delta \mathbf{P}^1)$, et donc celle de $\mathbf{\Pi}(D) \rightarrow \mathbf{\Pi}(D_s)$.

⁽²⁾La théorie marche aussi bien avec “de type fini” au lieu de “libre de rang fini”, mais nous n'en aurons pas besoin. De même, l'hypothèse “ S sans p -torsion” n'est pas vraiment nécessaire.

II.3. (φ, Γ) -modules de rang 2 et représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$

1. La représentation $\mathbf{\Pi}(D)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ attachée à un (φ, Γ) -module de rang 2

Si D est un (φ, Γ) -module libre de rang 2 sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, le module $\wedge^2 D$ est libre de rang 1 et donc de la forme $\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes \delta'_D$, où δ'_D est un caractère continu de \mathbf{Q}_p^* dans \mathcal{O}_L^* . On note :

- δ_D le caractère défini par $\delta_D(x) = (x|x|)^{-1} \delta'_D(x)$ (le choix d'un isomorphisme $\wedge^2 D \cong \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \otimes \delta'_D$ fournit des isomorphismes $x \mapsto x \otimes \delta_D^{-1}$ de D sur \check{D} et $x \mapsto x \otimes \delta_D$ de \check{D} sur D),
- $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ le G -module $D \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$; son caractère central est donc δ_D ,
- $w_D : D \boxtimes \mathbf{Z}_p^* \rightarrow D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$ l'involution w_{δ_D} .

Comme on est en dimension 2, l'irréductibilité de D équivaut à ce que $H^0(\mathcal{H}', \mathbf{V}(D)) = 0$, ou à ce que $D^{\mathrm{nr}} = 0$, ou encore à ce que $D^{\natural}/D^{\natural}$ soit de torsion sur \mathcal{O}_L ; elle implique que $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1 = D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$.

Théorème II.3.1. — (i) La sous-module $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G .

(ii) La représentation $\mathbf{\Pi}(D) = (D \boxtimes \mathbf{P}^1)/(D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est un objet de $\mathrm{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$, et $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est naturellement isomorphe à $\mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D \longrightarrow D \boxtimes \mathbf{P}^1 \longrightarrow \mathbf{\Pi}(D) \longrightarrow 0.$$

Remarque II.3.2. — (i) Le (i) du théorème implique les points (ii) et (iii) d'après le cor. II.2.15, à l'exception de l'isomorphisme $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1 \cong \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$. Celui-ci suit de ce que $\check{D} \cong D \otimes \delta_D^{-1}$, et donc que $\check{\mathbf{\Pi}}(D)^* \cong \mathbf{\Pi}(D)^* \otimes \delta_D$.

(ii) La démonstration du (i) du théorème se fait par prolongement analytique à partir, au choix, du cas cristallin ou du cas triangulin; cela demande de montrer que la correspondance $D \mapsto \mathbf{\Pi}(D)$ se comporte bien en famille. C'est l'objet du th. II.3.4 ci-dessous.

Le résultat suivant est la clé permettant de contourner la pauvre convergence des formules définissant l'action de G . On pose $\mathcal{C} = (1 - \varphi)D^{\psi=1}$ et $\mathcal{C}' = (1 - \alpha\varphi)D^{\psi=\alpha}$, avec $\alpha = \delta_D(p)^{-1}$; alors \mathcal{C} et \mathcal{C}' sont des sous-modules de $D \boxtimes \mathbf{Z}_p^*$.

Proposition II.3.3. — Si D est irréductible, alors $w_D(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$ et $w_D(\mathcal{C}') = \mathcal{C}$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathcal{C}$. Il existe donc $\tilde{x} \in D^{\psi=1}$ tel que $x = (1 - \varphi)\tilde{x} = \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \tilde{x}$. On peut prolonger \tilde{x} de manière unique en un élément de $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ fixe par $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Maintenant, l'hypothèse D irréductible équivaut à ce que $D^{\mathrm{nr}} = 0$, et donc, d'après la prop. II.1.14, à ce que $\beta_{\mathbf{Q}_p}$ induise un isomorphisme B -équivariant de $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ sur $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On peut donc voir \tilde{x} comme un élément de $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ fixe par $\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Alors $w \cdot \tilde{x} \in D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est fixe par $\delta_D(p)^{-1} \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et donc $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*}(w \cdot \tilde{x}) \in D^{\psi=\delta_D(p)^{-1}}$, et la restriction de $w \cdot \tilde{x}$ à \mathbf{Z}_p^* appartient à \mathcal{C}' . Comme cette restriction est $w \cdot \mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p^*} \tilde{x} = w_D(x)$, on en déduit l'inclusion $w_D(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}'$. Les mêmes calculs montrent que $w_D(\mathcal{C}') \subset \mathcal{C}$, et comme w_D est une involution, cela permet de conclure.

On reprend les notations du n° 4 du § II.1, et on suppose, dans toute la suite de ce §, que D est un (φ, Γ) -module étale de rang 2 sur $S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Le module $\wedge^2 D$ est libre de rang 1 et donc de la

forme $(S \widehat{\otimes} \mathcal{O}_S) \otimes \delta'_D$, où $\delta'_D \in \widehat{\mathcal{T}}(S)$. On note, comme d'habitude, δ_D l'élément de $\widehat{\mathcal{T}}(S)$ défini par $\delta_D(x) = (x|x|)^{-1} \delta'_D(x)$ et $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ le $S[G]$ -module $D \boxtimes_{\delta_D} \mathbf{P}^1$.

Théorème II.3.4. — (i) *Le sous-module $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ de $D \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G .*

(ii) *Si $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, alors $D_s^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G , la représentation $\mathbf{\Pi}(D_s) = (D_s \boxtimes \mathbf{P}^1) / (D_s^{\natural} \boxtimes \mathbf{P}^1)$ est un objet de $\text{Rep}_{\mathcal{O}_L} G$ et l'application naturelle $\mathbf{\Pi}(D) \rightarrow \mathbf{\Pi}(D_s)$ est surjective.*

Démonstration. — On remarque que le (i) implique le reste en vertu de la prop. II.2.17. La démonstration du (i) se fait en trois étapes.

- On commence par démontrer que si \mathcal{X} contient une suite zariski-dense $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de points de $\mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$ telle que le (i) soit vrai pour D_{s_n} pour tout $n \in \mathbf{N}$, alors le (i) est vrai pour D et pour D_s , pour tout $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$.

- On vérifie, par un calcul direct, que le (i) est vrai pour un (φ, Γ) -module cristallin.

- On montre que l'on peut incorporer n'importe quel (φ, Γ) -module de rang 2 dans une famille analytique comportant une sous-suite zariski-dense de points cristallins.

2. *Réduction à une famille zariski-dense.* — Dans tout ce qui suit, $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est une suite de points de $\mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, zariski-dense dans \mathcal{X} , et si $n \in \mathbf{N}$, alors $I_n = \mathfrak{m}_{s_1} \cap \dots \cap \mathfrak{m}_{s_n}$. On suppose que le (i) du théorème est vrai pour D_{s_n} , quel que soit $n \in \mathbf{N}$, et notre but est de montrer qu'alors il est vrai pour D et, quel que soit $s \in \mathcal{X}(\mathcal{O}_L)$, pour D_s .

Lemme II.3.5. — *La suite d'idéaux $(I_n)_{n \in \mathbf{N}}$ tend vers 0 : quel que soit $k \in \mathbf{N}$, il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $I_n \subset \mathfrak{m}_S^k$, si $n \geq N$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Comme la suite I_n est décroissante, cela signifie qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que $I_n \not\subset \mathfrak{m}_S^{k+1}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Soit donc, si $n \in \mathbf{N}$, un élément f_n de I_n n'appartenant pas à \mathfrak{m}_S^{k+1} . Comme S est compacte, quitte à extraire une sous-suite de la suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$, on peut supposer que cette suite a une limite f dans S . De plus, la topologie de S/\mathfrak{m}_S^{k+1} étant discrète, la suite f_n est stationnaire modulo \mathfrak{m}_S^{k+1} et f n'appartient pas à \mathfrak{m}_S^{k+1} ; en particulier, $f \neq 0$. Maintenant, par construction, $f_n(s_i) = 0$ si $i \leq n$, et donc, par passage à la limite, $f(s_i) = 0$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$, ce qui est contraire à la zariski-densité de la suite $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$. Ceci permet de conclure.

Lemme II.3.6. — *Si $x \in D$ est tel que $x(s_n) \in D_{s_n}^{\natural}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, alors $x \in D^{\natural}$.*

Démonstration. — Commençons par démontrer, par récurrence sur n , qu'il existe $a_n \in D^{\natural}$ et $b_n \in I_n \cdot D$, tels que $x = a_n + b_n$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

- Pour $n = 0$, cela résulte de la surjectivité de $D^{\natural} \rightarrow D_{s_0}^{\natural}$.

- Si le résultat est vrai pour $n - 1$, on a par hypothèse $b_{n-1} \in I_{n-1} \cdot D$. Soit $f_0 \in I_{n-1}$ tel que $v_p(f_0(s_n))$ réalise le minimum des $v_p(f(s_n))$, pour $f \in I_{n-1}$. On a alors

$$b_{n-1} \in D_{s_n}^{\natural} \cap f_0(s_n)D = f_0(s_n)D_{s_n}^{\natural}.$$

Maintenant, grâce à la surjectivité de $D^\natural \rightarrow D_{s_n}^\natural$, on peut trouver $y_n \in D^\natural$ tel que $f_0(s_n)y_n(s_n) = b_{n-1}(s_n)$. En posant $b_n = b_{n-1} - f_0y_n$, on a

$$b_n \in (I_{n-1} \cdot D) \cap (\mathfrak{m}_{s_n} \cdot D) = I_n \cdot D.$$

On obtient la décomposition voulue à l'ordre n , en posant $a_n = a_{n-1} + f_0y_n$.

Maintenant, il résulte du lemme II.3.5, que b_n tend vers 0 dans D quand n tend vers $+\infty$; on a donc $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ dans D , et le résultat suit de la compacité de D^\natural .

Lemme II.3.7. — $D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est stable par G .

Démonstration. — Il suffit de prouver que $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ est stable par G . Soit donc $z \in (D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$ et soit $g \in G$. Si $k \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z(s_n) \right) \in D_{s_n}^\natural$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Il en résulte que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} z(s_n) \in D_{s_n}^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $z(s_n) \in D_{s_n}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Comme $D_{s_n}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$ est, par hypothèse, stable par G , on en déduit que $g \cdot z(s_n) \in D_{s_n}^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1$, pour tout $n \in \mathbf{N}$. Par définition, cela signifie que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \cdot z(s_n) \right) \in D_{s_n}^\natural$, pour tous k, n , et donc, d'après le lemme II.3.6, que $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} \left(\begin{pmatrix} p^k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} g \cdot z \right) \in D^\natural$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. On en déduit l'appartenance de $\mathrm{Res}_{\mathbf{Q}_p} g \cdot z$ à $D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et donc celle de $g \cdot z$ à $(D^\natural \boxtimes \mathbf{P}^1)_{\mathrm{ns}}$. Ceci permet de conclure.

III. Appendice : compléments sur $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et ses sous-modules

III.1. Le foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

1. Exactitude du foncteur $D \mapsto D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Théorème III.1.1. — Si $0 \rightarrow D_1 \rightarrow D \rightarrow D_2 \rightarrow 0$ est une suite exacte de (φ, Γ) -modules étales sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, la suite $0 \rightarrow D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow 0$ de $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules est exacte.

Démonstration. — L'exactitude à gauche est une évidence; celle au milieu suit de ce qu'un élément du noyau appartient à $D_1 \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et est bornée et donc appartient à $D_1^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Il ne reste donc que l'exactitude à droite à vérifier. Soit M_0 un treillis de D ayant pour image D_2^\natural dans D_2 . Soit M l'adhérence dans D de la somme des treillis $\psi^n(M_0)$, pour $n \in \mathbf{N}$. Il résulte des propriétés de D^\natural que M est un treillis de D ; de plus, M est stable par ψ et a pour image D_2^\natural dans D_2 par construction.

Soit alors $x = (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in D_2^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. On peut choisir, pour tout $n \in \mathbf{N}$, un relèvement $u^{(n)}$ de $x^{(n)}$ appartenant à M . Si $k \in \mathbf{N}$, soit $y_k = (y_k^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ la suite d'éléments de M définie par $y_k^{(n)} = u^{(n)}$, si $n \geq k$, et $y_k^{(n)} = \psi^{n-k}(u^{(k)})$, si $n < k$. Comme M est compact, il en est de même de $M^{\mathbf{N}}$ et la suite y_k admet une valeur d'adhérence $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in M^{\mathbf{N}}$ qui est une suite bornée puisqu'à valeurs dans un treillis. De plus, comme $\psi(y_k^{(n+1)}) = y_k^{(n)}$, si $k \geq n+1$, un passage à la limite montre que $\psi(y^{(n+1)}) = y^{(n)}$, quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Autrement dit, $y \in D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Finalement, l'image de y_k dans $D_2^{\mathbf{N}}$ est x pour tout k ; il en est donc de même de celle de y . Ceci permet de conclure.

2. Les sous- $P(\mathbf{Q}_p)$ -modules de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$. — Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$.

Lemme III.1.2. — Soit $M \subset D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ un sous- \mathcal{O}_L -module fermé, stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, et, si $k \in \mathbf{Z}$, soit $M^{(k)}$ l'ensemble des $x \in D$ tels qu'il existe $z = (z^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}} \in M$, avec $z^{(k)} = x$. Alors

- (i) $M^{(k)} = M^{(0)}$ quel que soit $k \in \mathbf{Z}$;
- (ii) $M^{(0)}$ est un sous- $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ -module de D^\sharp stable par ψ , qui agit surjectivement, et par Γ .
- (iii) $M = M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — Les (i) et (ii) sont immédiats, ainsi que l'inclusion $M \subset M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Reste l'inclusion $M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p \subset M$ à vérifier. Soit $z = (z^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}} \in M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Si $k \in \mathbf{N}$, il existe $u_k = (u_k^{(n)})_{n \in \mathbf{Z}} \in M$ tel que $u_k^{(k)} = z^{(k)}$ car $M^{(k)} = M^{(0)}$. Par définition de la topologie sur $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, la suite u_k tend vers z dans $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ quand k tend vers $+\infty$, et M étant supposé fermé, cela implique $z \in M$, ce qui permet de conclure.

Remarque III.1.3. — Si M est un sous- \mathcal{O}_L -module compact de $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors $M^{(0)} = \text{Res}_{\mathbf{Z}_p} M$ est un sous- $\mathcal{O}_\mathcal{E}^+$ -module compact de D sur lequel ψ agit surjectivement ; on a donc $M^{(0)} \subset D^\sharp$ et $M \subset D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Proposition III.1.4. — Si $A = k_\mathcal{E}$, $\mathcal{O}_\mathcal{E}$ ou \mathcal{E} , si D est un (φ, Γ) -module étale sur A , si M est un sous- A -module de D stable par ψ et Γ , et si M engendre D en tant que (φ, Γ) -module, alors $M = D$.

Démonstration. — Si $i \in \mathbf{N}$, soit $(\varphi^*)^i M$ le sous- A -module de D engendré par $\varphi^i(M)$. Si $k \in \mathbf{N}$, soit $M_k = \sum_{i=0}^k (\varphi^*)^i M$. Comme $\psi((\varphi^*)^i M) = (\varphi^*)^{i-1} M$, et comme $\psi(M) \subset M$ par hypothèse, on a $\psi(M_{k+1}) \subset M_k$ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. Par ailleurs, la suite M_k est une suite croissante de sous- A -modules de D ; elle est donc stationnaire, et la limite est stable par φ par construction, et par Γ puisque M l'est et φ commute à Γ . C'est donc le (φ, Γ) -module engendré par M et notre hypothèse selon laquelle M engendre D en tant que (φ, Γ) -module se traduit par l'existence de $k \in \mathbf{N}$ tel que $M_k = D$. Ceci implique

$$D = \psi^k(D) = \psi^k(M_k) \subset M_0 = M,$$

et permet de conclure.

Théorème III.1.5. — Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_\mathcal{E}$. Si M est un sous- \mathcal{O}_L -module fermé de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous- (φ, Γ) -module D_1 de D tel que

$$D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \subset M \subset D_1^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p.$$

Démonstration. — Soit $M^{(0)}$ l'ensemble des $x \in D$ tels qu'il existe $z = (z^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ avec $z^{(0)} = x$. D'après le lemme III.1.2, on a $M = M^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$, et quitte à remplacer D par le sous- (φ, Γ) -module de D engendré par $M^{(0)}$, on peut supposer que $M^{(0)}$ engendre D en tant que (φ, Γ) -module. Soient $\overline{D} = D/\mathfrak{m}_L D$, $\overline{M} = M/\mathfrak{m}_L M$ et $\overline{M}^{(0)} = M^{(0)}/\mathfrak{m}_L M^{(0)}$. Par construction, $\overline{M} = \overline{M}^{(0)} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $\overline{M}^{(0)}$ engendre \overline{D} en tant que (φ, Γ) -module sur $k_\mathcal{E}$.

Maintenant, l'hypothèse selon laquelle M est stable sous l'action de $P(\mathbf{Q}_p)$ se traduit par la stabilité de \overline{M} sous cette action et par le fait que $\overline{M}^{(0)}$ est un sous- $k_\mathcal{E}^+$ -module de \overline{D} stable par

Γ sur lequel ψ agit de manière surjective (lemme III.1.2). Comme $\psi(T^{-pk}x) = T^{-k}\psi(x)$, on en déduit le fait que le sous- $k_{\mathcal{E}}$ -espace vectoriel de \overline{D} engendré par $\overline{M}^{(0)}$ est stable par ψ et Γ et donc, d'après la prop. III.1.4, est égal au sous- (φ, Γ) -module de \overline{D} qu'il engendre, c'est-à-dire à \overline{D} ; en d'autres termes, $\overline{M}^{(0)}$ est un réseau de \overline{D} . Par ailleurs, comme M est stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, cela implique que $M^{(0)}$ est un sous- $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}^+$ -module de D inclus dans D^{\sharp} ; comme de plus $M^{(0)}$ est compact puisque c'est l'image du compact M par l'application $z \mapsto z^{(0)}$ et que son image dans \overline{D} est un réseau, cela implique que $M^{(0)}$ est un treillis de D . Maintenant, $M^{(0)}$ est stable par ψ et comme D^{\natural} est le plus petit treillis de D ayant cette propriété, on en déduit l'inclusion $D^{\natural} \subset M^{(0)}$, ce qui permet de conclure.

Corollaire III.1.6. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(k_{\mathcal{E}})$ est irréductible, alors $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$ -module topologiquement irréductible.

Corollaire III.1.7. — Soit $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$. Si M est un sous- L -espace vectoriel fermé de $(D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ stable par $P(\mathbf{Q}_p)$, alors il existe un sous- (φ, Γ) -module D_1 de D tel que

$$(D_1^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b \subset M \subset (D_1^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b.$$

Démonstration. — Il suffit d'appliquer le th. III.1.5 à $M_0 = M \cap (D_0^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p)$, où D_0 est un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau de D stable par φ et Γ .

Corollaire III.1.8. — Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ est irréductible, alors $(D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est un $P(\mathbf{Q}_p)$ -module topologiquement irréductible.

3. Lien entre $D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p$

Proposition III.1.9. — Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, l'application $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p}$ induit un isomorphisme de $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $D^{\sharp} / D^{\natural}$.

Démonstration. — ψ induit une surjection de $D^{\sharp} / D^{\natural}$ sur lui-même et donc une bijection puisque D^{\sharp} et D^{\natural} sont des treillis de D . Il s'ensuit que l'application $(x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \mapsto x^{(0)}$ induit un isomorphisme de $(D^{\sharp} / D^{\natural}) \boxtimes \mathbf{Q}_p$ sur $D^{\sharp} / D^{\natural}$. Maintenant, la surjectivité de $\psi - 1$ sur D^{\natural} (cf. prop. III.1.12) permet de montrer que l'application naturelle $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow (D^{\sharp} / D^{\natural}) \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est surjective, et donc que $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p = (D^{\sharp} / D^{\natural}) \boxtimes \mathbf{Q}_p$. Le résultat s'en déduit.

Corollaire III.1.10. — $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est de dimension $\leq \dim_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}} D$ sur \mathcal{O}_L .

Corollaire III.1.11. — (i) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{O}_{\mathcal{E}})$ est irréductible, de rang ≥ 2 , alors $D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p / D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est un \mathcal{O}_L -module de torsion.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ est irréductible, de dimension ≥ 2 , alors $(D^{\sharp} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b = (D^{\natural} \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$.

Proposition III.1.12. — Si $P \in \mathcal{O}_L[X]$ n'est pas nul modulo \mathfrak{m}_L , alors $P(\psi) : D^{\natural} \rightarrow D^{\natural}$ est surjectif.

Démonstration. — Commençons par supposer que D est de torsion. Dans ce cas, $y \in (P(\psi)D^{\natural})^{\perp}$ équivaut à $\langle P(\varphi) \cdot y, x \rangle = 0$ pour tout $x \in D^{\natural}$, et donc aussi à $P(\varphi) \cdot y \in \check{D}^+$. Comme P n'est pas nul modulo \mathfrak{m}_L , cette dernière condition équivaut à $y \in \check{D}^+$ (le sous- \mathcal{O}_L -module engendré

par les $\varphi^n(P(\varphi) \cdot y)$ est d'indice fini dans celui engendré par les $\varphi^n(y)$, et l'inclusion du premier dans un treillis implique donc celle du second). Ceci permet de conclure si D est de torsion. Le cas général s'en déduit en utilisant la compacité de D^\sharp .

Proposition III.1.13. — Soit $P \in \mathcal{O}_L[X]$ non nul modulo \mathfrak{m}_L .

(i) Si D est un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, alors $P\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right) : D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p \rightarrow D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ est surjectif.

(ii) Si $D \in \Phi\Gamma^{\text{ét}}(\mathcal{E})$, alors $P\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right) : (D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b \rightarrow (D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ est surjectif.

Démonstration. — Remarquons que $P\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right) \cdot (x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} = (P(\psi) \cdot x^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$. D'après la prop. III.1.12, $P(\psi) : D^\sharp \rightarrow D^\sharp$ est surjectif. Il existe donc $y^{(k)} \in D^\sharp$ tel que $P(\psi) \cdot y^{(k)} = x^{(k)}$, et comme $\psi : D^\sharp \rightarrow D^\sharp$ est surjective, il existe $y_k = (y_k^{(n)})_{n \in \mathbf{N}} \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ tel que $y_k^{(k)} = y^{(k)}$; on a alors $P(\psi)y_k^{(n)} = x^{(n)}$, pour tout $n \leq k$. La compacité de $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ permet de prendre une valeur d'adhérence $y = (y^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ de la suite $(y_k)_{k \in \mathbf{N}}$; un passage à la limite montre que $P(\psi)y^{(n)} = x^{(n)}$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et donc que x est dans l'image de $P\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right)$. Ceci démontre le (i) et, le (ii) étant une conséquence immédiate du (i), cela permet de conclure.

Proposition III.1.14. — Soit $P \in \mathcal{O}_L[X]$ vérifiant $P(0) \in \mathcal{O}_L^*$.

(i) Si $z \in D$ vérifie $P(\psi) \cdot z \in D^\sharp$, alors $z \in D^\sharp$.

(ii) $D^{P(\psi)=0} = (D^\sharp)^{P(\psi)=0}$, et donc $D^{P(\psi)=0}$ est compact.

Démonstration. — Il suffit de prouver que $(D/D^\sharp)^{P(\psi)=0} = 0$, ce qui suit de la nilpotence topologique de ψ sur D/D^\sharp .

Proposition III.1.15. — Si $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$;

(ii) il existe $P \in \mathcal{O}_L[X]$, non nul modulo \mathfrak{m}_L , tel que $P\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$.

Démonstration. — Il n'y a que l'implication (ii) \Rightarrow (i) à prouver. On peut factoriser P sous la forme $P = P^+ P^0 P^-$ habituelle, et les inverses formels de $P^+\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ et $P^-\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ convergeant sur $D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$ et $D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ pour la topologie p -adique, cela permet de se ramener au cas où $P = P^0$ et donc de supposer que P est unitaire et $P(0) \in \mathcal{O}_L^*$. Soit d le degré de P , et soit $Q(X) = X^d P(X^{-1})$. On a alors $Q\left(\begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\right) \cdot z \in D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p$, ce qui se traduit, si $z = (z^{(n)})_{n \in \mathbf{N}}$ par l'appartenance de $Q(\psi) \cdot z^{(n)}$ à D^\sharp pour tout $n \in \mathbf{N}$. La prop. III.1.14 permet alors d'en déduire l'appartenance de $z^{(n)}$ à D^\sharp , ce qui permet de conclure.

4. L'application $\text{rés}_0 : D \rightarrow D^\sharp/D^\sharp$

Soit D un (φ, Γ) -module étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$. Si $z \in D$, il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de D^\sharp telle que $\psi^n(z) - x_n \rightarrow 0$ (c'est une des propriétés fondamentales de D^\sharp). Or ψ est inversible (car surjective) sur D^\sharp/D^\sharp qui est un \mathcal{O}_L -module de type fini, et donc

$$\psi^{-n}(x_n) - \psi^{-n-1}(x_{n+1}) = \psi^{-n}(x_n - \psi^n(z)) - \psi^{-n-1}(x_{n+1} - \psi^{n+1}(z))$$

tend vers 0 dans D^\sharp/D^\sharp , ce qui implique que $(\psi^{-n}(x_n))_{n \in \mathbf{N}}$ a une limite dans D^\sharp/D^\sharp . On note $\text{rés}_0(z)$ cette limite.

Si $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$, on définit $\mathrm{rés}_0 : D \rightarrow D^\sharp/D^\natural$ en choisissant un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ -réseau D_0 de D stable par φ et Γ et en étendant par L -linéarité l'application $\mathrm{rés}_0 : D_0 \rightarrow D_0^\sharp/D_0^\natural$ définie ci-dessus.

Proposition III.1.16. — *Soit D un (φ, Γ) -module étale.*

(i) *Si $z \in D$, alors :*

- $\mathrm{rés}_0(\sigma_a(z)) = \sigma_a(\mathrm{rés}_0(z))$, pour tout $a \in \mathbf{Z}_p^*$,
- $\mathrm{rés}_0(\varphi(z)) = \psi^{-1}(\mathrm{rés}_0(z))$ et $\mathrm{rés}_0(\psi(z)) = \psi(\mathrm{rés}_0(z))$,
- $\mathrm{rés}_0(\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z) = \mathrm{rés}_0(z)$, pour tout $n \in \mathbf{N}$.

(ii) $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ si et seulement si il existe $x \in D^\natural$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p}(z - x)$ tende p -adiquement vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. — Le (i) est immédiat sur la définition de $\mathrm{rés}_0$ (la dernière propriété suit de la seconde et de ce que $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} = \varphi^n \circ \psi^n$). Maintenant, comme $\mathrm{rés}_0(x) = 0$ si $x \in D^\natural$, on déduit du (i) que $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ s'il existe $x \in D^\natural$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p}(z - x)$ tende p -adiquement vers 0.

Pour démontrer la réciproque, on peut se contenter du cas où D est étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L . Soit $c \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que p^c tue le sous- \mathcal{O}_L -module de torsion $(D^\sharp/D^\natural)_{\mathrm{tors}}$ de D^\sharp/D^\natural . D'après la propriété fondamentale de D^\sharp , il existe $n_1 \in \mathbf{N}$ tel que $\psi^{n_1}(z) \in D^\natural + p^{2c}D$, et l'hypothèse $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ implique que l'on a alors $\psi^{n_1}(z) \in D^\natural + p^{2c}D$. Comme $\psi : D^\natural \rightarrow D^\natural$ est surjectif, on en déduit l'existence de $x_1 \in D^\natural$ tel que $\psi^{n_1}(z - x_1) \in p^{2c}D$. Comme $\mathrm{rés}_0(\psi^{n_1}(z - x_1)) = 0$, et comme p^c tue $(D^\sharp/D^\natural)_{\mathrm{tors}}$, cela implique que $\mathrm{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1)) = 0$ puisque $\mathrm{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1)) = p^c \mathrm{rés}_0(p^{-2c}\psi^{n_1}(z - x_1))$. En réitérant le raisonnement précédent, cela nous fournit $n_2 \in \mathbf{N}$ et $x_2 \in D^\natural$ tels que $\psi^{n_2}(p^{-c}\psi^{n_1}(z - x_1) - \psi^{n_1}(x_2)) \in p^{2c}D$ et donc $\psi^{n_1+n_2}(z - x_1 - p^c x_2) \in p^{3c}D$. Une récurrence immédiate nous fournit donc des entiers n_j et des éléments x_j de D^\natural tels que

$$\psi^{n_1+\dots+n_k}(z - x_1 - \dots - p^{(k-1)c}x_k) \in p^{(k+1)c}D, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Soit alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} p^{(j-1)c}x_j$; c'est un élément de D^\natural qui vérifie $\psi^n(z - x) \in p^{kc}D$ (et donc $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p}(z - x) \in p^{kc}D$) pour tout $n \geq n_1 + \dots + n_k$. On en déduit le résultat.

Proposition III.1.17. — *Soit D un (φ, Γ) -module étale.*

(i) *Si $z \in D \boxtimes \mathbf{Q}_p$ (resp. $z \in (D \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$), alors :*

- $\mathrm{rés}_0\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot z\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathrm{rés}_0(z)$, pour tout $a \in \mathbf{Q}_p^*$,
- $\mathrm{rés}_0(\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p} z) = \mathrm{rés}_0(z)$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

(ii) $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ si et seulement si il existe $x \in \tilde{D}^+$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p}(z - x)$ tende p -adiquement vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$.

Démonstration. — Le (i) est une conséquence immédiate du (i) de la prop. III.1.16. Maintenant, comme $\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} x \in D^\natural$, si $x \in \tilde{D}^+$ (car $\tilde{D}^+ = (D^\natural \boxtimes \mathbf{Q}_p)_{p^c}$), on déduit du (i) que $\mathrm{rés}_0(z) = 0$ s'il existe $x \in \tilde{D}^+$ tel que $\mathrm{Res}_{p^n \mathbf{Z}_p}(z - x)$ tende p -adiquement vers 0.

Pour démontrer la réciproque, on peut se contenter du cas où D est étale sur $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$, le cas $D \in \Phi\Gamma^{\mathrm{et}}(\mathcal{E})$ s'en déduisant en tensorisant par L . Soit $c \in \mathbf{N} - \{0\}$ tel que p^c tue le sous- \mathcal{O}_L -module de torsion $(D^\sharp/D^\natural)_{\mathrm{tors}}$ de D^\sharp/D^\natural . Comme ci-dessus, il existe $m_1 \in \mathbf{N}$ tels que $\psi^{m_1}(\mathrm{Res}_{\mathbf{Z}_p} z) \in$

$D^\sharp + p^{2c}D$, et l'hypothèse $\text{rés}_0(z) = 0$ implique que l'on a alors $\psi^{n_1}(z) \in D^\sharp + p^{2c}D$. Par ailleurs $\psi^n((D/p^cD)^{++}) = (D/p^cD)^\sharp$, si $n \gg 0$ (c'est une des propriétés fondamentales de D^\sharp). Il existe donc $n_1 \geq m_1$ et $x_1 \in (D/p^cD)^{++}$, tel que $\psi^{n_1}(x_1) = \psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p} z)$ modulo p^c . Maintenant, le foncteur $D \mapsto \tilde{D}^{++}$ étant exact, on peut relever x_1 en \tilde{x}_1 dans \tilde{D}^{++} , et par construction, on a $\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)) \in p^{2c}D$. Comme $\text{rés}_0(\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = 0$, et comme p^c tue $(D^\sharp/D^\sharp)_{\text{tors}}$, cela implique que $\text{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = 0$ puisque $\text{rés}_0(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1))) = p^c\text{rés}_0(p^{-2c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)))$. En réitérant le raisonnement précédent, cela nous fournit $n_2 \in \mathbf{N}$ et $\tilde{x}_2 \in \tilde{D}^+$ tels que $\psi^{n_2}(p^{-c}\psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1)) - \psi^{n_1}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}\tilde{x}_2)) \in p^{2c}D$ et donc $\psi^{n_1+n_2}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1 - p^c\tilde{x}_2)) \in p^{3c}D$. Une récurrence immédiate nous fournit donc des entiers n_j et des éléments \tilde{x}_j de \tilde{D}^+ tels que

$$\psi^{n_1+\dots+n_k}(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - \tilde{x}_1 - \dots - p^{(k-1)c}\tilde{x}_k)) \in p^{(k+1)D}, \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{N}.$$

Soit alors $x = \sum_{j=1}^{+\infty} p^{(j-1)c}\tilde{x}_j$; c'est un élément de \tilde{D}^+ qui vérifie $\psi^n(\text{Res}_{\mathbf{Z}_p}(z - x)) \in p^{kc}D$ (et donc $\text{Res}_{p^n\mathbf{Z}_p}(z - c) \in p^{kc}D$) pour tout $n \geq n_1 + \dots + n_k$. On en déduit le résultat.