INTRODUCTION

par

Pierre Colmez

Ce volume est consacré aux applications de la théorie des (φ,Γ)-modules à celle des représentations p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ en vue de l'établissement d'une correspondance de Langlands locale p-adique entre ces représentations et les représentations de dimension 2 du groupe de Galois absolu $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Il s'est écoulé un temps non négligeable(1) entre l'obtention des premiers résultats et la parution de ce volume, et cette petite introduction vise à expliquer ce qui est advenu des articles initiaux et les étapes de la construction de la correspondance de Langlands locale p-adique via la théorie des (φ,Γ)-modules. Nous renvoyons aux articles pour des introductions plus détaillées et à [**10**] pour une présentation des travaux antérieurs à l'introduction des (φ,Γ)-modules.

Fonctions L p-adiques et représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.— Fontaine ayant prouvé [**19**] que les représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ sont en équivalence de catégories avec les (φ,Γ)-modules étales, il était assez naturel de penser qu'on devrait pouvoir lire la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, attachée à une représentation V de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ par une hypothétique correspondance de Langlands locale p-adique, sur le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ lui correspondant par l'équivalence de catégories de Fontaine. Ce fantasme a pris corps à la réception d'un article [**9**] où Breuil prouvait, par voie globale, que certaines des représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ qu'il avait définies [**8**] en vue d'une correspondance pour les représentations semi-stables de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, avaient les propriétés qu'il conjecturait et, en particulier, n'étaient pas réduites à 0. Le résultat de Breuil suppose que la représentation semi-stable V que l'on considère est la restriction à $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ d'une représentation attachée à une forme modulaire f, primitive de niveau Np, avec $(N,p)=1$. Dans ce cas, on sait [**24**] attacher à f une fonction L p-adique (en utilisant les symboles modulaires), ce qui nous fournit une distribution μ_f sur $\mathbf{Q}_p$, vecteur propre pour l'action de $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$ agissant par $\int_{\mathbf{Q}_p}\phi\ \left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)\mu_f=\int_{\mathbf{Q}_p}\phi(px)\,\mu_f$, et Breuil a démontré que μ_f était naturellement un élément du dual topologique $\mathbf{\Pi}(V)^*$ de $\mathbf{\Pi}(V)$.

(1) Ce délai, dont je m'excuse, est largement imputable au gigantisme imprévu de l'article [7] de ce volume.

Or on dispose d'une autre construction de μ_f en partant du système d'Euler de Kato [**22**] et en utilisant la machine de Perrin-Riou [**25, 26, 13**] que l'on peut voir comme un facteur local en p de la fonction L p-adique. En traduisant [**14**] cette machine de Perrin-Riou dans le langage des (φ,Γ)-modules grâce à un résultat de Fontaine [**12**] selon lequel le module $H^1_{\rm Iw}(V)$ dans lequel vit le système d'Euler de Kato est naturellement isomorphe au sous-module $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ (où ψ est un inverse à gauche de φ) du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ correspondant à V, on arrive à la conclusion que $\mathbf{D}(V)^{\psi=1}$ fournit des éléments non nuls de $\mathbf{\Pi}(V)^*$ fixes par $\left(\begin{smallmatrix} p & 0\\ 0 & 1\end{smallmatrix}\right)$, ce qui est un énoncé purement local susceptible d'être démontré localement et généralisé. Les résultats de ce volume sont le fruit de cette observation, et ont été obtenus en deux temps : l'étude de la série principale (2004 et début 2005) et la correspondance générale (2005-2008).

La série principale.— L'étude du (φ,Γ)-module associé à une représentation semi-stable non cristalline V a permis [**15**] de démontrer (janvier-mars 2004) les propriétés conjecturales de la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ que Breuil [**8**] lui avait attachée. Ce faisant, on obtient un isomorphisme $\mathbf{\Pi}(V)^*\cong(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ de représentations du sous-groupe mirabolique $P(\mathbf{Q}_p)$ de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, où $(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ est un module construit à partir du (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ attaché à V en utilisant l'opérateur ψ mentionné ci-dessus.

Ces résultats ont été généralisés sur le champ par Berger et Breuil [**4, 3**] au cas où V est cristalline qui a pour particularité de voir apparaître des isomorphismes entre représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, ce qui joue un grand rôle dans les démonstrations.

Une traduction des résultats de Berger et Breuil en termes de caractères de $\mathbf{Q}_p^*$ au lieu de valeurs propres de frobenius a conduit (juillet 2004-mars 2005) à une extension de ces résultats [**16**] au cas où $\mathbf{\Pi}(V)$ est de la série principale ; la principale innovation par rapport aux cas précédents à résidé en la définition du concept de représentation trianguline de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ pour décrire les représentations galoisiennes associées aux représentations de la série principale via la correspondance de Langlands locale p-adique.

Berger et Breuil [**5**] (dans un cas partiel) et Berger (dans le cas général, cf. [6] du présent volume) ont démontré que la correspondance ainsi définie pour la série principale était compatible avec la correspondance modulo p définie par Breuil [**6, 7**].

Les foncteurs $\Pi\mapsto\mathbf{V}(\Pi)$ *et* $V\mapsto\mathbf{\Pi}(V)$.— Au vu de l'isomorphisme $\mathbf{\Pi}(V)^*\cong(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$ dans les cas ci-dessus, on est naturellement amené à se demander s'il est possible de reconstruire le (φ,Γ)-module $\mathbf{D}(V)$ à partir du $P(\mathbf{Q}_p)$-module topologique $(\check{\mathbf{D}}(V)^\sharp\boxtimes\mathbf{Q}_p)_b$. La réponse est « oui » et fournit un foncteur $\Pi\mapsto\mathbf{D}(\Pi)$ associant un (φ,Γ)-module étale (et donc aussi une représentation p-adique de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$) à n'importe quelle représentation p-adique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ (pas seulement celle de la série principale). Kisin a remarqué, peu de temps après la conférence de Montréal de septembre 2005 où l'existence de ce foncteur avait été annoncée, qu'il suffirait de vérifier une injectivité au niveau des Ext^1 pour en déduire, par prolongement analytique, en utilisant les résultats pour la série principale, une correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$ associant une représentation de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ à n'importe quelle représentation de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$. Ce résultat d'injectivité a été rapidement démontré, ce qui a conduit à l'article **[17]**.

L'utilisation du prolongement analytique pour la définition de la correspondance rend l'étude de ses propriétés fines quasi impossible, ce qui a forcé une construction directe (reposant sur des formules pas très élégantes) de la correspondance $V \mapsto \mathbf{\Pi}(V)$. En utilisant une grande partie **[19, 13, 11, 1, 23, 2]** du programme de Fontaine de classification des représentations p-adiques de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$, et les travaux de fondement de Schneider et Teitelbaum **[27, 28]**, on peut alors étudier les vecteurs localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$. Cela permet de prouver que la correspondance de Langlands locale p-adique encode la correspondance classique **[20, 21]**, confirmant l'un des espoirs à l'origine des travaux de Breuil sur le programme de Langlands p-adique.

Donnons maintenant une brève description des articles du volume.

[1] M.-F. Vignéras, ℓ-adic Banach representations of reductive p-adic groups when $\ell \neq p$.

Version développée d'une lettre à Breuil banachisant la correspondance ℓ-adique classique.

[2] P. Colmez, fonctions d'une variable p-adique.

Résumé compact, avec démonstrations, de l'analyse fonctionnelle p-adique utilisée dans la correspondance locale p-adique pour la série principale [4] et [5].

[3] P. Colmez, (φ, Γ)-modules et représentations du mirabolique de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Consacré à l'étude du $P(\mathbf{Q}_p)$-module $(D^\sharp \boxtimes \mathbf{Q}_p)_b$ qui joue un rôle fondamental dans les articles [4], [5] (où il est noté $(\varprojlim_{\psi} D)_b$), [6] et [7].

[4] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Établit la correspondance pour les représentations devenant cristallines sur une extension abélienne de $\mathbf{Q}_p$.

[5] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$.

Consacré au reste de la série principale.

[6] L. Berger, Représentations modulaires de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations galoisiennes de dimension 2.

Établit une compatibilité avec une correspondance modulo p pour la série principale.

[7] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules.

Construit la représentation $\mathbf{\Pi}(V)$ attachée à une représentation V de dimension 2 de $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ et le foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ allant dans l'autre sens, et étudie vecteurs localement analytiques et localement algébriques de $\mathbf{\Pi}(V)$.

[8] M. Kisin, Deformations of $\mathscr{G}_{\mathbf{Q}_p}$ and $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ representations.

Explique comme construire la correspondance $V \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$ à partir du foncteur $\Pi \mapsto \mathbf{V}(\Pi)$.

Les articles initiaux **[15, 3, 4, 16, 17]** ont été découpés en morceaux et ont vu leurs résultats renforcés par ceux du présent volume. Ceux de **[3, 4]** sont inclus dans l'article [4] du volume et ceux de [**17**] dans l'article [7]. L'article [5] du volume regroupe des bouts de [**15**] et [**16**] ; le reste de ces articles a donné naissance aux articles [2] et [3] de ce volume, ainsi qu'à [**18**].

Références

[1] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Inv. Math. **148** (2002), 219–284.

[2] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[3] L. Berger, C. Breuil, Towards a p-adic Langlands programme, notes de cours (2004), `http://front.math.ucdavis.edu/0408.5404`.

[4] L. Berger, C. Breuil, Représentations cristallines irréductibles de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, prépublication 2004, `http://front.math.ucdavis.edu/0410.5053`.

[5] L. Berger, C. Breuil, Sur la réduction des représentations cristallines de dimension 2 en poids moyen, prépublication 2005, `http://front.math.ucdavis.edu/0504.5388`.

[6] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Comp. Math. **138** (2003) 165–188.

[7] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu **2** (2003), 23–58.

[8] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. Scient. E.N.S. **37** (2004) 559–610.

[9] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, prépublication 2003, à paraître dans Astérisque.

[10] C. Breuil, Introduction générale, Astérisque **319** (2008), 1–12.

[11] F. Cherbonnier et P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. Math. **133** (1998), 581–611.

[12] F. Cherbonnier, P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques d'un corps local, J. Amer. Math. Soc. **12** (1999) 241–268.

[13] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998) 485–571.

[14] P. Colmez, La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique, *Sém. Bourbaki 2002/03*, exp. 919, Astérisque **294** (2004), 251–319.

[15] P. Colmez, Une correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations semi-stables de dimension 2, prépublication 2004, `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/sst.pdf`.

[16] P. Colmez, Série principale unitaire pour $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et représentations triangulines de dimension 2, prépublication 2005, `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/triangulines.pdf`.

[17] P. Colmez, Représentations de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules (version provisoire et partielle), prépublication 2007, `http://people.math.jussieu.fr/~colmez/unicite.pdf`.

[18] P. Colmez, Représentations triangulines de dimension 2, Astérisque **319** (2008), 213–258.

[19] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[20] M. Harris, R. Taylor, *On the geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, Ann. Math. Studies 151, Princeton Univ. Press, 2001.

[21] G. Henniart, Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour $\mathbf{GL}_n$ sur un corps p-adique, Invent. Math. **139** (2000) 439–455.

[22] K. Kato, Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques (III)*, Astérisque **295** (2004), 117–290.

[23] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[24] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer, Invent. Math. **84** (1986), 1–48.

[25] B. Perrin-Riou, Théorie d'Iwasawa des représentations p-adiques sur un corps local, Invent. Math. **115** (1994), 81–149.

[26] B. Perrin-Riou, *Fonctions L p-adiques des représentations p-adiques*, Astérisque **229** (1995).

[27] P. Schneider et J. Teitelbaum, (with an appendix by D. Prasad), $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, Representation Theory **5** (2001), 111–128.

[28] P. Schneider, J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Inv. Math. **153** (2003), 145–196.

Pierre Colmez, École Polytechnique, C.M.L.S., 91128 Palaiseau Cedex, France • C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.polytechnique.fr`