ESPACES DE BANACH DE DIMENSION FINIE

par

Pierre Colmez

Résumé. — Cet article est le résultat d'une relecture de la démonstration de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » par J-M. Fontaine et l'auteur **[5]**. On donne une version renforcée de l'un des ingrédients (le « lemme fondamental ») de cette démonstration, ce qui nous amène à introduire un corps non commutatif gigantesque $\mathscr{C}$, de centre $\mathbf{Q}_p$ et contenant un corps C algébriquement clos et complet pour la norme p-adique comme sous-corps commutatif maximal. Un peu « d'algèbre linéaire » sur ce corps mène à l'introduction de la catégorie des Espaces (avec un E majuscule) de Banach de dimension finie et la conjecture « faiblement admissible implique admissible » se réduit alors à un calcul de dimensions d'objets de cette catégorie.

Abstract. — This paper comes from a rereading of the proof of the conjecture « weakly admissible implies admissible » by J-M. Fontaine and the author. We give a strengthened version of one of the ingredients (the « fundamental lemma ») of that proof which leads us to the study of a gigantic skew-field $\mathscr{C}$, whose center is $\mathbf{Q}_p$ and which contains an algebraically closed field C complete for the p-adic norm as a maximal commutative subfield. Some « linear algebra » over this field leads to the introduction of the category of finite dimensional Banach Spaces (with a capital S) and the conjecture « weakly admissible implies admissible » is reduced to the computation of the dimension of some objects of this category.

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11S.
Mots clefs. — p-adique, Banach, représentations, semi-stable, anneaux de Fontaine.

§ 1
Introduction

Notations. — Dans cette introduction (et à partir du §8), K est un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation p-adique discrète v_p, de corps résiduel k_K parfait. Si $\overline{K}$ est une clôture algébrique de K, la valuation v_p (supposée normalisée par $v_p(p) = 1$) s'étend de manière unique à $\overline{K}$ et on note C le complété $\widehat{\overline{K}}$ de $\overline{K}$ pour cette valuation ; c'est un corps algébriquement clos complet pour la valuation v_p (plus exactement, pour la valuation obtenue à partir de v_p par continuité) dont le corps résiduel k_C est un corps algébriquement clos de caractéristique p contenant k_K.

On note $\mathscr{G}_K$ le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$; c'est aussi le groupe des automorphismes continus de C dont la restriction à K est l'identité.

1. Un drôle de corps. — En creusant un peu la démonstration [**5**] de la conjecture « faiblement admissible implique admissible », on est naturellement amené à introduire la notion de *correspondance analytique* $\mathbf{Q}_p$*-linéaire de rang fini* sur C, où

« correspondance sur C » est synonyme de *fonction multivaluée* sur C (si $\tilde{f}$ est une correspondance, on note $\{\tilde{f}(x)\}$ l'ensemble des valeurs de $\tilde{f}$ en x et plus généralement, $\{\tilde{f}(E)\} = \cup_{x\in E}\{\tilde{f}(x)\}$ si $E \subset C$),

« $\mathbf{Q}_p$-linéaire » veut dire que le *graphe* $\Gamma_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$ est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $C \times C$,

« analytique » signifie que la restriction de $\tilde{f}$ à la boule unité est une *limite uniforme de fonctions algébriques* (voir §6.2 pour une définition en bonne et due forme)

« de rang fini » traduit le fait que le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $U_{\tilde{f}} = \{\tilde{f}(0)\}$ de C est de *dimension finie* sur $\mathbf{Q}_p$; le rang de $\tilde{f}$ étant alors cette dimension.

On note $\mathscr{C}$ l'ensemble des correspondances analytiques $\mathbf{Q}_p$-linéaires de rang fini sur C. Les correspondances analytiques $\mathbf{Q}_p$-linéaires de rang 0 sont de la forme $x \to cx$ avec $c \in C$ (leur graphe est de la forme $\{(x, cx) \mid x \in C\}$), ce qui permet de voir C comme un sous-ensemble de $\mathscr{C}$. Il n'est d'ailleurs pas totalement évident a priori qu'il existe d'autres exemples de correspondances analytiques additives de rang fini, mais on peut en construire (cf. n° 10.5) en utilisant les anneaux de Fontaine.

Théorème 1.1. — (i) *Si $\tilde{f}$ et $\tilde{g}$ sont deux éléments de $\mathscr{C}$, il existe des éléments $\tilde{f}+\tilde{g}$ et $\tilde{f}\cdot\tilde{g}$ de $\mathscr{C}$ uniquement déterminés par les inclusions $\{(\tilde{f}+\tilde{g})(x)\} \subset \{\tilde{f}(x)\}+\{\tilde{g}(x)\}$ et $\{(\tilde{f}\cdot\tilde{g})(x)\} \subset \{\tilde{f}(\{\tilde{g}(x)\})\}$ quel que soit $x \in C$.*

(ii) *Muni de l'addition et de la multiplication définies ci-dessus, $\mathscr{C}$ est un corps dont C est un sous-corps commutatif maximal et dont le centre est réduit au sous-corps $\mathbf{Q}_p$ de C.*

(iii) *Si $\tilde{f} \in \mathscr{C} - \{0\}$, alors $\tilde{f}$ est surjective* (i.e. $\{f(C)\} = C$) *et les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $U_{\tilde{f}}$ et $V_{\tilde{f}} = \{x \in C \mid (x, 0) \in \Gamma_{\tilde{f}}\}$ ont la même dimension.*

On dispose d'autre part (cf. th. 10.5) d'une suite exacte naturelle de C-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathscr{C} \longrightarrow C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \longrightarrow C \longrightarrow 0$$

permettant de décrire $\mathscr{C}$ en tant que C-espace vectoriel, mais il semble assez délicat (et pas forcément très utile) de définir la multiplication dans $\mathscr{C}$ en utilisant cette description.

Remarque 1.2. — Le (iii) de ce théorème et plus précisément l'égalité des dimensions de $U_{\tilde{f}}$ et $V_{\tilde{f}}$ permet de démontrer la forme forte du « lemme fondamental » (cf. [**5**], prop. 2.1 et remarque) ; la forme faible n'utilisant que la surjectivité de $\tilde{f}$. Pour ce faire, il suffit de constater que le μ_1 apparaissant dans la démonstration ([**5**], p. 19) est un élément de $\mathscr{C}$ (cf. la construction d'éléments de $\mathscr{C}$ via les anneaux de Fontaine donnée au n° 10.5).

Remarque 1.3. — La théorie ci-dessus a un analogue galoisien développé par Fontaine [**8**]. Au lieu de correspondances $\mathbf{Q}_p$-linéaires de rang fini, on peut considérer les endomorphismes $\mathbf{Q}_p$-linéaires de C « à des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie près », i.e. les applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires $f : C/U \to C/V$ où U et V sont des sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de C (dépendant de f). Si U' est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de C/U et V' est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de C/V contenant $f(U')$, on dispose par passage au quotient de $f' : C/U' \to C/V'$ et on considère la relation d'équivalence engendrée par les équivalences $f \sim f'$. On note $\mathscr{D}$ l'ensemble des classes d'équivalence ; c'est naturellement un anneau (pour l'addition et la composition) et on dispose d'un morphisme naturel de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{D}$ (si $\tilde{f} \in \mathscr{C}$, si U est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de C et V est sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de C contenant $\{\tilde{f}(U)\}$, alors $\tilde{f}$ induit une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire $C/U \to C/V$) compatible avec les structures d'anneaux, et qui est injectif.

Fontaine montre alors, dans le cas où le corps résiduel k_K est fini, les résultats suivants :

(i) si U et V sont des sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de C stables par $\mathscr{G}_K$ et si $f : C/U \to C/V$ est une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire non nulle *continue et commutant à l'action de* $\mathscr{G}_K$, alors f est surjective et $\dim_{\mathbf{Q}_p} \ker f = \dim_{\mathbf{Q}_p} V - \dim_{\mathbf{Q}_p} U$;

(ii) le sous-ensemble $\mathscr{D}_K$ de $\mathscr{D}$ image des f du type ci-dessus est un corps (non commutatif) ;

(iii) on dispose d'une suite exacte naturelle de K-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow K \longrightarrow \mathscr{D}_K \longrightarrow (C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C)^{\mathscr{G}_K} \longrightarrow K \longrightarrow 0.$$

L'une des étapes pour obtenir ce résultat consiste à montrer que $\mathscr{D}_K$ est inclus dans l'image de $\mathscr{C}$, ce qui permet d'utiliser le théorème 1.1.

2. Les Espaces de Banach de dimension finie. — Une algèbre sympathique Λ est une C-algèbre de Banach spectrale (i.e. munie de la norme spectrale), connexe et p-close (i.e. tout élément λ de Λ vérifiant $\|\lambda - 1\|_\Lambda < 1$ a une racine p-ième dans Λ). Un Espace de Banach est un foncteur covariant de la catégorie des algèbres sympathiques (les morphismes dans cette catégorie sont les morphismes continus de C-algèbres) dans celle des $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach (on définit de même un Anneau, un Module etc). La catégorie des Espaces de Banach contient deux sortes d'objets particulièrement simples : d'une part, si V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie, le foncteur V qui à toute algèbre sympathique associe V et à tout morphisme entre algèbres sympathiques associe l'identité et d'autre part le foncteur $\mathbb{V}^d$ qui, à toute algèbre sympathique Λ associe Λ^d et à tout morphisme $\Lambda_1 \to \Lambda_2$ associe le morphisme évident de Λ_1^d dans Λ_2^d. Un Espace de Banach est dit de dimension finie s'il ne diffère d'un $\mathbb{V}^d$ que par des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie (cf. n$^{\text{o}}$ 7.2 pour une définition précise). Si $\mathbb{W}$ ne diffère de $\mathbb{V}^d$ que par un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension a, le couple (d, a) [resp. l'entier d, resp. l'entier relatif a] s'appelle la *dimension* [resp. la *dimension principale*, resp. la *dimension résiduelle*] de $\mathbb{W}$. Il est à noter que la dimension d'un Espace de Banach de dimension finie dépend *a priori* de la manière dont on le présente, mais le (iii) du théorème 1.1 permet de montrer que cette dimension est, en fait, bien définie. La dimension principale est toujours positive, mais la dimension résiduelle peut être positive ou négative suivant que l'on fait une extension ou que l'on quotiente par un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie. Toutefois, comme il est difficile d'enlever quelque chose de rien, la dimension résiduelle est positive si la dimension principale est nulle. Les résultats principaux concernant les Espaces de Banach de dimension finie sont résumés dans l'énoncé suivant :

Théorème 1.4. — *Si* $\psi : \mathbb{W}_1 \longrightarrow \mathbb{W}_2$ *est un morphisme d'Espaces de Banach de dimension finie, alors* $\operatorname{Ker}\psi$ *et* $\operatorname{Im}\psi$ *sont des Espaces de Banach de dimension finie et*

$$\dim \mathbb{W}_1 = \dim \operatorname{Ker}\psi + \dim \operatorname{Im}\psi.$$

Ces constructions devraient pouvoir se faisceautiser et donner naissance à la notion de « faisceau non algébrique cohérent » sur la catégorie des espaces analytiques p-adiques munie de la topologie (pro)-étale. Nous ne l'avons pas fait, l'article étant déjà suffisamment long sans cela.

Remarque 1.5. — L'analogue galoisien de la théorie des Espaces de Banach de dimension finie est la théorie des « presque C-espaces vectoriels » de Fontaine [**8**] (un « presque C-espace vectoriel » est un $\mathbf{Q}_p$-espace de Banach muni d'une action continue de $\mathscr{G}_K$ ne différant de C^d que par un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie). Les résultats de Fontaine mentionnés dans la remarque 1.3 permettent de montrer que cette théorie fonctionne bien (du moins quand le corps résiduel est fini). La théorie des « presque C-espaces vectoriels » réserve aussi quelques surprises comme le fait que C et $C(1)$ « ne diffèrent que par des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie ».

3. Les anneaux de Fontaine. — L'étude des représentations de $\mathscr{G}_K$ provenant de la géométrie a conduit Fontaine à construire, à partir de C, des anneaux $\mathrm{B}_{\max}$ (ou $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$), B_{st} et B_{dR} contenant les périodes p-adiques des variétés algébriques propres et lisses définies sur K ayant un modèle sur l'anneau des entiers $\mathscr{O}_K$ de K qui est respectivement lisse, semi-stable et arbitraire. Ces anneaux contiennent en particulier un analogue p-adique t de $2i\pi$. Les constructions de Fontaine s'étendent sans problème en remplaçant C par une algèbre sympathique quelconque (et même par une $\mathbf{Q}_p$-algèbre de Banach quelconque) et on obtient de la sorte des Anneaux $\mathbb{B}_{\max}^+ \subset \mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+ \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et

$$\mathbb{B}_{\max} = \mathbb{B}_{\max}^+[\frac{1}{t}] \subset \mathbb{B}_{\mathrm{st}} = \mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+[\frac{1}{t}] \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}].$$

On a alors $\mathrm{B}_{\max} = \mathbb{B}_{\max}(C)$, $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} = \mathbb{B}_{\mathrm{st}}(C)$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}(C)$.

De plus, $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$ est muni d'un Frobenius φ et d'un opérateur de monodromie N vérifiant la relation $N\varphi = p\varphi N$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ est muni d'une filtration définie par $\mathrm{Fil}^n\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} = t^n\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ si $n \in \mathbf{Z}$. Ces structures donnent naissance aux suites exactes

(SEF 1) $$0 \longrightarrow \mathbb{B}_{\max} \longrightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \xrightarrow{N} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} \longrightarrow 0.$$

(SEF 2) $$0 \longrightarrow \mathbb{B}_{\max}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbb{B}_{\max} \xrightarrow{\varphi-1} \mathbb{B}_{\max} \longrightarrow 0.$$

(SEF 3) $$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \longrightarrow \mathbb{B}_{\max}^{\varphi=1} \longrightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{Fil}^0 \longrightarrow 0.$$

dites « suites exactes fondamentales » et qui rassemblent, sous une forme condensée, une grande partie de l'information « utile » concernant les Anneaux de Fontaine.

Ces Anneaux contiennent en outre une multitude d'Espaces de Banach de dimension finie non triviaux : en particulier, si $m \in \mathbf{N}$, alors $\mathbb{B}_m = \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathrm{Fil}^m$ est un Espace de Banach de dimension finie et, si $a, h \in \mathbf{N}$, alors $\mathbb{U}_{h,a} = (\mathbb{B}_{\max}^+)^{\varphi^h=p^a}$ est un Espace de Banach de dimension finie et :

Proposition 1.6. — *Les Espaces de Banach* $\mathbb{B}_m$ *et* $\mathbb{U}_{h,a}$ *sont de dimension respectives*

$$\dim \mathbb{B}_m = (m, 0) \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{U}_{h,a} = (a, h).$$

D'autre part, l'espace $\mathbb{U} = \mathbb{U}_{1,1} = (\mathbb{B}_{\max}^+)^{\varphi=p}$ joue un rôle privilégié dans la théorie ; en effet on a la proposition suivante

Proposition 1.7. — *Toute extension non triviale de* $\mathbb{V}^1$ *par* $\mathbf{Q}_p$ (dans la catégorie des Espaces de Banach de dimension finie) *est isomorphe à* $\mathbb{U}$.

Cette proposition, qui fait de $\mathbb{U}$ « l'extension universelle » de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$, montre que $\mathbb{U}$ est la « pièce de base » pour construire des Espaces de Banach de dimension finie.

4. Application aux (φ, N)-modules filtrés. — Si D est un (φ, N)-module filtré sur K et $n \in \mathbf{N}$, on peut associer à D les Espaces Vectoriels $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ définis respectivement par

$$\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) = (t^{-n}\mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+ \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \quad \text{et} \quad \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D) = (t^{-n}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes D)/\mathrm{Fil}^0.$$

D'autre part, l'injection $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+ \subset \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ nous fournit une application naturelle $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ dont on note $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ le noyau. Ces Espaces Vectoriels sont des Espaces de Banach de dimension finie et on a le résultat suivant :

Proposition 1.8. — *Si n est assez grand, alors*

$$\dim \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) = (n \dim D - t_N(D), \dim D) \quad \text{et} \quad \dim \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D) = (n \dim D - t_H(D), 0).$$

Les résultats précédents permettent de démontrer sans douleur la conjecture [1] « faiblement admissible implique admissible ». Un argument galoisien (cf. [**5**, prop. 4.5] ou prop. 11.11 de cet article) permet de montrer que, si D est faiblement admissible, alors $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est de dimension $(0, a_n)$ avec $a_n \leqslant \dim D$ et que, pour vérifier que D est admissible, il suffit de démontrer que $a_n = \dim D$ si n est assez grand. D'autre part, si D est faiblement admissible, alors $t_H(D) = t_N(D)$ par définition ; on en déduit le fait que le conoyau $\mathbb{Y}_n$ de l'application naturelle $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ est de dimension principale 0 si $n \gg 0$ puisque $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ ont même dimension principale et $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est de dimension principale 0. La dimension résiduelle b_n de $\mathbb{Y}_n$ est donc $\geqslant 0$ et d'autre part, l'additivité de la dimension résiduelle montre que l'on a $a_n = \dim D + b_n$. Si on injecte les inégalités $a_n \leqslant \dim D$ et $b_n \geqslant 0$ dans cette égalité, on obtient $a_n = \dim D$ et $b_n = 0$, ce qui permet de montrer à la fois que D est admissible et que $\mathbb{Y}_n = 0$ (i.e. que $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ est surjective).

5. Organisation de l'article. — Le théorème 1.1 est démontré par petits bouts dans le texte ; c'est la réunion de prop. 6.12 (existence du produit), prop. 6.18 (structure d'anneau), prop. 6.19 (surjectivité), prop. 6.21 et cor. 6.22 (égalité des dimensions de U_f et V_f), th. 6.28 (existence d'un inverse), prop. 6.30 (maximalité de C comme sous-corps commutatif) et prop. 10.22 (détermination du centre).

Le théorème 1.4 est un peu moins éparpillé ; c'est la réunion de prop. 7.16 et cor. 7.17 (existence de la dimension et dimension d'un noyau), prop. 7.22 (dimension d'un quotient) et prop. 7.24 (passage des Espaces Vectoriels aux Espaces de Banach).

Finalement, la proposition 1.6 correspond aux corollaires 9.21 et 9.23, la proposition 1.7 fait l'objet du n° 10.4, et la proposition 1.8 est la réunion de la proposition 11.1 et du corollaire 11.8.

La plupart des paragraphes comportent une petite introduction expliquant leur contenu.

6. Remerciements. — Cet article doit beaucoup à J-M. Fontaine : la démonstration de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » donnée au n° 4 est celle qu'il avait en vue quand il a introduit les « presque C-espaces vectoriels » dans son cours au centre E. Borel [**8**]. Il m'a d'autre part suggéré, lors de la conférence de Venise de septembre 1999, l'idée selon laquelle les « correspondances analytiques $\mathbf{Q}_p$-linéaires de rang fini » devraient être des morphismes dans une catégorie du genre de celle des « presque C-espaces vectoriels ».

1. Voir l'introduction de [**5**] pour un historique des travaux concernant cette conjecture.

La rédaction de cet article a bénéficié de la contemplation des couchers de soleil sur la baie de San Francisco depuis la terrasse du M.S.R.I. et d'un séjour à l'université de Padoue, où j'ai eu l'occasion de présenter les résultats de cet article en détail ; je voudrais remercier ces deux institutions pour leur hospitalité.

Finalement, je voudrais remercier le rapporteur pour sa lecture attentive.

§ 2

Algèbres de Banach p-adiques

Ce § contient des résultats de base sur les algèbres de Banach ultramétriques ; il ne prétend à aucune originalité ; la plupart des résultats pouvant se trouver dans **[2]** ou **[3]**.

2.1. Notations et généralités. — Soit C un corps algébriquement clos complet pour une norme ultramétrique p-adique $|\ |$ vérifiant $|p| = p^{-1}$ et soit v_p la valuation de C définie par $|x| = p^{-v_p(x)}$ si $x \in C$; en particulier, $v_p(p) = 1$. Si $d \geqslant 1$, $a \in C^d$ et $\rho \in |C|$, on note $B_d(a, \rho)$ (resp. $B_d(a, \rho^-)$) la boule fermée (resp. ouverte) de C^d de centre a et de rayon ρ. (D'un point de vue topologique, ces boules sont à la fois ouverte et fermées.) En particulier, $B_d(0, \rho)$ et $B_d(0, \rho^-)$ sont des sous-groupes de C^d.

Si $d = 1$, on le supprime de la notation et $B(0, 1)$ est l'anneau $\mathscr{O}_C$ des entiers de C et $B(0, 1^-)$ est l'idéal maximal $\mathfrak{m}_C$ de $\mathscr{O}_C$. Le corps résiduel $k_C = \mathscr{O}_C/\mathfrak{m}_C$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p et, si $\rho \in |C| - \{0\}$, $B(0, \rho)/B(0, \rho^-)$ est un k_C-espace vectoriel de dimension 1 ; en particulier, c'est un ensemble infini.

2.2. Espaces de Banach p-adiques. — Soit L un corps complet pour une valeur absolue ultramétrique p-adique normalisée par $|p| = p^{-1}$ (par exemple $L = \mathbf{Q}_p$ ou $L = C$). Un *L-espace vectoriel normé* E est par définition un L-espace vectoriel muni d'une norme $\|\ \|_E$ de L-espace vectoriel (i.e. $\|\lambda \cdot x\|_E = |\lambda| \cdot \|x\|_E$ si $\lambda \in L$ et $x \in E$) *ultramétrique* (i.e. $\|x + y\|_E \leqslant \sup(\|x\|_E, \|y\|_E)$ si $x, y \in E$).

Un *L-espace de Banach* est un L-espace vectoriel normé complet pour la norme, ce qui équivaut à la convergence des séries dont le terme général tend vers 0. Un L-espace vectoriel normé de dimension finie est un L-espace de Banach. Un sous-L-espace vectoriel d'un L-espace de Banach est de Banach si et seulement si il est fermé.

Si E est un L-espace vectoriel normé et F est un sous-L-espace vectoriel *fermé* de E, la fonction $\|y\|_{E/F} = \inf_{x \mapsto y} \|x\|_E$ est une norme sur E/F ; si E est L-espace de Banach, il en est de même de E/F.

Soit E un L-espace de Banach. Si F est un sous-L-espace de Banach de E et U est un sous-L-espace vectoriel *de dimension finie* de E, alors $F + U$ est un sous-L-espace de Banach de E et $F/(U \cap F)$ est un sous-L-espace de Banach de E/U. Il faut faire attention au fait que la somme de deux sous-L-espaces de Banach n'a aucune raison d'être fermée en général.

Les L-espaces de Banach forment une catégorie (les morphismes étant les applications L-linéaires *continues*). Le noyau d'un morphisme entre L-espaces de Banach étant fermé est encore un L-espace de Banach, mais l'image d'un tel morphisme n'a aucune raison *a priori* d'être complète. Par contre, si cette image est complète (et donc est un L-espace de Banach), alors l'application naturelle de $E/\mathrm{Ker}\,\psi$ sur $\mathrm{Im}\,\psi$ est un isomorphisme de L-espaces de Banach (théorème de l'image ouverte).

2.3. C-algèbres normées. — On appelle *C-algèbre normée* la donnée d'une C-algèbre commutative Λ munie d'une norme $\| \ \|_\Lambda$ de C-algèbre, c'est-à-dire que Λ muni de $\| \ \|_\Lambda$ est un C-espace vectoriel normé et que l'on a $\|\lambda\lambda'\|_\Lambda \leqslant \|\lambda\|_\Lambda \cdot \|\lambda'\|_\Lambda$ si $\lambda, \lambda' \in \Lambda$. On note alors $\mathscr{O}_\Lambda$ « l'anneau des entiers » de Λ : i.e. l'ensemble $\{\lambda \in \Lambda \mid \|\lambda\|_\Lambda \leqslant 1\}$; c'est une $\mathscr{O}_C$-algèbre sans p-torsion et $\Lambda = \mathscr{O}_\Lambda[1/p]$. L'ensemble $\mathfrak{m}_\Lambda$ des $\lambda \in \Lambda$ vérifiant $\|\lambda\|_\Lambda < 1$ est alors un idéal de $\mathscr{O}_\Lambda$ et on note $k_\Lambda = \mathscr{O}_\Lambda/\mathfrak{m}_\Lambda$ « l'anneau résiduel » de Λ ; c'est une k_C-algèbre et le résultat suivant est immédiat :

Proposition 2.1. — *La norme $\| \ \|_\Lambda$ est multiplicative* (i.e. $\|\lambda\cdot\lambda'\|_\Lambda = \|\lambda\|_\Lambda \cdot \|\lambda'\|_\Lambda$ quels que soient $\lambda, \lambda' \in \Lambda$) *si et seulement si k_Λ est intègre.*

Lemme 2.2. — *Si Λ est une C-algèbre normée et $s : \Lambda \to C$ est un morphisme de C-algèbres, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *s est continu,*

(ii) $|s(\lambda)| \leqslant \|\lambda\|_\Lambda$ *quel que soit $\lambda \in \Lambda$.*

Démonstration. — Si s est continue, il existe $\delta > 0$ tel que l'on ait $|s(\lambda)| \leqslant \delta\,\|\lambda\|_\Lambda$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. Maintenant, si $\|\lambda\|_\Lambda \leqslant 1$, alors $\|\lambda^n\|_\Lambda \leqslant 1$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$ et la suite de terme général $s(\lambda^n) = s(\lambda)^n$ est bornée dans C et donc $|s(\lambda)| \leqslant 1$, ce qui démontre l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) ; la réciproque étant immédiate, cela permet de conclure.

Si Λ est une C-algèbre normée, on note $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ l'ensemble des morphismes continus de C-algèbres de Λ sur C. On munit $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ de la topologie de la convergence simple : c'est la topologie la moins fine rendant continues les applications $s \to s(\lambda)$. Une base d'ouverts pour cette topologie est constituée des ouverts de la forme $U(n, \lambda, x, \varepsilon)$, où n décrit $\mathbf{N}$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ [resp. $x = (x_1, \dots, x_n)$, resp. $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$] décrit les parties à n éléments de Λ [resp. de C, resp. de $\mathbf{R}_+^*$] et

$$U(n, \lambda, x, \varepsilon) = \{s \in \mathrm{Spec}(\Lambda),\ |s(\lambda_i) - x_i| < \varepsilon_i \text{ pour tout } 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

L'application $(s, \lambda) \to s(\lambda)$ de $\mathrm{Spec}(\Lambda) \times \Lambda$ dans C est alors continue. Si $\psi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est un morphisme continu de C-algèbres normées, alors l'application $s \to s \circ \psi$ définit une application continue ${}^a\psi : \mathrm{Spec}(\Lambda_2) \to \mathrm{Spec}(\Lambda_1)$.

Lemme 2.3. — *Si $\psi : \Lambda_1 \longrightarrow \Lambda_2$ est une application surjective de C-algèbre de Banach spectrales, alors ${}^a\psi$ identifie* $\mathrm{Spec}(\Lambda_2)$ *à un fermé de* $\mathrm{Spec}(\Lambda_1)$.

Démonstration. — Comme ψ est surjective, l'égalité $s_1 \circ \psi = s_2 \circ \psi$ implique $s_1 = s_2$, ce qui montre que ${}^a\psi$ est une injection. D'autre part, s est dans l'image de ${}^a\psi$ si et seulement si on a $s(\lambda) = 0$ quel que soit $\lambda \in \Lambda_2$ vérifiant $\psi(\lambda) = 0$; ceci nous donne une description de l'image de ${}^a\psi$ comme intersection de fermés (la condition $s(\lambda) = 0$ est une condition fermée) et permet de conclure.

Une *C-algèbre de Banach* est une C-algèbre normée et complète. Si Λ est une C-algèbre normée, sa complétée $\widehat{\Lambda}$ est une C-algèbre de Banach.

Proposition 2.4. — *L'application naturelle* (de restriction) ${}^a\iota : \mathrm{Spec}(\widehat{\Lambda}) \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ *est un homéomorphisme.*

Démonstration. — Si $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, comme $|s(\lambda)| \leqslant \|\lambda\|_\Lambda$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$, on peut prolonger s par continuité (uniforme) à $\widehat{\Lambda}$, ce qui prouve que ${}^a\iota$ est surjective. D'autre part, comme Λ est dense dans $\widehat{\Lambda}$, si s_1 et s_2 sont deux éléments de $\mathrm{Spec}(\widehat{\Lambda})$ ayant même restriction à Λ, la continuité de s_1 et s_2 implique que l'on a $s_1 = s_2$ et donc ${}^a\iota$ est injective et induit une bijection de $\mathrm{Spec}(\widehat{\Lambda})$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ qui est continue par définition des topologies ($\Lambda \subset \widehat{\Lambda}$). Finalement, comme tout élément λ de $\widehat{\Lambda}$ est limite d'une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de Λ, l'application $s \to s(\lambda)$ est limite uniforme de la suite $(s \to s(\lambda_n))_{n\in\mathbf{N}}$ et donc est continue pour la topologie de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$; ceci permet de conclure.

Plus généralement, si Λ est une C-algèbre normée et Λ' est une C-algèbre normée contenant Λ, on note $\mathrm{Spec}_\Lambda(\Lambda')$ l'ensemble des morphismes continus de Λ' dans Λ dont la restriction à Λ est l'identité. On munit $\mathrm{Spec}_\Lambda(\Lambda')$ de la topologie de la convergence simple, ce qui en fait un espace topologique séparé.

2.4. Quelques exemples. — Si $d \geqslant 1$, on munit $C[X_1, \dots, X_d]$ de la norme de Gauss $\| \ \|_{\mathrm{G}}$ définie par

$$\| \sum_{i_1,\dots,i_d} a_{i_1,\dots,i_d} X_1^{i_1} \cdots X_d^{i_d} \|_{\mathrm{G}} = \sup_{i_1,\dots,i_d} |a_{i_1,\dots,i_d}|.$$

L'anneau des entiers de $C[X_1, \dots, X_d]$ est alors $\mathscr{O}_C[X_1, \dots, X_d]$ et son anneau résiduel est l'anneau $k_C[X_1, \dots, X_d]$ des polynômes à coefficients dans k_C ; comme ce dernier anneau est intègre, la norme de Gauss est multiplicative.

On note $C\{X_1, \dots, X_d\}$ la complétée de $C[X_1, \dots, X_d]$ pour la norme de Gauss ; c'est l'anneau des séries de la forme $\sum_{i_1,\dots,i_d} a_{i_1,\dots,i_d} X_1^{i_1} \cdots X_d^{i_d}$, où $a_{i_1,\dots,i_d}$ tend vers 0 si $i_1 + \cdots + i_d$ tend vers $+\infty$. L'anneau des entiers de $C\{X_1, \dots, X_d\}$ est noté indifféremment $\mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_d\}$ ou $\mathscr{O}_{C\{X_1,\dots,X_d\}}$.

Un élément de s de $\mathrm{Spec}(C\{X_1, \dots, X_d\}) = \mathrm{Spec}(C[X_1, \dots, X_d])$ est déterminé par les valeurs qu'il prend sur $X_1, \dots, X_d$ et la continuité de s équivaut à $|s(X_i)| \leqslant 1$ si $1 \leqslant i \leqslant d$. L'application $s \to (s(X_1), \dots, s(X_d))$ induit donc une bijection de $\mathrm{Spec}(C\{X_1, \dots, X_d\})$ sur $B_d(0,1)$; cette application est un homéomorphisme car, $C[X_1, \dots, X_d]$ étant engendré par $X_1, \dots, X_d$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $s \to s(f)$ est continu quel que soit $f \in C[X_1, \dots, X_d]$,

(ii) $s \to s(X_i)$ est continu quel que soit $1 \leqslant i \leqslant d$.

Soit Λ une C-algèbre de Banach. Soit $\Lambda\{X\}$ la Λ-algèbre des séries entières de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de Λ tendant vers 0 quand n tend vers $+\infty$; on munit $\Lambda\{X\}$ de la norme $\| \ \|_{\Lambda\{X\}}$ définie par $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n\right\|_{\Lambda\{X\}} = \sup_n \|a_n\|$, ce qui en fait une C-algèbre de Banach. L'anneau des entiers de $\Lambda\{X\}$ est noté indifféremment $\mathscr{O}_\Lambda\{X\}$ ou $\mathscr{O}_{\Lambda\{X\}}$.

Le même genre d'arguments que ci-dessus permet de montrer que l'application $s \to s(X)$ est un homéomorphisme de $\mathrm{Spec}_\Lambda(\Lambda\{X\})$ sur $\mathscr{O}_\Lambda$.

Soit $S(\Lambda\{X\})$ l'ensemble des morphismes continus ψ de $\Lambda\{X\}$ dans $C\{X\}$ vérifiant $\psi(X) = X$ et $\psi(\Lambda) = C$; l'application qui à ψ associe sa restriction à Λ est une bijection de $S(\Lambda\{X\})$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. Le résultat suivant est évident.

Proposition 2.5. — *Si $\lambda \in \Lambda\{X\}$, alors*

$$\sup_{\psi\in S(\Lambda\{X\})} \|\psi(\lambda)\|_{C\{X\}} = \|\lambda\|_{\Lambda\{X\}} = \sup_{\psi\in \mathrm{Spec}_\Lambda(\Lambda\{X\})} \|\psi(\lambda)\|_{\Lambda}\,.$$

2.5. Algèbres spectrales. — Une C-algèbre normée Λ est dite *spectrale* si elle est munie de la norme spectrale, c'est-à-dire si

$$\mathrm{Spec}(\Lambda) \neq \emptyset \text{ et } \|\lambda\|_\Lambda = \sup\nolimits_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)} |s(\lambda)|, \text{ si } \lambda \in \Lambda.$$

Si Λ est une C-algèbre spectrale, alors sa complétée $\widehat{\Lambda}$ est une C-algèbre de Banach spectrale.

Lemme 2.6. — (i) *Si Λ est spectrale, alors $\|\lambda^n\|_\Lambda = (\|\lambda\|_\Lambda)^n$ quels que soient $\lambda \in \Lambda$ et $n \in \mathbf{N}$.*

(ii) *Si Λ est spectrale et si $\|\ \|$ est une norme sur Λ équivalente à la norme spectrale $\|\ \|_\Lambda$ telle que l'on ait $\|\lambda^n\| = \|\lambda\|^n$ quels que soient $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda \in \Lambda$, alors $\|\ \| = \|\ \|_\Lambda$.*

(iii) *Si $\psi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est un morphisme continu de C-algèbres normées spectrales, alors ψ est* 1-*lipshitzien* (i.e. $\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda_2} \leqslant \|\lambda\|_{\Lambda_1}$ quel que soit $\lambda \in \Lambda_1$).

Démonstration. — Le (i) et le (iii) sont des évidences. D'autre part, Si Λ est une C-algèbre et si $\|\ \|_1$ et $\|\ \|_2$ sont deux normes de C-algèbres sur Λ qui sont équivalentes et vérifient $\|\lambda^n\|_i = \|\lambda\|_i^n$ quels que soient $i \in \{1, 2\}$, $n \in \mathbf{N}$ et $\lambda \in \Lambda$, alors il existe $c > 1$ tel que l'on ait $c^{-1}\|\lambda\|_1 \leqslant \|\lambda\|_2 \leqslant c\|\lambda\|_1$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$. Il suffit d'utiliser ces inégalités pour λ^n puis prendre la racine n-ième et faire tendre n vers $+\infty$ pour en déduire $\|\ \|_1 = \|\ \|_2$. Ceci permet de démontrer le (ii) et termine la démonstration du lemme.

La plupart des algèbres considérées dans cet article sont spectrales ; c'est en particulier le cas de $C\{X_1, \ldots, X_d\}$ comme le montre la proposition ci-dessous.

Proposition 2.7. — *L'algèbre $C\{X_1, \ldots, X_d\}$* (munie de la norme de Gauss) *est spectrale.*

Démonstration. — Il suffit de montrer que $C[X_1, \ldots, X_d]$ est spectrale et, pour ce faire, il suffit de prouver que si $P \in C[X_1, \ldots, X_d]$ est de norme 1, il existe $x \in B_d(0, 1)$ tel que l'on ait $|P(x)| = 1$. Si $\|P\|_{\mathrm{G}} = 1$, sa réduction $\overline{P}$ modulo $\mathfrak{m}_C$ est un élément non nul de $k_C[X_1, \ldots, X_d]$ et on peut trouver $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d) \in k_C^d$ tel que $\overline{P}(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d) \neq 0$; il suffit alors de prendre pour $x = (x_1, \ldots, x_d)$ n'importe quel élément de $B_d(0, 1)$ dont la réduction modulo $\mathfrak{m}_C$ est $(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_d)$.

Proposition 2.8. — *Si Λ est une C-algèbre de Banach spectrale, alors $\Lambda\{X\}$ munie de la norme $\|\ \|_{\Lambda\{X\}}$ est spectrale.*

Démonstration. — Un morphisme continu s de $\Lambda\{X\}$ dans C est équivalent à la donnée de sa restriction à Λ et d'un élément $x = s(X)$ de $B(0, 1)$. Le spectre de $\Lambda\{X\}$ est donc naturellement en bijection avec $\mathrm{Spec}(\Lambda) \times \mathscr{O}_C$ et la norme spectrale de $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n$ est donnée par

$$\sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)} \sup_{x\in B(0,1)} \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} s(a_n)x^n\Big| = \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)} \sup_{n\in\mathbf{N}} |s(a_n)| = \sup_{n\in\mathbf{N}} \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)} |s(a_n)| = \sup_{n\in N} \|a_n\|,$$

ce qui permet de conclure.

2.6. Propreté de certains morphismes. — Rappelons qu'une application continue $\varphi : X \to Y$ entre deux espaces topologiques est dite *propre* si l'image inverse $\varphi^{-1}(M)$ de tout compact M de Y est compacte.

Soient Λ une C-algèbre spectrale et $\Lambda' = \Lambda[X]/P$, où $P(X) = X^n + \lambda_{n-1}X^{n-1} + \cdots + \lambda_0$ est un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}_\Lambda$ et soit ${}^a\iota : \mathrm{Spec}(\Lambda') \to \mathrm{Spec}(\Lambda)$ l'application de restriction. Si $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, l'ensemble ${}^a\iota^{-1}(s)$ est en bijection avec les racines dans C du polynôme $P_s(Y) = Y^n + s(\lambda_{n-1})Y^{n-1} + \cdots + s(\lambda_0)$; en particulier ${}^a\iota^{-1}(s)$ est non vide et ${}^a\iota$ est *surjective*; de plus, ${}^a\iota^{-1}(s)$ contient au plus n éléments et l'hypothèse selon laquelle P est à coefficients dans $\mathscr{O}_\Lambda$ implique que P_s est à coefficients dans $\mathscr{O}_C$ et donc que les racines de P_s appartiennent à $\mathscr{O}_C$. Soit alors $s_0 \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ et soient $t_1, \ldots, t_r$ les éléments de ${}^a\iota^{-1}(s_0)$.

Lemme 2.9. — *Quels que soient $\delta_1, \ldots, \delta_r > 0$, il existe V voisinage de s_0 dans* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ *tel que l'on ait* ${}^a\iota^{-1}(V) \subset \cup_{i=1}^r U(t_i, X, \delta_i)$ (où $U(t, X, \delta) = \{s \in \mathrm{Spec}(\Lambda'),\ |s(X) - t(X)| < \delta$, si $t \in \mathrm{Spec}(\Lambda')$ et $\delta > 0)$.

Démonstration. — Soit $\delta = \min_i \delta_i$ et soit V l'ensemble des $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ tels que l'on ait $|s(\lambda_i) - s_0(\lambda_i)| \leqslant \delta^n$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$; c'est un voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$. Soient alors $s \in V$ et $t \in {}^a\iota^{-1}(s)$. Le polynôme $P_{s_0}(Y + t(X))$ a pour terme constant $P_{s_0}(t(X)) = P_{s_0}(t(X)) - P_s(t(X))$ qui est de norme $\leqslant \delta^n$ par construction de V (et parce que $|t(X)| \leqslant 1$) ; il a donc une racine de norme $\leqslant \delta$. Comme les racines de ce polynôme sont les $t_i(X) - t(X)$, cela permet de montrer que le voisinage V construit ci-dessus convient.

Lemme 2.10. — *L'application ${}^a\iota$ est fermée* (i.e. l'image d'un fermé est un fermé)

Démonstration. — Si $\Lambda_1 \in \{\Lambda, \Lambda'\}$, si $s_0 \in \mathrm{Spec}(\Lambda_1)$, si $\lambda \in \Lambda_1$ et si $\delta > 0$, soit $U(s_0, \lambda, \delta) = \{s \in \mathrm{Spec}(\Lambda_1) \mid |s(\lambda) - s_0(\lambda)| \leqslant \delta\}$; c'est un ouvert de $\mathrm{Spec}(\Lambda_1)$.

Comme Λ' est engendrée par Λ et X, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(i) quel que soit $\lambda \in \Lambda'$, l'application $s \to s(\lambda)$ est continue sur $\mathrm{Spec}(\Lambda')$;

(ii) quel que soit $\lambda \in \Lambda \cup \{X\}$, l'application $s \to s(\lambda)$ est continue sur $\mathrm{Spec}(\Lambda')$.

On en déduit le fait que les ${}^a\iota^{-1}(V) \cap U(s_0, X, \delta)$ forment une base d'ouverts pour la topologie de $\mathrm{Spec}(\Lambda')$ si V décrit les ouverts de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et si (s_0, δ) décrit $\mathrm{Spec}(\Lambda') \times \mathbf{R}_+^*$.

Soit M un fermé de $\mathrm{Spec}(\Lambda')$ et soit s_0 dans le complémentaire de ${}^a\iota(M)$. Soient $t_1, \ldots, t_r$ les éléments de ${}^a\iota^{-1}(s_0)$; ce sont des éléments du complémentaire de M et, M étant supposé fermé, si $1 \leqslant i \leqslant r$, il existe un voisinage V_i de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et $\delta_i > 0$ tel que le complémentaire de M contienne ${}^a\iota^{-1}(V_i) \cap U(t_i, X, \delta_i)$. D'après le lemme 2.9, il existe V_0 voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ tel que ${}^a\iota^{-1}(V_0) \subset \cup_{i=1}^r U(t_i, X, \delta_i)$. Mais alors $V = \cap_{i=0}^r V_i$ est un voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ inclus dans le complémentaire de ${}^a\iota(M)$ car on s'est débrouillé pour que ${}^a\iota^{-1}(V)$ soit inclus dans le complémentaire de M. Ceci permet de montrer que le complémentaire de ${}^a\iota(M)$ est ouvert dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et permet de conclure.

Corollaire 2.11. — *${}^a\iota$ est propre*

Démonstration. — Soit M un compact de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et soit $(Z_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de ${}^a\iota^{-1}(M)$ telle que l'on ait $\cap_{j \in J} Z_j \neq \emptyset$ pour toute sous-famille finie J de I. Soit $\mathscr{J}$ l'ensemble des sous-ensembles finis de I. Comme les fibres de ${}^a\iota$ sont des ensembles finis, on a ${}^a\iota(\cap_{i \in I} Z_i) = \cap_{J \in \mathscr{J}} {}^a\iota(\cap_{j \in J} Z_j)$ et comme M est compact et ${}^a\iota$ fermée d'après le lemme 2.10, l'hypothèse

$\cap_{j\in J} Z_j \neq \emptyset$ pour tout $J \in \mathscr{J}$ implique que l'on a $\cap_{J\in\mathscr{J}} {}^a\iota(\cap_{j\in J} Z_j) \neq \emptyset$ et donc que $\cap_{i\in I} Z_i \neq \emptyset$. Ceci permet de conclure.

Proposition 2.12. — *Soient $\Lambda \subset \Lambda'$ deux algèbres de Banach spectrales telles que Λ' soit entière sur Λ ; alors l'application naturelle* (de restriction) ${}^a\iota : \mathrm{Spec}(\Lambda') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Lambda)$ *est une application surjective et propre.*

Démonstration. — La combinaison du lemme 2.3 et du corollaire 2.11 permet de montrer que si Λ' est entière et monogène sur Λ (i.e. est quotient d'une algèbre du type $\Lambda[X]/P$, où P est unitaire), alors les conclusions de la proposition sont vérifiées (la surjectivité a été vérifiée en passant). Le cas général s'en déduit en remarquant qu'une algèbre Λ' entière sur Λ est une limite inductive d'algèbres monogènes et entières et donc que l'application ${}^a\iota : \mathrm{Spec}(\Lambda') \longrightarrow \mathrm{Spec}(\Lambda)$ est une limite projective d'applications surjectives et propres ce qui permet de conclure, car une limite projective de compacts est compacte d'après le théorème de Tikhonov.

2.7. Algèbres connexes. — On dit qu'une C-algèbre normée Λ est *connexe* si elle ne contient pas d'idempotent non trivial. Comme C est algébriquement clos, Λ est non connexe si et seulement si il existe $P \in C[X]$ séparable de degré $\geqslant 2$ ayant des racines dans $\Lambda - C$.

Si $d \geqslant 1$, l'algèbre $C\{X_1, \dots, X_d\}$ est connexe et $\Lambda\{X\}$ est connexe si et seulement si Λ est connexe.

Lemme 2.13. — *Soit M un compact de C contenant au moins deux éléments $x_0 \neq x_1$. Alors il existe une suite P_n d'éléments de $C[X]$ convergeant uniformément sur M vers une fonction* (continue) $f : M \to \{0, 1\}$ *vérifiant $f(x_0) = 1$ et $f(x_1) = 0$.*

Démonstration. — Soit $\delta \in]0, |x_0 - x_1|[$. Comme M est compact, on peut le recouvrir par une réunion finie disjointe (car la norme est ultramétrique) de boules fermées de rayon δ et il suffit de montrer le résultat pour un tel ensemble $M' = \coprod_{j\in J} B(x_j, \delta)$, où J est un ensemble fini contenant 0 et 1. Considérons le polynôme $P(X) = \prod_{j\in J-\{0\}} \frac{X - x_j}{x_0 - x_j}$. Soit $\eta = \inf_{i\neq j} |x_i - x_j|$. On a $\eta > \delta$ et $|P(x) - P(x_j)| \leqslant \frac{\delta}{\eta}$ si $x \in B(x_j, \delta)$. Comme $P(x_0) = 1$ et $P(x_j) = 0$ si $j \neq 0$, la suite de terme général P^{p^n} converge uniformément sur M' vers la fonction caractéristique de $B(x_0, \delta)$ et donc possède les propriétés voulues.

Proposition 2.14. — *Soit Λ une C-algèbre de Banach spectrale connexe, Λ' une C-algèbre normée, et S un sous-ensemble des morphismes continus de Λ dans Λ' vérifiant la condition* $(*)$ *suivante*

$$(*) \qquad \sup_{\psi\in S} \|\psi(\lambda)\|_{\Lambda'} = \|\lambda\|_{\Lambda} \quad \textit{quel que soit } \lambda \in \Lambda.$$

Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un élément λ de Λ :

(i) $\lambda \in C$,

(ii) *il existe un compact M de C tel que $\psi(\lambda) \in M$ quel que soit $\psi \in S$.*

Démonstration. — L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est immédiate ; montrons la réciproque. Soit donc $M \subset C$ compact et $\lambda \in \Lambda$ tel que $\psi(\lambda) \in M$ quel que soit $\psi \in S$. Nous allons montrer que si $\lambda \notin M$, alors Λ n'est pas connexe. Commençons par remarquer que, si $\lambda \notin M$, alors il existe ψ_0, $\psi_1 \in S$ tel que $\psi_0(\lambda) \neq \psi_1(\lambda)$ [sinon $\psi(\lambda - \psi_0(\lambda)) = 0$ quel que soit $\psi \in S$ et donc $\lambda - \psi_0(\lambda) = 0$ puisque

S vérifie la condition $(*)$]. D'après le lemme 2.13, il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $C[X]$, une suite $(\delta_n)_{n\in\mathbf{N}}$ de réels positifs tendant vers 0 et une fonction continue $f : M \to \{0,1\}$ vérifiant $f(\psi_0(\lambda)) = 1$ et $f(\psi_1(\lambda)) = 0$, tels que l'on ait $|f(x) - P_n(x)| \leqslant \delta_n$ quel que soit $x \in M$.

Comme S vérifie la condition $(*)$, on a $\|P_n(\lambda) - P_{n+m}(\lambda)\|_\Lambda \leqslant \sup(\delta_n, \delta_{n+m})$, ce qui prouve que la suite de terme général $P_n(\lambda)$ est de Cauchy dans Λ. Comme Λ est complète, cette suite converge vers une limite ℓ et on a $\psi(\ell) = f(\psi(\lambda))$ si $\psi \in S$ et comme f est à valeurs dans $\{0,1\}$ et S vérifie la condition $(*)$, cela implique que $\ell^2 = \ell$; comme d'autre part, $\psi_0(\ell) = f(\psi_0(\ell)) = 1$ et $\psi_1(\ell) = f(\psi_1(\ell)) = 0$, cela montre que ℓ est un idempotent de Λ distinct de 0 et 1 et donc que Λ n'est pas connexe. Ceci permet de conclure.

2.8. Algèbres p-closes. — Si Λ est une C-algèbre normée spectrale, soit $\mathscr{O}_\Lambda^{**} = \{\lambda \in \mathscr{O}_\Lambda^* \mid \|\lambda - 1\|_\Lambda < 1\}$; c'est un sous-groupe de $\mathscr{O}_\Lambda^*$. Si Λ est une C-algèbre de Banach (ou une limite inductive de C-algèbres de Banach) spectrale et $\|x-1\|_\Lambda < 1$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty}(1-x)^n$ converge dans Λ vers un élément de y vérifiant $\|y-1\|_\Lambda < 1$ et $xy = 1$; autrement dit, tout élément vérifiant $\|\lambda - 1\|_\Lambda < 1$ est inversible et $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ est l'ensemble des éléments de Λ vérifiant $\|x-1\|_\Lambda < 1$.

Une C-algèbre normée est dite *p-close* si tout élément de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ a une racine p-ième dans $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$. On peut réexprimer cette condition en introduisant le $\mathbf{F}_p$-espace vectoriel $G(\Lambda) = \mathscr{O}_\Lambda^{**}/(\mathscr{O}_\Lambda^{**})^p$: une C-algèbre normée est p-close si et seulement si $G(\Lambda) = 0$.

Lemme 2.15. — (i) *Si $\psi : \Lambda_1 \to \Lambda_2$ est un morphisme de C-algèbres normées spectrales, alors $\psi(\mathscr{O}_{\Lambda_1}^{**}) \subset \psi(\mathscr{O}_{\Lambda_2}^{**})$.*

(ii) *Si Λ est spectrale, alors Λ est p-close si et seulement si tout élément de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ a une racine p-ième dans Λ.*

(iii) *Si Λ est p-close, alors $x \to x^p$ induit une surjection de $\mathscr{O}_\Lambda/p\mathscr{O}_\Lambda$ sur $\mathscr{O}_\Lambda/p\mathscr{O}_\Lambda$.*

Démonstration. — Le (i) est une conséquence du (i) du lemme 2.6. Pour prouver le (ii), il suffit de prouver que si Λ est spectrale et $x \in \Lambda$ vérifie $x^p \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, alors $x \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, ce qui, étant donnée la définition de la norme spectrale, est une conséquence du fait que si $x \in C$ vérifie $|x^p - 1| < 1$, alors $|x-1| < 1$. Reste le (iii) à prouver. Soit $a \in \mathscr{O}_\Lambda$. Soit $\alpha \in C$ vérifiant $v_p(\alpha) = \frac{1}{2p}$ et soient $b \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ une racine p-ième de $1 + \alpha^p a \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et $x = \alpha^{-1}(b-1)$. Un calcul immédiat montre que l'on a $z = x^p - a \in p\alpha^{-p}\mathscr{O}_\Lambda = \sqrt{p}\mathscr{O}_\Lambda$. Mais alors $1 + z \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et, si c est une racine p-ième de $(1+z)$ dans $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$, on a $(c-1)^p - z \in p\mathscr{O}_\Lambda$ et donc $(x-c+1)^p - a \in p\mathscr{O}_\Lambda$, ce qui permet de conclure.

Proposition 2.16. — *Si Λ est une C-algèbre normée p-close et est une limite inductive de C-algèbres de Banach, alors sa complétée $\widehat{\Lambda}$ est p-close.*

Démonstration. — Comme Λ est une limite inductive d'algèbres de Banach, tout élément de Λ vérifiant $\|x-1\|_\Lambda < 1$ est inversible dans Λ et donc appartient à $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$. Soit maintenant $y \in \mathscr{O}_{\widehat{\Lambda}}$ vérifiant $\|y-1\|_{\widehat{\Lambda}} < 1$. Il existe $x \in \mathscr{O}_\Lambda$ vérifiant $\|x-y\|_{\widehat{\Lambda}} < p^{-2}$; en particulier, $\|x-1\|_\Lambda < 1$ et $x \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, ce qui implique, comme Λ est p-close, que x a une racine p-ième dans $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$. D'autre part, on a $\|x^{-1}y - 1\|_{\widehat{\Lambda}} < p^{-2}$; la série $\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{1/p}{n}(x^{-1}y-1)^n$ converge dans $\widehat{\Lambda}$ vers une racine p-ième de $x^{-1}y$. On en déduit le fait que $y = x \cdot x^{-1}y$ a une racine p-ième dans $\widehat{\Lambda}$, ce qui permet de conclure (cf. (ii) du lemme 2.15).

§ 3
Algèbres affinoïdes

Ce § est consacré à l'étude un peu détaillée de l'algèbre $\widehat{C\{X\}}$ des « limites uniformes de fonctions algébriques sur la boule unité ».

3.1. Rappels sur les algèbres affinoïdes. — Si $f \in \mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_d\}$, on note $\overline{f}$ son image dans $k_C[X_1, \dots, X_d]$. On dit que $f \in \mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_d\}$ est *régulier* en X_d de degré n si le degré de $\overline{f}$ en X_d est n et le coefficient de X_d^n dans $\overline{f}$ est un élément inversible de $k_C[X_1, \dots, X_{d-1}]$, c'est-à-dire une constante. Le résultat suivant est un des résultats de base concernant les algèbres « de Tate ».

Proposition 3.1. — *Si $f \in \mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_d\}$ est régulier de degré n en X_d, alors il existe $Q \in \mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_{d-1}\}[X_d]$ unitaire et de degré n* (en X_d) *et $g \in \mathscr{O}_C\{X_1, \dots, X_d\}$ inversible tels que l'on ait $f = Qg$. De plus, ces propriétés déterminent le couple (Q, g) de manière unique.*

Démonstration. — **[9]**, Chap. II (cf. démonstration de II.3.2).

Si $d = 1$, l'énoncé précédent devient

Proposition 3.2. — *Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \in \mathscr{O}_C\{X\}$ vérifiant $\|f\|_{\mathrm{G}} = 1$ et soit r le plus grand entier n tel que $|a_n| = 1$. Alors il existe un unique polynôme P unitaire de degré r tel que $P^{-1}f$ soit une unité de $\mathscr{O}_C\{X\}$.*

et admet comme corollaire

Corollaire 3.3. — *$C\{X\}$ est principal et tout idéal non nul de $C\{X\}$ est engendré par un* (unique) *polynôme unitaire à coefficients dans $\mathscr{O}_C$.*

3.2. Le corps $\overline{F}$ et la norme spectrale.— Dans cette section et les suivantes, on s'intéresse au cas $d = 1$. Soit F le corps des fractions de $C\{X\}$. La norme de Gauss étant multiplicative, elle s'étend en une norme sur F et on note $\widehat{F}$ la complétion de F pour $\| \; \|_{\mathrm{G}}$. Comme $\widehat{F}$ est complet, la norme $\| \; \|_{\mathrm{G}}$ s'étend de manière unique à la clôture algébrique $\overline{\widehat{F}}$ de $\widehat{F}$. Maintenant, si L est une extension finie de F et $x \in L$, on pose $\|x\|_{\mathrm{sp}} = \sup_{\sigma \in \mathrm{H}_L} \|\sigma(x)\|_{\mathrm{G}}$, où H_L est l'ensemble (fini) des plongements de L dans $\overline{\widehat{F}}$ dont la restriction à F coïncide avec l'injection naturelle de F dans $\widehat{F} \subset \overline{\widehat{F}}$. Cette quantité ne dépend évidemment pas du choix de l'extension L de F contenant x et donc $\| \; \|_{\mathrm{sp}}$ est une fonction bien définie sur la clôture algébrique $\overline{F}$ de F. D'autre part, les propriétés suivantes sont évidentes sur la définition de $\| \; \|_{\mathrm{sp}}$.

(i) $\|x\|_{\mathrm{sp}} = \|x\|_{\mathrm{G}}$ si $x \in F$
(ii) $\|x\|_{\mathrm{sp}} = 0$ si et seulement $x = 0$.
(iii) $\|x + y\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \sup(\|x\|_{\mathrm{sp}}, \|y\|_{\mathrm{sp}})$ si $x, y \in \overline{F}$.
(iv) $\|xy\|_{\mathrm{sp}} = \|x\|_{\mathrm{G}} \|y\|_{\mathrm{sp}}$ si $x \in F$ et $y \in \overline{F}$.
(v) $\|xy\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \|x\|_{\mathrm{sp}} \|y\|_{\mathrm{sp}}$ si $x, y \in \overline{F}$.
(vi) $\|x^n\|_{\mathrm{sp}} = \|x\|_{\mathrm{sp}}^n$ si $x \in \overline{F}$ et $n \in \mathbf{N}$.
(vii) $\|\sigma(x)\|_{\mathrm{sp}} = \|x\|_{\mathrm{sp}}$ si $\sigma \in \mathrm{Gal}(\overline{F}/F)$.
(viii) $\|x\|_{\mathrm{sp}} \in |C|$.

En particulier, $\| \|_{\rm sp}$ est une norme de F-algèbre. Le lien entre la norme des racines d'un polynôme et son polygone de Newton montre que, si $X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_0$ est le polynôme minimal de x sur F, alors

(ix) $\|x\|_{\rm sp} = \sup_{0\leqslant i\leqslant n-1} \sqrt[n-i]{\|a_i\|_{\rm G}}$.

3.3. Le groupe $\widetilde{\rm T}_C$ et l'espace topologique $\widehat{B(0,1)}$. — Notons $\widetilde{\rm H}_{C\{X\}}$ le groupe de Galois ${\rm Gal}(\overline{F}/F)$. Soit $\widetilde{\rm T}_C$ le sous-groupe des automorphismes τ de $\overline{F}$ dont la restriction à $C\{X\}$ est un automorphisme continu de $C\{X\}$ induit par une translation par un élément de $B(0,1)$; il existe donc $x(\tau) \in B(0,1)$ vérifiant $\tau(X) = X + x(\tau)$ et l'application $\tau \to x(\tau)$ est un morphisme de groupes de $\widetilde{\rm T}_C$ dans $B(0,1)$ qui donne naissance, d'après la théorie de Galois, à la suite exacte de groupes

$$0 \longrightarrow \widetilde{\rm H}_{C\{X\}} \longrightarrow \widetilde{\rm T}_C \longrightarrow B(0,1) \longrightarrow 0.$$

Soit $\overline{C\{X\}}$ la clôture intégrale de $C\{X\}$ dans $\overline{F}$. Soit $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ la complétée de $\overline{C\{X\}}$ pour la norme $\| \|_{\rm sp}$.

Comme $\widetilde{\rm T}_C$ respecte $C\{X\}$, il respecte aussi le sous-anneau $\overline{C\{X\}}$ de $\overline{F}$. D'autre part, si $\tau \in \widetilde{\rm T}_C$ et $f \in C\{X\}$, on a

$$\|\tau(f)\|_{\rm G} = \sup_{x\in B(0,1)} |f(x + x(\tau))| = \sup_{x\in B(0,1)} |f(x)| = \|f\|_{\rm G},$$

ce qui prouve que τ est une isométrie de $C\{X\}$ et donc de F à cause de la multiplicativité de $\| \|_{\rm G}$ et aussi de $\overline{F}$ grâce à la propriété ix) de $\| \|_{\rm sp}$. L'action de $\widetilde{\rm T}_C$ sur $\overline{C\{X\}}$ se prolonge donc par continuité en une action sur $\widehat{\overline{C\{X\}}}$. Si $\tau \in \widetilde{\rm T}_C$ et $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$, on note parfois f^τ l'élément $\tau(f)$ de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$.

Lemme 3.4. — *Si $s : \overline{C\{X\}} \to C$ est un morphisme de C-algèbres, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *s est continu,*

(ii) *la restriction de s à $C\{X\}$ est continue.*

Démonstration. — L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) est immédiate. Réciproquement, si $f \in \overline{C\{X\}}$ et $P(Y) = Y^n + a_{n-1}Y^{n-1} + \cdots + a_0$ est le polynôme minimal de f sur $C\{X\}$, alors $s(f)$ est une racine du polynôme $Y^n + s(a_{n-1})Y^{n-1} + \cdots + s(a_0)$ et donc $|s(f)| \leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant n-1} \sqrt[n-i]{|s(a_i)|}$. D'autre part, si la restriction de s à $C\{X\}$ est continue, on a $|s(a_i)| \leqslant \|a_i\|_{\rm G}$ d'après le lemme 2.2 et donc $|s(f)| \leqslant \|f\|_{\rm sp}$ d'après la propriété (ix) de la norme $\| \|_{\rm sp}$. Ceci permet de conclure.

Notons $\widehat{B(0,1)}$ l'espace topologique ${\rm Spec}(\overline{C\{X\}}) = {\rm Spec}(\widehat{\overline{C\{X\}}})$; d'après le lemme 3.4, c'est aussi l'ensemble des morphismes de $\overline{C\{X\}}$ dans C dont la restriction à $C\{X\}$ est continue.

Proposition 3.5. — *L'application naturelle de $\widehat{B(0,1)}$ dans $B(0,1) = {\rm Spec}(C\{X\})$ est surjective et propre.*

Démonstration. — C'est un cas particulier de la proposition 2.12.

Choisissons un élément s_C de $\widehat{B(0,1)}$ « au-dessus de 0 » (i.e. vérifiant $s_C(X) = 0$).

Lemme 3.6. — *Si $s \in \widehat{B(0,1)}$ vérifie $s(X) = 0$, alors il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ tel que l'on ait $s = s_C \circ \tau$.*

Démonstration. — Les noyaux $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}_0$ de s et s_C sont deux idéaux maximaux de $\overline{C\{X\}}$ au-dessus de l'idéal (X) de $C\{X\}$. D'autre part, $C\{X\}$ étant principal, $\overline{C\{X\}}$ est une limite inductive d'anneaux de Dedekind et la transitivité de l'action du groupe de Galois sur les idéaux montre qu'il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ tel que l'on ait $\tau(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_0$, ce qui implique $s = s_C \circ \tau$ et permet de conclure.

Si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ et $s \in \widehat{B(0,1)}$, alors $s \circ \tau \in \widehat{B(0,1)}$, ce qui nous fournit une action naturelle de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur $\widehat{B(0,1)}$.

Proposition 3.7. — *L'action de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur $\widehat{B(0,1)}$ définie ci-dessus est transitive.*

Démonstration. — Soit $s \in \widehat{B(0,1)}$ et soit $x = s(X) \in B(0,1)$. Il existe $\tau_1 \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que $x(\tau_1) = -x$ et alors $s \circ \tau_1(X) = 0$. Ceci implique, d'après le lemme 3.6, qu'il existe $\tau_2 \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \subset \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que l'on ait $s \circ \tau_1 = s_C \circ \tau_2$ et donc $s = s_C \circ \tau_2\tau_1^{-1}$, ce qui permet de conclure.

Remarque 3.8. — $\widehat{B(0,1)}$ s'identifie à $\widetilde{\mathrm{T}}_C/D_{\mathfrak{m}_0}$, où $D_{\mathfrak{m}_0} \subset \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ est le groupe de décomposition de $\mathfrak{m}_0$ groupe qui s'identifie au groupe de Galois absolu du corps des fractions $C((X))$ du complété $C[[X]]$ de $C\{X\}$ en l'idéal (X) ; C étant algébriquement clos, ce groupe est d'ailleurs isomorphe au groupe des racines de l'unité.

Si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ et $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$, notons $f(\tau)$ l'élément $s_C \circ \tau(f)$ de C.

Proposition 3.9. — *Si $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$, alors $f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}})$ est compact.*

Démonstration. — Si $f \in \overline{C\{X\}}$, l'application $\tau \to f^\tau$ est localement constante par définition de la topologie de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$. Comme un élément f de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est une limite uniforme d'éléments de $\overline{C\{X\}}$, l'application $\tau \to f^\tau$ est continue si $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$ comme limite uniforme d'applications continues ; il en est donc de même de l'application $\tau \to f(\tau) = s_C(f^\tau)$ ce qui, $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ étant compact, permet de conclure.

On définit le graphe Γ_f d'un élément f de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ comme l'ensemble des couples $(x(\tau), f(\tau))$ de $C \times C$, où τ décrit $\widetilde{\mathrm{T}}_C$. C'est en fait un sous-ensemble de $B(0,1) \times C$ (et même de $B(0,1) \times B(0, \|f\|_{\mathrm{sp}})$ d'après le lemme 3.11 ci-dessous).

Proposition 3.10. — *Soient $f \in \overline{C\{X\}}$ et $P = Y^n + \sum_{i=0}^{n-1} b_i Y^i \in C\{X\}[Y]$ son polynôme minimal. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un couple (x, y) de $B(0,1) \times C$:*

(i) *Il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que $x(\tau) = x$ et $f(\tau) = y$,*

(i′) *Il existe $s \in \widehat{B(0,1)}$ tel que $s(X) = x$ et $s(f) = y$,*

(ii) *$P(x, y) = 0$.*

(iii) *$(x, y) \in \Gamma_f$.*

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (i′) et de (i) et (iii) est une évidence. Pour démontrer l'implication (i)⇒(ii), il suffit d'appliquer $s_C \circ \tau$ à la relation $P(X, f) = 0$. Réciproquement, si $P(x, y) = 0$, le morphisme s de $C\{X\}[Y]$ dans C envoyant X sur x et Y sur y se factorise en un morphisme de $B' = C\{X\}[f]$ envoyant X sur x et f sur y. Comme $\overline{C\{X\}}$ est entier sur B', ce morphisme s'étend en un morphisme $\tilde{s} : \overline{C\{X\}} \to C$ et, la restriction de $\tilde{s}$ à $C\{X\}$ étant continue, on a $\tilde{s} \in \widehat{B(0,1)}$ d'après le lemme 3.4, ce qui permet de conclure.

Lemme 3.11. — *Si $f \in \overline{C\{X\}}$, alors $\|f\|_{\mathrm{sp}} = \sup_{\tau\in\widetilde{\mathrm{T}}_C} |f(\tau)| = \sup_{s\in\widehat{B(0,1)}} |s(f)|$.*

Démonstration. — D'après la proposition 3.10, si on fixe $x \in B(0,1)$, les valeurs que peut prendre $f(\tau)$, pour $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ vérifiant $x(\tau) = x$, sont les racines de l'équation $P(x,y) = 0$. D'après la théorie des polygones de Newton, les racines de cette équation sont toutes de module inférieur ou égal à $\sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt[i]{|b_{n-i}(x)|}$ et il y en a au moins une dont le module est égal à cette quantité. On a donc

$$\sup_{\tau\in\widetilde{\mathrm{T}}_C} |f(\tau)| = \sup_{x\in B(0,1)} \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt[i]{|b_{n-i}(x)|} = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \sqrt[i]{\|b_{n-i}\|_{\mathrm{G}}},$$

ce qui, compte tenu de la propriété (ix) de la norme $\|\ \|_{\mathrm{sp}}$, permet de conclure.

Corollaire 3.12. — *Les algèbres $\overline{C\{X\}}$ et $\widehat{\overline{C\{X\}}}$, munies de la norme $\|\ \|_{\mathrm{sp}}$, sont des algèbres spectrales.*

Comme nous l'avons vu plus haut, l'application $\tau \to s_C \circ \tau$ induit une application ${}^a s_C$: $\widetilde{\mathrm{T}}_C \to \widehat{B(0,1)}$ qui est surjective. On munit $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ de la topologie pour laquelle les ouverts sont les ensembles de la forme ${}^a s_C{}^{-1}(U)$, où U est un ouvert de $\widehat{B(0,1)}$. Ceci fait de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ un espace topologique *non séparé* : par construction, une suite τ_n converge dans $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ si et seulement si la suite $s_C \circ \tau_n$ converge dans $\widehat{B(0,1)}$.

Lemme 3.13. — *Si $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ telle que la suite de terme général $x(\tau_n)$ converge, alors la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence dans $\widetilde{\mathrm{T}}_C$.*

Démonstration. — C'est une conséquence de la définition de la topologie de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ et du fait que l'application naturelle de $\widehat{B(0,1)}$ sur $B(0,1)$ est une application propre (prop. 3.5).

3.4. L'image d'un élément de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$

Lemme 3.14. — *Soit $P(X,Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \cdots + a_0(X) \in \mathscr{O}_C\{X\}[Y]$, avec $a_i(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k}X^k$ vérifiant les conditions suivantes :*

a) $|a_{i,k}| < 1$ *si* $k \geqslant 1$ *et* $0 \leqslant i \leqslant n-1$,

b) $|a_{0,0}| < 1$ *et il existe* i *tel que* $|a_{i,0}| = 1$;

alors P n'est pas irréductible.

Démonstration. — Soit m le plus petit entier i tel que $|a_{i,0}| = 1$. On a donc par hypothèse $1 \leqslant m \leqslant n-1$. Modulo $\mathfrak{m}_{C\{X\}}[Y]$, on a $P = \overline{Q}\overline{R}$, où l'on a posé $\overline{Q}(Y) = Y^m$ et $\overline{R}(Y) = Y^{n-m} + \sum_{j=0}^{n-m-1} \overline{a}_{j+m,0}Y^j$ et $\overline{a}_{j+m,0}$ désigne la réduction de $a_{j+m,0}$ modulo $\mathfrak{m}_C$. Les polynômes $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ étant premiers entre eux, on est dans les conditions d'application du lemme de Hensel et, $\mathscr{O}_C\{X\}$ étant complet, il existe des polynômes Q et R (uniques) appartenant à $\mathscr{O}_C\{X\}[Y]$ dont les réductions respectives sont $\overline{Q}$ et $\overline{R}$ et dont le produit est P ; ceci permet de conclure.

Lemme 3.15. — *Si $f \in \overline{C\{X\}}$ vérifie $f(0) = 0$, alors il existe m strictement inférieur au degré de f sur $C\{X\}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in B(0, \|f\|_{\rm sp})$ tels que, si $y \in B(0, \|f\|_{\rm sp}) - \cup_{i=1}^m B(\alpha_i, \|f\|_{\rm sp}^-)$, alors il existe $\tau \in \widetilde{\rm T}_C$ tel que $f(\tau) = y$.*

Démonstration. — Le cas $f = 0$ étant sans intérêt, on suppose $f \neq 0$ et, quitte à diviser f par un élément de C, on peut supposer $\|f\|_{\rm sp} = 1$; en particulier, f est alors entier sur $\mathscr{O}_C\{X\}$. Soit $P(X,Y) = Y^n + a_{n-1}(X)Y^{n-1} + \cdots + a_0(X) \in \mathscr{O}_C\{X\}[Y]$, avec $a_i(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{i,k}X^k$, le polynôme minimal de f sur $\mathscr{O}_C\{X\}$. Comme $f(0) = 0$, le polynôme $P(0,y)$ admet 0 comme racine et donc $a_{0,0} = 0$. D'autre part, l'hypothèse $\|f\|_{\rm sp} = 1$ se traduit par l'existence d'un couple (i,k) tel que $|a_{i,k}| = 1$ et l'irréductibilité de P entraine alors, d'après le lemme 3.14, qu'il existe $k_0 \geqslant 1$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que $|a_{i,k_0}| = 1$. Maintenant, si $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ sont les solutions dans $B(0,1)$ de l'équation $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k}Y^i = 0$ et $y \in B(0,1) - \cup_{j=1}^m B(\alpha_j, 1^-)$, alors $|\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k_0}y^i| = 1 \geqslant |y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,0}y^i|$ et la théorie des polygones de Newton nous donne l'existence de $x \in B(0,1)$ solution de l'équation $\sum_{k=1}^{+\infty} X^k(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i,k}y^i) + (y^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i,0}y^i)$. D'après la proposition 3.10, il existe alors $\tau \in \widetilde{\rm T}_C$ tel que $x(\tau) = x$ et $f(\tau) = y$, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 3.16. — (i) *Si $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$ vérifie $f(0) = 0$ et est tel qu'il existe $\rho \geqslant 0$ et S compact tels que $f(\tau) \in S + B(0,\rho)$ si $\tau \in \widetilde{\rm T}_C$, alors $\|f\|_{\rm sp} \leqslant \rho$.*

(ii) *Si $f \in \widehat{\overline{C\{X\}}}$ est à valeurs dans un compact, alors $f \in C$.*

Démonstration. — Si $f = 0$, il n'y a rien à faire, sinon, on a $\|f\|_{\rm sp} > 0$ et on peut trouver $g_0 \in \overline{C\{X\}}$ vérifiant $\|f - g_0\|_{\rm sp} < \|f\|_{\rm sp}$. Posons $g = g_0 - g(0)$ de telle sorte que $g(0) = 0$, $\|f - g\|_{\rm sp} < \|f\|_{\rm sp}$ et $\|g\|_{\rm sp} = \|f\|_{\rm sp}$. Comme $\|f - g\|_{\rm sp} < \|f\|_{\rm sp}$, on a $f(\tau) = g(\tau)$ modulo $B(0, \|f\|_{\rm sp}^-)$ et le lemme 3.15 implique que l'image de f modulo $B(0, \|f\|_{\rm sp}^-)$ est infinie. Or, si S est compact, $S + B(0,\rho)$ est une réunion finie de translatés de $B(0,\rho)$ et, si $\rho < \|f\|_{\rm sp}$, l'image de $S + B(0,\rho)$ dans $B(0, \|f\|_{\rm sp})/B(0, \|f\|_{\rm sp}^-)$ est un ensemble fini. On en déduit le (i).

Le (ii) est une conséquence immédiate du (i) appliqué à $f - f(0)$ et $\rho = 0$.

§ 4
Autour du théorème d'Ax-Sen-Tate

Le n° 1 de ce §, reproduit la démonstration d'Ax [**1**] du « théorème d'Ax-Sen-Tate » et le n° 2 est une variation sur la non existence p-adique de $2i\pi$ (théorème de Tate [**10**]). Une des raisons pour reproduire ces résultats est que nous aurons besoin de variantes de ceux-ci dans la suite du texte.

4.1. Le théorème d'Ax-Sen-Tate. — Soit L un corps complet pour une norme p-adique (normalisée comme d'habitude par $|p| = p^{-1}$). La norme sur L s'étend de manière unique à la clôture algébrique $\overline{L}$ de L et on note $\widehat{\overline{L}}$ le complété de $\overline{L}$. Si M est une extension algébrique de L, soit $\mathscr{G}_M = {\rm Gal}(\overline{L}/M)$. Si $\alpha \in \overline{L}$, on pose $\Delta_M(\alpha) = \sup_{\sigma \in \mathscr{G}_M} |\sigma(\alpha) - \alpha|$. La proposition suivante exprime le fait que si un élément de $\overline{L}$ est presque fixe par $\mathscr{G}_M$, alors il n'est pas très loin d'un élément de M. Si $i \in \mathbf{N}$, soit $c_{p,i} = p^{\frac{1}{p^{i+1}-p^i}}$ et soit $c_p = \prod_{i=0}^{+\infty} c_{p,i} = p^{\frac{p}{(p-1)^2}}$.

***Proposition 4.1* (Ax [1]).** — (i) *Si $[M(\alpha):M]=n$ et $\ell(n)$ est le plus grand entier ℓ tel que $p^\ell\leqslant n$, il existe $a\in M$ vérifiant $|a-\alpha|\leqslant\big(\prod_{i=1}^{\ell(n)}c_{p,i-1}\big)\Delta_M(\alpha)$.*

(ii) *Si $\alpha\in\overline{L}$, il existe $\beta\in M$ vérifiant $|\beta-\alpha|\leqslant c_p\Delta_M(\alpha)$*

***Corollaire 4.2* (Théorème d'Ax-Sen-Tate).** — *Si H est un sous-groupe fermé de $\mathscr{G}_F$, alors $\widehat{\overline{L}}^H$ est l'adhérence de $\overline{L}^H$.*

Démonstration. — Le corollaire suit facilement du (ii) de la proposition qui, lui-même, est une conséquence immédiate du (i) dont la démonstration repose sur le lemme suivant.

Lemme 4.3. — *Soit $P\in\overline{L}[X]$ unitaire de degré n dont toutes les racines vérifient $|\alpha|\leqslant\delta$*

(i) *Si $n=p^kd$ avec $(d,p)=1$ et $d>0$ et si $q=p^k$, alors le polynôme $P^{(q)}$, dérivée q-ième de P, a au moins une racine β vérifiant $|\beta|\leqslant\delta$.*

(ii) *Si $n=p^{k+1}$ et $q=p^k$, alors $P^{(q)}$ a au moins une racine β vérifiant $|\beta|\leqslant c_{p,k}\delta$.*

Démonstration. — On a $P(X)=X^n+a_{n-1}X^{n-1}+\cdots+a_0$, avec $|a_{n-i}|\leqslant\delta^i$ et $\frac{1}{q!}P^{(q)}(X)=\sum_{i=0}^{n-q}\binom{n-i}{i}a_{n-i}X^{n-i-q}$. En particulier, le produit des racines de $P^{(q)}$ est au signe près $\frac{a_{n-q}}{\binom{n}{q}}$. La norme de ce produit est donc inférieure ou égale à $|\binom{n}{q}|^{-1}\delta^{n-q}$ et il existe β vérifiant $|\beta|\leqslant|\binom{n}{q}|^{-\frac{1}{n-q}}\delta$. D'autre part, on a $\binom{n}{q}=\frac{n}{q}\prod_{i=1}^{q-1}\frac{n-i}{i}$ et comme $q=p^k$ et $v_p(n)\geqslant k$, on a $|\frac{n-i}{i}|=1$ si $1\leqslant i\leqslant q-1$ et donc $|\binom{n}{q}|=|\frac{n}{q}|$. On en déduit le résultat.

Nous allons utiliser le lemme précédent pour démontrer le (i) de la proposition 4.1 par récurrence sur n, le cas $n=1$ étant évident. Il y a deux cas. Si n n'est pas une puissance de p, d'après le lemme précédent appliqué à $P=Q(X+\alpha)$, où Q est le polynôme minimal de α sur M, il existe $q\in\mathbf{N}$ tel que le polynôme $Q^{(q)}$ ait une racine β vérifiant $|\beta-\alpha|\leqslant\Delta_M(\alpha)$. D'autre part, si $\sigma\in H$, alors

$$\begin{aligned}|\sigma(\beta)-\beta|=&|\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)+\sigma(\alpha)-\alpha+\alpha-\beta|\\ \leqslant&\sup(|\sigma(\beta-\alpha)|,|\sigma(\alpha)-\alpha|,|\beta-\alpha|),\end{aligned}$$

et comme $|\sigma(\beta-\alpha)|=|\beta-\alpha|\leqslant\Delta_M(\alpha)$ et $|\sigma(\alpha)-\alpha|\leqslant\Delta_M(\alpha)$ par définition, on en tire l'inégalité $\Delta_M(\beta)\leqslant\Delta_M(\alpha)$ et comme $[M(\beta):M]<n$, cela permet de conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Si $n=p^{k+1}$ est une puissance de p, on peut trouver une racine β de $Q^{(p^k)}$ vérifiant $|\beta-\alpha|\leqslant c_{p,k}\Delta_M(\alpha)$ et on obtient par le même raisonnement l'existence de $\beta\in\overline{L}$ vérifiant $\Delta_M(\beta)\leqslant c_{p,k}\Delta_M(\alpha)$ et $[M(\beta):M]<n=p^{k+1}$. On tire de l'hypothèse de récurrence l'existence de $a\in M$ vérifiant $|\beta-a|\leqslant\big(\prod_{i=1}^{k}c_{p,i-1}\big)\Delta_M(\beta)\leqslant\big(\prod_{i=1}^{k+1}c_{p,i-1}\big)\Delta_M(\alpha)$ et comme $|\alpha-\beta|\leqslant\big(\prod_{i=1}^{k+1}c_{p,i-1}\big)\Delta_M(\alpha)$, cela permet de conclure.

4.2. $\log 2i\pi$. — Dans ce n° , on suppose de plus que L est le corps des fractions de l'anneau des vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique p. Si M est une extension finie de L, on note $\mathscr{O}_M$ l'anneau de ses entiers.

Si $i\in p^{-n}\mathbf{Z}$, soit $\varepsilon(i)=\varepsilon_n^{p^ni}$; alors $\varepsilon(i)$ ne dépend que de l'image de i modulo $\mathbf{Z}$ et pas du choix de n ; on obtient ainsi un morphisme de groupes de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p=p^{-\infty}\mathbf{Z}/\mathbf{Z}$ dans μ_{p^∞}. Si $g\in\mathscr{G}_L$, on a $g(\varepsilon(i))=\varepsilon(\chi(g)i)$, où $\chi:\mathscr{G}_L\to\mathbf{Z}_p^*$ est le caractère cyclotomique.

Choisissons un système compatible $1 = \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots$ de racines de l'unité avec $\varepsilon_1 \neq 1$ et $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ si $n \in \mathbf{N}$. Soient $L_n = L(\varepsilon_n)$ si $n \in \mathbf{N}$ et $L_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} L_n$, et soit $\widehat{L}_\infty$ l'adhérence de L_∞ dans $\widehat{\overline{L}}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $I_n = p^{-n}\mathbf{Z} \cap [0, \frac{p-1}{p}[= \{0, \frac{1}{p^n}, \dots, \frac{(p-1)p^{n-1}-1}{p^n}\}$ et soit $I = \cup_{n\in\mathbf{N}} I_n = p^{-\infty}\mathbf{Z} \cap [0, \frac{p-1}{p}[$.

Lemme 4.4. — *Tout élément x de L_n s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I_n} a_i(x)\varepsilon(i)$, où $a_i(x) \in L$ et, de plus, on a*

$$p^{-1} \sup_{i\in I_n} |a_i(x)| \leqslant |x| \leqslant \sup_{i\in I_n} |a_i(x)|.$$

Démonstration. — L'extension L_n/L est totalement ramifiée de degré $(p-1)p^{n-1}$ et $\varepsilon_n - 1$ en est une uniformisante, ceci implique que $\mathscr{O}_{L_n} = \mathscr{O}_L[\varepsilon_n - 1] = \mathscr{O}_L[\varepsilon_n]$ et donc que tout élément de $\mathscr{O}_{L_n} - p\mathscr{O}_{L_n}$ peut s'écrire sous la forme $x = \sum_{k=0}^{(p-1)p^{n-1}-1} a_k \varepsilon_n^k$, où les a_k, $0 \leqslant k \leqslant (p-1)p^{n-1} - 1$ sont des éléments de $\mathscr{O}_L$ n'appartenant pas tous à $p\mathscr{O}_L$; on en déduit le résultat.

Corollaire 4.5. — *Tout élément x de $\widehat{L}_\infty$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} a_i(x)\varepsilon(i)$, où $a_i(x) \in L$ et, de plus, on a*

$$p^{-1} \sup_{i\in I} |a_i(x)| \leqslant |x| \leqslant \sup_{i\in I} |a_i(x)|.$$

En particulier, $x \to a_0(x)$ est une forme linéaire continue sur $\widehat{L}_\infty$.

Lemme 4.6. — (i) *Si $i \in p^{-\infty}\mathbf{Z} - p^{-1}\mathbf{Z}$, alors $a_0(\varepsilon(i)) = 0$.*

(ii) *Si $i \in I - \{0\}$ et $g \in \mathscr{G}_L$ vérifie $\chi(g) \in 1 + p\mathbf{Z}_p$, alors $a_0(g(\varepsilon(i))) = 0$.*

Démonstration. — Si $i \in p^{-\infty}\mathbf{Z} - p^{-1}\mathbf{Z}$, il y a deux cas : soit le représentant j dans $[0, 1[$ de i modulo $\mathbf{Z}$ appartient à I et le résultat est évident, soit $j \in [\frac{p-1}{p}, 1[$ et il suffit d'utiliser la formule $\sum_{a=0}^{p-1} \varepsilon(i - \frac{a}{p}) = 0$, pour démontrer le (i).

Passons au (ii). On a $g(\varepsilon(i)) = \varepsilon(\chi(g)i)$ et il y a deux cas : soit $i \in p^{-1}\mathbf{Z}$ et l'hypothèse $\chi(g) \in 1 + p\mathbf{Z}_p$ entraîne que l'on a $g(\varepsilon(i)) = \varepsilon(i)$ et donc $a_0(g(\varepsilon(i))) = a_0(\varepsilon(i)) = 0$, soit $i \notin p^{-1}\mathbf{Z}$ et alors $\chi(g)i \notin p^{-1}\mathbf{Z}$ et le (i) permet de conclure.

Corollaire 4.7. — *Si $g \in \mathscr{G}_L$ vérifie $\chi(g) \in 1 + p\mathbf{Z}_p$ et si $x \in \widehat{L}_\infty$, alors $a_0(g(x)) = a_0(x)$.*

Proposition 4.8. — *Le corps $\widehat{\overline{L}}$ ne contient pas d'analogue p-adique de $\log 2i\pi$: si M est une extension finie de L, il n'existe pas d'élément x de $\widehat{\overline{L}}$ tel que l'on ait $g(x) = x + \log(\chi(g))$ quel que soit $g \in \mathscr{G}_M$.*

Démonstration. — Commençons par regarder le cas $M = L$. Comme L_∞ est le corps fixé par le noyau de $\log \chi$, le théorème d'Ax-Sen-Tate montre qu'un élément x de $\widehat{\overline{L}}$, vérifiant $g(x) = x + \log(\chi(g))$ quel que soit $g \in \mathscr{G}_M$, appartient à $\widehat{L}_\infty$. Mais alors, on devrait avoir $a_0(g(x)) = a_0(x) + \log(\chi(g))$, ce qui est en contradiction avec le corollaire 4.7.

Dans le cas général, on peut, quitte à faire une extension de M, supposer que M est une extension galoisienne de L. Soient alors $h_1, \dots, h_r$ des représentants dans $\mathscr{G}_L$ de $\mathscr{G}_L/\mathscr{G}_M$. Un petit calcul montre que, si $x \in \widehat{\overline{L}}$ vérifie $g(x) = x + \log(\chi(g))$ quel que soit $g \in \mathscr{G}_M$, alors

$y = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^r h_i(x)\ g(x) = x + \log(\chi(g))$ quel que soit $g \in \mathscr{G}_L$, ce qui permet d'utiliser le cas $M = L$ pour conclure.

4.3. Une application. — Nous allons utiliser les résultats du n° 1 dans le cas $L = \widehat{F}$ pour approximer des éléments de $\overline{F}$. Soient M une extension finie de F et $\mathscr{G}_M = \mathrm{Gal}(\overline{F}/M)$. Si $\alpha \in \overline{F}$, on pose $\Delta_M(\alpha) = \sup_{\sigma\in\mathscr{G}_M} \|\sigma(\alpha) - \alpha\|_{\mathrm{sp}}$.

Proposition 4.9. — *Si $\alpha \in \overline{F}$, il existe $\beta \in M$ vérifiant $\|\beta - \alpha\|_{\mathrm{sp}} \leqslant c_p\Delta_M(\alpha)$*

Démonstration. — Si M est une extension finie de F, on note H_M l'ensemble des plongements de M dans $\overline{\widehat{F}}$ au-dessus de F. On dit que deux éléments σ, τ de H_M sont équivalent s'il existe $g \in \mathscr{G}_{\widehat{F}}$ tel que l'on ait $\tau = g\circ\sigma$. Cette relation d'équivalence est notée $\sim$ et $\sigma \sim \tau$ si et seulement si σ et τ induisent la même norme sur M, c'est-à-dire si et seulement si on a $\|\sigma(x)\|_{\mathrm{G}} = \|\tau(x)\|_{\mathrm{G}}$ quel que soit $x \in M$. L'ensemble S_M des normes sur M induisant $\|\ \|_{\mathrm{G}}$ sur F est alors l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation $\sim$.

Soit N une extension finie galoisienne de F contenant M et α. Soit $\sigma \in \mathrm{H}_M$ et soient $\widehat{M}_\sigma$ et $\widehat{N}_\sigma$ les adhérence respectives de M et N dans $\overline{\widehat{F}}$. Ceci fait de $\widehat{M}_\sigma$ et $\widehat{N}_\sigma$ des extensions finies de $\widehat{F}$. D'autre part $\widehat{N}_\sigma$ est une extension galoisienne de $\widehat{F}$ et $\mathrm{Gal}(\widehat{N}_\sigma/\widehat{F})$ s'identifie au sous-groupe des éléments g de $\mathrm{Gal}(N/F)$ tels que l'on ait $\sigma\circ g \sim \sigma$ et $\mathrm{Gal}(\widehat{N}_\sigma/\widehat{M}_\sigma) = \mathrm{Gal}(\widehat{N}_\sigma/\widehat{F}) \cap \mathrm{Gal}(N/M)$. D'après la proposition 4.1 et la densité de M dans $\widehat{M}_\sigma$, il existe $\beta_\sigma \in M$ tel que l'on ait $\|\sigma(\beta_\sigma) - \sigma(\alpha)\|_{\mathrm{G}} \leqslant c_p\Delta_{\widehat{M}_\sigma}(\sigma(\alpha)) \leqslant c_p\Delta_M(\alpha)$.

D'autre part, si σ et τ induisent la même norme sur M, il existe $g \in \mathscr{G}_{\widehat{F}}$ tel que l'on ait $\tau(x) = g\circ\sigma(x)$ quel que soit $x \in M$. Ceci nous donne

$$\begin{aligned}\|\tau(\beta_\sigma) - \tau(\alpha)\|_{\mathrm{G}} &= \|g(\sigma(\beta_\sigma) - \sigma(\alpha)) + g\circ\sigma(\alpha) - \tau(\alpha)\|_{\mathrm{G}}\\ &\leqslant \sup(\|\sigma(\beta_\sigma) - \sigma(\alpha)\|_{\mathrm{G}}, \|g\circ\sigma(\alpha) - \tau(\alpha)\|_{\mathrm{G}})\\ &\leqslant \sup(c_p\Delta_M(\alpha), \Delta_M(\alpha)) \leqslant c_p\Delta_M(\alpha).\end{aligned}$$

On peut donc prendre $\beta_\tau = \beta_\sigma$ si τ et σ ont même image dans S_M.

Finalement, le théorème d'indépendance des normes implique que M est dense dans le produit de ses complétés en les éléments de S_M et donc qu'il existe $\beta \in M$ vérifiant $\|\sigma(\beta) - \sigma(\beta_\sigma)\|_{\mathrm{G}} \leqslant c_p\Delta_M(\alpha)$ quel que soit $\sigma \in S_M$ et donc aussi quel que soit $\sigma \in \mathrm{H}_N$. On a alors

$$\begin{aligned}\|\beta - \alpha\|_{\mathrm{sp}} &= \sup_{\sigma\in\mathrm{H}_M} \|\sigma(\beta) - \sigma(\alpha)\|_{\mathrm{G}}\\ &\leqslant \sup_{\sigma\in\mathrm{H}_M} \sup(\|\sigma(\beta) - \sigma(\beta_\sigma)\|_{\mathrm{G}}, \|\sigma(\beta_\sigma) - \sigma(\alpha)\|_{\mathrm{G}}) \leqslant c_p\Delta_M(\alpha),\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure.

§ 5
Les algèbres sympathiques

Une algèbre *sympathique* est une C-algèbre de Banach spectrale, connexe et p-close. Le but de ce § est de montrer que toute C-algèbre de Banach spectrale et connexe possède une « clôture sympathique » jouant un peu le rôle de la clôture algébrique pour un corps (ce n'est pas très sorcier ; il suffit de rajouter suffisamment de racines p-ièmes et de compléter). On démontre ensuite un certain nombre de résultats techniques sur la clôture sympathique de $\Lambda\{X\}$ si Λ est une algèbre sympathique ; ces résultats seront utilisés abondamment dans le § sur les Espaces Vectoriels de dimension finie.

5.1. Exemples. — C est une algèbre sympathique et nous verrons plus loin que toute C-algèbre de Banach spectrale et connexe se plonge naturellement dans une algèbre sympathique.

Proposition 5.1. — *$\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est une algèbre sympathique.*

Démonstration. — $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est spectrale d'après le corollaire 3.12. D'autre part, $\overline{C\{X\}}$ est p-close par construction et est une limite inductive d'algèbres de Banach ; sa complétion $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est donc p-close d'après la proposition 2.16. Finalement, si f est un idempotent de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$, alors f vue comme fonction sur $\widehat{B(0,1)}$ est à valeur dans l'ensemble (compact car fini) $\{0,1\}$ est donc est constante d'après le corollaire 3.16, ce qui, comme $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est spectrale, prouve que $f\in\{0,1\}$ et permet de conclure.

5.2. Extensions élémentaires. — Si Λ est une C-algèbre spectrale, on dit qu'une extension algébrique Λ' de Λ est *élémentaire* s'il existe $x\in\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ n'ayant pas de racine p-ième dans Λ tel que $\Lambda'=\Lambda[X]/(X^p-x)$. Comme un élément de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ est inversible dans Λ, une extension élémentaire de Λ est étale. Si $\varepsilon\in\mu_p$, on note σ_ε l'élément de $\mathrm{Aut}(\Lambda'/\Lambda)$ défini par $\sigma_\varepsilon(X)=\varepsilon X$.

Proposition 5.2. — *Si Λ est intègre et intégralement close dans son corps des fractions L, alors Λ' est intègre et intégralement close dans son corps des fractions L'.*

Démonstration. — Par hypothèse, x n'est pas une puissance p-ième dans Λ et donc pas non plus dans L puisque Λ est supposée intégralement close dans L ; ceci implique que $L[X]/(X^p-x)$ est intègre et donc que Λ' est intègre de corps des fractions $L'=L[X]/(X^p-x)$; de plus, L' est une extension galoisienne de L dont le groupe de Galois est constitué des σ_ε, où ε décrit μ_p. Maintenant, soit $\mu\in L'$. On peut écrire μ de manière unique sous la forme $\lambda'=\lambda_0+\lambda_1X+\cdots+\lambda_{p-1}X^{p-1}$, où $\lambda_0,\dots,\lambda_{p-1}$ sont des éléments de L. Si λ' est entier sur Λ, il en est de même de $\sigma_\varepsilon(\lambda')$ pour tout $\varepsilon\in\mu_p$ et donc aussi de même, si $0\leqslant i\leqslant p-1$, de $\big(\sum_\varepsilon\varepsilon^{-i}\sigma_\varepsilon(\lambda')\big)^p=p^px^i\lambda_i^p$, ce qui implique que λ_i^p est entier sur Λ et donc que $\lambda_i\in\Lambda$ puisque Λ est intégralement close dans L. Ceci permet de conclure.

Proposition 5.3. — *Si Λ est connexe, alors Λ' est connexe.*

Démonstration. — Soit e un élément non nul de Λ' vérifiant $e^2=e$ et, si $\varepsilon\in\mu_p$, soit $e_\varepsilon=\sigma_\varepsilon(e)$. Il s'agit de montrer que l'on a $e=1$. Soit I une partie de μ_p maximale parmi les parties telles que $f_I=\prod_{\varepsilon\in I}e_\varepsilon\neq 0$. Il y a deux cas : soit $I=\mu_p$, soit I est strictement inclus dans μ_p.

Dans le premier cas, f_I est un élément non nul de Λ vérifiant $f_I^2=f_I$ et donc $f_I=1$ car Λ est connexe ; on en déduit le fait que e est inversible puis que $e=1$.

Dans le second cas, posons $f_\varepsilon=\sigma_\varepsilon(f_I)$ si $\varepsilon\in\mu_p$. Par construction, les f_ε sont des éléments de Λ' vérifiant $f_\varepsilon^2=f_\varepsilon$ et $f_\varepsilon f_{\varepsilon'}=0$ si $\varepsilon\neq\varepsilon'$. Écrivons f_I sous la forme $f_I=\sum_{i=0}^{p-1}a_iX^i$ avec $a_i\in\Lambda$

si $0 \leqslant i \leqslant p-1$. On a alors d'une part $\sum_\varepsilon \varepsilon^{-i} f_\varepsilon = pa_i X^i$ et d'autre part

$$\Big(\sum_\varepsilon \varepsilon^{-i} f_\varepsilon\Big)^p = \sum_\varepsilon f_\varepsilon = pa_0$$

et donc $pa_0 = p^p a_i^p x^i$. Comme $pa_0 = \sum_\varepsilon f_\varepsilon$ est un idempotent de Λ, on a soit $a_0 = 0$, ce qui implique $(pa_i)^p = 0$ et donc $a_i = 0$ pour tout i car une algèbre spectrale est réduite, et conduit à une contradiction, soit $pa_0 = 1$, d'où l'on tire $p^p a_i^p x^i = 1$, ce qui implique que x est inversible dans Λ (ce que l'on avait effectivement supposé) et est une puissance p-ième (ce que l'on avait interdit). En conclusion, le second cas est impossible et donc $e = 1$, ce qui permet de conclure.

Soient Λ une C-algèbre spectrale et $\Lambda' = \Lambda[X]/(X^p - x)$ une extension élémentaire de Λ. Si $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{p-1} X^{p-1}$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \Lambda$ est un élément de Λ', soit $\|\lambda\|_\infty = \sup_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \|\lambda_i\|_\Lambda$. Alors $\| \ \|_\infty$ est une norme de C-algèbre sur Λ' mais cette norme n'est pas la norme spectrale ; la proposition 5.5 ci-dessous montre qu'elle n'en est pas très loin.

Lemme 5.4. — *Soient Λ'' une C-algèbre spectrale, connexe et p-close, $\psi : \Lambda \to \Lambda''$ un morphisme continu de C-algèbres normées et $S(\psi)$ l'ensemble des morphismes $\psi' : \Lambda' \to \Lambda''$ de C-algèbres dont la restriction à Λ est égale à ψ. Alors*

(i) *$S(\psi)$ est non vide et tout élément de $S(\psi)$ est continu pour la norme $\| \ \|_\infty$.*

(ii) $\frac{1}{p} \sup_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \|\psi(\lambda_i)\|_{\Lambda''} \leqslant \sup_{\psi' \in S(\psi)} \|\psi'(\lambda)\|_{\Lambda''} \leqslant \sup_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \|\psi(\lambda_i)\|_{\Lambda''}$.

Démonstration. — Un morphisme ψ' de Λ' dans Λ'' est équivalent à la donnée de la restriction de ψ' à Λ et du choix d'une racine p-ième y de $\psi(x)$. Comme $x \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, on a $\psi(x) \in \mathscr{O}_{\Lambda''}^{**}$ d'après le (i) du lemme 2.15 et comme Λ'' est supposée p-close et connexe, $\psi(x)$ a exactement p racines dans Λ qui sont toutes inversibles et de norme 1. Si y est une de ces racines, on dispose d'une bijection de μ_p sur $S(\psi)$ qui à ε associe ψ_ε donné par la formule $\psi_\varepsilon(\lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{p-1} X^{p-1}) = \psi(\lambda_0) + \psi(\lambda_1)\varepsilon y + \cdots + \psi(\lambda_{p-1})(\varepsilon y)^{p-1}$. En particulier, $S(\psi)$ est non vide et comme $\|\psi(\lambda_i)\|_{\Lambda''} \leqslant \|\lambda_i\|_\Lambda$ et $\|y\|_{\Lambda''} \leqslant 1$, on a $\|\psi_\varepsilon(\lambda)\|_{\Lambda''} \leqslant \sup_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \|\psi(\lambda_i)\|_{\Lambda''}$. On en déduit la continuité de ψ_ε et l'une des inégalités du (ii). Finalement, si $0 \leqslant i \leqslant p-1$, on a $\psi(\lambda_i) = \frac{1}{p} \sum_\varepsilon (\varepsilon y)^{-i} \psi_\varepsilon(\lambda)$, ce qui permet de démontrer l'autre inégalité du (ii) et termine la démonstration du lemme.

Proposition 5.5. — *Soient Λ une C-algèbre normée spectrale connexe et Λ' une extension élémentaire de Λ ; alors il existe sur Λ' une unique norme $\| \ \|_{\Lambda'}$ dont la restriction à Λ est $\| \ \|_\Lambda$ et qui vérifie les conditions suivantes :*

(i) *si Λ'' est une C-algèbre normée, alors $\psi : \Lambda' \to \Lambda''$ est continu pour $\| \ \|_{\Lambda'}$ si et seulement si la restriction de ψ à Λ est continue,*

(ii) $\|\lambda^n\|_{\Lambda'} = \|\lambda\|_{\Lambda'}^n$ *quels que soient $\lambda \in \Lambda'$ et $n \in \mathbf{N}$.*

De plus,

(iii) $\| \ \|_{\Lambda'}$ *est équivalente à la norme $\| \ \|_\infty$,*

(iv) *Λ' muni de la norme $\| \ \|_{\Lambda'}$ est une algèbre spectrale* (connexe, si Λ est connexe)*,*

(v) *si Λ'' est une C-algèbre spectrale, connexe et p-close, si S est un ensemble de morphismes continus de Λ dans Λ'' tel que l'on ait $\sup_{\psi \in S} \|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} = \|\lambda\|_\Lambda$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$ et si S' est l'ensemble des morphismes de Λ' dans Λ'' dont la restriction à Λ appartient à S, alors $\sup_{\psi \in S'} \|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} = \|\lambda\|_{\Lambda'}$ quel que soit $\lambda \in \Lambda'$.*

Démonstration. — Soit $\| \ \|$ une norme sur Λ' vérifiant les conditions de la proposition. On doit avoir $\|X\|^p = \|X^p\| = \|x\|_\Lambda = 1$ et donc $\|X^i\| = 1$ quel que soit $0 \leqslant i \leqslant p-1$; on en déduit l'inégalité $\|\lambda\| \leqslant \|\lambda\|_\infty$. D'autre part, la propriété (i) implique que tout élément de $\mathrm{Aut}(\Lambda'/\Lambda)$ est continu et donc que, si $\varepsilon^p = 1$, il existe $C_\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $\|\lambda_0 + \lambda_1 \varepsilon X + \cdots + \lambda_{p-1}(\varepsilon X)^{p-1}\| \leqslant C_\varepsilon \|\lambda\|_\infty$. Comme $\lambda_i = \frac{1}{p}\sum_{\varepsilon^p=1}(\varepsilon X)^{-i}\sigma_\varepsilon(\lambda)$, on obtient $\|\lambda\|_\infty = \sup_i \|\lambda_i\|_\Lambda \leqslant p(\sup_\varepsilon C_\varepsilon)\|\lambda\|_\infty$. En bref, une norme vérifiant les conditions de la proposition est équivalente à la norme $\| \ \|_\infty$ et deux normes vérifiant les conditions de la proposition sont équivalentes et donc égales d'après le (ii) du lemme 2.6.

Réciproquement, une norme équivalente à la norme $\| \ \|_\infty$ vérifie la propriété (i). Or, si $S(\Lambda')$ est l'ensemble des morphismes de Λ' dans C dont la restriction à Λ est continue, prenant le sup. sur $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ dans le (ii) du lemme 5.4, on obtient l'encadrement $\frac{1}{p}\|\lambda\|_\infty \leqslant \sup_{s\in S(\Lambda')} |s(\lambda)| \leqslant \|\lambda\|_\infty$ qui montre que $\|\lambda\|_{\Lambda'} = \sup_{s\in S(\Lambda')}|s(\lambda)|$ est une norme sur Λ' vérifiant la propriété (ii) et équivalente à la norme $\| \ \|_\infty$. Comme l'ensemble des morphismes continus de Λ' dans C est $S(\Lambda')$ d'après la propriété (i), la norme $\| \ \|_{\Lambda'}$ est la norme spectrale par construction et, si Λ est connexe, alors Λ' est connexe d'après le lemme 5.3.

Finalement, comme un morphisme continu d'algèbre spectrales est 1-lipschitzien, on a $\sup_{\psi\in S'}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} \leqslant \|\lambda\|_{\Lambda'}$. D'autre part, d'après le lemme 5.4, si $\Lambda' = \Lambda[X]/(X^p - x)$, si $\lambda = \lambda_0 + \lambda_1 X + \cdots + \lambda_{p-1}X^{p-1}$ et si ψ est un morphisme de Λ dans Λ'', alors $\frac{1}{p}\sup_{0\leqslant i\leqslant p-1}\|\psi(\lambda_i)\|_{\Lambda''} \leqslant \sup_{\psi'\in S(\psi)}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''}$. Prenant le sup. sur les éléments ψ de S, on obtient l'inégalité $\frac{1}{p}\|\lambda\|_{\Lambda'} \leqslant \frac{1}{p}\sup_{0\leqslant i\leqslant p-1}\|\lambda_i\|_\Lambda \leqslant \sup_{\psi'\in S'}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''}$. On peut utiliser cette inégalité pour λ^m à la place de λ puis prendre la racine m-ième et faire tendre m vers $+\infty$ pour obtenir $\|\lambda\|_{\Lambda'} \leqslant \sup_{\psi'\in S'}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''}$, ce qui permet de conclure.

Lemme 5.6. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, si Λ' est une extension élémentaire de Λ, si*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi_1''"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi_2''"] & \Lambda'' \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de C-algèbres normées, où Λ_1, Λ_2 et Λ'' sont sympathiques et si $\psi_1' : \Lambda' \to \Lambda_1$ est un prolongement de ψ_1, alors il existe un unique prolongement $\psi_2' : \Lambda' \to \Lambda_2$ de ψ_2 rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \Lambda' \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi_1''"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi_2''"] & \Lambda'' \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Écrivons Λ' sous la forme $\Lambda[X]/(X^p - x)$ avec $x \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$. On a $\psi_2(x) \in \mathscr{O}_{\Lambda_2}^{**}$ et donc $\psi_2(x)$ a une racine p-ième y dans Λ_2. Comme Λ'' est sympathique et $\psi_1''\circ\psi_1(x) = \psi_2''\circ\psi_2(x)$, il existe une unique racine p-ième de l'unité ε dans C tel que l'on ait $\psi_1''\circ\psi_1'(X) = \varepsilon\psi_2''(y)$ et on peut (et doit) définir ψ_2' en posant $\psi_2'(X) = \varepsilon y$.

5.3. p-Extensions. — Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, on appelle *p-extension* de Λ toute algèbre Λ' telle qu'il existe un ensemble bien ordonné I et une famille $(\Lambda_i)_{i\in I}$ de C-algèbres normées spectrales connexes vérifiant les conditions suivantes :

(i) $\Lambda' = \cup_{i\in I}\Lambda_i$ et $\Lambda_0 = \Lambda$,

(ii) si i est le successeur de j, alors Λ_i est une extension élémentaire de Λ_j munie de l'unique norme vérifiant les conclusions de la proposition 5.5,

(iii) si i est un élément de I n'ayant pas de prédécesseur, alors $\Lambda_i = \cup_{j<i}\Lambda_j$.

Une telle famille est appelée une *présentation* de Λ.

Un morphisme entre algèbres spectrales est 1-lipschitzien [(iii) du lemme 2.6] et donc une limite inductive d'applications continues entre algèbres spectrales est encore 1-lipschitzienne et donc continue. Ceci permet, via une récurrence transfinie immédiate d'étendre aux p-extensions ce que nous avons montré pour les extensions élémentaires et donc d'obtenir les résultats suivants.

Proposition 5.7. — *Soient Λ une C-algèbre spectrale connexe et Λ' une p-extension de Λ. Alors*

(i) *Λ' est une C-algèbre spectrale connexe*

(ii) $\mathrm{Spec}(\Lambda')$ *est l'ensemble des morphismes de Λ' dans C dont la restriction à Λ est continue. Plus généralement, si Λ'' est une C-algèbre normée, un morphisme $\psi : \Lambda' \to \Lambda''$ est continue si et seulement si sa restriction à Λ est continue.*

(iii) *Si Λ'' est une C-algèbre normée sympathique et si $\psi : \Lambda \to \Lambda''$ est un morphisme continu, alors ψ se prolonge en un morphisme continu $\psi' : \Lambda' \to \Lambda''$.*

(iv) *Si Λ'' est une C-algèbre normée sympathique, si S est un ensemble de morphismes continus de Λ dans Λ'' telle que l'on ait $\sup_{\psi\in S}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} = \|\lambda\|_{\Lambda}$ quel que soit $\lambda \in \Lambda$, et si S' est l'ensemble des morphismes de Λ' dans Λ'' dont la restriction à Λ appartient à S, alors $\sup_{\psi\in S'}\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} = \|\lambda\|_{\Lambda'}$ quel que soit $\lambda \in \Lambda'$.*

(v) *Si*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi_1''"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi_2''"] & \Lambda'' \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de C-algèbres normées, où Λ_1, Λ_2 et Λ'' sont sympathiques et si $\psi_1' : \Lambda' \to \Lambda_1$ est un prolongement de ψ_1, alors il existe un unique prolongement $\psi_2' : \Lambda' \to \Lambda_2$ de ψ_2 rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \Lambda' \arrow[r, "\psi_1'"] \arrow[d, "\psi_2'"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi_1''"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi_2''"] & \Lambda'' \end{tikzcd}$$

D'autre part, la proposition 5.2 admet comme corollaire le résultat suivant :

Proposition 5.8. — *Si Λ est une C-algèbre normée connexe intègre et intégralement close dans son corps des fractions et si Λ' est une p-extension de Λ, alors Λ' est intègre et intégralement close dans son corps des fractions.*

Proposition 5.9. — *Soit Λ'' une algèbre sympathique. Si Λ est une C-algèbre spectrale contenant Λ'' et Λ' est une p-extension de Λ, alors l'application naturelle* (de restriction) ${}^a\iota : \mathrm{Spec}_{\Lambda''}(\Lambda') \to \mathrm{Spec}_{\Lambda''}(\Lambda)$ *est une application propre.*

Démonstration. — Cette proposition se démontre par le même genre d'arguments (en plus simples) que la proposition 2.12.

Lemme 5.10. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe et si $x_1, \dots, x_{n+1}$ sont des éléments de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ dont les images dans $G(\Lambda)$ forment une famille libre sur $\mathbf{F}_p$, alors x_{n+1} n'est pas une puissance p-ième dans $\Lambda_n = \Lambda[X_1, \dots, X_n]/(X_1^p - x_1, \dots, X_n^p - x_n)$.*

Démonstration. — C'est un exercice classique de théorie de Galois. Supposons que x_{i+1} n'est pas une puissance p-ième dans Λ_i si $i \leqslant n-1$ mais que $x_{n+1} = \lambda^p$ avec $\lambda \in \Lambda_n$. Une petite récurrence utilisant le lemme 5.3 montre que Λ_n est connexe, ce qui implique que, si $\sigma \in \mathrm{Aut}(\Lambda_n/\Lambda)$, alors $\chi(\sigma) = \lambda^{-1}\sigma(\lambda) \in \mu_p$ et $\sigma \to \chi(\sigma)$ est un morphisme de groupes. Or $\mathrm{Aut}(\Lambda_n/\Lambda)$ contient un sous-groupe isomorphe à μ_p^n (en fait il lui est égal), à savoir celui des σ_ε, où $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \in \mu_p^n$ et $\sigma_\varepsilon(X_i) = \varepsilon_i X_i$ et un élément de Λ_n fixé par ce sous-groupe appartient à Λ comme on le voit en considérant la base de Λ_n sur Λ formée des $X_1^{k_1} \dots X_n^{k_n}$, avec $0 \leqslant k_1, \dots, k_n \leqslant p-1$. Maintenant, il existe $0 \leqslant k_1, \dots, k_n \leqslant p-1$ tels que l'on ait $\chi(\sigma_\varepsilon) = \varepsilon_1^{k_1} \dots \varepsilon_n^{k_n}$, ce qui implique que $X_1^{-k_1} \dots X_n^{-k_n}\lambda \in \Lambda$ et donc que $x_{n+1} = x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ à multiplication près par une puissance p-ième. Comme ceci est en contradiction avec l'hypothèse selon laquelle les images de $x_1, \dots, x_{n+1}$ dans $G(\Lambda)$ sont linéairement indépendantes sur $\mathbf{F}_p$, cela permet de conclure.

Corollaire 5.11. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, si Λ' est une extension élémentaire de Λ et si $b \in \Lambda'$ est tel que $y = b^p \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, alors de deux choses l'une : soit $b \in \Lambda$ et alors $\Lambda[b] = \Lambda$, soit $b \notin \Lambda$ et alors le morphisme de Λ-algèbres $\psi_b : \Lambda[Y]/(Y^p - y) \to \Lambda'$ défini par $\psi_b(Y) = b$ est un isomorphisme.*

Démonstration. — Il est clair que si $b \in \Lambda$, alors $\Lambda[b] = \Lambda$; supposons donc $b \notin \Lambda$. Comme Λ' est une extension élémentaire de Λ, il existe $a \in \Lambda'$ tel que $x = a^p \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et tel que le morphisme de Λ-algèbres $\psi_a : \Lambda[X]/(X^p - x) \to \Lambda'$ défini par $\psi_b(X) = a$ soit un isomorphisme. Comme y est une puissance p-ième dans Λ', cela implique que les images de x et y dans $G(\Lambda)$ (qui sont non nulles car x et y ne sont pas des puissances p-ièmes dans Λ) sont linéairement dépendantes sur $\mathbf{F}_p$ et donc qu'il existe $c \in \{1, \dots, p-1\}$ et $z \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ tels que l'on ait $y = x^c z^p$. Comme Λ' est connexe cela implique l'existence de $\varepsilon \in \mu_p$ tel que l'on ait $b = \varepsilon z a^c$ et donc, si $\{d\}_p$ désigne le reste de la division par p de d, si $i \in \{0, \dots, p-1\}$, il existe $u_i \in \mathscr{O}_\Lambda^{*}$ tel que l'on ait $b^i = u_i a^{\{ci\}_p}$, ce qui permet de conclure car les $a^{\{ci\}_p}$ forment une base de Λ' sur Λ.

Lemme 5.12. — *Soient Λ une C-algèbre normée spectrale connexe, Λ'' une p-extension de Λ et $b \in \Lambda''$ tel que $y = b^p \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$, alors de deux choses l'une : soit $b \in \Lambda$ et alors $\Lambda[b] = \Lambda$, soit $b \notin \Lambda$ et alors le morphisme de Λ-algèbres $\psi_b : \Lambda[Y]/(Y^p - y) \to \Lambda[b]$ défini par $\psi_b(Y) = b$ est un isomorphisme ; en particulier $\Lambda[b]$ est une extension élémentaire de Λ.*

Démonstration. — Le cas $b \in \Lambda$ étant sans intérêt, supposons $b \notin \Lambda$; il suffit alors de prouver que ψ_b est injectif ou, autrement dit, que si $\sum_{i=0}^{p-1} \lambda_i b^i = 0$ avec $\lambda_0, \dots, \lambda_{p-1} \in \Lambda$, alors tous les λ_i sont nuls. Soit $(\Lambda_i)_{i \in I}$ une présentation de Λ'' et soit i_1 le plus petit élément i de I tel que $b \in \Lambda_i$. Par construction, i_1 a un prédécesseur i_0 et $b \notin \Lambda_{i_0}$. Le lemme 5.11 appliqué à Λ_{i_0}

montre alors que si $\psi_{b,i_0} : \Lambda_{i_0}[Y]/(Y^p - y) \to \Lambda_{i_1}$ est le morphisme de Λ_{i_0}-algèbres défini par $\psi_{b,i_0}(Y) = b$, alors ψ_{b,i_0} est un isomorphisme. En particulier ψ_{b,i_0} est injectif et il en est de même de sa restriction à $\Lambda[Y]/(Y^p - y)$ qui n'est autre que ψ_b, ce qui permet de conclure.

Lemme 5.13. — *Soient Λ une C-algèbre normée spectrale connexe, Λ'' est une p-extension de Λ et $(\Lambda_i)_{i\in I}$ une présentation de Λ''. Si Λ' est une extension élémentaire de Λ contenue dans Λ'', si Λ'_i pour $i \in I$ est la sous-algèbre de Λ'' engendrée par Λ' et Λ_i, et si $k \leqslant j$ sont deux éléments successifs de I, alors soit $\Lambda'_j = \Lambda'_k$, soit Λ'_j est une extension élémentaire de Λ'_k.*

Démonstration. — Comme Λ' est une extension élémentaire de Λ, il existe $b \in \Lambda''$ tel que $y = b^p \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et tel que $\Lambda' \cong \Lambda[Y]/(Y^p - y)$ via le morphisme envoyant Y sur b et on a $\Lambda'_i = \Lambda_i[b]$ si $i \in I$.

Si $k \in I$ et si j est le successeur de k, il y a trois cas : soit $b \in \Lambda_k$, soit $b \notin \Lambda_k$ mais $b \in \Lambda_j$, soit $b \notin \Lambda_j$. Dans le premier cas, on a $\Lambda'_k = \Lambda_k$ et $\Lambda'_j = \Lambda_j$ et donc Λ'_j est une extension élémentaire de Λ'_k. Dans le second, on a $\Lambda'_k = \Lambda_j = \Lambda'_j$ d'après le lemme 5.11 et dans le troisième, on a $\Lambda_j = \Lambda_k[X_j]/(X_j^p - x_j)$ par hypothèse, $\Lambda'_j = \Lambda_j[Y]/(Y^p - y)$ et $\Lambda'_k = \Lambda_k[Y]/(Y^p - y)$ d'après le lemme 5.11 et donc $\Lambda'_j = \Lambda_k[X_j, Y]/(Y^p - y, X_j^p - x_j) = \Lambda'_k[X_j]/(X_j^p - x_j)$, ce qui montre que Λ'_j est une extension élémentaire de Λ'_k.

Remarquons que le second cas se produit pour exactement une valeur i_0 de k.

Lemme 5.14. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe et si $\Lambda' \subset \Lambda''$ sont deux p-extensions de Λ, alors Λ'' est une p-extension de Λ'.*

Démonstration. — Soit $(\Lambda_i)_{i\in I}$ une présentation de Λ'' et $(\Lambda'_j)_{j\in J}$ une présentation de Λ'. Si $i \in I$ et $j \in J$, soit $\Lambda_{i,j}$ la sous-algèbre de Λ'' engendrée par Λ_i et Λ'_j. Si j est fixé et si i_1 et i_2 sont deux éléments de I, disons que l'on a $i_1 \sim_j i_2$ si $\Lambda_{i_1,j} = \Lambda_{i_2,j}$; ceci définit une relation d'équivalence sur I et on note I_j l'ensemble des classes d'équivalences ; la relation d'ordre sur I passe de manière évidente au quotient et I_j est un ensemble bien ordonné pour tout j. D'autre part, on a $i_1 \sim_j i_2 \Rightarrow i_1 \sim_{j'} i_2$ si $j \leqslant j'$, ce qui montre que l'identité induit une application croissante de I_j dans $I_{j'}$ si $j \leqslant j'$. Nous allons démontrer par récurrence (transfinie) sur j que $(\Lambda_{i,j})_{i\in I_j}$ est une présentation de Λ'' comme p-extension de Λ'_j. Il y a deux cas : soit j a un prédécesseur j', soit j n'a pas de prédécesseur.

Dans le premier cas, on peut utiliser le lemme précédent pour $\Lambda'_{j'}$ à la place de Λ et $I_{j'}$ à la place de I, ce qui permet de conclure. Dans le second cas, si i_j est un élément de I_j ayant un prédécesseur i'_j, alors le plus petit élément i de I dans la classe de i_j a un prédécesseur i' dans I et ce prédécesseur est dans la classe de i'_j. Il existe alors $a_i \in \Lambda''$ tel que $x_i = a_i^p \in \Lambda_{i'}$ et $\Lambda_i = \Lambda_{i'}[a_i]$ et l'hypothèse selon laquelle $i' \notin i_j$ se traduit par $a_i \notin \Lambda_{i',j}$. On a donc aussi $a_i \notin \Lambda_{i',j'}$ quel que soit $j' < j$ et l'hypothèse de récurrence implique que $\Lambda_{i,j'} \cong \Lambda_{i',j'}[X_i]/(X_i^p - x_i)$ quel que soit $j' < j$. Par passage à la limite inductive, on en tire l'isomorphisme $\Lambda_{i,j} = \Lambda_{i',j}[X_i]/(X_i^p - x_i)$, ce qui montre que $\Lambda_{i_j,j}$ est une extension élémentaire de $\Lambda_{i'_j,j}$ et permet de conclure.

Proposition 5.15. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, si Λ' et Λ'' sont deux p-extensions de Λ et si $\psi : \Lambda' \to \Lambda''$ est un morphisme de Λ-algèbres, alors ψ est une isométrie de Λ' sur son image.*

Démonstration. — Commençons par considérer le cas où $\Lambda' = \Lambda[X]/(X^p - x)$ est une extension élémentaire de Λ. Si $b = \psi(X)$, le lemme 5.11 permet de montrer que ψ induit un isomorphisme de Λ' sur $\Lambda[b]$ et le lemme 5.14, que Λ'' est une p-extension de $\Lambda[b]$. En particulier, l'application de restriction induit une surjection de $\mathrm{Spec}(\Lambda'')$ sur $\mathrm{Spec}(\Lambda[b]) \cong \mathrm{Spec}(\Lambda')$, ce qui permet de montrer que, si $\lambda \in \Lambda'$, on a

$$\|\psi(\lambda)\|_{\Lambda''} = \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda'')} |s(\psi(\lambda))| = \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda[b])} |s(\psi(\lambda))| = \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda')} |s(\lambda)| = \|\lambda\|_{\Lambda'}$$

et termine la démonstration dans le cas où Λ' est une extension élémentaire de Λ.

Le cas général s'en déduit par récurrence transfinie.

5.4. La p-clôture $\Lambda^{(\infty)}$ d'une C-algèbre spectrale connexe Λ. — Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, on note $\Lambda^{(1)}$ l'algèbre obtenue en rajoutant à Λ les racines p-ièmes des éléments de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$. De manière précise, $\Lambda^{(1)}$ est le quotient de l'algèbre des polynômes $\Lambda[X_\alpha,\ \alpha \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}]$ par l'idéal engendré par les polynômes du type $X_{\alpha\beta} - X_\alpha X_\beta$ pour $\alpha, \beta \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et $X_{\alpha^p} - \alpha$ pour $\alpha \in \mathscr{O}_\Lambda^{**}$. Si $(x_i)_{i\in I(\Lambda)}$ est une famille d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ dont les images dans $G(\Lambda)$ forment une base de $G(\Lambda)$ sur $\mathbf{F}_p$, on a aussi

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda[X_i,\ i \in I(\Lambda)]/\big(X_i^p - x_i,\ i \in I(\Lambda)\big).$$

Lemme 5.16. — *Si $\psi : \Lambda^{(1)} \to \Lambda^{(1)}$ est un morphisme de C-algèbres dont la restriction à Λ est une isométrie de Λ, alors ψ est une isométrie de $\Lambda^{(1)}$.*

Démonstration. — Si la restriction de ψ à Λ est une isométrie, alors ψ induit une bijection de $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ sur $\mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et donc ψ est un automorphisme. D'autre part, ψ et son inverse sont continus (prop. 5.7 (ii) ; leurs restrictions à Λ le sont), donc 1-lipshitiziens (prop. 2.6 (iii)), ce qui permet de conclure.

Lemme 5.17. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, alors $\Lambda^{(1)}$ est une p-extension de Λ.*

Démonstration. — Il suffit de mettre un bon ordre sur $I(\Lambda)$, de définir Λ_i comme la sous-Λ-algèbre de $\Lambda^{(1)}$ engendrée par les X_j pour $j < i$ et d'utiliser les lemmes 5.3 et 5.10.

D'après le (i) de la proposition 5.7, si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, alors $\Lambda^{(1)}$ est une C-algèbre normée spectrale connexe, ce qui permet d'itérer la construction et de définir par récurrence une suite d'algèbres $\Lambda^{(n)}$ pour $n \geqslant 1$ en posant $\Lambda^{(n+1)} = (\Lambda^{(n)})^{(1)}$. Finalement, soit $\Lambda^{(\infty)} = \cup_{n\in\mathbf{N}}\Lambda^{(n)}$. Par construction, chacune des algèbres $\Lambda^{(n)}$ pour $n \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ est une p-extension de Λ ; c'est donc une C-algèbre spectrale connexe. Maintenant, soit $x \in \mathscr{O}_{\Lambda^{(\infty)}}^{**}$. Il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $x \in \mathscr{O}_{\Lambda^{(n)}}^{**}$, ce qui implique que x a une racine p-ième dans $\Lambda^{(n+1)}$; on en déduit le fait que $\Lambda^{(\infty)}$ est p-close.

Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, on appelle *p-clôture* de Λ toute p-extension Λ' de Λ qui est p-close.

Théorème 5.18. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, alors Λ possède une p-clôture $\Lambda^{(\infty)}$ qui est unique à isométrie près. De plus, si $\psi : \Lambda^{(\infty)} \to \Lambda^{(\infty)}$ est un morphisme de C-algèbres dont la restriction à Λ est une isométrie de Λ, alors ψ est une isométrie de $\Lambda^{(\infty)}$.*

Démonstration. — On vient de construire une p-clôture $\Lambda^{(\infty)}$ de Λ. Montrons que c'est la seule à isométrie près. Si Λ'' en est une autre, on peut prolonger l'inclusion de Λ dans $\Lambda^{(\infty)}$ en un morphisme $\psi : \Lambda'' \to \Lambda^{(\infty)}$ de Λ-algèbres d'après le (iii) de la proposition 5.7. Ce morphisme est une isométrie de Λ'' sur son image d'après la proposition 5.15 et donc en particulier, $\psi(\Lambda'')$ est une p-extension de Λ, ce qui implique d'après le lemme 5.14 que $\Lambda^{(\infty)}$ est une p-extension de $\psi(\Lambda'')$, mais comme $\psi(\Lambda'')$ est p-close, cela implique que $\Lambda^{(\infty)} = \psi(\Lambda'')$ et donc ψ est une isométrie de Λ'' sur $\Lambda^{(\infty)}$. On en déduit l'unicité, à isométrie près, de la p-clôture ; le reste de l'énoncé se démontre via une récurrence immédiate utilisant le lemme 5.16.

Lemme 5.19. — *Si Λ est une C-algèbre normée spectrale connexe, si Λ' et Λ'' sont deux p-extensions de Λ et si $\psi : \Lambda' \to \Lambda''$ est un isomorphisme de C-algèbres dont la restriction à Λ est une isométrie de Λ sur Λ, alors ψ est une isométrie de Λ' sur Λ''.*

Démonstration. — Si la restriction de ψ à Λ est une isométrie, alors ψ et ψ^{-1} sont tous les deux continus (prop.5.7 (ii)) et donc 1-lipshitziens, ce qui permet de conclure.

5.5. La clôture sympathique d'une C-algèbre de Banach spectrale connexe

Si Λ est une C-algèbre de Banach spectrale connexe et Λ' est une extension élémentaire de Λ, le (iii) de la proposition 5.5 permet de montrer que Λ' est complète et donc est une C-algèbre de Banach spectrale connexe. Une récurrence immédiate montre que, de même, une p-extension finie d'un C-algèbre de Banach spectrale connexe est encore une C-algèbre de Banach spectrale connexe. Par contre, l'algèbre $\Lambda^{(\infty)}$ construite ci-dessus est, en général, une extension infinie de Λ et n'est, en général, pas complète ; on note $\widetilde{\Lambda}$ sa complétée ; c'est une C-algèbre de Banach.

Proposition 5.20. — (i) *Si Λ est une C-algèbre de Banach spectrale connexe, alors $\widetilde{\Lambda}$ est une algèbre sympathique.*

(ii) *Si $\psi : \Lambda \to \Lambda'$ est un morphisme de C-algèbres de Banach, si Λ est spectrale connexe et Λ' est sympathique, alors il existe $\widetilde{\psi} : \widetilde{\Lambda} \to \Lambda'$ dont la restriction à Λ est ψ.*

(iii) *Si*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "\psi_1"] \arrow[d, "\psi_2"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi'_1"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi'_2"] & \Lambda' \end{tikzcd}$$

est un diagramme commutatif de C-algèbres de Banach, où Λ_1, Λ_2 et Λ' sont sympathiques et si $\widetilde{\psi}_1 : \widetilde{\Lambda} \to \Lambda_1$ est un prolongement de ψ_1, alors il existe un unique prolongement $\widetilde{\psi}_2 : \widetilde{\Lambda} \to \Lambda_2$ de ψ_2 rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Lambda} \arrow[r, "\widetilde{\psi}_1"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}_2"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "\psi'_1"] \\ \Lambda_2 \arrow[r, "\psi'_2"] & \Lambda' \end{tikzcd}$$

(iv) *Si $\psi : \widetilde{\Lambda} \to \widetilde{\Lambda}$ est un morphisme continu de C-algèbres dont la restriction à Λ est une isométrie de Λ, alors ψ est une isométrie de $\widetilde{\Lambda}$.*

Démonstration. — L'algèbre $\widetilde{\Lambda}$ est complète par construction et spectrale car $\Lambda^{(\infty)}$ l'est ; la proposition 2.16 montre qu'elle est p-close. Pour terminer la démonstration du (i), il suffit donc de vérifier que si Λ est connexe et donc si $\Lambda^{(\infty)}$ est connexe, alors $\widetilde{\Lambda}$ est connexe et, pour ce faire, il suffit de vérifier que toutes les racines p-ièmes de l'unité de $\widetilde{\Lambda}$ sont contenues dans C. Soit donc $y \in \widetilde{\Lambda}$ vérifiant $y^p = 1$; on a en particulier $\|y\|_{\widetilde{\Lambda}} = 1$ et il existe $x \in \mathscr{O}_{\Lambda^{(\infty)}}$ vérifiant $\|x-y\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant p^{-2}$. On a alors $\|x^p - y^p\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant p^{-3}$ et donc $\|x^p - 1\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant p^{-3}$. Comme x appartient à une p-extension finie Λ_x de Λ qui est complète, la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/p}{n}(x^p-1)^n$ converge dans Λ_x vers une racine p-ième z de x^p appartenant à $\Lambda^{(\infty)}$ et vérifiant $\|z-1\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant p^{-2}$. Comme par construction, $(z^{-1}x)^p = 1$, comme $z^{-1}x \in \Lambda^{(\infty)}$ et comme $\Lambda^{(\infty)}$ est connexe, il existe $\varepsilon \in C$ tel que l'on ait $z^{-1}x = \varepsilon$. On a alors $\left\|\varepsilon^{-1}y - 1\right\|_{\widetilde{\Lambda}} = \left\|z(x^{-1}y) - 1\right\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant p^{-2}$, ce qui implique que si $s \in \operatorname{Spec}(\widetilde{\Lambda}) = \operatorname{Spec}(\Lambda^{(\infty)})$, alors $|s(\varepsilon^{-1}y-1)| \leqslant p^{-2}$; comme $\varepsilon^{-1}y$ est une racine p-ième de l'unité et la seule racine p-ième de l'unité α de C vérifiant $|\alpha - 1| \leqslant p^{-2}$ est 1, on a $s(\varepsilon^{-1}y-1) = 0$ quel que soit $s \in \operatorname{Spec}(\widetilde{\Lambda})$ et comme $\widetilde{\Lambda}$ est spectrale, cela implique $y = \varepsilon$ et permet de conclure.

Les (ii) et (iii) de la proposition, quant à eux, résultent des (iii) et (v) de la proposition 5.7 et du (iii) du lemme 2.6. Le (iv) est une conséquence immédiate du lemme 5.21 ci-dessous et du théorème 5.18

Lemme 5.21. — *Si Λ_1, Λ_2 sont deux C-algèbres de Banach spectrales connexes et si $\psi : \widetilde{\Lambda}_1 \to \widetilde{\Lambda}_2$ est un morphisme continu de C-algèbres tel que $\psi(\Lambda_1) \subset \Lambda_2$, alors $\psi(\Lambda_1^{(\infty)}) \subset \Lambda_2^{(\infty)}$.*

Démonstration. — Comme $\widetilde{\Lambda}_2$ est connexe et $\Lambda_2^{(\infty)}$ est p-close, toute racine p-ième d'un élément de $\mathscr{O}^{**}_{\Lambda_2^{(\infty)}}$ appartient à $\mathscr{O}^{**}_{\Lambda_2^{(\infty)}}$, ce qui permet de démontrer le lemme par récurrence transfinie en partant d'une présentation $(\Lambda_{1,i})_{i\in I}$ de Λ_1 et en utilisant le (i) du lemme 2.15.

5.6. L'algèbre $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ et le groupe T_Λ

Lemme 5.22. — *Si Λ est une algèbre sympathique, un morphisme Λ-linéaire continu ψ de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ dans $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ tel que $\psi(X) - X \in \Lambda$ est une isométrie.*

Démonstration. — Si ψ est continu, on a $\|\psi(X)\|_{\widetilde{\Lambda}} \leqslant \|X\|_{\widetilde{\Lambda}} = 1$ et donc $\psi(X) = X + x$ avec $x \in \mathscr{O}_\Lambda$; on en déduit le fait que la restriction de ψ à $\Lambda\{X\}$ est une isométrie (utiliser la proposition 2.5 par exemple) ; sa restriction à $\Lambda\{X\}^{(\infty)}$ est donc aussi une isométrie de $\Lambda\{X\}^{(\infty)}$ d'après le théorème 5.18, ce qui permet de conclure par densité.

Si Λ est une C-algèbre de Banach sympathique, soit T_Λ le sous-groupe des isométries τ de Λ-algèbres de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ tels que que $x(\tau) = \tau(X) - X \in \mathscr{O}_\Lambda$. Soit $\mathrm{H}_{\Lambda\{X\}} = \operatorname{Aut}(\Lambda\{X\}^{(\infty)}/\Lambda\{X\})$; c'est naturellement un sous-groupe de T_Λ. L'application $\tau \to x(\tau)$ est un morphisme de groupes de T_Λ dans $\mathscr{O}_\Lambda$ et on a le résultat suivant :

Proposition 5.23. — *L'application $\tau \to x(\tau)$ donne naissance à la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathrm{H}_{\Lambda\{X\}} \longrightarrow \mathrm{T}_\Lambda \longrightarrow \mathscr{O}_\Lambda \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Si $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$ vérifie $x(\tau) = 0$, la restriction de τ à $\Lambda\{X\}$ est l'identité et donc $\tau \in \mathrm{H}_{\Lambda\{X\}}$. D'autre part, si $\lambda \in \mathscr{O}_\Lambda$, il existe un (unique) morphisme continu de Λ-algèbres de $\Lambda\{X\}$ dans $\Lambda\{X\}$ vérifiant $\psi(X) = X + \lambda$ et le (ii) de la proposition 5.20 permet de le relever en un morphisme de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ dans $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ et donc de montrer que $\tau \to x(\tau)$ est surjective, ce qui permet de conclure.

Remarque 5.24. — L'algèbre $\widetilde{C\{X\}}$ est une sous-algèbre de $\widehat{C\{X\}}$ et T_C est le quotient de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ à travers lequel ce dernier agit sur $\widehat{C\{X\}}$.

Rappelons que l'on a choisi $s_C : \widehat{C\{X\}} \to C$ vérifiant $s_C(X) = 0$. Si Λ est une C-algèbre de Banach sympathique, choisissons un morphisme continue $s_\Lambda : \widetilde{\Lambda\{X\}} \to \Lambda$ de Λ-algèbres dont la restriction à $\widetilde{C\{X\}}$ est s_C. On peut alors considérer un élément f de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ comme une fonction sur T_Λ en posant $f(\tau) = s_\Lambda \circ \tau(f)$ et on peut munir T_Λ de la topologie de la convergence simple.

Lemme 5.25. — *L'application $\tau \to s_\Lambda \circ \tau$ induit un homéomorphisme de T_Λ sur $\mathrm{Spec}_\Lambda(\widetilde{\Lambda\{X\}})$.*

Démonstration. — Soit $s \in \mathrm{Spec}_\Lambda(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ et soit $x = s(X)$; c'est un élément de $\mathscr{O}_\Lambda$. Soit $\tau_0 \in \mathrm{T}_\Lambda$ vérifiant $x(\tau_0) = x$, ce qui nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\{X\} \arrow[r, "\tau_0"] \arrow[d, "\iota"'] & \widetilde{\Lambda\{X\}} \arrow[d, "s_\Lambda"] \\
\widetilde{\Lambda\{X\}} \arrow[r, "s"'] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

dans lequel ι est l'inclusion et τ_0 est la restriction de τ_0 à $\Lambda\{X\}$. D'après le (iii) de la proposition 5.20, il existe un unique relèvement continu $\widetilde{\iota} : \widetilde{\Lambda\{X\}} \to \widetilde{\Lambda\{X\}}$ de ι vérifiant $s \circ \widetilde{\iota} = s_\Lambda \circ \tau_0$ et $\widetilde{\iota}$ est Λ-linéaire et vérifie $\widetilde{\iota}(X) = X$; c'est donc un élément de T_Λ d'après le lemme 5.22. On a alors $s = s_\Lambda \circ (\tau_0 \widetilde{\iota}^{-1})$; on en déduit la bijectivité. La bicontinuité étant alors immédiate, cela permet de conclure.

Corollaire 5.26. — *L'application $\tau \to x(\tau)$ de T_Λ dans $\mathscr{O}_\Lambda$ est une application propre ; en particulier, si $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de T_Λ telle que la suite de terme général $x(\tau_n)$ converge dans $\mathscr{O}_\Lambda$, alors on peut extraire de la suite $(\tau_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une sous-suite convergeant dans T_Λ.*

Démonstration. — C'est une conséquence immédiate de la proposition 5.9.

Corollaire 5.27. — *Si $f \in \widetilde{\Lambda\{X\}}$, alors $\sup_{\tau\in\mathrm{T}_\Lambda} \|f(\tau)\|_\Lambda = \|f\|_{\widetilde{\Lambda\{X\}}}$.*

Démonstration. — On a $\sup_{\tau\in\mathrm{T}_\Lambda} \|f(\tau)\|_\Lambda = \sup_{s\in\mathrm{Spec}_\Lambda(\widetilde{\Lambda\{X\}})} \|s(f)\|_\Lambda$ d'après ce qui précède, ce qui permet de déduire la formule souhaitée par continuité en utilisant la proposition 2.5 et le (iv) de la proposition 5.7.

Proposition 5.28. — *Si $S(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ est l'ensemble des morphismes ψ de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ dans $\widetilde{C\{X\}}$ vérifiant $\psi(X) = X$ et $\psi(\Lambda) = C$ et si $f \in \widetilde{\Lambda\{X\}}$, alors*

$$\sup_{\psi\in S(\widetilde{\Lambda\{X\}})} \|\psi(f)\|_{\widetilde{C\{X\}}} = \|f\|_{\widetilde{\Lambda\{X\}}}.$$

Démonstration. — Cela résulte, par densité, de la proposition 2.5 et du (iv) de la proposition 5.7.

Lemme 5.29. — *$\Lambda' = \Lambda\{X\} \otimes_{C\{X\}} C\{X\}^{(\infty)}$ est une p-extension connexe de $\Lambda\{X\}$.*

Démonstration. — La seule chose à prouver est la connexité de Λ'. Soit $(f_j)_{j\in J}$ une base de $C\{X\}^{(\infty)}$ sur $C\{X\}$ vérifiant $f_0 = 1$ et soit $e = \sum_j e_j \otimes f_j$ un idempotent de Λ'. Si $s \in S(\Lambda\{X\})$, alors $s(e) = \sum_j s(e_j) \otimes f_j$ est un idempotent de $C\{X\}^{(\infty)}$ et donc égal à 0 ou 1. En particulier, on a $s(e_j) = 0$ quel que soit $s \in S(\Lambda\{X\})$ si $j \neq 0$ et donc $e \in \Lambda\{X\}$, ce qui implique, comme $\Lambda\{X\}$ est connexe, que e est égal à 0 ou 1 et permet de conclure.

Proposition 5.30. — *Si $\tau \in \mathrm{T}_C$, il existe $\tau_\Lambda \in \mathrm{T}_\Lambda$ dont la restriction à $\widetilde{C\{X\}}$ est égale à τ.*

Démonstration. — D'après le lemme 5.22, τ est un automorphisme de $C\{X\}^{(\infty)}$. D'autre part, soit τ'_Λ l'isométrie de Λ-algèbres de $\Lambda\{X\}$ déterminée par $\tau'_\Lambda(X) = X + x(\tau)$. Soit $\tau''_\lambda = \tau'_\Lambda \otimes \tau$; c'est une isométrie de Λ'. Comme Λ' est une p-extension de $\Lambda\{X\}$, $\Lambda\{X\}^{(\infty)}$ est une p-extension de Λ' (prop. 5.14) et comme $\Lambda\{X\}^{(\infty)}$ est p-close, on peut étendre τ''_Λ en une isométrie τ_λ de $\Lambda\{X\}^{(\infty)}$ puis, par continuité, en un élément (encore notée τ_Λ) de T_Λ dont la restriction à $\widetilde{C\{X\}}$ est τ par construction, ce qui permet de conclure.

§ 6
Un drôle de corps

Ce § est consacré à l'étude du corps $\mathscr{C}$; il y a un certain nombre de choses pas totalement évidentes à vérifier pour montrer que l'on obtient bien un corps. La première est que la loi de composition est bien définie ; cela se fait en utilisant des techniques inspirées de la démonstration du théorème d'Ax-Sen-Tate qui permettent d'approximer une correspondance analytique par des correspondances algébriques que l'on maîtrise bien. La seconde est que tout élément a un inverse ; cela se démontre en même temps que l'égalité des dimensions de U_f et V_f ; c'est malheureusment le point le plus technique de tout l'article et c'est aussi la base de la théorie des Espaces Vectoriels de dimension finie développée dans le §7.

6.1. Généralités sur les correspondances. — Soient ρ et ρ' deux éléments de $|C| \cup \{+\infty\}$. On appelle correspondance $\tilde{f}$ de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$ une application qui à $E \subset B(0,\rho)$ associe $\{\tilde{f}(E)\} \subset B(0,\rho')$ de telle sorte que l'on ait $\{\tilde{f}(\cup_{i\in I} E_i)\} = \cup_{i\in I}\{\tilde{f}(E_i)\}$ quel que soit l'ensemble $(E_i)_{i\in I}$ de parties de $B(0,\rho)$. Une telle application est complètement déterminée par l'image des singletons et on note $\{\tilde{f}(x)\}$ au lieu de $\{\tilde{f}(\{x\})\}$ l'image du singleton $\{x\}$.

On appelle *graphe* de $\tilde{f}$ l'ensemble $\Gamma_{\tilde{f}}$ des couples $(x,y) \in B(0,\rho) \times B(0,\rho')$ avec $y \in \{\tilde{f}(x)\}$. L'application qui, à une correspondance $\tilde{f}$, associe son graphe $\Gamma_{\tilde{f}}$ est une bijection de l'ensemble des correspondances de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$ sur l'ensemble des parties de $B(0,\rho) \times B(0,\rho')$, la bijection réciproque étant donnée par $\Gamma \to \tilde{f}_\Gamma$, où $\tilde{f}_\Gamma$ est définie par

$$\tilde{f}_\Gamma(E) = \{y \in B(0,\rho') \mid \exists x \in E \text{ tel que } (x,y) \in \Gamma\} = p_2(p_1^{-1}(E) \cap \Gamma),$$

si $E \subset B(0,\rho)$ et p_1 [resp. p_2] est la projection de $B(0,\rho) \times B(0,\rho')$ sur $B(0,\rho)$ [resp. $B(0,\rho')$].

On appelle *ensemble de définition* d'une correspondance $\tilde{f}$ de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$, l'ensemble des éléments x de $B(0,\rho)$ tels que $\{f(x)\} \neq \emptyset$; c'est aussi la projection $p_1(\Gamma_{\tilde{f}})$ du graphe de $\tilde{f}$ sur $B(0,\rho)$. On dit que $\tilde{f}$ est *partout définie* si son ensemble de définition est $B(0,\rho)$.

On appelle *image* de $\tilde{f}$, l'ensemble $\{\tilde{f}(B(0,\rho))\}$; c'est aussi la projection $p_2(\Gamma_{\tilde{f}})$ du graphe de $\tilde{f}$ sur $B(0,\rho')$. On dit que $\tilde{f}$ est *surjective* si son image est $B(0,\rho')$.

Si Γ est une partie de $B(0,\rho)\times B(0,\rho')$, on note ${}^t\Gamma=\{(y,x)\mid (x,y)\in\Gamma\}$ la partie de $B(0,\rho')\times B(0,\rho)$ *transposée* de Γ. Si $\tilde f$ est une correspondance de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$, on note ${}^t\tilde f$ la correspondance de $B(0,\rho')$ dans $B(0,\rho)$ *transposée* de $\tilde f$: c'est la correspondance dont le graphe est le transposé de celui de $\tilde f$. L'application $\tilde f\to {}^t\tilde f$ est *involutive* [i.e. ${}^t({}^t\tilde f)=\tilde f$] et l'ensemble de définition (resp. l'image) de ${}^t\tilde f$ est l'image (resp. l'ensemble de définition) de $\tilde f$.

Si $\tilde f$ est une correspondance de $B(0,\rho')$ dans $B(0,\rho'')$ et $\tilde g$ est une correspondance de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$, on note $\tilde f\odot\tilde g$ la correspondance *composée* de $\tilde f$ et $\tilde g$ qui à $E\subset B(0,\rho)$ associe $\{\tilde f(\{\tilde g(E)\})\}$. Le graphe de $\tilde f\odot\tilde g$ est l'ensemble des couples (x,z) de $B(0,\rho)\times B(0,\rho'')$ tels qu'il existe $y\in B(0,\rho')$ avec $y\in\{\tilde g(x)\}$ et $z\in\{\tilde f(y)\}$. C'est aussi le produit fibré des graphes de $\tilde f$ et $\tilde g$ au-dessus de $B(0,\rho')$. L'application $\odot$ est associative, i.e si $\tilde f$, $\tilde g$ et $\tilde h$ sont des correspondances pour lesquels les composées apparaissant ci-dessous ont un sens, alors $(\tilde f\odot\tilde g)\odot\tilde h=\tilde f\odot(\tilde g\odot\tilde h)$.

On dit qu'une correspondance $\tilde f$ de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$ est *additive* si son graphe est un sous-groupe de $B(0,\rho)\times B(0,\rho')$. L'ensemble $\{\tilde f(0)\}$ est alors un sous-groupe de $B(0,\rho')$ et $\tilde f$ induit un morphisme de groupes de l'ensemble de définition de $\tilde f$ dans $B(0,\rho')/\{\tilde f(0)\}$. On note $\ker\tilde f$ le sous-ensemble des $x\in B(0,\rho)$ tel que $\{\tilde f(x)\}$ contienne 0 ; c'est un sous-groupe de $B(0,\rho)$ qui est aussi égal à $\{{}^t\tilde f(0)\}$.

On dit qu'une correspondance $\tilde f$ de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$ est *propre* si $\{\tilde f(E)\}$ est compact quel que soit le sous-ensemble compact E de $B(0,\rho)$. Une composée de correspondances propres est encore propre.

6.2. Correspondances analytiques additives. — Si $f\in\widehat{\overline{C\{X\}}}$, on note $f_{\rm co}$ la correspondance de $B(0,1)$ dans C dont le graphe coïncide avec celui de f. Une telle correspondance est dite *analytique* (si $f\in\overline{C\{X\}}$, elle est dite *algébrique*). Si $f\in\widehat{\overline{C\{X\}}}$, l'ensemble de définition de $f_{\rm co}$ est $B(0,1)$ et l'image de $f_{\rm co}$ est incluse dans $B(0,\|f\|_{\rm sp})$; en particulier, si $\|f\|_{\rm sp}\leqslant 1$, alors $f_{\rm co}$ peut être considéré comme une correspondance de $B(0,1)$ dans $B(0,1)$.

Lemme 6.1. — *Une correspondance de* $B(0,1)$ *dans* $B(0,1)$ *qui est une composée de correspondances analytiques est propre.*

Démonstration. — Il suffit de prouver qu'une correspondance analytique est propre, ce qui résulte de la proposition 3.5 et de la continuité de l'application $s\to s(f)$ de $\widehat{B(0,1)}$ dans C, si $f\in\widehat{\overline{C\{X\}}}$.

Un élément f de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ est dit *additif* si on a $f(\sigma\tau)=f(\sigma)+f(\tau)$ quels que soient $\sigma,\tau\in\widetilde{\mathrm T}_C$. Remarquons que si f est additif, alors $\{f_{\rm co}(0)\}=f(\widetilde{\mathrm H}_{C\{X\}})$ est un sous-groupe compact de C et donc est un $\mathbf Z_p$-module. On note $\widehat{\mathscr C}$ le sous-ensemble de $\widehat{\overline{C\{X\}}}$ constitué des éléments additifs et $\mathscr C$ le sous-ensemble de $\widehat{\mathscr C}$ des éléments additifs de *rang fini*, c'est-à-dire l'ensemble des f additifs tels que $f(\widetilde{\mathrm H}_{C\{X\}})$ soit un $\mathbf Z_p$-module de rang fini ; le rang de ce sous-module étant appelé le *rang de* f.

Proposition 6.2. — *Si* $f\in\widehat{\overline{C\{X\}}}$*, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) f *est additif*

(ii) $f(0)=0$ *et la correspondance* $f_{\rm co}$ *associée à* f *est additive.*

(iii) $f(0)=0$ *et il existe un compact* M *tel que, quels que soient* $x,y\in B(0,1)$*, on ait* $\{f_{\rm co}(x+y)\}-\{f_{\rm co}(x)\}-\{f_{\rm co}(y)\}\subset M$.

Démonstration. — Si f est additif, alors $\tau \to (x(\tau), f(\tau))$ est un morphisme de groupes de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ dans $C \times C$, son image est donc un sous-groupe de $C \times C$ et f_{co} est additive, ce qui permet de montrer l'implication (i)⇒(ii). L'implication (ii)⇒(iii) étant immédiate (il suffit de prendre $M = \{f(0)\}$ qui est compact en vertu du lemme 6.1), il ne reste que (iii)⇒(i) à prouver. Si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, soit g_τ l'élément de $\widehat{C\{X\}}$ donné par la formule $g_\tau = f^\tau - f - f(\tau)$. Si $\sigma \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, on a alors

$$g_\tau(\sigma) = f(\sigma\tau) - f(\sigma) - f(\tau) \in \{f_{\mathrm{co}}(x(\sigma\tau))\} - \{f_{\mathrm{co}}(x(\sigma))\} - \{f_{\mathrm{co}}(x(\tau))\} \subset M,$$

et comme M est compact, g_τ est constante (cor. 3.16) et est nulle car on a supposé $f(0) = 0$. On en déduit l'additivité de f, ce qui termine la démonstration de la proposition.

Remarque 6.3. — La nullité de g_τ montre que, si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $f^\tau - f$ est « constant » égal à $f(\tau)$. Réciproquement, comme $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ agit trivialement sur C, si $f(0) = 0$ et $f^\tau - f \in C$ quel que soit $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $f \in \widehat{\mathscr{C}}$.

Remarque 6.4. — La condition $f(0) = 0$ dépend du choix de s_C, ce qui fait que les sous-ensembles $\widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}$ de $\widehat{C\{X\}}$ en dépendent aussi. Pour obtenir une définition intrinsèque de ces ensembles, on peut définir l'ensemble $\widehat{\mathscr{C}}'$ des $f \in \widehat{C\{X\}}$ tels qu'il existe un compact M tel que l'on ait $\{f_{\mathrm{co}}(x+y)\} - \{f_{\mathrm{co}}(x)\} - \{f_{\mathrm{co}}(y)\} \subset M$ quels que soient $x, y \in B(0,1)$. On a $\widehat{\mathscr{C}}' = C \oplus \widehat{\mathscr{C}}$ et donc l'inclusion de $\widehat{\mathscr{C}}$ dans $\widehat{\mathscr{C}}'$ induit un isomorphisme de $\widehat{\mathscr{C}}$ sur $\widehat{\mathscr{C}}'/C$ et ce dernier ensemble est défini sans faire référence à s_C qui ne sert qu'à exhiber une section de $\widehat{\mathscr{C}}'/C$ dans $\widehat{\mathscr{C}}'$.

On dit qu'une correspondance $\tilde{g}$ de C dans C est $\mathbf{Q}_p$*-linéaire* si son graphe est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $C \times C$. L'ensemble $\{\tilde{g}(0)\}$ est alors un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de C et on dit que $\tilde{g}$ est *de rang* r si $\dim_{\mathbf{Q}_p}\{\tilde{g}(0)\} = r$ et *de rang fini* si $\dim_{\mathbf{Q}_p}\{\tilde{g}(0)\}$ est finie.

Si $\tilde{g}$ est une correspondance additive de $B(0,\rho)$ dans $B(0,\rho')$, on note $\tilde{g}_{\mathbf{Q}_p}$ la correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire de C dans C dont le graphe est le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $C \times C$ engendré par celui de $\tilde{g}$ et si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$, on note $f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p}$ la correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire $(f_{\mathrm{co}})_{\mathbf{Q}_p}$.

Lemme 6.5. — *Si $\tilde{g}$ est une correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire de rang fini sur C, il existe au plus un élément f de $\widehat{C\{X\}}$ vérifiant $f(0) = 0$ et dont le graphe est inclus dans celui de $\tilde{g}$. De plus, si f existe, alors $f \in \mathscr{C}$.*

Démonstration. — Si f_1 et f_2 sont deux éléments de $\widehat{C\{X\}}$ dont les graphes sont inclus dans celui de $\tilde{g}$, alors $f_1 - f_2$ est à valeurs dans $\{\tilde{g}(0)\}$ car $\tilde{g}$ est $\mathbf{Q}_p$-linéaire. Comme $\{\tilde{g}(0)\}$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ par hypothèse, $\{\tilde{g}(0)\} \cap B(0, \|f_1 - f_2\|_{\mathrm{sp}})$ est compact, ce qui implique (cor. 3.16) que $f_1 - f_2$ est constante et la condition $f_1(0) = f_2(0) = 0$ implique que l'on a $f_1 = f_2$, d'où l'unicité de f. Si f existe, alors

$$\begin{aligned}\{f_{\mathrm{co}}(x+y)\} - \{f_{\mathrm{co}}(x)\} - \{f_{\mathrm{co}}(y)\} &\subset \Big(\{\tilde{g}(x+y)\} - \{\tilde{g}(x)\} - \{\tilde{g}(y)\}\Big) \cap B(0, \|f\|_{\mathrm{sp}}) \\ &\subset \{\tilde{g}(0)\} \cap B(0, \|f\|_{\mathrm{sp}})\end{aligned}$$

quels que soient $x, y \in B(0,1)$. On en déduit (prop. 6.2) l'additivité de f et $\{f_{\mathrm{co}}(0)\}$ est un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\{\tilde{g}(0)\}$ et est donc de rang fini, ce qui montre que $f \in \mathscr{C}$ et permet de conclure.

Le lemme 6.5 montre que l'application $f \to f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p}$ est une injection de $\mathscr{C}$ dans l'ensemble des correspondances $\mathbf{Q}_p$-linéaires de rang fini sur C. Pour faire le lien avec le langage utilisé dans l'introduction, disons qu'une correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire de rang fini sur C est *analytique* si elle est l'image d'un élément de $\mathscr{C}$ par l'application $f \to f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p}$. D'autre part, si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$, introduisons les sous-$\mathbf{Z}_p$-modules de C

$$U_f^0 = \{f_{\mathrm{co}}(0)\} = f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}), \qquad U_f = \{f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p}(0)\} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} U_f^0,$$
$$V_f^0 = \ker f_{\mathrm{co}}, \qquad V_f = \ker f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} V_f^0.$$

6.3. Approximation des fonctions additives

Lemme 6.6. — *Soit $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ et soient H_f le noyau de la restriction de f à $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ et K_f le sous-corps de $\overline{F}$ fixé par H_f.*

(i) *Si H est un sous-groupe de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ contenant H_f, alors H est stable par conjugaison par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$* (i.e. si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $\tau^{-1}H\tau = H$).

(ii) *Si K est une extension de F contenue dans K_f, alors K est stable par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$* (i.e. si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $\tau(K) = K$)

(iii) *Si $\psi : \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \to C$ est un morphisme continu dont la restriction à H_f est nulle, alors ψ est invariant par conjugaison par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$* (i.e. si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $\psi(\tau^{-1}\sigma\tau) = \psi(\sigma)$ quel que soit $\sigma \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$.)

Démonstration. — Comme f est additif sur $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ tout entier et pas seulement sur $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$, on a $f(\tau^{-1}\sigma\tau) = f(\sigma)$ si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ et $\sigma \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$. On en déduit les faits suivants :

a) H_f est stable par conjugaison par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$,

b) l'action de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}/H_f = \mathrm{Gal}(K_f/F)$ est triviale,

ce qui permet de démontrer le (i). Le (ii) se déduit du (i) grâce à la théorie de Galois. Finalement, un morphisme $\psi : \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \to C$ trivial sur H_f se factorise à travers $\mathrm{Gal}(K_f/F)$, groupe sur lequel $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ agit trivialement ; on en déduit le (iii), ce qui termine la démonstration.

Lemme 6.7. — *Si $g \in \mathscr{O}_C\{X\}$ est de norme 1, alors il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que l'idéal de $\mathscr{O}_C\{X\}$ engendré par g et $\tau(g)$ contienne 1.*

Démonstration. — Comme on a supposé g de norme 1, on peut quitte à multiplier g par une unité de A, supposer que g est un polynôme unitaire (cf. prop 3.1) et à coefficients dans $\mathscr{O}_C$. Si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $\tau(g)$ est encore un polynôme et, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont les racines de g répétées avec leur multiplicité, celles de $\tau(g)$ sont $\alpha_1 - x(\tau), \dots, \alpha_n - x(\tau)$. Maintenant, l'idéal engendré par g et $\tau(g)$ contient le résultant des polynômes g et $\tau(g)$. Celui-ci est, au signe près, égal à $\prod_{i,j}(\alpha_i - \alpha_j - x(\tau))$ et comme les α_i sont des éléments de $\mathscr{O}_C$, si τ est un élément de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que $x(\tau)$ ne soit pas congru modulo $\mathfrak{m}_C$ à un des $\alpha_i - \alpha_j$, ce résultant est une unité et l'idéal engendré par g et $\tau(g)$ contient 1.

Si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $\varepsilon > 0$, soit $H_{f,\varepsilon} = \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \cap f^{-1}(B(0,\varepsilon)) = \{\tau \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \mid \|f^\tau - f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \varepsilon\}$; c'est un sous-groupe ouvert de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ contenant H_f. On note $K_{f,\varepsilon}$ le sous-corps de $\overline{F}$ fixé par $H_{f,\varepsilon}$ et $B_{f,\varepsilon} = \overline{C\{X\}} \cap K_{f,\varepsilon}$ la clôture intégrale de $C\{X\}$ dans $K_{f,\varepsilon}$, ce qui fait de $K_{f,\varepsilon}$ une extension finie de F.

Proposition 6.8. — *Si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $f_\varepsilon \in B_{f,\varepsilon}$ vérifiant $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^2\varepsilon$.*

Démonstration. — Par définition de $H_{f,\varepsilon}$, on a $\Delta_{K_{f,\varepsilon}}(f) \leqslant \varepsilon$ et d'après la proposition 4.9, il existe $x_\varepsilon \in K_{f,\varepsilon}$ vérifiant $\|f - x_\varepsilon\|_{\mathrm{spec}} \leqslant p^2\varepsilon$. Écrivons x_ε sous la forme $g^{-1}b_\varepsilon$, où g est un élément de $C\{X\}$ de norme 1 et b_ε est un élément de $B_{f,\varepsilon}$.

D'après le lemme 6.6, $K_{f,\varepsilon}$ et $B_{f,\varepsilon}$ sont stable par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$. En particulier, si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors $\tau(x_\varepsilon) \in K_{f,\varepsilon}$ et $\tau(b_\varepsilon) \in B_{f,\varepsilon}$.

D'après le lemme 6.7, il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ et des éléments u, v de $\mathscr{O}_C\{X\}$ tels que l'on ait $ug + v\tau(g) = 1$. Soit $y_\varepsilon = \tau(x_\varepsilon) - f(\tau) = f + \tau(x_\varepsilon - f)$. Finalement, soit $f_\varepsilon = ugx_\varepsilon + v\tau(g)y_\varepsilon$. Par construction, f_ε est un élément de $B_{f,\varepsilon}$ et on a

$$f - f_\varepsilon = ug \cdot (f - x_\varepsilon) + v\tau(g) \cdot \tau(f - x_\varepsilon),$$

ce qui implique $\|f - f_\varepsilon\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \|f - x_\varepsilon\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^2\varepsilon$ car u, v, g et $\tau(g)$ sont de norme $\leqslant 1$ et τ est une isométrie de $\widehat{C\{X\}}$.

Lemme 6.9. — *Si K est une extension galoisienne de F de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ stable par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$, alors K est inclus dans le corps des fractions de $C\{X\}^{(\infty)}$.*

Démonstration. — D'après la théorie de Kummer, le groupe $H = \left((K^*)^{p^n} \cap F^*\right)/(F^*)^{p^n}$ est le dual de $\mathrm{Gal}(K/F)$ et est donc cyclique. Choisissons $f \in (K^*)^{p^n} \cap F^*$ dont l'image dans H est un générateur de H. On a alors $K = F(\sqrt[p^n]{f})$. D'autre part, $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ agit sur H et, si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, il existe $i(\tau) \in \{0, \ldots, p^n - 1\}$, $i(\tau)$ premier à p et $g_\tau \in F^*$ tels que l'on ait $\tau(f) = f^{i(\tau)}g_\tau^{p^n}$.

Si D désigne le diviseur de f sur $B(0,1)$, le diviseur de $\tau(f)$ est le translaté $D \ominus x(\tau)$ de D par $-x(\tau)$ et comme on peut choisir τ de telle sorte que les diviseurs D et $D \ominus x(\tau)$ soient étrangers, on déduit de la relation ci-dessus le fait que D est divisible par p^n et donc qu'il existe un élément g de F^* tel que le diviseur de g^{p^n} soit égal à D. On peut donc, quitte à multiplier f par g^{-p^n}, se débrouiller pour que f n'ait ni zéro ni pôle sur $B(0,1)$ et, quitte à diviser f par $f(0)$, on peut même imposer à f d'appartenir à $1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$, ce qui permet de conclure.

Proposition 6.10. — *$\widehat{\mathscr{C}}$ est inclus dans $\widetilde{C\{X\}}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \widehat{\mathscr{C}}$. Comme f induit un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(K_f/F)$ sur un sous-groupe de C, cela implique que toute extension finie de F incluse dans K_f est abélienne de groupe de Galois un p-groupe et donc est la composée d'extensions de F de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p^{n_i}\mathbf{Z}$. Comme d'autre part, toutes les extensions de F contenue dans K_f sont stables par $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ d'après le lemme 6.6, le lemme 6.9 permet de montrer que $K_{f,\varepsilon}$ est inclus dans le corps des fractions de $C\{X\}^{(\infty)}$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Comme de plus, $C\{X\}^{(\infty)}$ est intégralement clos dans son corps des fractions (cf. prop.5.8), on a $B_{f,\varepsilon} \subset C\{X\}^{(\infty)}$ quel que soit $\varepsilon > 0$. Ceci implique (cf. prop. 6.8) que f est une limite d'élements de $C\{X\}^{(\infty)}$ et appartient donc à $\widetilde{C\{X\}}$, ce qu'il fallait démontrer.

6.4. Composition des correspondances analytiques. — Si f et g sont deux éléments de $\widehat{C\{X\}}$ de norme $\leqslant 1$, on dit que f et g sont *analytiquement composables* s'il existe $h \in \widehat{C\{X\}}$ tel que $\Gamma_h \subset \Gamma_{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}}$. Un tel h est appelé *un composé analytique* de f et g. Il n'est pas clair a priori que l'on puisse composer analytiquement deux éléments quelconques de $\widehat{C\{X\}}$ de norme $\leqslant 1$.

Par exemple, si $f^p = X$, un composé de f et g devrait être une solution de l'équation $Y^p = g$ et il n'est pas absolument clair que cette équation a une solution dans $\widehat{C\{X\}}$ pour tout $g \in \widehat{C\{X\}}$. Nous allons donner ci-dessous (prop. 6.11) une condition suffisante pour pouvoir composer deux éléments de $\widehat{C\{X\}}$. Remarquons aussi que si f et g sont analytiquement composables, ils peuvent très bien avoir plusieurs composés analytiques. Par exemple, si $g = X^2$ et $f^2 = X$, alors X et $-X$ sont des composés analytiques de f et g.

Proposition 6.11. — *Si $f \in \widetilde{C\{X\}}$ et $g \in \widehat{C\{X\}}$ est de norme $\leqslant 1$, alors f et g ont un composé analytique.*

Démonstration. — Il est commode de changer de variable et de supposer $f \in \widetilde{C\{Y\}}$. Soit $\tau \in \mathrm{T}_{\widehat{C\{X\}}}$ vérifiant $y(\tau) = g$ (un tel τ existe en vertu de la proposition 5.23 puisque $\widehat{C\{X\}}$ est sympathique d'après la proposition 5.1). Si $s \in \widehat{B(0,1)}$ vérifie $s(X) = x$, alors

$$t = s \circ s_{\widehat{C\{X\}}} \circ \tau : \widetilde{C\{Y\}} \longrightarrow C$$

vérifie $t(Y) = s(g) \in \{g_{\mathrm{co}}(x)\}$ et donc $t(f) \in \{f_{\mathrm{co}}(\{g_{\mathrm{co}}(x)\})\}$; on en déduit le fait que $h = s_{\widehat{C\{X\}}} \circ \tau(f) = f(\tau)$ est un composé analytique de f et g, ce qui permet de conclure.

6.5. Les anneaux $\mathscr{C}$ et $\widehat{\mathscr{C}}$. — Soit $\widehat{\mathscr{C}}^0 = \{f \in \widehat{\mathscr{C}} \mid \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1\}$.

Proposition 6.12. — *Si f et g sont deux éléments de $\widehat{\mathscr{C}}^0$, il existe un unique composé analytique $f \cdot g$ de f et g vérifiant $f \cdot g(0) = 0$. De plus, $f \cdot g \in \widehat{\mathscr{C}}^0$.*

Démonstration. — L'existence d'un tel composé analytique est une conséquence des propositions 6.11 et 6.10. Si h et h' sont deux composés analytiques de f et g, on a $\{h_{\mathrm{co}}(x)\} - \{h'_{\mathrm{co}}(x)\} \subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(x)\} - \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(x)\} \subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(0)\}$ et donc $h - h'$ est à valeurs dans $\{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(0)\}$ qui est compact. Ceci implique $h - h' \in C$ et comme $h(0) = h'(0) = 0$ on en déduit l'égalité $h = h'$ et l'unicité d'un composé analytique de f et g s'annulant en 0. De plus, si h est un tel composé, on a $\{h_{\mathrm{co}}(x+y)\} - \{h_{\mathrm{co}}(x)\} - \{h_{\mathrm{co}}(y)\} \subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(x+y)\} - \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(x)\} - \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(y)\} \subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(0)\}$, ce qui prouve que h est additif car $\{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}}(0)\}$ est compact.

Lemme 6.13. — *La loi $\cdot$ est associative.*

Démonstration. — La composition des correspondances étant associative, on a, si $x \in B(0,1)$,

$$\begin{aligned}\big\{\big(f \cdot (g \cdot h) - (f \cdot g) \cdot h\big)_{\mathrm{co}}(x)\big\} &\subset \big\{\big(f \cdot (g \cdot h)\big)_{\mathrm{co}}(x)\big\} - \big\{\big((f \cdot g) \cdot h\big)_{\mathrm{co}}(x)\big\} \\ &\subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}} \odot h_{\mathrm{co}}(x)\} - \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}} \odot h_{\mathrm{co}}(x)\} \\ &\subset \{f_{\mathrm{co}} \odot g_{\mathrm{co}} \odot h_{\mathrm{co}}(0)\}\end{aligned}$$

et comme ce dernier ensemble est compact, on en déduit l'égalité de $f \cdot (g \cdot h)$ et $(f \cdot g) \cdot h$, ce qu'il fallait démontrer.

Lemme 6.14. — *La loi $\cdot$ est distributive à droite et à gauche par rapport à l'addition.*

Démonstration. — On vérifie que si f et g, g' sont des éléments de $\widehat{\mathscr{C}}^0$, alors $f\cdot(g+g')-f\cdot g-f\cdot g'$ est à valeurs dans $\{f_{\rm co}(\{g_{\rm co}(0)\})\}+\{f_{\rm co}(\{g'_{\rm co}(0)\})\}$ qui est compact et donc que $f\cdot(g+g')-f\cdot g-f\cdot g'$ est identiquement nulle car constante et nulle en 0. De même, si f, f' et g sont des éléments de $\widehat{\mathscr{C}}^0$, alors $(f+f')\cdot g-f\cdot g-f'\cdot g$ est à valeurs dans $\{f_{\rm co}(\{g_{\rm co}(0)\})\}+\{f'_{\rm co}(\{g_{\rm co}(0)\})\}$ et donc est nulle, ce qui permet de conclure.

Rappelons que, si $c\in C$, on note $[c]$ l'élément additif cX de $\widehat{C\{X\}}$.

Lemme 6.15. — *Si $f\in\widehat{C\{X\}}$ est additif et $c\in\mathbf{Z}$, alors $f\cdot[c]=cf=[c]\cdot f$.*

Démonstration. — On a $\{f_{\rm co}(cx)\}-c\{f_{\rm co}(x)\}\subset\{f_{\rm co}(0)\}$ qui est compact ; on en déduit le résultat.

Lemme 6.16. — *L'application $(f,g)\to f\cdot g$ est continue sur $\widehat{\mathscr{C}}^0$.*

Démonstration. — Si f est un élément non nul de $\widehat{\mathscr{C}}^0$, soit $n(f)$ le plus grand entier n tel que l'inégalité $\|f\|_{\rm sp}\leqslant p^{-n}$ soit satisfaîte. Si $f_0=p^{-n(f)}f$, on a $f_0\in\widehat{\mathscr{C}}^0$ et $\|f\|_{\rm sp}=p^{-n(f)}\|f_0\|_{\rm sp}\leqslant p^{-n(f)}\leqslant p\|f\|_{\rm sp}$ par définition de $n(f)$. Si g est un autre élément non nul de $\widehat{\mathscr{C}}^0$ et $g_0=p^{-n(g)}g$, on déduit du lemme 6.15 l'égalité $f\cdot g=p^{n(f)+n(g)}f_0\cdot g_0$ et l'inégalité

$$\|f\cdot g\|_{\rm sp}\leqslant p^{-n(f)-n(g)}\leqslant p^2\|f\|_{\rm sp}\|g\|_{\rm sp}$$

qui, compte tenu de la bilinéarité de l'application $(f,g)\to f\cdot g$, permet de conclure.

Corollaire 6.17. — *Si $f\in\widehat{C\{X\}}$ est additif et $c\in\mathbf{Z}_p$, alors $f\cdot[c]=cf=[c]\cdot f$.*

Démonstration. — Si c_n est une suite d'éléments de $\mathbf{Z}$ ayant c pour limite, il suffit de passer à la limite dans l'égalité $f\cdot[c_n]=c_nf=[c_n]\cdot f$.

Si f et g sont deux éléments de $\widehat{\mathscr{C}}$ et $n,m\in\mathbf{N}$ sont tels que p^nf et p^mg appartiennent à $\widehat{\mathscr{C}}^0$, on peut poser $f\cdot g=p^{-n-m}(p^nf)\cdot(p^mg)$ et le lemme 6.15 permet de montrer que le résultat ne dépend pas des choix de n et m.

Proposition 6.18. — *$\widehat{\mathscr{C}}$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre dont $\mathscr{C}$ et C sont des sous-$\mathbf{Q}_p$-algèbres.*

Démonstration. — Ce que nous avons démontré jusqu'ici dans ce n° suffit pour montrer que $\widehat{\mathscr{C}}$ est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre. Comme C en est une sous-algèbre de manière évidente, il ne reste qu'à vérifier que si f et g sont deux éléments de $\mathscr{C}^0=\mathscr{C}\cap\widehat{\mathscr{C}}^0$, alors $f\cdot g\in\mathscr{C}^0$, ce qui est évident car $\{(f\cdot g)_{\rm co}(0)\}\subset\{f_{\rm co}(\{g_{\rm co}(0)\})\}$ est de rang fini sur $\mathbf{Z}_p$ si $\{f_{\rm co}(0)\}$ et $\{g_{\rm co}(0)\}$ le sont.

6.6. Surjectivité des correspondances analytiques additives

Proposition 6.19. — *Si $f\in\widehat{\mathscr{C}}$, alors f induit une surjection de $\widetilde{\rm T}_C$ sur $B(0,\|f\|_{\rm sp})$.*

Démonstration. — Pour alléger les notations, posons $\delta=\|f\|_{\rm sp}$. Si $\delta=0$, le résultat est évident. Dans le cas contraire, soient $f_{1,0}\in\overline{C\{X\}}$ tel que $\|f-f_{1,0}\|_{\rm sp}\leqslant p^{-1}\delta$ et $f_1=f_{1,0}-f_{1,0}(0)$. On a donc $f_1(0)=0$ et $\|f-f_1\|_{\rm sp}\leqslant p^{-1}\delta$ car $f(0)=0$ et $\|f-f_{1,0}\|_{\rm sp}\leqslant p^{-1}\delta$ impliquent $|f_{1,0}(0)|\leqslant p^{-1}\delta$. D'après le lemme 3.15, il existe $\alpha_1,\dots,\alpha_m\in B(0,\delta)$ tels que si x n'est pas congru à un des α_i modulo $B(0,\delta^-)$, alors il existe $\tau\in\widetilde{\rm T}_C$ vérifiant $f_1(\tau)=x$ et donc $f(\tau)-x\in B(0,p^{-1}\delta)$. Maintenant, si $x\in B(0,\delta)$ est quelconque et a est un élément de $B(0,\delta)$ non congru modulo $B(0,\delta^-)$ à l'un des α_i ou l'un des α_i-x, il existe $\tau_1,\tau_2\in\widetilde{\rm T}_C$ vérifiant $f(\tau_1)-(x+a)\in B(0,p^{-1}\delta)$

et $f(\tau_2) - a \in B(0, p^{-1}\delta)$ et donc $f(\tau_1\tau_2^{-1}) - x \in B(0, p^{-1}\delta)$. On en déduit le fait que f induit une surjection de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur $B(0,\delta)/B(0,p^{-1}\delta)$. Soit $\ell : B(0,\delta)/B(0,p^{-1}\delta) \to \widetilde{\mathrm{T}}_C$ une section de f. Soit alors $x_0 \in B(0,\delta)$ et définissons par récurrence des suites $(\sigma_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ et $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $B(0,\delta)$ par les formules $\sigma_n = \ell(x_n)$ et $x_{n+1} = p^{-1}(x_n - f(\ell(x_n)))$. Posons finalement $\tau_n = \prod_{i=0}^n \sigma_i^{p^i}$. La suite de terme général $x(\tau_n) = \sum_{i=1}^n p^i x(\sigma_i)$ converge et la suite de terme général τ_n a donc une valeur d'adhérence τ dans $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ (cf. lemme 3.13). On a alors

$$f(\tau) = \lim_{n\to+\infty} f(\tau_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n f(\sigma_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} p^n f(\ell(x_n)) = \sum_{n=0}^{+\infty}(p^n x_n - p^{n+1}x_{n+1}) = x_0;$$

on en déduit la surjectivité de f.

Corollaire 6.20. — *Si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ et $n \in \mathbf{N}$, alors $\{f_{\mathrm{co}}(B(0,p^{-n}))\} \supset B(0, p^{-n}\|f\|_{\mathrm{sp}})$.*

Démonstration. — Si $x \in B(0,p^{-n}\|f\|_{\mathrm{sp}})$, on peut écrire x sous la forme $p^n y$ avec $y \in B(0,\|f\|_{\mathrm{sp}})$. Il existe alors $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que l'on ait $f(\tau) = y$ d'après la proposition 6.19 et $\sigma = \tau^{p^n}$ vérifie $x(\sigma) = p^n x(\tau) \in B(0,p^{-n})$ et $f(\sigma) = p^n f(\tau) = x$; ceci permet de conclure.

6.7. La transposée d'une correspondance additive. — Si V est un sous-groupe de $B(0,1)$ et $n \in \mathbf{N}$, on note $V^{(n)}$ le groupe $V/(V \cap B(0,p^{-n}))$. On montre facilement que V est compact si et seulement si il est fermé et chacun des $V^{(n)}$ est fini. Si I est un ensemble fini, on note $|I|$ son cardinal.

Proposition 6.21. — (i) *Si f est un élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1, alors la transposée de f_{co} est analytique. Plus précisément, il existe un unique élément ${}^t\!f$ de $\widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1 tel que l'on ait $({}^t\!f)_{\mathrm{co}} = {}^t(f_{\mathrm{co}})$.*

(ii) *V_f^0 et $V_{{}^t\!f}^0$ sont des groupes compacts et il existe des constantes C_1, C_2 strictement positives telles que, si $n \geqslant 3$, l'on ait*

$$C_1|(V_f^0)^{(n-3)}| \leqslant |(V_{{}^t\!f}^0)^{(n)}| \leqslant C_2|(V_f^0)^{(n+3)}|.$$

Corollaire 6.22. — *Si $f \in \mathscr{C} - \{0\}$, alors*

(i) $\dim_{\mathbf{Q}_p} V_f = \dim_{\mathbf{Q}_p} U_f = \dim_{\mathbf{Q}_p} V_{{}^t\!f} = \dim_{\mathbf{Q}_p} U_{{}^t\!f}$,

(ii) ${}^t\!f \in \mathscr{C}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence du (i). Maintenant, si $f \neq 0$, il existe $c \in C^*$ tel que $\|cf\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et on a $U_{cf} = cU_f$ et $V_{cf} = V_f$. On peut donc, quitte à remplacer f par cf, supposer que l'on a $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$. Dans ce cas, on a $U_f^0 = V_{{}^t\!f}^0$ et $V_f^0 = U_{{}^t\!f}^0$ d'après le (i) de la proposition 6.21 et, comme un sous-$\mathbf{Z}_p$-module V de C est de rang h sur $\mathbf{Z}_p$ si et seulement si $p^{-nh}|V^{(n)}|$ a une limite finie non nulle quand n tend vers $+\infty$, on déduit du (ii) de la proposition 6.21 que les $\mathbf{Z}_p$-modules U_f^0 et V_f^0 ont même rang, ce qui, tensorisant le tout par $\mathbf{Q}_p$, permet de conclure.

Lemme 6.23. — *Soit $f \in \widehat{\mathscr{C}}$. Si $n \in \mathbf{N}$, soient $H_n = \mathrm{H}_{C\{X\}} \cap f^{-1}(p^{n+2}\mathscr{O}_C)$ et soit $B_n = (C\{X\}^{(\infty)})^{H_n}$. Alors il existe une suite f_n d'éléments de $C\{X\}^{(\infty)}$ vérifiant les conditions suivantes :*

(i) $f_n \in B_n$;

(ii) $\|f - f_n\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^{-n}$;

(iii) $f_n(0) = 0$;

(iv) $F(f_n) = K_n$, *où* $K_n = \mathrm{Frac}(B_n)$.

Démonstration. — L'existence d'un élément $f_{n,1}$ vérifiant les conditions (i) et (ii) est une conséquence de la proposition 6.8. Maintenant, si $a_n \in B_n$ vérifie $\|a_n\|_{\mathrm{sp}} \leqslant 1$ et est tel que $F(a_n) = K_n$, il existe $c \in \mathscr{O}_C$ tel que $f_{n,2} = f_{n,1} + p^n c a_n$ vérifie la condition (iv) tout en continuant à vérifier les conditions (i) et (ii). Finalement, comme $f(0) = 0$, on a $f_{n,2}(0) \in p^n \mathscr{O}_C$ et $f_n = f_{n,2} - f_{n,2}(0)$ vérifie toutes les conditions du lemme 6.23.

Dans toute la suite, on se fixe une suite f_n d'éléments de $\overline{C\{X\}}$ vérifiant les conditions du lemme 6.23 et on note P_n le polynôme minimal de f_n sur F. Comme $\|f\|_{\mathrm{sp}} = 1$, on a $\|f_n\|_{\mathrm{sp}} = 1$ et P_n est un élément de $\mathscr{O}_C\{X\}[Y] \subset \mathscr{O}_C\{X, Y\}$.

Lemme 6.24. — *Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\overline{P}_n$ la réduction de P_n dans $k_C[X, Y]$ et soit s le degré de $\overline{P}_1$ en X. Alors P_n est régulier en X de degré $s[K_n{:}K_1]$.*

Démonstration. — Comme $f_n \equiv f \mod p^n$ et $\sigma(f) = f + f(\sigma)$ si $\sigma \in \mathrm{H}_{C\{X\}}$, les racines de P_n dans $\mathfrak{m}_{\overline{C\{X\}}}$ sont les images des $f + f(\sigma)$ pour $\sigma \in \mathrm{H}_{C\{X\}}/H_n$. Comme d'autre part, on a $f(\sigma) \in \mathfrak{m}_C$ si $\sigma \in H_1$, les racines de $\overline{P}_n$ sont les mêmes que celles de $\overline{P}_1$, chacune apparaissant avec multiplicité $|H_1/H_n| = [K_n{:}K_1]$. On en déduit la formule $\overline{P}_n = \overline{P}_1^{[K_n:K_1]}$. Pour conclure, il suffit donc de prouver que P_1 est régulier en X.

Si $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, les racines de $\tau(P_1)$ sont les $\tau(\sigma(f_1))$ pour $\sigma \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ et comme $\tau(\sigma(f_1)) \equiv f + \tau(f) + \tau(\sigma)$ modulo p et donc aussi modulo $\mathfrak{m}_C$, on a $\overline{\tau(P_1)}(Y) = \overline{P}_1(Y - \overline{f(\tau)})$, ce qui se traduit par l'identité $\overline{P}_1(X + \overline{x(\tau)}, Y) = \overline{P}_1(X, Y - \overline{f(\tau)})$. Il suffit alors d'identifier les termes de plus haut degré en X dans les deux membres et d'utiliser le fait que l'application $\tau \to \overline{f(\tau)}$ est une surjection de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur k_C d'après la proposition 6.19 pour prouver que le coefficient du terme de degré s est une constante et terminer la démonstration du lemme.

Lemme 6.25. — *Si $n \in \mathbf{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $x \in V_f^0 + B(0, p^{-n})$,

(ii) *Il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que $x = x(\tau)$ et $f(\tau) \in B(0, p^{-n})$*

(ii′) $\{f_{\mathrm{co}}(x)\} \subset U_f^0 + B(0, p^{-n})$.

(iii) *Il existe $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que $x = x(\tau)$ et $f_n(\tau) \in B(0, p^{-n})$*

(iv) *Il existe $y \in B(0, p^{-n})$ tel que $P_n(x, y) = 0$.*

Démonstration. — Si $x \in V_f^0 + B(0, p^{-n})$, il existe $\tau_1 \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ et $c \in B(0, p^{-n})$ tels que $f(\tau_1) = 0$ et $x = x(\tau_1) + c$. D'autre part, il existe τ_2 tel que $x(\tau_2) = -p^{-n}c$ et si l'on pose $\tau = \tau_1\tau_2^{p^n}$, on a $x(\tau) = x(\tau_1) + p^n x(\tau_2) = x$ et $f(\tau) = f(\tau_1) + p^n f(\tau_2) \in B(0, p^{-n})$. On en tire l'implication (i)$\Rightarrow$(ii). Réciproquement, si $f(\tau) \in B(0, p^{-n})$, comme f est une surjection de $\widetilde{\mathrm{T}}_C$ sur $B(0, 1)$, il existe $\tau_1 \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ tel que l'on ait $f(\tau_1) = -p^{-n} f(\tau)$. Si on pose alors $\sigma = \tau\tau_1^{p^n}$, on a $f(\sigma) = 0$ et $x(\tau) = x(\sigma) - p^n x(\tau_1)$, ce qui permet de prouver l'implication (ii)$\Rightarrow$(i).

L'équivalence de (ii) et (ii′) vient de ce que, si y est n'importe quel élément de $\{f_{\mathrm{co}}(x)\}$, alors $\{f_{\mathrm{co}}(x)\} = y + U_f^0$. Finalement, l'équivalence (ii)$\Leftrightarrow$(iii) est une simple conséquence de l'inégalité $\|f - f_n\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^{-n}$ et (iii)$\Leftrightarrow$(iv) suit de la proposition 3.10.

Lemme 6.26. — *$V_f^0 + B(0, p^{-n})$ ne contient pas $B(0, p^{1-n})$.*

Démonstration. — Supposons le contraire. Le corollaire 6.20 montre que $\{f_{\mathrm{co}}(B(0,p^{1-n}))\}$ contient $B(0,p^{1-n})$ et on déduit de l'équivalence entre les propriétés (i) et (ii$'$) du lemme 6.25, que $U_f^0+B(0,p^{-n})$ contient $B(0,p^{1-n})$, ce qui est absurde car U_f^0 est compact.

Pour la suite de la démonstration de la proposition 6.21, nous allons avoir besoin de faire jouer un rôle différent à X et Y et nous noterons $\mathrm{T}_{C,X}$ (resp. $\mathrm{T}_{C,Y}$) le groupe des automorphismes de $\widehat{C\{X\}}$ (resp. $\widehat{C\{Y\}}$) correspondant à $\widetilde{\mathrm{T}}_C$. La fonction $\tau\to\tau(Y)-Y$ sera, quant à elle, notée $y(\tau)$. Le graphe Γ_f d'un élément f de $\widehat{C\{X\}}$ est, comme jusqu'ici, l'image de $\mathrm{T}_{C,X}$ par l'application $\tau\to(x(\tau),f(\tau))$ tandis que celui d'un élément g de $\widehat{C\{Y\}}$ est l'image Γ_g de $\mathrm{T}_{C,Y}$ par l'application $\tau\to(g(\tau),y(\tau))$; c'est donc le transposé du graphe de g vu comme élément de $\widehat{C\{X\}}$ via l'isomorphisme naturel de $\widehat{C\{X\}}$ sur $\widehat{C\{Y\}}$.

Lemme 6.27. — (i) *V_f^0 est compact.*

(ii) *Le cardinal de $(V_f^0)^{(n-1)}$ est majoré par $s[K_n{:}K_1]$.*

Démonstration. — Notons V le groupe V_f^0. Soit x_n une suite d'éléments de V ayant une limite x dans $\mathscr{O}_C$. Si $n\in\mathbf{N}$, il existe $\tau_n\in\mathrm{T}_{C,X}$ vérifiant $x(\tau_n)=x_n$ et $f(\tau_n)=0$. Comme la suite $x(\tau_n)$ converge par hypothèse, la suite τ_n admet, d'après le lemme 3.13 une valeur d'adhérence τ dans $\mathrm{T}_{C,X}$. On a alors $x(\tau)=\lim_{n\to+\infty}x(\tau_n)=x$ et $f(\tau)=\lim_{n\to+\infty}f(\tau_n)=0$, ce qui montre que x appartient à V. On en déduit la complétude de V, ce qui fait que la compacité de V est équivalente à la finitude de $V^{(n)}$ pour tout n. Il suffit donc de prouver le (ii).

D'après le lemme 6.24, l'équation $P_n(X,p^nY)=0$ a $s[K_n{:}K_1]$ solutions dans $\overline{C\{Y\}}$ que nous noterons $h_{n,i}$ pour $1\leqslant i\leqslant s[K_n{:}K_1]$. Si $\tau\in\mathrm{T}_{C,Y}$, les $h_{n,i}(\tau)$ sont les $s[K_n{:}K_1]$ solutions (avec multiplicité) de l'équation $P_n(X,p^ny(\tau))=0$. On déduit alors du lemme 6.25 le fait que $V+B(0,p^{-n})$ est la réunion des $h_{n,i}(\mathrm{T}_{C,Y})$ pour $1\leqslant i\leqslant s[K_n{:}K_1]$. Si $y_{n,i}=h_{n,i}(0)$ et $\rho_{n,i}=\|h_{n,i}-y_{n,i}\|_{\mathrm{sp}}$, d'après le lemme 3.15, $h_{n,i}(\mathrm{T}_{C,Y})$ contient la boule $B(y_{n,i},\rho_{n,i})$ privée d'un nombre fini de boules ouvertes de rayon $\rho_{n,i}$. Si $\rho_n=\sup_i\rho_{n,i}$, comme $V+B(0,p^{-n})$ est un sous-groupe de $B(0,1)$, il contient la boule $B(0,\rho_n)$; on a donc $\rho_n\leqslant p^{1-n}$ d'après le lemme 6.26 et $V^{(n-1)}$ est un quotient de dans $V/(V\cap B(0,\rho_n))\subset(V+B(0,p^{-n}))/B(0,\rho_n)$ qui est un groupe ayant au plus $s[K_n{:}K_1]$ éléments. Ceci permet de conclure.

Passons à la démonstration de la proposition 6.21. Comme on a supposé $f_n(0)=0$, il existe $g_n\in\overline{C\{Y\}}$ vérifiant $g_n(0)=0$ et $P_n(g_n,Y)=0$ (lemme 6.24 et prop. 3.2). Le polynôme minimal de g_n est un élément de $C\{Y\}[X]$ et, par construction, il divise P_n dans $C\{X,Y\}$. On en déduit l'inclusion $\Gamma_{g_n}\subset\Gamma_{f_n}$ ce qui se traduit, si $\tau\in\mathrm{T}_{C,Y}$, par l'existence de $\sigma_n\in\mathrm{T}_{C,X}$ vérifiant $x(\sigma_n)=g_n(\tau)$ et $f_n(\sigma_n)=y(\tau)$. Soit $u_n=\sigma_n^{-1}\sigma_{n+1}$. Comme $\|f-f_n\|_{\mathrm{sp}}\leqslant p^{-n}$ et $\|f-f_{n+1}\|_{\mathrm{sp}}\leqslant p^{-1-n}\leqslant p^{-n}$ et comme $f_n(\sigma_n)=f_{n+1}(\sigma_{n+1})$, on a $f(u_n)=f(\sigma_{n+1})-f(\sigma_n)\in B(0,p^{-n})$, ce qui implique $x(u_n)=g_{n+1}(\tau)-g_n(\tau)\in V_f^0+B(0,p^{-n})$. D'autre part, comme V_f^0 est compact d'après le lemme 6.27 et $g_{n+1}(0)-g_n(0)=0$ par construction, cela implique $\|g_{n+1}-g_n\|_{\mathrm{sp}}\leqslant p^{-n}$ d'après le corollaire 3.16. La suite de terme général g_n a donc une limite g dans $\widehat{C\{Y\}}$. Le polynôme P_n est unitaire en Y ; ce qui implique que le terme constant de $\overline{P}_n$, vu comme polynôme en X, est non nul et donc que toutes les racines de P_n dans $\overline{C\{Y\}}$ sont de norme 1. En particulier, on a $\|g_n\|_{\mathrm{sp}}=1$, ce qui implique, en passant à la limite, $\|g\|_{\mathrm{sp}}=1$.

Soit $\tau \in \mathrm{T}_{C,Y}$. Si $n \in \mathbf{N}$, il existe $\sigma_n \in \mathrm{T}_{C,X}$ tel que l'on ait $x(\sigma_n) = g_n(\tau)$ et $f_n(\sigma_n) = y(\tau)$. Comme la suite de terme général $x(\sigma_n)$ converge vers $g(\tau)$, la suite de terme général σ_n admet, d'après le lemme 3.13, une valeur d'adhérence σ dans $\mathrm{T}_{C,X}$. Un passage à la limite nous fournit les formules $x(\sigma) = g(\tau)$ et $f(\sigma) = y(\tau)$; on en déduit l'inclusion $\Gamma_g \subset \Gamma_f$. Soit $\sigma \in \mathrm{T}_{C,Y}$ fixé et soit h_σ l'élément de $\widehat{C\{Y\}}$ donné par la formule $h_\sigma = \sigma(g) - g - g(\sigma)$. Si $\tau \in \mathrm{T}_{C,Y}$, on a $h_\sigma(\tau) = g(\tau\sigma) - g(\tau) - g(\sigma)$. Comme $\Gamma_g \subset \Gamma_f$ et Γ_f est un sous-groupe de $B(0,1) \times B(0,1)$, le couple $(h_\sigma(\tau), 0)$ qui peut aussi s'écrire sous la forme $(g(\tau\sigma), y(\tau\sigma)) - (g(\tau), y(\tau)) - (g(\sigma), y(\sigma))$ est un élément de Γ_f. Ceci implique que h_σ est à valeurs dans V_f^0 et comme V_f^0 est compact (lemme 6.27) et $h_\sigma(0) = 0$, on en déduit (corollaire 3.16) la nullité de h_σ et l'additivité de g.

Soit ${}^tf \in \widehat{C\{X\}}$ l'image de g par un isomorphisme $\widehat{C\{Y\}} \cong \widehat{C\{X\}}$. D'après ce qui précède, ${}^tf$ est un élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1 et vérifie $\Gamma_{{}^tf} \subset {}^t\Gamma_f$. On peut faire le même raisonnement en partant de ${}^tf$ et obtenir un élément ${}^t({}^tf) \in \widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1 vérifiant $\Gamma_{{}^t({}^tf)} \subset {}^t\Gamma_{{}^tf} \subset \Gamma_f$. Mais alors ${}^t({}^tf) - f$ est un élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ à valeurs dans U_f^0 qui est compact et donc ${}^t({}^tf) = f$. On en tire le fait que toutes les inclusions précédentes sont des égalités, ce qui démontre le (i) de la proposition 6.21.

Finalement, on a $V_{{}^tf}^0 = U_f^0 = f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}})$. Ceci nous donne

$$(V_{{}^tf}^0)^{(n)} = f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}})/(f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}) \cap B(0, p^{-n})) \cong \mathrm{H}_{C\{X\}}/H_{n-2}$$

et le cardinal de $(V_{{}^tf}^0)^{(n)}$ est donc aussi égal à $[K_{n-2}{:}F]$. On déduit alors du (ii) du lemme 6.27, l'inégalité $|(V_f^0)^{(n)}| \leqslant \frac{s}{[K_1:F]}|(V_{{}^tf}^0)^{(n+3)}|$, ce qui nous fournit une des inégalités du (ii) de la proposition 6.21, l'autre s'obtenant en échangeant les rôles de f et ${}^tf$.

Théorème 6.28. — *$\widehat{\mathscr{C}}$ est un corps dont $\mathscr{C}$ et C sont des sous-corps.*

Démonstration. — Comme on sait déjà que $\widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}$ sont des anneaux, il ne reste plus qu'à vérifier que tout élément non nul de $\widehat{\mathscr{C}}$ est inversible et que, si $f \in \mathscr{C}$, alors $f^{-1} \in \mathscr{C}$. Si f est un élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1, d'après la proposition 6.21, il existe ${}^tf \in \widehat{\mathscr{C}}$ de norme 1 dont la correspondance associée est la transposée de celle associée à f. Le graphe de $f_{\mathrm{co}} \odot {}^tf_{\mathrm{co}}$ contient donc la diagonale de $B(0,1) \times B(0,1)$, ce qui implique que ${}^tf \cdot f = [1]$ et donc que f est un élément inversible de $\widehat{\mathscr{C}}$ admettant ${}^tf$ comme inverse. De plus, si $f \in \mathscr{C}$, on a ${}^tf \in \mathscr{C}$ d'après le corollaire 6.22. Dans le cas général, si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ est non nul, il existe $c \in C$ tel que $\|cf\|_{\mathrm{sp}} = 1$, ce qui prouve que $f = [c^{-1}] \cdot (cf)$ est inversible comme produit de deux éléments inversibles et, si $f \in \mathscr{C}$, alors $f^{-1} \in \mathscr{C}$ car f^{-1} est le produit d'un élément de $\mathscr{C}$ et d'un élément de $C \subset \mathscr{C}$.

6.8. Correspondances de rang 0.

Proposition 6.29. — *Si f est un élément de $\mathscr{C}$ de rang 0, alors il existe $c \in C$ tel que l'on ait $f = [c]$.*

Démonstration. — Si f est de rang 0, alors $f(\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}) = 0$ et le sous-groupe $G_{f,\varepsilon} = \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}} \cap f^{-1}(B(0,\varepsilon))$ de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ est égal à $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui permet d'utiliser la proposition 6.8 pour montrer $f \in C\{X\}$. L'additivité de f est alors équivalente à la formule $f(X + x) = f(X) + f(x)$ quel que soit $x \in B(0,1)$. Si on dérive cette formule par rapport à X et qu'on évalue le résultat en $X = 0$, on voit que f' est constante et le résultat s'en déduit.

Proposition 6.30. — *C est un sous-corps commutatif maximal de $\mathscr{C}$ et $\widehat{\mathscr{C}}$.*

Démonstration. — Soit $f \in \widehat{\mathscr{C}}$ commutant à tous les éléments de C et soit $c \in \mathscr{O}_C^*$. On a

$$c\{f_{\rm co}(x)\} = \{(cf)_{\rm co}(x)\} = \{([c]\cdot f)_{\rm co}(x)\} = \{(f\cdot [c])_{\rm co}(x)\} \subset \{f_{\rm co}(cx)\}$$

quel que soit $x \in B(0,1)$. On peut en particulier utiliser ceci pour $x = 0$ et, si on pose $H = U_f^0$, on en tire l'inclusion $H \subset c^{-1}H$ quel que soit $c \in \mathscr{O}_C^*$ et comme H est compact (ce qui implique en particulier que H ne contient pas $p^n\mathscr{O}_C$), on en déduit la nullité de H qui équivaut au fait que f est de rang 0 et permet de conclure (prop. 6.29).

§ 7
Les Espaces Vectoriels de dimension finie

Ce § est consacré à l'étude de la catégorie des Espaces de Banach de dimension finie ; les arguments montrant que cette catégorie a de bonne propriétés consistent plus ou moins en la résolution de systèmes linéaires à coefficients dans le corps $\mathscr{C}$ par la méthode du pivot, les complications venant de ce qu'il faut garder la trace des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie.

7.1. Des trucs aux Trucs. — Si $\mathscr{T}$ est une sous-catégorie de la catégorie des groupes abéliens dont les objets sont des trucs, on définit un Truc $\mathbb{T}$ comme un foncteur (covariant) de la catégorie des algèbres sympathiques dans $\mathscr{T}$ vérifiant, pour toute algèbre sympathique Λ, les conditions suivantes :

(T1) L'application $(s,\lambda) \to s(\lambda)$ de $\mathrm{Spec}(\Lambda) \times \mathbb{T}(\Lambda)$ dans $\mathbb{T}(C)$ est continue.

(T2) L'application de $\mathbb{T}(\Lambda)$ dans $\mathscr{C}(\mathrm{Spec}(\Lambda), \mathbb{T}(C))$ ainsi obtenue est injective.

Si les trucs ne sont pas munis d'une topologie, la condition (T1) doit être considérée comme vide (on peut aussi, ce qui revient au même, munir par défaut un truc de la topologie grossière).

Les exemples que nous considérons dans cet article sont les Anneaux, les Anneaux Topologiques, les Espaces Vectoriels et les Espaces de Banach obtenus respectivement à partir des catégories des anneaux (en fait des $\mathbf{Z}_p$-algèbres) commutatifs, des anneaux commutatifs topologiques, des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels et des $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach.

Les exemples les plus simples d'Anneaux (et même d'Anneaux Topologiques) sont les foncteurs $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ qui, à une algèbre sympathique, associent respectivement $\mathbb{A}(\Lambda) = \mathscr{O}_\Lambda$ et $\mathbb{B}(\Lambda) = \Lambda$. Des exemples nettement plus subtils sont fournis par les anneaux de Fontaine (cf. §8).

On peut toujours oublier la topologie sur un Truc et pour les Trucs sans topologie, les notions habituelles s'étendent sans problème. On définit le noyau, l'image et le conoyau d'un morphisme $f : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ est un morphisme de Trucs de la manière évidente : $\ker f$ (resp. $\mathrm{im}\, f$, resp. $\mathrm{coker}\, f$) est le Truc qui, à l'algèbre Λ, associe $\ker f_\Lambda$ (resp. $\mathrm{im}\, f_\Lambda$, resp. $\mathrm{coker}\, f_\Lambda$) et on a $\mathrm{im}\, f \cong \mathbb{T}_1/\ker f$.

On dit qu'un morphisme $f : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ de Trucs est injectif (resp. surjectif, resp. bijectif) si pour tout Λ, l'application $f_\Lambda : \mathbb{T}_1(\Lambda) \to \mathbb{T}_2(\Lambda)$ est injective (resp. surjective, resp. bijective) ; un morphisme bijectif a un inverse, à savoir la collection des f_Λ^{-1}. On dit qu'une suite

$$\mathbb{T}_0 \xrightarrow{f_1} \mathbb{T}_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} \mathbb{T}_n$$

de Trucs est exacte si et seulement si, on a $\ker f_{i+1} = \operatorname{im} f_i$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$. En particulier, si $f : \mathbb{T}_1 \to \mathbb{T}_2$ est un morphisme de Trucs, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker f \longrightarrow \mathbb{T}_1 \longrightarrow \mathbb{T}_2 \longrightarrow \operatorname{coker} f \longrightarrow 0.$$

Plus généralement, toute construction ou propriété homologique de la catégorie des groupes abéliens (du style « lemme des 5 » ou « lemme du serpent » ou construction de produits fibrés ...) se transfère sans problème à celle des Trucs.

Dans le cas des Trucs avec topologie, il faut bien évidemment faire attention à certains phénomènes ; en particulier, un morphisme bijectif n'est un isomorphisme que si les applications inverses sont continues ; de même, la topologie quotient peut s'avérer trop pathologique pour que le conoyau soit encore un Truc.

7.2. Les Espaces Vectoriels. — Les Espaces Vectoriels forment une catégorie fourre-tout à l'intérieur de laquelle nous allons découper des sous-catégories plus intéressantes. Commençons par donner quelques exemples triviaux d'Espaces Vectoriels et d'Espaces de Banach ; des exemples plus intéressants sont fournis par les anneaux de Fontaine (cf. §9).

Exemple 7.1. — (i) N'importe quel $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V peut être considéré comme un Espace Vectoriel : il suffit de poser $V(\Lambda) = V$ pour tout Λ et $V(s) = \mathrm{id}$ pour tout morphisme s d'algèbres sympathiques. L'Espace Vectoriel associé à un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel V sera encore noté V. Si V est muni en outre d'une structure de $\mathbf{Q}_p$-espace de *Banach*, alors l'Espace Vectoriel associé est naturellement un Espace de Banach.

(ii) Si $d \in \mathbf{N} - \{0\}$, l'Espace Vectoriel $\mathbb{V}^d$ défini par $\mathbb{V}^d(\Lambda) = \Lambda^d$ pour tout Λ et les morphismes évidents ; c'est un Espace de Banach.

(iii) Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel et si L est un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{W}(C)$, on définit le *sous-Espace Vectoriel* $\mathbb{L}$ *de* $\mathbb{W}$ *engendré par* L en associant à Λ le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{W}(\Lambda)$ constitué des λ vérifiant $s(\lambda) \in \mathrm{L}$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$. Si $\mathbb{W}$ est un Espace de Banach et L est *fermé* dans $\mathbb{W}(C)$, alors $\mathbb{L}$ est un Espace de Banach.

Un Espace Vectoriel est dit *de dimension finie* s'il ne diffère d'un $\mathbb{V}^d$ que par des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie ; de manière précise, on dit qu'un Espace Vectoriel $\mathbb{W}$ est de dimension finie s'il a une *présentation* de la forme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[dr] & & & \\
0 \arrow[r] & U \arrow[r] & \mathbb{Y} \arrow[r] \arrow[dr] & \mathbb{V}^d \arrow[r] & 0 \\
& & & \mathbb{W} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

où U et V sont les Espaces Vectoriels associés à des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie et les suites

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow 0$$

sont des suites exactes d'Espaces Vectoriels. Pour économiser le papier, nous mettrons la présentation de $\mathbb{W}$ ci-dessus sous la forme

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d] \ .$$

On appelle *dimension de la présentation* le couple $(d, \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} V)$ élément de $\mathbf{N}\times\mathbf{Z}$ ou plutôt de $(\{0\}\times\mathbf{N})\cup((\mathbf{N}-\{0\})\times\mathbf{Z})$. Notre but dans le reste de cette section est de montrer que cette dimension possède de bonnes propriétés, en particulier que la dimension d'une présentation d'un Espace Vectoriel de dimension finie $\mathbb{W}$ ne dépend que de $\mathbb{W}$ et pas de la présentation (cor. 7.17) et que la dimension est additive dans les suites exactes courtes (prop. 7.22).

Lemme 7.2. — *Soit $\mathbb{W} = V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$ un Espace Vectoriel de dimension finie, $U' \subset \mathbb{W}(C)$ un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie et Λ une algèbre sympathique. Les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un élément λ de $\mathbb{W}(\Lambda)$:*
(i) *$s(\lambda)\in U'$ quel que soit $s\in \mathrm{Spec}(\Lambda)$;*
(ii) *$\lambda \in U'$.*

Démonstration. — (ii)$\Rightarrow$(i) de manière évidente et pour montrer la réciproque, il suffit de prouver que la condition (i) implique $\lambda\in\mathbb{W}(C)$ car, dans ce cas, $s(\lambda)=\lambda$ quel que soit $s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$. Soit $\widetilde{\lambda}\in\mathbb{Y}(\Lambda)$ relevant λ et soit $(f_1,\dots,f_d)$ l'image de $\widetilde{\lambda}$ dans Λ^d. Si U'' est l'image inverse de U' dans $\mathbb{Y}(C)$ et U''' est l'image de U'' dans C^d, alors U''' est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie contenant $(s(f_1),\dots,s(f_d))$ quel que soit $s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$. On en déduit l'appartenance de $(f_1,\dots,f_d)$ à C^d [utiliser la prop 2.14 avec $S=\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et $M=U'''\cap\prod_{i=1}^d B(0,\|f_i\|_{\mathrm{sp}})$] et donc celle de $\widetilde{\lambda}$ à $\mathbb{Y}(C)$, ce qui permet de conclure.

Lemme 7.3. — *Soit $0\longrightarrow A\longrightarrow \mathbb{W}_1\longrightarrow\mathbb{W}_2\longrightarrow 0$ une suite exacte d'Espaces Vectoriels, où A est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$. S'il existe $i\in\{1,2\}$ tel que $\mathbb{W}_i$ est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension (d_i,a_i), alors $\mathbb{W}_{3-i}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension (d_{3-i},a_{3-i}) avec $d_1=d_2$ et $a_1=a_2+\dim_{\mathbf{Q}_p} A$.*

Démonstration. — Le cas $i=1$ est immédiat ; en effet, si

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

est une présentation de $\mathbb{W}_1$ et si V' est l'image inverse de A dans $\mathbb{Y}$, alors

$$V' \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

est une présentation de $\mathbb{W}_2$ de dimension $(d, \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} V')$, ce qui permet de conclure car $\dim_{\mathbf{Q}_p} V' = \dim_{\mathbf{Q}_p} V + \dim_{\mathbf{Q}_p} A$.

Passons au cas $i=2$. Soit

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

une présentation de $\mathbb{W}_2$ et soit $\mathbb{Y}'=\mathbb{Y}\times_{\mathbb{W}_2}\mathbb{W}_1$. On a une suite exacte

$$0\longrightarrow V\longrightarrow \mathbb{Y}'\longrightarrow\mathbb{W}_1\longrightarrow 0$$

et si l'on note U' le noyau de l'application de $\mathbb{Y}'$ dans $\mathbb{V}^d$ composée des applications $\mathbb{Y}' \to \mathbb{Y}$ et $\mathbb{Y} \to \mathbb{V}^d$, alors la suite

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow U' \longrightarrow U \longrightarrow 0$$

est exacte et

$$V \longrightarrow [U' \longrightarrow \mathbb{Y}' \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

est une présentation de $\mathbb{W}_1$ possédant les propriétés requises.

7.3. Éléments additifs

Proposition 7.4. — *Si $f \in \mathscr{C}$ et si Λ est une algèbre sympathique, alors*
(i) $f(\tau\sigma) = f(\tau) + f(\sigma)$ *quels que soient* $\sigma, \tau \in \mathrm{T}_\Lambda$
(ii) $\sigma(f) - f = f(\sigma) \in \Lambda$ *quel que soit* $\sigma \in \mathrm{T}_\Lambda$.

Démonstration. — Soit $S(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ le sous-ensemble des morphismes de $\widetilde{\Lambda\{X\}}$ dans $\widetilde{C\{X\}}$ introduit dans la proposition 5.28. Si $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$ et $\psi \in S(\widetilde{\Lambda\{X\}})$, la restriction τ_ψ de $\psi \circ \tau$ à $\widetilde{C\{X\}} \subset \widetilde{\Lambda\{X\}}$ est un élément de T_C et on a $x(\tau_\psi) = \psi(x(\tau))$ et $f(\tau_\psi) = \psi \circ \tau(f) - f$ (cf. remarque 6.3). En particulier, si $\sigma, \tau \in \mathrm{T}_\Lambda$, alors $\beta = (\tau\sigma)_\psi \tau_\psi^{-1} \sigma_\psi^{-1} 0_\psi$ est un élément de $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ et donc

$$f(\beta) = f((\tau\sigma)_\psi) - f(\tau_\psi) - f(\sigma_\psi) + f(0_\psi) = \psi(\tau\sigma(f) - \tau(f) - \sigma(f) + f) \in f(\mathrm{H}_{C\{X\}}).$$

Comme $f(\mathrm{H}_{C\{X\}})$ est compact, la proposition 5.28 permet d'utiliser la proposition 2.14 pour en déduire l'appartenance de $\tau\sigma(f) - \tau(f) - \sigma(f) + f$ à $f(\mathrm{H}_{C\{X\}})$. Si on fixe σ et que l'on pose $f_\sigma = \sigma(f) - f - f(\sigma)$, on a $s_\Lambda(\tau\sigma(f) - \tau(f) - \sigma(f) + f) = f_\sigma(\tau)$, ce qui montre que l'application $\tau \to f_\sigma(\tau)$ est à valeurs dans $f(\mathrm{H}_{C\{X\}})$ et le corollaire 5.27 permet d'utiliser la proposition 2.14 pour en déduire l'appartenance de f_σ à $f(\mathrm{H}_{C\{X\}})$. En particulier, $f_\sigma(\tau) = f_\sigma(0) = 0$ quel que soit $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$ et donc $f_\sigma = 0$ d'après le corollaire 5.27 ; on en déduit le (ii). Finalement, on a $f(\tau\sigma) - f(\tau) - f(\sigma) = s_\Lambda((\tau - 1)(f_\sigma)) = 0$, ce qui permet de conclure.

Lemme 7.5. — *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie et $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) $\ell(\tau\sigma) = \ell(\sigma) + \ell(\tau)$ *quels que soient* $\sigma, \tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$,
(ii) $\ell(0) = 0$ *et* $\sigma(\ell) - \ell \in \mathbb{W}(C)$ *quel que soit* $\sigma \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$.

Démonstration. — Si ℓ vérifie la première condition, on a $\ell(0) = 0$ de manière évidente et $s_C(\tau(\sigma(\ell) - \ell)) = s_C(\tau\sigma(\ell) - \tau(\ell)) = \ell(\tau\sigma) - \ell(\tau) = \ell(\sigma)$ quel que soit $\tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, ce qui implique $\sigma(\ell) - \ell = \ell(\sigma) \in \mathbb{W}(C)$ d'après la propriété (T2) des Trucs.

Réciproquement, si $\sigma(\ell) - \ell \in \mathbb{W}(C)$, on a $\tau\sigma(\ell) - \tau(\ell) - \sigma(\ell) + \ell = (\tau - 1)(\sigma(\ell) - \ell) = 0$ et donc, appliquant s_C à cette égalité, $\ell(\tau\sigma) = \ell(\sigma) + \ell(\tau) - \ell(0)$ et si on a de plus supposé $\ell(0) = 0$, on voit que ℓ vérifie la première condition.

Un élément ℓ de $\mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ qui vérifie l'une des conditions du lemme précédent est dit *additif*. Remarquons que l'on a alors $\ell(\sigma) = \sigma(\ell) - \ell$ si $\sigma \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$ d'après la démonstration du lemme en question. Un élément additif ℓ est dit *de rang fini* si $\ell(\mathrm{H}_{C\{X\}})$ engendre un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{W}(C)$. Dans le cas de $\mathbb{V}^1$ on retombe sur des objets déjà définis : l'ensemble des éléments additifs de rang fini de de $\mathbb{V}^1(\widetilde{C\{X\}}) = \widetilde{C\{X\}}$ est le corps $\mathscr{C}$ étudié au §6.

Lemme 7.6. — *Soit* $0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W}_1 \xrightarrow{\psi} \mathbb{W}_2 \longrightarrow 0$ *une suite exacte d'Espaces Vectoriels de dimension finie, où U est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$. Si ℓ_1 est un élément additif de rang fini de $\mathbb{W}_1(\widetilde{C\{X\}})$, alors $\psi(\ell_2)$ est un élément additif de rang fini de $\mathbb{W}_2(\widetilde{C\{X\}})$ et, réciproquement, si ℓ_2 est un élément additif de rang fini de $\mathbb{W}_2(\widetilde{C\{X\}})$, il existe un unique élément additif de rang fini ℓ_1 de $\mathbb{W}_1(\widetilde{C\{X\}})$ tel que l'on ait $\ell_2 = \psi(\ell_1)$.*

Démonstration. — L'additivité de $\psi(\ell_1)$ est une évidence si ℓ_1 est additif. Réciproquement, si $\ell_2 \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est additif et si ℓ_1 et ℓ_1' sont deux relèvements additifs de ℓ_2 dans $\mathbb{W}_1(\widetilde{C\{X\}})$, alors $\ell_1 - \ell_1'$ est un élément additif de $U \subset \mathbb{W}_1(C)$ et donc est nul, d'où l'unicité. D'autre part, si ℓ est un relèvement quelconque de ℓ_2 dans $\mathbb{W}_1$ et si on pose $\ell_1 = \ell - \ell(0)$, alors ℓ_1 est un relèvement de ℓ_1 vérifiant $\ell_1(0) = 0$ et $\psi(\sigma(\ell_1) - \ell_1) = \sigma(\ell_2) - \ell_2 \in \mathbb{W}_2(C)$ si $\sigma \in \widetilde{\mathrm{T}}_C$, ce qui implique que $\sigma(\ell_1) - \ell_1 \in \mathbb{W}_1(C)$ et donc que ℓ_1 est additif. Finalement, l'hypothèse selon laquelle U est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ implique que ℓ_1 est de rang fini si et seulement si $\psi(\ell_2)$ l'est, ce qui permet de conclure.

Proposition 7.7. — *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie et si $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est un élément additif de rang fini, alors quelle que soient l'algèbre sympathique Λ et les éléments σ et τ de T_Λ, on a $\ell(\tau\sigma) = \ell(\sigma) + \ell(\tau)$.*

Démonstration. — Soit
$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$
une présentation de $\mathbb{W}$ et soient $\ell_{\mathbb{Y}}$ le relèvement additif de ℓ dans $\mathbb{Y}(\widetilde{C\{X\}})$ et $(f_1, \dots, f_d)$ l'image de $\ell_{\mathbb{Y}}$ dans $\mathbb{V}^d(\widetilde{C\{X\}})$. Les f_i sont des éléments de $\mathscr{C}$, ce qui implique, d'après la proposition 7.4, que $\sigma(f_i) - f_i \in \Lambda$ si $\sigma \in \mathrm{T}_\Lambda$ et donc que $\sigma(\ell_{\mathbb{Y}}) - \ell_{\mathbb{Y}} \in \mathbb{Y}(\Lambda)$ et finalement que $\sigma(\ell) - \ell \in \mathbb{W}(\Lambda)$. Or, si $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$, on a $\ell(\tau\sigma) - \ell(\sigma) - \ell(\tau) = s_\Lambda\left((\tau - 1)(\sigma(\ell) - \ell)\right) = s_\Lambda(0) = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

7.4. Le sous-Espace Vectoriel engendré par un élément additif. — Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie et $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est un élément additif de rang fini, on note L_ℓ le sous $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{W}(C)$ engendré par $\ell(\mathrm{T}_C)$ et $\mathbb{L}_\ell$ le sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$ engendré par L_ℓ (cf. ex 7.1 (iii)). L'Espace Vectoriel $\mathbb{L}_\ell$ est appelé *le sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$ engendré par ℓ.*

Si $f \in \mathscr{C}$, on appelle *Graphe* de f le sous-Espace Vectoriel $\mathbb{L}_{X,f}$ de $\mathbb{V}^2$ engendré par l'élément additif (X, f) de $\mathbb{V}^2(\widetilde{C\{X\}})$. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\mathrm{L}_{X,f} = \mathbb{L}_{X,f}(C)$ est le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par le graphe Γ_f de f, où
$$\Gamma_f = \{(s_C \circ \tau(X), s_C \circ \tau(f)) \mid \tau \in \widetilde{\mathrm{T}}_C\} = \{(s(X), s(f)) \mid s \in \mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})\};$$
c'est aussi le graphe de la correspondance $f_{\mathrm{co},\mathbf{Q}_p}$ du n° 6.2. Rappelons que, si f, g sont deux éléments de $\mathscr{C}$, leur produit $f \cdot g$ est caractérisé par l'inclusion de $\mathrm{L}_{X,f\cdot g}$ dans le produit fibré $\mathrm{L}_{X,g} \times_C \mathrm{L}_{X,f}$ de $\mathrm{L}_{X,g}$ et $\mathrm{L}_{X,f}$ au-dessus de C, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, z) de $C \times C$ tels qu'il existe $y \in C$ avec $(x, y) \in \mathrm{L}_{X,g}$ et $(y, z) \in \mathrm{L}_{X,f}$. D'autre part, si $f \in \mathscr{C} - \{0\}$, l'inverse f^{-1} de f est caractérisé par l'égalité $\mathrm{L}_{X,f^{-1}} = \mathrm{L}_{f,X}$; autrement dit, le Graphe de f^{-1} est le

transposé de celui de f. D'autre part, le résultat suivant (combinaison de la proposition 6.19 et du corollaire 6.22) sera fondamental pour la suite.

Proposition 7.8. — *Soient $f \in \mathscr{C}$ et $p_1 : C \times C \to C$ [resp. $p_2 : C \times C \to C$] la projection sur la première [resp. seconde] coordonnée. Soient U_f et V_f les noyaux respectifs des restrictions de p_1 et p_2 à $\mathrm{L}_{X,f}$. Alors*

(i) $\dim_{\mathbf{Q}_p} U_f = \dim_{\mathbf{Q}_p} V_f$.

(ii) *Les suites suivantes sont des suites exactes de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels :*

$$0 \longrightarrow U_f \longrightarrow \mathrm{L}_{X,f} \xrightarrow{p_1} C \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V_f \longrightarrow \mathrm{L}_{X,f} \xrightarrow{p_2} C \longrightarrow 0.$$

Corollaire 7.9. — *Soient $f \in \mathscr{C}$ et $p_1 : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^1$ [resp. $p_2 : \mathbb{V}^2 \to \mathbb{V}^1$] la projection sur la première [resp. seconde] coordonnée. Alors les suites suivantes sont des suites exactes d'Espaces Vectoriels :*

$$0 \longrightarrow U_f \longrightarrow \mathbb{L}_{X,f} \xrightarrow{p_1} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow V_f \longrightarrow \mathbb{L}_{X,f} \xrightarrow{p_2} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Soit g l'inverse de f dans $\mathscr{C}$. Comme $\mathrm{L}_{X,f} = \mathrm{L}_{g,X}$, on a aussi ${}^t\mathbb{L}_{X,f} = \mathbb{L}_{g,X}$ et l'exactitude de la seconde suite se déduit de l'exactitude de la première pour g ; il suffit donc de prouver que la première suite est exacte.

Si Λ est sympathique et $(\lambda, 0) \in \mathbb{L}_{X,f}$, on a $s(\lambda) \in U_f$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ et, U_f étant de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, cela implique, d'après la proposition 2.14, que $\lambda \in U_f$; on en déduit l'exactitude à gauche. Il reste à démontrer que p_1 induit une surjection de $\mathbb{L}_{X,f}$ sur $\mathbb{V}_1$ et, grâce à la $\mathbf{Q}_p$-linéarité de p_1, il suffit de prouver que, si Λ est sympathique et $\lambda \in \mathscr{O}_\Lambda$, il existe $(x, y) \in \mathbb{L}_{X,f}(\Lambda)$ avec $x = \lambda$. Or, si $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$ vérifie $x(\tau) = \lambda$, alors $(x(\tau), f(\tau))$ est un élément de $\mathbb{L}_{X,f}(\Lambda)$ dont l'image par p_1 est λ par construction. Ceci permet de conclure.

7.5. Espaces Vectoriels de dimension principale 1

Lemme 7.10. — *Soit $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel de présentation*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0\ .$$

Si $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ est le relèvement additif de X et $U' = U \cap \mathbb{L}_\ell$, alors la suite

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow \mathbb{L}_\ell \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0$$

est une suite exacte d'Espaces Vectoriels.

Démonstration. — La seule chose à prouver est la surjectivité de α. Soit $\lambda \in \mathscr{O}_\Lambda$ et soit $\tau \in \mathrm{T}_\Lambda$ vérifiant $x(\tau) = \lambda$. Alors $\ell(\tau)$ est un élément de $\mathbb{W}(\Lambda)$ relevant λ et il reste à vérifier que son image par tout élément s de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ appartient bien à L_ℓ. Soit $\widetilde{s} : \widetilde{\Lambda\{X\}} \to \widetilde{C\{X\}}$ rendant le diagramme

$$\begin{tikzcd} \widetilde{\Lambda\{X\}} \arrow[r, "s_\Lambda"] \arrow[d, "\widetilde{s}"] & \Lambda \arrow[d, "s"] \\ \widetilde{C\{X\}} \arrow[r, "s_C"] & C \end{tikzcd}$$

commutatif (l'existence de $\widetilde{s}$ est assurée par le (iii) de la proposition 5.20). Alors la restriction de $s_\lambda = s_C \circ \widetilde{s} \circ \tau$ à $\widetilde{C\{X\}} \subset \widetilde{\Lambda\{X\}}$ est un élément de $\mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$ et $s(s_\Lambda(\tau(\ell))) = s_\lambda(\ell) \in \mathrm{L}_\ell$, ce qui permet de conclure.

Proposition 7.11. — *Soit $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel admettant une présentation du type*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0,$$

où U est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et soit $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^1$ un morphisme d'Espaces Vectoriels, alors de deux choses l'une : soit ψ est surjectif et $\ker\psi$ est un Espace Vectoriel de dimension finie $\dim_{\mathbf{Q}_p} U$ sur $\mathbf{Q}_p$, soit $\mathrm{Im}\,\psi$ est un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$,

$$0 \longrightarrow U \cap \ker\psi \longrightarrow \ker\psi \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0$$

est une présentation de $\ker\psi$ et $\dim_{\mathbf{Q}_p}(U \cap \ker\psi) = \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Im}\,\psi)$.

Démonstration. — Soit $\ell \in \mathbb{W}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de X et soit $f = \psi(\ell)$; c'est un élément de $\mathscr{C}$. Il y a deux cas : soit $f = 0$, soit $f \neq 0$.

Commençons par regarder le cas $f = 0$. On a alors $\mathbb{L}_\ell \subset \ker\psi$ et comme α induit une surjection de $\mathbb{L}_\ell$ sur $\mathbb{V}^1$ d'après le lemme 7.10, si U' est un supplémentaire de $\ker\psi \cap U$ dans U, on a $\mathbb{W} = \ker\psi \oplus U'$. On en déduit le fait que $\mathrm{Im}\,\psi$ est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ isomorphe à U' et que

$$0 \longrightarrow U \cap \ker\psi \longrightarrow \ker\psi \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0$$

est une présentation de $\ker\psi$ et $\dim_{\mathbf{Q}_p}(U \cap \ker\psi) = \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Im}\,\psi)$.

Passons au cas $f \neq 0$. On a par construction $(\alpha, \psi)(\ell) = (X, f)$, ce qui nous fournit le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & U' \arrow[r] & \mathbb{L}_\ell \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "(\alpha,\psi)"] & \mathbb{V}^1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & U_f \arrow[r] & \mathbb{L}_{X,f} \arrow[r, "p_1"] & \mathbb{V}^1 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes d'après la proposition 7.9 et le lemme 7.10. D'autre part, si $y \in U_f$, il existe $n \in \mathbf{N}$ et $s \in \mathrm{Spec}(\widetilde{C\{X\}})$ tels que l'on ait $(0, y) = p^{-n}s(X, f) = (\alpha, \psi)(p^{-n}s(\ell))$; on en déduit la surjectivité de l'application $(\alpha, \psi) : U' \to U_f$ puis celle de $(\alpha, \psi) : \mathbb{L}_\ell \to \mathbb{L}_{X,f}$. On tire de la proposition 7.9 la surjectivité de ψ et même de la restriction de ψ à $\mathbb{L}_\ell$. Si $\varphi \in \{\alpha, \psi\}$, comme φ est surjectif, on a la suite exacte suivante d'Espace Vectoriels de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$:

$$0 \longrightarrow (\ker\varphi) \cap \mathbb{L}_\ell \longrightarrow \ker\varphi \longrightarrow \mathbb{W}/\mathbb{L}_\ell \longrightarrow 0$$

et comme $\mathbb{L}_\ell \to \mathbb{L}_{X,f}$ est surjective, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\mathbb{L}_\ell \to \mathbb{L}_{X,f}) \longrightarrow (\ker\varphi) \cap \mathbb{L}_\ell \longrightarrow U_\varphi \longrightarrow 0,$$

où $U_\varphi = U_f$ si $\varphi = \alpha$ et $U_\varphi = V_f$ si $\varphi = \psi$. Maintenant, les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels U_f et V_f ont même dimension d'après la proposition 7.9 ; il en est donc de même de $\ker\alpha$ et $\ker\psi$, ce qui permet de conclure.

7.6. Le noyau d'un morphisme d'Espaces Vectoriels de dimension finie

Lemme 7.12. — *Soit $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel admettant une présentation du type*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W} \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^r \longrightarrow 0,$$

où U est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et soit $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^1$ un morphisme d'Espaces Vectoriels, alors de deux choses l'une : soit ψ est surjective et $\ker\psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(r-1, \dim_{\mathbf{Q}_p} U)$, soit* $\operatorname{Im}\psi$ *est un $\mathbf{Q}_p$-Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et* $\ker\psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(r, \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} \operatorname{Im}\psi)$.*

Démonstration. — Si $1 \leqslant j \leqslant r$, soit $\mathbb{D}_j$ la Droite de $\mathbb{V}^r$ intersection des Hyperplans d'équation $X_k = 0$ pour $k \neq j$; c'est un Espace Vectoriel naturellement isomorphe à $\mathbb{V}^1$. Soit $\mathbb{X}_j$ l'image réciproque dans $\mathbb{W}$ de $\mathbb{D}_j$ par α. Il y a deux cas d'après la proposition 7.11 : soit la restriction de ψ à $\mathbb{X}_j$ a une image de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant r$, soit il existe $1 \leqslant j \leqslant r$ tel que la restriction de ψ à $\mathbb{X}_j$ est surjective. Dans le premier cas, α induit une surjection de $(\ker\psi) \cap \mathbb{X}_j$ sur $\mathbb{D}_j$ et donc une surjection de $\ker\psi$ sur $\mathbb{V}^r$. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow (\ker\psi) \cap U \longrightarrow \ker\psi \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^r \longrightarrow 0$$

et $\operatorname{Im}\psi$ est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ s'identifiant à $U/((\ker\psi) \cap U)$. Dans le second cas, on dispose des suites exactes suivantes d'Espaces Vectoriels de dimension finie :

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{X}_j \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow \mathbb{X}_j \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}^{r-1} \longrightarrow 0,$$

et, si ψ induit une surjection de $\mathbb{X}_j$ sur $\mathbb{V}^1$ (et donc de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{V}^1$), la suite exacte

$$0 \longrightarrow (\ker\psi) \cap \mathbb{X}_j \longrightarrow \ker\psi \xrightarrow{\alpha} \mathbb{V}^{r-1} \longrightarrow 0$$

nous fournit une présentation de $\ker\psi$ qui est de dimension $(r-1, \dim_{\mathbf{Q}_p} U)$ d'après la proposition 7.11. Ceci permet de conclure.

Proposition 7.13. — *Soit $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension (d, a).*

(i) *Si A est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et $\psi : \mathbb{W} \to A$ est un morphisme surjectif d'Espaces Vectoriels, alors* $\ker\psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(d, a - \dim_{\mathbf{Q}_p} A)$.*

(ii) *Si $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^1$ est un morphisme d'Espaces Vectoriels et si $(\operatorname{Im}\psi)(C)$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, alors ψ est surjectif et* $\ker\psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(d-1, a)$.*

Démonstration. — Dans le cas (i), on peut composer ψ avec une injection $\mathbf{Q}_p$-linéaire de A dans C et considérer ψ comme un morphisme de $\mathbb{W}$ dans $\mathbb{V}^1$ dont l'image est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, ce qui permet de traiter les cas (i) et (ii) simultanément. Soit

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

une présentation de $\mathbb{W}$ avec $\dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} V = a$ et soit $\widetilde{\psi} : \mathbb{Y} \to \mathbb{V}^1$ la composée de la projection de $\mathbb{Y}$ sur $\mathbb{W}$ avec ψ. D'après le lemme 7.12, ou bien $\operatorname{Im} \widetilde{\psi} = \operatorname{Im} \psi$ n'est pas de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ (on est donc dans le cas (ii)) et alors $\widetilde{\psi}$ (et donc ψ) est surjective et $\ker \widetilde{\psi}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(d-1, \dim_{\mathbf{Q}_p} U)$, ou bien $A = \operatorname{Im} \widetilde{\psi} = \operatorname{Im} \psi$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et $\ker \widetilde{\psi}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(d, \dim_{\mathbf{Q}_p} U - \dim_{\mathbf{Q}_p} A)$. On conclut en utilisant le lemme 7.3 et la suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow \ker \widetilde{\psi} \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow 0.$$

Lemme 7.14. — *Soient $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel de dimension finie, $r \geqslant 1$ et $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^r$ un morphisme d'Espaces Vectoriels.*

(i) *Alors* $\ker \psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie.*

(ii) *Si, de plus, ψ est surjective et $\mathbb{W}$ admet une présentation de dimension (d, a), alors* $\ker \psi$ *admet une présentation de dimension $(d-r, a)$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur r, le cas $r = 1$ ayant été traité au cours de la démonstration de la proposition 7.13. On peut écrire $\mathbb{V}^{r+1}$ sous la forme $\mathbb{V}^r \oplus \mathbb{V}^1$. Notons $\overline{\psi} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^r$ le composé de ψ et de la projection de $\mathbb{V}^{r+1}$ sur $\mathbb{V}^r$. L'hypothèse de récurrence implique que $\ker \overline{\psi}$ est de dimension finie et admet une présentation de dimension $(d-r, a)$ si $\overline{\psi}$ est surjective. D'autre part, le lemme du serpent nous fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow \ker \overline{\psi} \longrightarrow \mathbb{V}^1 \longrightarrow \operatorname{coker} \psi \longrightarrow \operatorname{coker} \overline{\psi} \longrightarrow 0,$$

ce qui permet de montrer, en utilisant la proposition 7.13, d'une part que $\ker \psi$ est de dimension finie et d'autre part que, si ψ (et donc aussi $\overline{\psi}$) est surjective, alors $\ker \psi$ a une présentation de dimension $(d-r, a) - (1, 0) = (d - (r+1), a)$.

Lemme 7.15. — *Soient $\mathbb{W}$ un Espace Vectoriel de dimension finie, $\mathbb{W}'$ un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation du type*

$$0 \longrightarrow U' \longrightarrow \mathbb{W}' \longrightarrow \mathbb{V}^r \longrightarrow 0$$

et $\psi : \mathbb{W} \to \mathbb{W}'$ un morphisme d'Espaces Vectoriels.

(i) *Alors* $\ker \psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie.*

(ii) *Si, de plus, ψ est surjective, $\mathbb{W}$ admet une présentation de dimension (d, a) et $a' = \dim_{\mathbf{Q}_p} U'$, alors* $\ker \psi$ *admet une présentation de dimension $(d-r, a-a')$.*

Démonstration. — Notons $\overline{\psi} : \mathbb{W} \to \mathbb{V}^r$ le composé de ψ et de la projection de $\mathbb{W}'$ sur $\mathbb{V}^r$. Le lemme du serpent nous fournit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker \psi \longrightarrow \ker \overline{\psi} \longrightarrow U' \longrightarrow \operatorname{coker} \psi \longrightarrow \operatorname{coker} \overline{\psi} \longrightarrow 0,$$

ce qui permet de montrer, en utilisant le (i) de la proposition 7.13, d'une part que $\ker\psi$ est de dimension finie et d'autre part, si ψ (et donc aussi $\overline{\psi}$) est surjective, que $\ker\psi$ a une présentation de dimension $(d-r,a)-(0,a')=(d-r,a-a')$.

Proposition 7.16. — *Si $\psi:\mathbb{W}\to\mathbb{W}'$ est un morphisme d'Espaces Vectoriels de dimension finie, alors*

(i) $\ker\psi$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie.*

(ii) *Si, de plus, ψ est surjective et si $\mathbb{W}$ et $\mathbb{W}'$ admettent des présentations de dimensions respectives (d,a) et (d',a'), alors* $\ker\psi$ *admet une présentation de dimension $(d-d',a-a')$*

Démonstration. — Soit

$$V'\longrightarrow[U'\longrightarrow\mathbb{Y}'\longrightarrow\mathbb{V}^{d'}]$$

une présentation de $\mathbb{W}'$ avec $\dim_{\mathbf{Q}_p}U'-\dim_{\mathbf{Q}_p}V'=a'$. Soit $\mathbb{Z}=\mathbb{Y}'\times_{\mathbb{W}'}\mathbb{W}$. On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V' \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] & \mathbb{W} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V' \arrow[r] & \mathbb{Y}' \arrow[r] & \mathbb{W}' \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et donc $\ker\psi\cong\ker\widetilde{\psi}$. Utilisant la suite exacte du haut du diagramme précédent et le lemme 7.3, on montre que $\mathbb{Z}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie admettant une présentation de dimension $(d,a+\dim_{\mathbf{Q}_p}V')$ puis, utilisant le lemme 7.15, que $\ker\psi$ est de dimension finie et, si ψ est surjective (ce qui implique $\widetilde{\psi}$ surjective), que $\ker\psi\cong\ker\widetilde{\psi}$ a une présentation de dimension $(d,a+\dim_{\mathbf{Q}_p}V')-(d',\dim_{\mathbf{Q}_p}U')=(d-d',a-a')$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 7.17. — *La dimension d'une présentation d'un Espace Vectoriel de dimension finie ne dépend que de l'Espace Vectoriel et pas de la présentation.*

Démonstration. — Il suffit d'appliquer la proposition précédente à $\psi=\mathrm{id}$ et deux présentations différentes d'un même espace vectoriel en remarquant qu'une présentation de l'Espace Vectoriel 0 est de dimension $(0,0)$.

Définition 7.18. — Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie, on appelle *dimension de* $\mathbb{W}$ la dimension de n'importe laquelle de ses présentations. Si $\dim\mathbb{W}=(d,a)$, l'entier a est appelé la *dimension principale de* $\mathbb{W}$ et l'entier relatif a est appelé la *dimension résiduelle de* $\mathbb{W}$.

7.7. Le quotient de deux Espaces Vectoriels de dimension finie

Lemme 7.19. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace Vectoriel de dimension finie (d,a) de $\mathbb{V}^n$, alors il existe $J\subset\{1,\dots,n\}$ de cardinal d tel que la projection de $\mathbb{W}$ sur $\oplus_{j\in J}\mathbb{D}_j$ parallèlement à $\oplus_{j\notin J}\mathbb{D}_j$ est surjective ; le noyau $\mathbb{W}\cap(\oplus_{j\notin J}\mathbb{D}_j)$ de cette projection est alors un Espace Vectoriel de dimension a sur $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur d. Si $d=0$, le résultat est évident. Si $d\geqslant 1$, il existe j tel que l'image de la projection de $\mathbb{W}$ sur $\mathbb{D}_j$ ne soit pas de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ (car sinon $\mathbb{W}$ serait de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$) ; cette projection est alors surjective d'après le (ii) de la proposition 7.13 et on a une suite exacte

$$0\longrightarrow\mathbb{W}\cap(\oplus_{k\neq j}\mathbb{D}_k)\longrightarrow\mathbb{W}\longrightarrow\mathbb{D}_j\longrightarrow 0.$$

Il suffit alors d'appliquer l'hypothèse de récurrence à $\mathbb{W}\cap(\oplus_{k\neq j}\mathbb{D}_k)$ qui est de dimension $(d-1,a)$ d'après la proposition 7.16 (ou le (ii) de la proposition 7.13).

Corollaire 7.20. — *Si* $\mathbb{W}$ *est un sous-Espace Vectoriel de dimension finie* (d,a) *de* $\mathbb{V}^n$*, alors* $\mathbb{V}^n/\mathbb{W}$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie* $(n-d,-a)$.

Démonstration. — En reprenant les notations de la proposition précédente, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{W}\cap(\oplus_{j\notin J}\mathbb{D}_j) \longrightarrow \oplus_{j\notin J}\mathbb{D}_j \longrightarrow \mathbb{V}^n/\mathbb{W} \longrightarrow 0,$$

ce qui permet de conclure.

Lemme 7.21. — *Si* $\mathbb{W}$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie* (d,a) *admettant un présentation du type*

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W} \longrightarrow \mathbb{V}^d \longrightarrow 0,$$

avec $a=\dim_{\mathbf{Q}_p} U$ *et si* $\mathbb{W}'$ *est un sous-Espace Vectoriel de* $\mathbb{W}$ *de dimension* (d',a')*, alors* $\mathbb{W}/\mathbb{W}'$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie* $(d-d',a-a')$.

Soit $U'=U\cap\mathbb{W}'$; c'est un Espace Vectoriel de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ et d'après le lemme 7.3, le sous-Espace Vectoriel $\mathbb{W}'/U'$ de $\mathbb{V}^d$ est de dimension $(d',a'-\dim_{\mathbf{Q}_p} U')$. D'autre part, on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow U/U' \longrightarrow \mathbb{W}/\mathbb{W}' \longrightarrow \mathbb{V}^d/(\mathbb{W}'/U') \longrightarrow 0$$

et le corollaire 7.20 allié au lemme 7.3 permet de montrer que $\mathbb{W}/\mathbb{W}'$ est un Espace Vectoriel de dimension finie $(d,0)-(d',a'-\dim_{\mathbf{Q}_p} U')+(0,\dim_{\mathbf{Q}_p} U/U')=(d-d',a-a')$, ce qu'il fallait démontrer.

Proposition 7.22. — *Si* $\mathbb{W}'\subset\mathbb{W}$ *sont deux Espaces Vectoriels de dimension finie, alors* $\mathbb{W}''=\mathbb{W}/\mathbb{W}'$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie et on a* $\dim(\mathbb{W}'')=\dim(\mathbb{W})-\dim(\mathbb{W}')$.

Démonstration. — Soit

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

une présentation de $\mathbb{W}$. On a donc $\dim(\mathbb{W})=\dim(\mathbb{Y})-(0,\dim_{\mathbf{Q}_p} V)$. D'autre part, si $\mathbb{Y}'=\mathbb{Y}\times_{\mathbb{W}}\mathbb{W}'$, on a la suite exacte $0 \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Y}' \longrightarrow \mathbb{W}' \longrightarrow 0$ et le lemme 7.3 nous fournit la formule $\dim(\mathbb{Y}')=\dim(\mathbb{W}')+(0,\dim_{\mathbf{Q}_p} V)$ et d'autre part, $\mathbb{W}/\mathbb{W}'\cong\mathbb{Y}/\mathbb{Y}'$, ce qui permet d'utiliser le lemme précédent pour conclure.

Corollaire 7.23. — *Si* $\mathbb{W}$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie et si* $\mathbb{W}_1$ *et* $\mathbb{W}_2$ *sont deux sous-Espaces Vectoriels de dimension finie de* $\mathbb{W}$*, alors* $\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2$ *et* $\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$ *sont des sous-Espaces Vectoriels de dimension finie de* $\mathbb{W}$ *et on a*

$$\dim(\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2)+\dim(\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2)=\dim(\mathbb{W}_1)+\dim(\mathbb{W}_2).$$

Démonstration. — C'est un argument standard : $\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2$ est le noyau de l'application naturelle de $\mathbb{W}_1$ dans $\mathbb{W}/\mathbb{W}_2$ et est donc de dimension finie d'après les propositions 7.22 et 7.16 et $\mathbb{W}_1+\mathbb{W}_2$ s'identifie au quotient de $\mathbb{W}_1\oplus\mathbb{W}_2$ par $\mathbb{W}_1\cap\mathbb{W}_2$, ce qui permet d'utiliser la proposition 7.22 pour conclure.

7.8. Les Espaces de Banach de dimension finie. — On peut en particulier voir un Espace de Banach comme un Espace Vectoriel et donc parler d'Espace de Banach de dimension finie (une présentation $v \to [U \to \mathbb{Y} \to \mathbb{V}^d]$ d'un Espace de Banach de dimension finie est un diagramme dans la catégorie des Espaces de Banach, i.e. les applications $\mathbb{Y}(\Lambda) \to \Lambda^d$ et $\mathbb{Y}(\Lambda) \to \mathbb{W}(\Lambda)$ sont continues quelle que soit l'algèbre sympathique Λ). Si $\psi : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ est un morphisme d'Espaces de Banach, alors $\ker \psi$ est encore un Espace de Banach mais pas forcément im ψ : Il n'y a aucune raison a priori pour que im ψ_Λ soit fermé dans $\mathbb{W}_2(\Lambda)$. Par contre, si im ψ_Λ est fermé dans $\mathbb{W}_2(\Lambda)$ pour toute algèbre sympathique Λ, alors im ψ est un Espace de Banach qui s'identifie à $\mathbb{W}_1/\ker \psi$ d'après le théorème de l'image ouverte (cf. n° 2.2). La proposition suivante montre donc que la catégorie des Espaces de Banach de dimension finie est aussi agréable que possible.

Proposition 7.24. — *Si $\psi : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ est un morphisme d'Espaces de Banach de dimension finie, alors* Im ψ *est un Espace de Banach de dimension finie.*

Démonstration. — On sait déja que Im ψ est un Espace Vectoriel de dimension finie ; il suffit donc de prouver que tout sous-Espace Vectoriel $\mathbb{X}$ de dimension finie d'un Espace de Banach de dimension finie $\mathbb{W}$ est un Espace de Banach, c'est-à-dire $\mathbb{X}(\Lambda)$ est fermé dans $\mathbb{W}(\Lambda)$ quelle que soit l'algèbre sympathique Λ.

Soit

$$V \longrightarrow [U \longrightarrow \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{V}^d]$$

une présentation de $\mathbb{W}$ et soit $\widetilde{\mathbb{X}}$ l'image réciproque de $\mathbb{X}$ dans $\mathbb{Y}$. Pour montrer que $\mathbb{X}(\Lambda)$ est fermé dans $\mathbb{W}(\Lambda)$, il suffit (cf. n° 2.2, V est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$) de montrer que $\widetilde{\mathbb{X}}(\Lambda)$ est fermé dans $\mathbb{Y}(\Lambda)$. On peut donc, quitte à remplacer $\mathbb{W}$ par $\mathbb{Y}$ et $\mathbb{X}$ par $\widetilde{\mathbb{X}}$, supposer que $\mathbb{W}$ a une présentation de la forme

$$0 \longrightarrow U \longrightarrow \mathbb{W} \xrightarrow{\psi} \mathbb{V}^d \longrightarrow 0.$$

Soit r la dimension principale de $\mathbb{X}$. Il existe une partie I de $\{1,\dots,d\}$ à r éléments telle que la composée ψ_I de ψ et de la projection de $\mathbb{V}^d$ sur $\mathbb{V}^I$ induise une surjection de $\mathbb{X}$ sur $\mathbb{V}^I$. Le noyau U' de $\psi_I : \mathbb{X} \to \mathbb{V}^I$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$. Si $i \in I$, soit ℓ_i l'élément additif de $\mathbb{X}(\widetilde{C\{X\}})$ dont l'image par ψ_I est $(0,\dots,0,X,0,\dots,0)$, le X étant à la i-ième place.

Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{X}(\Lambda)$ ayant une limite λ dans $\mathbb{W}(\Lambda)$. Ceci implique que la suite de terme général $\psi_I(\lambda_n)$ tend vers $\psi_I(\lambda)$ et donc qu'il existe $k \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\psi_I(\lambda_n) \in (p^{-k}\mathscr{O}_\Lambda)^I$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. Si $n \in \mathbf{N}$, il existe alors $(\tau_{i,n})_{i\in I} \in \mathrm{T}_\Lambda^I$ tel que $\psi_I(\lambda_n) = (p^{-k}x(\tau_{i,n}))_{i\in I}$. Si $i \in I$ est fixé la suite de terme général $x(\tau_{i,n})$ converge et, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que la suite de terme général $(\tau_{i,n})$ a une limite $\tau_i \in \mathrm{T}_\Lambda$ quel que soit $i \in I$.

Soient $\lambda' = \sum_{i\in I} \ell_i(\tau_i)$ et $\lambda'_n = \sum_{i\in I} \ell_i(\tau_{i,n})$ si $n \in \mathbf{N}$. Montrons que $\mu = \lambda' - \lambda \in U' \subset \mathbb{X}(\Lambda)$, ce qui permettra de conclure car $\lambda' \in \sum_{i\in I} \mathbb{L}_{\ell_i}(\Lambda) \subset \mathbb{X}(\Lambda)$, d'où l'on déduit l'appartenance de λ à $\mathbb{X}(\Lambda)$, ce que l'on veut démontrer.

Si $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, l'application $t \mapsto s \circ t$ de $\mathrm{Spec}_\Lambda(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ dans $\mathrm{Spec}(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ est continue ; il en est donc de même de l'application $\tau \to s \circ s_\Lambda \circ \tau$ de T_Λ dans $\mathrm{Spec}(\widetilde{\Lambda\{X\}})$ (cf. lemme 5.25) ; on déduit alors de la propriété (T1) des Trucs la continuité de l'application $\tau \to s(\ell_i(\tau))$ de T_Λ dans $\mathbb{W}(C)$.

Par construction, $\mu_n = \lambda'_n - \lambda_n$ appartient à U' et la discussion précédente montre que $s(\mu_n)$ tend vers $s(\mu)$ quand n tend vers $+\infty$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$. Comme $s(\mu_n) \in U'$ et comme U' est complet car de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, on a $s(\mu) \in U'$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$; il suffit alors d'utiliser le lemme 7.2 pour conclure.

§ 8
Les Anneaux de périodes p-adiques

Ce § donne la construction des anneaux de Fontaine du point de vue Anneaux Topologiques et leurs principales propriétés (les suites exactes fondamentales sont repoussées au § suivant) ; les démonstrations sont standard ([**6**] et [**7**]) mais sont faites en détails.

8.1. Notations. — Soit K un corps de caractéristique 0, complet pour une valuation discrète, de corps résiduel k_K parfait de caractéristique p et soit π_K une uniformisante de K. On suppose que K est un sous-corps de C ; k_K est donc un sous-corps de k_C.

Pour tout anneau R de caractéristique p et parfait (i.e. $x \to x^p$ est un isomorphisme de R), on note $W(R)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans R. Si $a \in R$, on note $[a] = (a, 0, \dots, 0, \dots) \in W(R)$ son représentant de Teichmüller ; tout élément de $W(R)$ s'écrit alors de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n[a_n]$, où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de R.

Soit $K_0 = W(k_K)[\frac{1}{p}]$; c'est le sous-corps maximal non ramifié de K et K est une extension finie totalement ramifiée de K_0. Si $e = [K : K_0]$ et $P \in K_0[X]$ est le polynôme minimal de π_K sur K_0, alors P est un polynôme d'Eisenstein, i.e. est de la forme $P(X) = X^e + a_{e-1}X^{e-1} + \dots + a_0$, où les a_i sont des éléments de $p\mathscr{O}_{K_0}$ et $a_0 \in p\mathscr{O}_{K_0} - p^2\mathscr{O}_{K_0}$; on a alors $\mathscr{O}_K = \mathscr{O}_{K_0}[X]/(P)$.

8.2. L'Anneau $\mathbb{R}$. — Soit a un élément de $\mathfrak{m}_C - p\mathfrak{m}_C$ de telle sorte que l'Anneau $\mathbb{A}/a\mathbb{A}$ est un anneau de caractéristique p, non nul. Si $|b| < |a|$, on a une application naturelle de $\mathbb{A}/a\mathbb{A}$ sur $\mathbb{A}/b\mathbb{A}$ et donc aussi de la limite projective $\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathbb{A}/a\mathbb{A}$, (les applications de transition étant données par le frobenius $x \to x^p$) sur $\varprojlim_{n\in\mathbf{N}} \mathbb{A}/b\mathbb{A}$ et cette application naturelle est un isomorphisme de manière évidente, ce qui montre que la limite projective ci-dessus ne dépend pas du choix de $a \in \mathfrak{m}_C - p\mathfrak{m}_C$; elle sera noté $\mathbb{R}$, ce qui fait de $\mathbb{R}$ un Anneau de caractéristique p.

Si Λ est une algèbre sympathique, un élément $x \in \mathbb{R}(\Lambda)$ peut donc être considéré comme une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbb{A}(\Lambda)/\pi_K\mathbb{A}(\Lambda)$ vérifiant $x_{n+1}^p = x_n$ pour tout n.

Notons simplement R l'anneau $\mathbb{R}(C)$; il contient de manière naturelle k_C (et donc aussi k_K) : l'application qui, à $x \in k_C$ associe la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$, où x_n est l'image dans $\mathscr{O}_C/p\mathscr{O}_C$ de $[x^{p^{-n}}] \in W(k_C) \subset \mathscr{O}_C$, est un isomorphisme de k_C sur un sous-anneau de R. Si Λ est une algèbre sympathique, l'anneau $\mathbb{R}(\Lambda)$ est un anneau parfait de caractéristique p ; c'est aussi une R-algèbre (et donc aussi une k_K-algèbre).

Soient Λ une algèbre sympathique et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}(\Lambda)$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ choisissons un relèvement $\hat{x}_n$ de x_n dans $\mathscr{O}_\Lambda$. Si $m \in \mathbf{N}$ est fixé, la suite des $(\hat{x}_{m+n})^{p^n}$ converge dans $\mathscr{O}_\Lambda$ vers un élément $x^{(m)}$ indépendant du choix des relèvements. L'application $x \mapsto (x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ est une bijection de $\mathbb{R}(\Lambda)$ sur l'ensemble des suites d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda$ vérifiant $(x^{(m+1)})^p = x^{(m)}$ pour tout m. Nous utilisons cette bijection pour identifier $\mathbb{R}(\Lambda)$ à l'ensemble de ces suites. Alors, si $x =$

$(x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ et $y=(y^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}\in\mathbb{R}(\Lambda)$, on a $x+y=z$, avec $z^{(m)}=\lim_{n\mapsto\infty}(x^{(m+n)}+y^{(m+n)})^{p^n}$, $xy=(x^{(m)}y^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$.

On munit $\mathbb{R}(\Lambda)$ d'une norme $\|\ \|_{\mathbb{R}}$ en posant $\|x\|_{\mathbb{R}}=\|x^{(0)}\|$. Remarquons que si x et y sont deux éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$, on a $\|x-y\|_{\mathbb{R}}\leqslant p^{-1}$ si et seulement si $x_0-y_0=0$ dans $\mathscr{O}_\Lambda/p\mathscr{O}_\Lambda$ et donc, si et seulement si $\left\|x^{(0)}-y^{(0)}\right\|_\Lambda\leqslant p^{-1}$; on en déduit le fait que si $n\in\mathbf{N}$ et si $\left\|x^{(n)}-y^{(n)}\right\|_\Lambda\leqslant p^{-1}$, alors $\|x-y\|_{\mathbb{R}}=\|x^{p^{-n}}-y^{p^{-n}}\|_{\mathbb{R}}^{p^n}\leqslant p^{-p^n}$.

Proposition 8.1. — *L'Anneau $\mathbb{R}$ est un Anneau Topologique.*

Démonstration. — Si $s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et $\lambda\in\mathbb{R}(\Lambda)$, alors $\|s(\lambda)\|_{\mathbb{R}}\leqslant\|\lambda\|_{\mathbb{R}}$ de manière évidente et donc, si s et s_0 sont deux éléments de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et λ,λ_0 deux éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$, alors $\|s(\lambda)-s_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{R}}\leqslant\sup(\|\lambda-\lambda_0\|_{\mathbb{R}},\|s(\lambda_0)-s_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{R}})$. Maintenant, si $n\in\mathbf{N}$, il existe, par définition de la topologie de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$, un ouvert U_n de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ tel que, si $s\in U_n$, on ait $\left\|s(\lambda_0^{(n)})-s_0(\lambda_0^{(n)})\right\|_\Lambda\leqslant p^{-1}$; on a alors $\|s(\lambda_0)-s_0(\lambda_0)\|_{\mathbb{R}}\leqslant p^{-p^n}$. On en déduit la continuité de l'application $(s,\lambda)\to s(\lambda)$ de $\mathrm{Spec}(\Lambda)\times\mathbb{R}(\Lambda)$ dans R.

D'autre part, il est clair que si $x\in\mathbb{R}(\Lambda)$, alors $\|x\|_{\mathbb{R}}=\sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)}\|s(x)\|_{\mathbb{R}}$, ce qui permet de montrer que l'application de $\mathbb{R}(\Lambda)$ dans les fonctions continues de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ dans R est injective et termine la démonstration de la proposition.

Lemme 8.2. — *Soient Λ une algèbre sympatique et $x=(x^{(m)})_{m\in N}\in\mathbb{R}(\Lambda)$. Si $\alpha=(\alpha^{(m)})_{m\in N}$ est un élément de* R *vérifiant $\|\alpha\|_{\mathbb{R}}\geqslant\|x\|_{\mathbb{R}}$, alors il existe un unique élément $y=(y^{(m)})_{m\in N}$ de $\mathbb{R}(\Lambda)$ tel que l'on ait $x=\alpha y$.*

Démonstration. — Par hypothèse, on a $\|x^{(0)}\|\leqslant|\alpha^{(0)}|$. Comme Λ est spectrale, cela implique (cf. (i) du lemme 2.6) que, pour tout $m\in\mathbf{N}$, $\|x^{(m)}\|\leqslant|\alpha^{(m)}|$, ou encore que $y^{(m)}=x^{(m)}/\alpha^{(m)}\in\mathscr{O}_\Lambda$. Comme $(y^{(m+1)})^p=(x^{(m+1)}/\alpha^{(m+1)})^p=x^{(m)}/\alpha^{(m)}=y^{(m)}$, on a $y=(y^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}\in\mathbb{R}(\Lambda)$ et $x=\alpha y$.

8.3. L'Anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$. — Soit $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}=W(\mathbb{R})$ l'Anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathbb{R}$ et soit $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}=\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(C)$. Comme $\mathbb{R}$ est parfait, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ est sans p-torsion et tout élément x de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=\sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n]$, où $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}$. Le frobenius $x\to x^p$ sur $\mathbb{R}$ se relève en un morphisme d'Anneaux $\varphi:\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\to\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ donné par la formule

$$\varphi\left(\sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n]\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}p^n[x_n^p].$$

Comme $\mathbb{R}$ est une k_K-Algèbre, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ est une $W(k_K)=\mathscr{O}_{K_0}$-Algèbre et on pose $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}=\mathscr{O}_K\otimes_{\mathscr{O}_{K_0}}\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $\mathrm{A}_{\mathrm{inf},K}=\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(C)$. Si Λ est une algèbre sympathique, comme $\mathbb{R}(\Lambda)$ est parfait, $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ est sans π_K-torsion et tout élément de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n[x_n]$, où les x_n sont des éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$.

L'application $\theta:\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)\to\mathscr{O}_\Lambda$, définie par $\theta\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n[x_n]\right)=\sum_{n=0}^{+\infty}\pi_K^n x_n^{(0)}$, est un homomorphisme d'anneaux et on peut donc voir $\theta:\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}\to\mathbb{A}$ comme un morphisme d'Anneaux ; on note $\mathbb{J}_K$ l'Idéal de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ noyau de θ et $\mathbb{I}_K\supset\mathbb{J}_K$ l'image réciproque de l'Idéal principal $\pi_K\mathbb{A}$ de $\mathbb{A}$. Si $K=K_0$, les Idéaux $\mathbb{I}_K$ et $\mathbb{J}_K$ sont notés simplement $\mathbb{I}$ et $\mathbb{J}$ respectivement ; comme d'habitude, $\mathbb{I}(C)$, $\mathbb{J}(C)$, $\mathbb{I}_K(C)$ et $\mathbb{J}_K(C)$ sont notés simplement I, J, I_K et J_K respectivement.

Proposition 8.3. — (i) *L'application $x \mapsto x_0$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{A}/\pi_K\mathbb{A}$ est surjective et son noyau est un Idéal principal dont un élément $\overline{\alpha}$ de* R *est un générateur si et seulement si $\|\overline{\alpha}\|_{\mathbb{R}} = |\pi_K|$.*

(ii) *L'application θ est surjective et $\mathbb{J}_K$ est un Idéal principal dont $\alpha \in \mathrm{J}_K$ est un générateur si et seulement si la réduction $\overline{\alpha}$ de α modulo π_K vérifie $\|\overline{\alpha}\|_{\mathbb{R}} = |\pi_K|$.*

Démonstration. — La première application est surjective d'après le (iii) du lemme 2.15 et le reste du (i) est une conséquence du lemme 8.2.

Comme $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ et $\mathscr{O}_\Lambda$ sont séparés et complets pour la topologie π_K-adique, pour vérifier la surjectivité de θ, il suffit de le faire modulo π_K et il suffit d'utiliser la surjectivité dans le (i) pour ce faire. Finalement, soit $\alpha \in \mathrm{J}_K$ dont la réduction $\overline{\alpha}$ modulo π_K vérifie $\|\overline{\alpha}\|_{\mathbb{R}} = |\pi_K|$. Comme $\mathscr{O}_\Lambda$ est sans π_K-torsion et $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ est séparé et complet pour la topologie π_K-adique, il suffit, pour terminer la démonstration de ii), de montrer que, si $x = [x_0]+\pi_K[x_1]+\cdots+\pi_K^n[x_n]+\cdots \in \mathbb{J}_K(\Lambda)$, alors il existe $y \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ tel que $x - \alpha y \in \pi_K\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$. Mais, d'après le (i), il existe $\overline{y} \in \mathbb{R}(\Lambda)$ tel que $x_0 = \overline{\alpha}{\cdot}\overline{y}$ et il suffit de prendre $y = [\overline{y}]$.

En particulier, si $\widetilde{\pi_K}$ est un élément de R vérifiant $\widetilde{\pi_K}^{(0)} = \pi_K$, alors $\varpi_K = [\widetilde{\pi_K}] - \pi_K$ est un générateur de $\mathbb{J}_K$ et $\mathbb{I}_K$ est l'Idéal engendré, au choix, par π_K et $[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K$ ou par π_K et $[\widetilde{\pi_K}]$. Le lemme 8.4 ci-dessous nous fournit un grand choix de générateurs de $\mathbb{J}_K$ et, dans le cas où K est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, nous construirons au n° 9.2 un générateur ξ_K de $\mathbb{J}_K$ ayant de bonne propriétés.

Lemme 8.4. — *Si $K \neq K_0$, si $P \in K_0[X]$ est le polynôme minimal de π_K sur K_0 et si $\widehat{\pi_K} \in \mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ vérifie $\theta(\widehat{\pi_K}) = \pi_K$, alors $\widehat{\pi_K} - \pi_K$ est un générateur de $\mathbb{J}_K$ et $P(\widehat{\pi_K})$ est un générateur de $\mathbb{J}$.*

Démonstration. — Soit $e = [K : K_0]$; par hypothèse, on a $e > 1$. On peut écrire $\widehat{\pi_K}$ de manière unique sous la forme $[\pi_0] + p[\pi_1] + \cdots$, où les π_i sont des éléments de R. D'autre part, on a par hypothèse $\pi_K = \theta(\widehat{\pi_K}) = \pi_0^{(0)} + p\pi_1^{(0)} + \cdots$ et l'hypothèse $K \neq K_0$ se traduit par l'inégalité $v_p(\pi_K) < v_p(p)$ [et par l'égalité $ev_p(\pi_K) = v_p(p)$] et on déduit de l'égalité précédente $v_p(\pi_0^{(0)}) = v_p(\pi_K)$. Comme $\widehat{\pi_K} - \pi_K \in \mathrm{J}_K$ par construction, il suffit alors d'utiliser le ii) de la proposition 8.3 pour montrer que $\widehat{\pi_K} - \pi_K$ est un générateur de $\mathbb{J}_K$.

Maintenant, on a $\theta(P(\widehat{\pi_K})) = P(\pi_K) = 0$, ce qui montre que $P(\widehat{\pi_K})$ est un élément de J_K. D'autre part, on a $P(\widehat{\pi_K}) = \widehat{\pi_K}^e + a_{e-1}\widehat{\pi_K}^{e-1} + \cdots + a_0$ où les a_i sont des éléments de $p\mathscr{O}_F$, ce qui montre que l'image de $P(\widehat{\pi_K})$ dans R est π_0^e et est de valuation $ev_{\mathbb{R}}(u_0) = v_p(p)$; le (ii) de la proposition 8.3 permet alors de montrer que $P(\widehat{\pi_K})$ est un générateur de $\mathbb{J}$, ce qui termine la démonstration.

On munit $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\Lambda)$ de la topologie $\mathbb{I}_K(\Lambda)$-adique. Si $\mathbb{I}_K^{n,k}$ désigne l'Idéal de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ engendré par p^n et ϖ_K^k, la topologie de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ peut aussi s'obtenir en prenant les $\mathbb{I}_K^{n,k}(\Lambda)$ comme base de voisinages de 0. On note $\mathrm{I}_K^{n,k}$ l'idéal $\mathbb{I}_K^{n,k}(C)$ de $\mathrm{A}_{\mathrm{inf},K}$.

Lemme 8.5. — (i) *L'application qui à $x \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ associe sa réduction $\overline{x}$ modulo π_K est continue.*

(ii) *L'application $x \to [x]$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ est continue.*

Démonstration. — Si $x \in \mathbb{I}_K^n$, alors $\overline{x}$ est divisible par $\widetilde{\pi_K}^n$ et donc $\|\overline{x}\|_{\mathbb{R}} \leqslant p^{-n}$; on en déduit le (i).

D'après les formules explicites donnant l'addition des vecteurs de Witt, il existe des polynômes $Q_n \in \mathbf{Z}[X,Y]$ tels que l'on ait

$$[x+y]-[x]=\sum_{n=0}^{+\infty} p^n \left[Q_n\big(x^{p^{-n}}, y^{p^{-n}}\big)\right]$$

et Q_n est divisible par Y puisque $[x+y]-[x]=0$ si $y=0$ (on peut aussi montrer que Q_n est homogène de degré p^n, mais cela ne nous servira pas). On en déduit le fait que si $\|y\|_{\mathbb{R}} \leqslant |\pi_K|^{p^n}$, alors $[x+y]-[x] \in \mathbb{I}_K^{n+1}$, ce qui permet de démontrer le (ii) et termine la démonstration du lemme.

Proposition 8.6. — (i) *L'application* $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \to \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^n[x_n]$ *est un homéomorphisme de* $\mathbb{R}^{\mathbf{N}}$ *sur* $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$.

(ii) $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ *est un Anneau Topologique.*

Démonstration. — L'application $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \to \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_K^n[x_n]$ est continue comme limite uniforme d'applications continues [cf. (ii) du lemme 8.5]. Dans l'autre sens, on récupère les x_n à partir de x grâce à l'algorithme suivant : on a $x_n=\overline{a}_n$ où $a_0=x$ et $a_{n+1}=\frac{1}{\pi_K}(a_n-[x_n])$. Comme d'autre part, $\pi_K x \in \mathbb{I}_K^{k+1}$ implique $x \in \mathbb{I}_K^{k}$, on en déduit le fait (en utilisant de manière répétée les (i) et (ii) du lemme 8.5) que l'application $x \to x_n$ est continue pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui termine la démonstration du (i).

Le (ii) quant à lui est une conséquence du (i) et du fait que $\mathbb{R}$ est un Objet Topologique (prop. 8.1).

Corollaire 8.7. — *Si* Λ *est une algèbre sympathique si* $\lambda \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ *et si* $s_0 \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, *alors quels que soient* $n,k \in \mathbf{N}$, *il existe un ouvert* U *de* $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ *tel que l'on ait* $s(\lambda)-s_0(\lambda) \in \mathrm{I}^{n,k}$ *si* $s \in U$.

Démonstration. — C'est une simple traduction de la continuité de $s \to s(\lambda)$.

Lemme 8.8. — *Si* $x \in \mathbb{I}_K^{n,k+1}(\Lambda)$ *et* $a \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ *sont tels que l'on ait* $\theta(a)=\pi_K^{-n}\theta(x)$, *alors* $([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)^{-1}(x-\pi_K^n a) \in \mathbb{I}_K^{n,k}(\Lambda)$.

Démonstration. — Par hypothèse, il existe $b,c \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ tels que l'on ait $x=\pi_K^n b+([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)^{k+1}c$ et $\theta(b)=\theta(a)$, ce qui implique qu'il existe $y \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ tel que l'on ait $b=a+([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)y$. On a donc $([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)^{-1}(x-\pi_K^n a)=\pi_K^n y+([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)^k c$, ce qui permet de conclure.

Proposition 8.9. — *Si* Λ *est une algèbre spectrale connexe, les deux conditions suivantes sont équivalentes pour un élément* x *de* $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$:

(i) $x \in \mathbb{I}_K^{n,k}(\Lambda)$,

(ii) $s(x) \in \mathrm{I}_K^{n,k}$ *quel que soit* $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$.

Démonstration. — L'implication (i)$\Rightarrow$(ii) étant immédiate, il n'y a que (ii)$\Rightarrow$(i) à prouver, ce qui se fait par récurrence sur k. Si $k=1$, la condition (ii) équivaut à l'appartenance de $s(\theta(x))$ à $\pi_K^n\mathscr{O}_C$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, ce qui implique $\theta(x) \in \pi_K^n\mathscr{O}_\Lambda$ car Λ est une algèbre spectrale et, l'application $\theta : \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K} \to \mathbb{A}$ étant surjective, il existe $a \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ tel que $\theta(a)=\pi_K^{-n}\theta(x)$ et on peut écrire x sous la forme $\pi_K^n a+b$, où b est un élément de $\ker\theta$ et donc est divisible par

$[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K$. On en déduit l'appartenance de x à $\mathbb{I}_K^{n,1}(\Lambda)$, ce qui termine la démonstration du cas $k=1$.

Maintenant, si $s(x) \in \mathrm{I}_K^{n,k}$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, alors le raisonnement fait ci-dessus montre que l'on peut écrire x sous la forme $\pi_K^n a + ([\widetilde{\pi_K}] - \pi_K)b$ avec $a, b \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$. Le lemme 8.8 permet alors de montrer que $s(b) \in \mathrm{I}_K^{n,k}$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ et donc, utilisant l'hypothèse de récurrence, que $b \in \mathbb{I}_K^{n,k}(\Lambda)$ et finalement que $x \in \mathbb{I}_K^{n,k+1}(\Lambda)$, ce qui permet de conclure.

8.4. L'Anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — L'application θ s'étend de manière évidente en un morphisme surjectif, encore noté θ, de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[1/\pi_K]$) sur $\mathbb{B}$ dont le noyau est l'Idéal principal engendré par $P([\widetilde{\pi_K}])$ (resp. $[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K$) et qui sera encore noté $\mathbb{J}$ (resp. $\mathbb{J}_K$). Pour tout entier $m \geqslant 0$, on pose $\mathbb{B}_m = \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]/\mathbb{J}^m$ (resp. $\mathbb{B}_{m,K} = \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[1/\pi_K]/\mathbb{J}_K^m$). On note $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim \mathbb{B}_m$ resp. $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+ = \varprojlim \mathbb{B}_{m,K}$) le séparé complété de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[1/\pi_K]$) pour la topologie $\mathbb{J}$-adique (resp. $\mathbb{J}_K$-adique). Les anneaux $\mathbb{B}_m(C)$, $\mathbb{B}_{m,K}(C)$, $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(C)$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(C)$ seront notés simplement B_m, $\mathrm{B}_{m,K}$, $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ respectivement.

Comme $\mathbb{J}$ (resp. $\mathbb{J}_K$) est un idéal principal, on dispose d'une valuation discrète v_H sur $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$) et, par construction, $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (resp. $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$) est séparé et complet pour cette valuation. En particulier, $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ sont des anneaux de valuation discrète de corps résiduels C ; ils sont donc intègres.

Si Λ est une algèbre sympathique, on munit $\mathbb{B}_m(\Lambda)$ (resp. $\mathbb{B}_{m,K}(\Lambda)$) de la norme $\|\ \|_m$ (resp. $\|\ \|_{m,K}$) définie par le fait que l'on a $\|x\|_m = 1$ (resp. $\|x\|_{m,K} = 1$) si et seulement si x est dans l'image de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\Lambda) - p\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(\Lambda)$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda) - \pi_K\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$). On déduit de la proposition 8.9 la formule $\|\lambda\|_{m,K} = \sup_{s\in\mathrm{Spec}(\Lambda)} \|s(\lambda)\|_{m,K}$.

On munit $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+(\Lambda)$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(\Lambda)$ de la topologie de la limite projective.

Soit $(e_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda$ dont les images dans $\mathscr{O}_\Lambda/\pi_K\mathscr{O}_\Lambda$ forment une base de $\mathscr{O}_\Lambda/\pi_K\mathscr{O}_\Lambda$ sur k_K. On peut alors écrire tout élément x de Λ de manière unique sous la forme $\sum_{i\in I} x_i e_i$, où $(x_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de K tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Si $i \in I$, soit $\widetilde{e_i} \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ tel que l'on ait $\theta(\widetilde{e_i}) = e_i$ et soit $s : \Lambda \to \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[\frac{1}{\pi_K}]$ l'application définie par $s(\sum_{i\in I} x_i e_i) = \sum_{i\in I} x_i \widetilde{e_i}$. Ceci fait de s une section continue K-linéaire de θ et on a $s(\mathscr{O}_\Lambda) \subset \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$.

Soit v un générateur de $\mathbb{J}_K$. Si $x \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(\Lambda)$, soient $(a_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ les suites d'éléments de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(\Lambda)$ et Λ respectivement définies par récurrence par :

(i) $a_0(x) = x$,

(ii) $b_n(x) = \theta(a_n(x))$ et $a_{n+1}(x) = \frac{1}{v}(a_n(x) - s(b_n(x)))$.

L'application $x \to \widetilde{\theta}_v(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ (resp. $x \to \widetilde{\theta}_v(x) = \sum_{n=0}^{m-1} b_n X^n$) est un isomorphisme de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels topologiques de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(\Lambda)$ (resp. $\mathbb{B}_{m,K}(\Lambda)$) sur $\Lambda[[X]]$ (resp. $\Lambda[X]/(X^m)$), l'isomorphisme inverse étant celui qui, à $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$ (resp. $\sum_{n=0}^{m-1} b_n X^n$) associe $\sum_{n=0}^{+\infty} s(b_n)v^n$ (resp. $\sum_{n=0}^{m-1} s(b_n)v^n$) ; *ce n'est pas* un morphisme d'anneaux (il existe des isomorphismes d'anneaux de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sur $C[[X]]$, mais il n'en existe pas de continu).

Nous aurons à utiliser le résultat suivant qui est immédiat

Proposition 8.10. — *Si $F \in \mathbf{Q}_p[[X]]$ et $x \in \mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+(\Lambda)$, alors $\widetilde{\theta}_v(xF(v)) = \widetilde{\theta}_v(x)F$.*

Il résulte de la discussion précédente que $\mathbb{B}_m(\Lambda)$ et $\mathbb{B}_{m,K}(\Lambda)$ sont des espaces de Banach p-adiques.

Proposition 8.11. — *Les Anneaux $\mathbb{B}_m$, $\mathbb{B}_{m,K}$, $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ sont des Anneaux Topologiques (et même des Anneaux de Banach dans le cas de $\mathbb{B}_m$ et $\mathbb{B}_{m,K}$).*

Démonstration. — Les cas de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ se déduisent de ceux de $\mathbb{B}_m$ et $\mathbb{B}_{m,K}$ et, d'autre part, $\mathbb{B}_m$ est un cas particulier ($K = K_0$) de $\mathbb{B}_{m,K}$. Si λ est un élément de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)[1/\pi_K]$ vérifiant $s(\lambda) \in J_K^m$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, le lemme 8.9 permet de montrer que $\lambda \in \mathbb{J}_K^m(\Lambda)$; on en déduit l'injectivité de l'application naturelle de $\mathbb{B}_{m,K}(\Lambda)$ dans les fonctions de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ dans $\mathrm{B}_{m,K}$.

Finalement, si $\lambda_0 = \pi_K^{-r}\mu_0 \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)[1/\pi_K]$ et si $s_0 \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, alors, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe un ouvert U de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ tel que l'on ait $s(\mu_0) - s_0(\mu_0) \in \mathbb{I}_K^{n+r,m}(\Lambda)$ d'après le corollaire 8.7. Ceci implique que l'on a $s(\lambda) - s_0(\lambda) \in \pi_K^n \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda) + \mathbb{J}_K^m(\Lambda)$ si $\lambda - \lambda_0 \in \pi_K^n \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda) + \mathbb{J}_K^m(\Lambda)$ et $s \in U$; on en déduit la continuité de l'application $(s, \lambda) \to s(\lambda)$, ce qui termine la démonstration.

On dispose d'une inclusion naturelle de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[1/p]$ dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[1/\pi_K]$ et cette inclusion induit une inclusion de $\mathbb{J}^m$ dans $\mathbb{J}_K^m$ pour tout m, ce qui nous fournit des applications naturelles de $\mathbb{B}_m$ dans $\mathbb{B}_{m,K}$ pour tout m et de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$.

Proposition 8.12. — *Les applications naturelles de $\mathbb{B}_m$ dans $\mathbb{B}_{m,K}$ et de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ sont des isomorphismes d'Anneaux Topologiques.*

Démonstration. — Le cas de $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$ se déduit du cas de $\mathbb{B}_m$ par passage à la limite. D'autre part, comme $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ est inclus dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$, l'application naturelle de $\mathbb{B}_m$ dans $\mathbb{B}_{m,K}$ est continue et comme $\mathbb{B}_m(\Lambda)$ et $\mathbb{B}_{m,K}(\Lambda)$ sont des espaces de Banach p-adiques, il suffit, d'après le théorème de l'image ouverte, de vérifier que l'application naturelle est un isomorphisme, ce qui se fait par récurrence sur m, le cas $m = 1$ étant évident puisque $\mathbb{B}_1$ et $\mathbb{B}_{1,K}$ sont toutes les deux isomorphes à $\mathbb{B}$.

Comme P est le polynôme minimal de π_K sur K_0, il n'a qu'un zéro simple en π_K et donc $\theta(\frac{P([\widetilde{\pi_K}])}{[\widetilde{\pi_K}]-\pi_K}) = P'(\pi_K)$ est non nul et on peut faire la récurrence en utilisant le lemme des 5 et le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{V}^1 \arrow[r, "x \to (P([\widetilde{\pi_K}]))^m \cdot x"] \arrow[d, "x \to P'(\pi_K)^m \cdot x"] & \mathbb{B}_{m+1} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B}_m \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{V}^1 \arrow[r, "x \to ([\widetilde{\pi_K}]-\pi_K)^m \cdot x"'] & \mathbb{B}_{m+1,K} \arrow[r] & \mathbb{B}_{m,K} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La proposition 8.12 permet d'identifier $\mathbb{B}_{\mathrm{dR},K}^+$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+$, ce que nous ferons désormais.

8.5. Les Anneaux $\mathbb{A}_{\max}$ et $\mathbb{B}_{\max}^+$. — On note $\mathbb{A}_{\max}$ le séparé complété pour la topologie p-adique de la Sous-$\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$-Algèbre de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ engendrée par $p^{-1}\mathbb{I}$ et $\mathbb{B}_{\max}^+$ l'Algèbre $\mathbb{A}_{\max}[\frac{1}{p}]$. Comme d'habitude, les anneaux $\mathbb{A}_{\max}(C)$ et $\mathbb{B}_{\max}^+(C)$ sont notés simplement $\mathrm{A}_{\max}$ et $\mathrm{B}_{\max}^+$ respectivement.

Comme φ respecte $\mathbb{I}$, on peut étendre l'action de φ par continuité à $\mathbb{A}_{\max}$.

On note $\mathbb{A}_{\max,K}$ le séparé complété pour la topologie π_K-adique de la $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$-Algèbre engendrée par $\pi_K^{-1}\mathbb{I}_K$ et $\mathbb{B}^+_{\max,K}$ l'Algèbre $\mathbb{A}_{\max,K}[\frac{1}{p}]$ et on pose $\mathbb{A}_{\max,K}(C) = \mathrm{A}_{\max,K}$ et $\mathbb{B}^+_{\max,K}(C) = \mathrm{B}^+_{\max,K}$.

Si Λ est une algèbre sympathique, on munit $\mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda)$ d'une norme de K-espace vectoriel $\| \ \|_{\max}$ définie par le fait que $\|x\|_{\max} = 1$ si et seulement si $x \in \mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda) - \pi_K\mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda)$.

D'après la proposition 8.3, $\mathbb{I}_K$ est l'Idéal de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ engendré par π_K et $[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K$ ou par π_K et $[\widetilde{\pi_K}]$; on peut donc écrire (de manière non unique) tout élément de $\mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda)$ (resp. $\mathbb{B}_{\max,K}(\Lambda)$) sous la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\frac{[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K}{\pi_K}\right)^n \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} b_n \left(\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\right)^n,$$

où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ sont des suites d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ (resp. $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)[\frac{1}{p}]$) tendant π_K-adiquement vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Remarque 8.13. — Si $e = [K : K_0]$, on passe de π_K^e à p (resp. de $\widetilde{\pi_K}^e$ à $\widetilde{p}$) par multiplication par une unité de $\mathscr{O}_K$ (resp. de R) et on passe donc de $\big(\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\big)^e$ à $\frac{[\widetilde{p}]}{p}$ par multiplication par un élément inversible de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$. On en déduit les inclusions

$$\mathscr{O}_K \otimes_{\mathscr{O}_{K_0}} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\left[\frac{[\widetilde{p}]}{p}\right] \subset \mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}\left[\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\right] \subset \frac{1}{p}\left(\mathscr{O}_K \otimes_{\mathscr{O}_{K_0}} \mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\left[\frac{[\widetilde{p}]}{p}\right]\right),$$

et l'isomorphisme

$$K \otimes_{K_0} \mathbb{B}^+_{\max} \cong \mathbb{B}^+_{\max,K}.$$

Par définition de la topologie de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},K}$, une série de la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n([\widetilde{\pi_K}] - \pi_K)^n$, où les a_n sont des éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}[\frac{1}{p}]$, converge dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},K} = \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui nous fournit un morphisme naturel (continu) de $K \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\max} \cong \mathbb{B}^+_{\max,K}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$.

Proposition 8.14. — *Le morphisme naturel de $K \otimes_{K_0} \mathbb{B}^+_{\max}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},K} \cong \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est injectif.*

Démonstration. — Si $v = \frac{[\widetilde{\pi_K}] - \pi_K}{\pi_K}$, l'application $\widetilde{\theta}_v$ définie plus haut (cf. n° 8.4) induit un isomorphisme de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ sur $\mathscr{O}_\Lambda[[\pi_K X]]$ et de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)[v]$ sur $\mathscr{O}_\Lambda[[\pi_K X]][X]$. (Encore une fois, il s'agit d'isomorphismes de $\mathscr{O}_K$-modules et pas d'isomorphismes d'anneaux !) Passant aux séparés complétés pour la topologie π_K-adique, on voit que $\widetilde{\theta}_v$ induit des isomorphismes de $\mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda)$ et $\mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda)$ sur $\mathscr{O}_\Lambda\{X\}$ et $\Lambda\{X\}$ respectivement (en particulier, $\mathbb{B}_{\max,K}(\Lambda)$ est isomorphe à $\Lambda\{X\}$ en tant que K-espace vectoriel normé ; c'est donc un espace de Banach p-adique). Comme $\widetilde{\theta}_v$ induit un isomorphisme de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\Lambda)$ sur $\Lambda[[X]]$, pour conclure, il suffit alors d'utiliser la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_v"] \arrow[d] & \Lambda\{X\} \arrow[d, hook] \\
\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},K}(\Lambda) \arrow[r, "\widetilde{\theta}_v"] & \Lambda[[X]]
\end{tikzcd}$$

La proposition 8.14 ci-dessus permet de considérer $\mathbb{B}^+_{\max,K} = K \otimes_{K_0} \mathbb{B}^+_{\max}$ comme un sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce que nous ferons désormais.

Corollaire 8.15. — *Si* $\lambda \in \mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda)$*, alors* $\mathrm{N}_{K/K_0}(\lambda) \in \mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ *est nul si et seulement si* $\lambda = 0$.

Démonstration. — On peut écrire λ de manière unique sous la forme $\sum_{i=0}^{e-1} \pi_K^i \lambda_i$, où les λ_i sont des éléments de $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$. Si $\sigma_1, \ldots, \sigma_e$ sont les e plongements de K dans C au-dessus de K_0, on a $\mathrm{N}_{K/K_0}(\lambda) = \prod_{j=1}^{e}(\sum_{i=0}^{e-1} \sigma_j(\pi_K^i)\lambda_i)$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\Lambda)$. Si $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ et si $\mathrm{N}_{K/K_0}(\lambda) = 0$, comme $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est intègre, il existe j tel que l'on ait $\sum_{i=0}^{e-1} \sigma_j(\pi_K^i)s(\lambda_i) = 0$ et comme l'application naturelle de $K^{\sigma_j} \otimes_{K_0} \mathrm{B}^+_{\max}$ dans $\mathrm{B}^+_{\mathrm{dR}}$ est injective, ceci implique $s(\lambda_i) = 0$ quel que soit $0 \leqslant i \leqslant e-1$. Comme ceci est vrai pour tout $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, on en déduit la nullité des λ_i puis celle de λ, ce qui permet de conclure.

Proposition 8.16. — $\mathbb{B}^+_{\max,K}$ *est un Anneau de Banach.*

Démonstration. — On sait déjà que $\mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda)$ est un espace de Banach p-adique si Λ est une algèbre sympathique (cf. démonstration de la proposition 8.14) et aussi que $\mathbb{B}_{\max,K}(\Lambda)$ s'identifie à un sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}(\Lambda)$, ce qui permet de montrer l'injectivité de l'application naturelle de $\mathbb{B}_{\max,K}(\Lambda)$ dans l'ensemble des applications de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ dans $\mathrm{B}_{\max,K}$. Reste à vérifier la continuité de $(s,\lambda) \to s(\lambda)$.

Soit $\lambda_0 \in \mathbb{B}^+_{\max,K}(\Lambda)$ et $s_0 \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$. Il suffit de prouver que quel que soit $n \in \mathbf{N}$, il existe U voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ tel que l'on ait $s(\lambda_0) - s_0(\lambda_0) \in \pi_K^n \mathrm{A}_{\max,K}$ si $s \in U$ (car alors on aura $s(\lambda) - s_0(\lambda_0) \in \pi_K^n \mathrm{A}_{\max,K}$ si $s \in U$ et $\lambda \in \lambda_0 + \pi_K^n \mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda)$). Il existe $r \in \mathbf{N}$ et une suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ tendant π_K-adiquement vers 0 tels que l'on ait $\lambda_0 = \sum_{k=0}^{+\infty} \pi_K^{-r} a_k \left(\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\right)^k$. Comme la suite $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ tend π_K-adiquement vers 0, il existe k_0 tel que l'on ait $a_k \in \pi_K^{n+r}\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}(\Lambda)$ si $k \geqslant k_0$. D'autre part, comme $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},K}$ est un Anneau Topologique, si $k \in \mathbf{N}$, il existe U_k voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ tel que l'on ait $s(a_k) - s_0(a_k) \in \mathbb{I}_K^{n+r}(\Lambda)$. Soit $U = \cap_{k=0}^{k_0} U_k$; c'est un voisinage de s_0 dans $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ et comme $\mathbb{I}_K^{n+r}(\Lambda) \subset \pi_K^{n+r}\mathbb{A}_{\max,K}(\Lambda)$, on a $s\big(a_k\big(\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\big)^k\big) - s_0\big(a_k\big(\frac{[\widetilde{\pi_K}]}{\pi_K}\big)^k\big) \in \pi_K^{n+r}\mathrm{A}_{\max,K}$ et donc $s(\lambda_0) - s_0(\lambda_0) \in \pi_K^n \mathrm{A}_{\max,K}$, ce qui permet de conclure.

8.6. L'Anneau $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}}$. — Soit $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} = \mathbb{B}^+_{\max}[u]$. On étend le frobenius φ à $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}}$ en posant $\varphi(u) = pu$ et on munit $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}}$ d'un opérateur N défini par $N = -\frac{d}{du}$. On a alors $N\varphi = p\varphi N$.

Soit $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K} = K \otimes_{K_0} \mathbb{B}_{\mathrm{st}} = \mathbb{B}^+_{\max,K}[u]$. On étend N en un opérateur K-linéaire de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K}$ et on a la suite exacte évidente

$$0 \longrightarrow \mathbb{B}^+_{\max,K} \longrightarrow \mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K} \xrightarrow{N} \mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K} \longrightarrow 0.$$

On peut étendre le morphisme naturel de $\mathbb{B}^+_{\max,K}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ en envoyant u sur $\log[\widetilde{p}]$, où $\log[\widetilde{p}]$ est l'élément de $\mathbb{J}_{\mathrm{dR}}$ défini par

$$\log[\widetilde{p}] = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\left(\frac{[\widetilde{p}]}{p} - 1\right)^n.$$

Proposition 8.17. — *Le morphisme naturel de* $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K}$ *dans* $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR},K}$ *décrit ci-dessus est injectif.*

Démonstration. — Si $a \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K}$ est dans le noyau ; il en est de même de $\mathrm{N}_{K/K_0}(a) \in \mathbb{B}^+_{\mathrm{st}}$ et, comme on a $\mathrm{N}_{K/K_0}(a) = 0$ si et seulement si $a = 0$ d'après le corollaire 8.15, on peut se ramener au cas $K = K_0$.

Soient donc $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ tels que l'on ait $a_n(\log[\widetilde{p}])^n + \cdots + a_0 = 0$. Soit $v = \frac{[\widetilde{p}]-p}{p}$ de telle sorte que $\log[\widetilde{p}] = \log(1+v)$. Appliquant $\widetilde{\theta}_v$ à l'identité $a_n(\log[\widetilde{p}])^n + \cdots + a_0 = 0$, et utilisant la proposition 8.10 et le fait que $\widetilde{\theta}_v$ induit un isomorphisme de $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ sur $\Lambda\{X\}$, on obtient

$$0 = \widetilde{\theta}_v(a_n(\log[\widetilde{p}])^n + \cdots + a_0) = b_n(X)(\log(1+X))^n + \cdots + b_0(X),$$

où $b_0, \dots, b_n$ sont des éléments de $\Lambda\{X\}$. Si $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, on doit alors avoir $s(b_0)(x) = 0$ si $x-1$ est une racine de l'unité d'ordre une puissance de p, ce qui implique $s(b_0) = 0$ car un élément non nul de $C\{X\}$ n'a qu'un nombre fini de zéros sur $\mathscr{O}_C$; une récurrence immédiate permet de montrer que $s(b_i) = 0$ quels que soient $i \leqslant n$ et $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$ et finalement, Λ étant une algèbre spectrale, que $b_i = 0$ si $i \leqslant n$; on en déduit la nullité des a_i, ce qui permet de conclure.

La proposition 8.17 permet de considérer $\mathbb{B}^+_{\mathrm{st},K}$ comme un sous-anneau de $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce que nous ferons dorénavant.

§ 9
Construction d'Espaces de Banach de dimension finie

Ce § tourne autour de la démonstration des suites exactes fondamentales. Chemin faisant, on exhibe un certain nombre d'Espaces Vectoriels Topologiques de dimension finie non triviaux dont on calcule les dimensions. (Jusque-là, la théorie aurait très bien pu être vide et on aurait fort bien n'avoir fait que vérifier, de manière assez détournée, que C est un corps et que la catégorie des C-espaces vectoriels de dimension finie possède de bonne propriétés !) Les démonstrations sont assez techniques mais parfaitement standard ([**7**], [**4**]). Comme on se place dans un cadre un peu plus général que d'habitude, le rôle joué usuellement par l'analogue p-adique t de $2i\pi$ est ici joué par la période t_E d'un groupe de Lubin-Tate (le lecteur n'aura aucun mal à reconnaître la trace de la théorie de Lubin-Tate dans la construction de t_E).

Dans ce §, le corps K du § précédent est supposé être une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et sera noté E pour des raisons psychologiques (le corps E est censé jouer le rôle de corps des coefficients pour les représentations p-adiques, alors que le corps K est le corps de définition : un des buts étant l'étude des E-représentations continues du groupe $\mathscr{G}_K$).

Soit donc E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ de corps résiduel k_E. On note $E_0 = W(k_E)[\frac{1}{p}]$ l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans E. On note $q = q_E$ le cardinal de k_E et, si $f = [E_0 : \mathbf{Q}_p]$, on a $q = p^f$. On fixe $\pi = \pi_E$ une uniformisante de E.

9.1. Action du groupe de Weil. — Soit φ_E l'endomorphisme « élévation à la puissance q » de $\mathbb{R}$. Par fonctorialité des vecteurs de Witt, le Frobenius φ_E s'étend en un endomorphisme de l'Anneau $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$. De manière explicite, on a

$$\varphi_E\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_E^n[x_n]\Big) = \sum_{n=0}^{+\infty} \pi_E^n[x_n^q]$$

si les x_n sont des éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$ et Λ est une algèbre sympathique. On peut aussi décrire φ_E comme l'endomorphisme $\mathrm{id}\otimes\varphi^f$ de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}=\mathscr{O}_E\otimes_{\mathscr{O}_{E_0}}\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$. Bien évidemment, si $E=\mathbf{Q}_p$, alors $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}=\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$ et $\varphi_E=\varphi$.

Lemme 9.1. — (i) $\mathbb{R}^{\varphi_E=1}=k_E$.
(ii) $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}^{\varphi_E=1}=\mathscr{O}_E$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). Si Λ est une algèbre sympathique et $x=(x^{(n)})_{n\in N}\in\mathbb{R}(\Lambda)$ vérifie $\varphi_E(x)=x^q=x$, on a $(x^{(n)})^q=x^{(n)}$ et la connexité des algèbres sympathiques assure que $x^{(n)}$ est le représentant de Teichmüller dans $W(k_E)\subset C$ d'un élément de k_E, ce qui permet de conclure.

Comme φ_E respecte $\mathbb{I}_E$, on peut étendre l'action de φ_E par continuité à $\mathbb{A}_{\max,E}$ et $\mathbb{B}^+_{\max,E}$ et on a

Proposition 9.2. — $(\mathbb{A}_{\max,E})^{\varphi_E=1}=\mathscr{O}_E$ *et* $(\mathbb{B}^+_{\max,E})^{\varphi_E=1}=E$.

Démonstration. — Soient Λ une algèbre sympathique et $x\in\mathbb{A}_{\max,E}(\Lambda)$ fixé par φ_E. Écrivons x sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\left(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\right)^n$, où $(b_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ tendant π_E-adiquement vers 0 quand n tend vers $+\infty$. On a aussi

$$x=\varphi_E^k(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_E^k(b_n)\pi_E^{n(q^k-1)}\left(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\right)^{q^kn}$$

et donc $x-\varphi^k(b_0)\in\pi_E^{q^k-1}\mathbb{A}_{\max,E}(\Lambda)$. On en déduit le fait que x est la limite de la suite de terme général $\varphi_E^k(b_0)$ qui est une suite d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ et comme $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ est fermé dans $\mathbb{A}_{\max,E}(\Lambda)$, on a $x\in\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ et il suffit d'utiliser le (ii) du lemme 9.1 pour conclure.

Soit $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}\subset\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ le groupe de Weil de $\mathbf{Q}_p$. Tout élément w de $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ agit par une puissance entière $\varphi^{\deg(w)}$ du Frobenius sur $\overline{\mathbf{F}}_p$ ou sur l'extension non ramifiée maximale $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$ de $\mathbf{Q}_p$. L'application $w\to\deg(w)$ donne naissance à la suite exacte de groupes

$$0\longrightarrow\mathrm{W}^0_{\mathbf{Q}_p}\longrightarrow\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}\xrightarrow{\deg}\mathbf{Z}\longrightarrow0,$$

où $\mathrm{W}^0_{\mathbf{Q}_p}$ est le sous-groupe d'inertie de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$.

Soit $\mathrm{W}^+_{\mathbf{Q}_p}$ l'ensemble des $w\in\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ vérifiant $\deg(w)\geqslant0$. On dispose d'une action de $\mathrm{W}^+_{\mathbf{Q}_p}$ sur $\overline{\mathbf{Q}}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}\mathbb{B}^+_{\max}$ donnée par la formule

$$w(a\otimes x)=w(a)\otimes\varphi^{\deg(w)}(x),$$

si $w\in\mathrm{W}^+_{\mathbf{Q}_p}$, $a\in\overline{\mathbf{Q}}_p$ et $x\in\mathbb{B}^+_{\max}$. On récupère $\mathbb{B}^+_{\max}$ à partir de $\overline{\mathbf{Q}}_p\otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}}\mathbb{B}^+_{\max}$ en prenant les points fixes sous l'action de $\mathrm{W}^0_{\mathbf{Q}_p}$.

Soit $\mathrm{H}_E=\mathrm{Hom}(E,\overline{\mathbf{Q}}_p)$. Si $\sigma\in\mathrm{H}_E$ et $x\in E$, on note x^σ l'image de x sous l'action de σ et E^σ le sous-corps de $\overline{\mathbf{Q}}_p$ image de E par σ. Si $\sigma\in\mathrm{H}_E$, il existe un (unique) entier $i(\sigma)\in\{0,\dots,f-1\}$ tel que la restriction de σ à E_0 soit $\varphi^{i(\sigma)}$. L'application

$$\sigma:\mathscr{O}_E\otimes_{\mathscr{O}_{E_0}}\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}\to\mathscr{O}_{E^\sigma}\otimes_{\mathscr{O}_{E_0}}\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}$$

qui, à $e \otimes x$, associe $e^\sigma \otimes \varphi^{i(\sigma)}(x)$ est un morphisme d'Anneaux. Ce morphisme s'étend par continuité en un morphisme σ de $\mathbb{B}^+_{\max,E}$ dans $\mathbb{B}^+_{\max,E^\sigma}$.

Si $w \in \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$, l'application $\sigma \to w(\sigma) = w \circ \sigma$ est une bijection de H_E dans H_E. Comme les $\mathbb{B}^+_{\max,E^\sigma}$ pour $\sigma \in \mathrm{H}_E$ sont des sous-anneaux de $\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbb{B}^+_{\max}$, on peut faire agir $\mathrm{W}^+_{\mathbf{Q}_p}$ sur chacun d'eux et, si $w \in \mathrm{W}^+_{\mathbf{Q}_p}$, si $\sigma \in \mathrm{H}_E$ et si $n(\sigma,w)$ et $r(\sigma,w)$ sont les entiers déterminés par $\deg(w) + i(\sigma) = f{\cdot}n(\sigma,w) + r(\sigma,w)$ avec $0 \leqslant r(\sigma,w) \leqslant f-1$, on a $i(w(\sigma)) = r(\sigma,w)$ et

$$w(x^\sigma) = \varphi_E^{n(\sigma,w)}\left(x^{w(\sigma)}\right) = \left(\varphi_E^{n(\sigma,w)}(x)\right)^{w(\sigma)} \quad \text{si } x \in \mathbb{B}^+_{\max,E}.$$

9.2. Les éléments ξ_E et ω_E. — Si Λ est une algèbre sympathique, soit $\mathbb{R}_E(\Lambda)$ l'ensemble des suites $(x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda$ vérifiant $(x^{(m+1)})^q = x^{(m)}$. L'application qui à $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}(\Lambda)$ associe $(x^{(fm)})_{m\in\mathbf{N}}$ est une bijection de $\mathbb{R}(\Lambda)$ sur $\mathbb{R}_E(\Lambda)$ et $\mathbb{R}_E$ est un Anneau naturellement isomorphe à $\mathbb{R}$; nous ne l'introduisons que pour unifier les notations dans ce qui suit.

Soit $P_E(X) = X^q + \pi_E XS$, où $S \in \mathscr{O}_E[X]$ est de degré $\leqslant q-2$ et vérifie $S(0) = 1$; en particulier, $Q_E = X^{-1}P_E = X^{q-1} + \pi_E S$ est un polynôme d'Eisenstein. Si $n \geqslant 1$, soit $P_E^{[n]}$ le polynôme $P_E \circ \cdots \circ P_E$ obtenu en composant n fois le polynôme P_E.

Lemme 9.3. — *Si Λ est une algèbre sympathique et $x = (x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}_E(\Lambda)$, il existe un* (unique) *élément $\{x\}_E$ de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ ayant pour image x modulo π_E et vérifiant la formule $\varphi_E(\{x\}_E) = P_E(\{x\}_E)$. De plus, si $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda$ telle que, si $n \in \mathbf{N}$, alors la réduction de v_n modulo π_E est égale à x_n, alors $\lim_{n\to+\infty} P_E^{[n]}(v_n) = \theta(\{x\}_E)$.*

Démonstration. — Soit $\widetilde{x}$ un relèvement quelconque de x dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$. L'ensemble des relèvements de x est alors $\widetilde{x} + \pi_E\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ et P_E étant congru à X^q modulo π_E, l'application $x \to P_E \circ \varphi_E^{-1}(x)$ laisse $\widetilde{x} + \pi_E\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ globalement invariant.

D'autre part, si x et y sont deux éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ tels que $x \equiv y$, modulo π_E^k, alors $P_E(x) \equiv P_E(y)$ modulo π_E^{k+1} ce qui prouve que $P_E \circ \varphi_E^{-1}$ est une contraction de $\widetilde{x} + \pi_E\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ qui est complet pour la topologie π_E-adique ; elle y possède donc un unique point fixe $\{x\}_E$ qui répond à la question.

Finalement, soit $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{O}_\Lambda$ telle que, si $n \in \mathbf{N}$, alors la réduction de v_n modulo π_E est égale à x_n. On peut prendre $[x]$ comme relèvement de x dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ et comme $P_E \circ \varphi_E^{-1}$ est une contraction de $[x] + \pi_E\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ et θ et φ_E^{-1} sont des morphismes d'anneaux, on obtient

$$\begin{aligned}\theta\left(\{x\}_E\right) = \theta\left(\lim_{n\to+\infty}\left(P_E \circ \varphi_E^{-1}\right)^{[n]}([x])\right) &= \theta\left(\lim_{n\to+\infty} P_E^{[n]}\left(\varphi_E^{-n}([x])\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} P_E^{[n]}\left(\theta\left(\varphi_E^{-n}([x])\right)\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} P_E^{[n]}(x^{(n)})\end{aligned}$$

et comme $x^{(n)} - v_n \in \pi_E\mathscr{O}_\Lambda$ par hypothèse, on a $P_E^{[n]}(x^{(n)}) - P_E^{[n]}(v_n) \in \pi_E^{n+1}\mathscr{O}_\Lambda$, ce qui permet de conclure.

Remarque 9.4. — Si $E = \mathbf{Q}_p$, si $\pi_E = p$ et si $P_E(X) = (X+1)^p - 1$, alors $\{x\}_E = [x+1] - 1$.

Soient u_0 une racine du polynôme Q_E et soit $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $P_E(u_{n+1}) = u_n$ si $n \in \mathbf{N}$; on a en particulier $v_p(u_n) = \frac{v_p(\pi_E)}{(q-1)q^n}$. Si $n \in \mathbf{N}$ notons $\overline{u}_n$ la réduction de u_n modulo π_E, ce qui fait de $u = (\overline{u}_n)_{n\in\mathbf{N}}$ un élément de R_E vérifiant $v_{\mathbb{R}}(u) = \lim_{n\to+\infty} q^n v_p(u_n) = \frac{v_p(\pi_E)}{q-1}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $\omega_{E,n} = \varphi_E^{1-n}(\{u\}_E)$ et posons $\omega_E = \omega_{E,0}$ et $\xi_E = \frac{\omega_{E,0}}{\omega_{E,1}} = Q_E(\omega_{E,1})$.

Remarque 9.5. — Soit $\varepsilon = (1, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n, \dots)$ avec $\varepsilon_1 \neq 1$ et $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$; c'est de manière naturelle, un élément de R. Si $E = \mathbf{Q}_p$, si $\pi_E = p$ et si $P_E(X) = (X+1)^p - 1$, on peut prendre $u_n = \varepsilon_n - 1$ et on a alors $\omega = \omega_{\mathbf{Q}_p} = [\varepsilon] - 1$ et $\xi = \xi_{\mathbf{Q}_p} = 1 + [\varepsilon^{\frac{1}{p}}] + \cdots + [\varepsilon^{\frac{p-1}{p}}]$.

Si $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, soit $\mathbb{J}_E^{[n]}$ l'Idéal de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$ défini par $\mathbb{J}_E^{[n]} = \bigcap_{i=0}^n \varphi_E^{-i}(\mathbb{J}_E)$. En particulier, $\mathbb{J}_E^{[0]} = \mathbb{J}_E$ et si Λ est une algèbre sympathique et $n \in \mathbf{N} \cup \{+\infty\}$, on a

$$\mathbb{J}_E^{[n]}(\Lambda) = \{x \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda) \mid \theta(\varphi_E^i(x)) = 0 \ \text{ pour tout } i \leqslant n\}.$$

Proposition 9.6. — (i) *Si $n \in \mathbf{N}$, alors $\mathbb{J}_E^{[n]}$ est un Idéal principal dont $\frac{\omega_E}{\omega_{E,n+1}}$ est un générateur ; en particulier, ξ_E est un générateur de $\mathbb{J}_E$.*

(ii) *$\mathbb{J}_E^{[+\infty]}$ est un Idéal principal dont ω_E est un générateur.*

Démonstration. — Commençons par remarquer que $\theta(\omega_{E,1}) = \lim_{n\to+\infty} P_E^{[n]}(u_n) = u_0$ d'après le lemme 9.3 et donc $\theta(\xi_E) = \theta\big(Q_E(\omega_{E,1})\big) = Q_E(u_0) = 0$, ce qui montre que ξ_E est bien un élément de J_E. D'autre part, si $\overline{\xi}_E \in \mathrm{R}_E$ est la réduction modulo π_E de ξ_E, on a $\overline{\xi}_E = u^{q-1}$ et donc $v_{\mathbb{R}}(\overline{\xi}_E) = v_p(\pi_E)$, ce qui montre que ξ_E est un générateur de $\mathbb{J}_E$ d'après la proposition 8.3.

Démontrons alors le (i) par récurrence sur n. On vient juste de traiter le cas $n = 0$. Comme $\mathbb{J}_E^{[n+1]}$ est contenu dans $\mathbb{J}_E^{[n]}$, si $x \in \mathbb{J}_E^{[n+1]}(\Lambda)$, il existe grâce à l'hypothèse de récurrence, $x_n \in \mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$ tel que $x = \frac{\omega_E}{\omega_{E,n}} x_n$ et donc $\varphi_E^n(x) = \frac{P_E^{[n]}(\omega_E)}{\omega_E} \varphi_E^n(x_n)$ et comme $\theta(\frac{P_E^{[n]}(\omega_E)}{\omega_E})$ est la dérivée en $X = 0$ du polynôme $P_E^{[n]}$ et est non nulle puisqu'égale à π_E^n, cela implique $\varphi_E^n(x_n) \in \ker\theta = \frac{\omega_E}{\omega_{E,1}} \mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)$. Comme φ est bijectif sur $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$, on peut écrire $\varphi_E^n(x_n)$ sous la forme $\varphi_E^n(x_n) = \frac{\omega_E}{\omega_{E,1}} \varphi_E^n(x_{n+1})$ et on obtient $x = \frac{\omega_E}{\omega_{E,n+1}} x_{n+1}$, ce qui permet de terminer la démonstration du (i).

Passons au (ii). On a $\omega_E \mathbb{A}_{\mathrm{inf},E} \subset \mathbb{J}_E^{[+\infty]}$ et on cherche à montrer que cette inclusion est une surjection et comme $\omega_E \mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$ et $\mathbb{J}_E^{[+\infty]}$ sont complets et séparés pour la topologie π_E-adique (car fermés dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$ qui l'est), il suffit de le vérifier modulo π_E. Or on a $\mathbb{J}_E^{[+\infty]} = \cap_{n\in N} \mathbb{J}_E^{[n]}$ et si $x \in \mathbb{J}_E^{[+\infty]}(\Lambda)$ et $\overline{x} \in \mathbb{R}_E(\Lambda)$ désigne la réduction de x modulo π_E,

$$v_{\mathbb{R}}(\overline{x}) = v_{\mathbb{R}}(\overline{x}_n) + v_{\mathbb{R}}\left(\frac{\overline{\omega}_E}{\overline{\omega}_{E,n}}\right) \geqslant v_{\mathbb{R}}\left(\frac{\overline{\omega}_E}{\overline{\omega}_{E,n}}\right) = \left(1 - \frac{1}{q^n}\right) v_{\mathbb{R}}(\overline{\omega}_E).$$

On en déduit, en passant à la limite, l'inégalité $v_{\mathbb{R}}(\overline{x}) \geqslant v_{\mathbb{R}}(\overline{\omega}_E)$ et, utilisant le lemme 8.2, le fait qu'il existe $\overline{y} \in \mathbb{R}_E(\Lambda)$ tel que l'on ait $\overline{x} = \overline{\omega}_E \overline{y}$. Soit $z = x - \omega_E[\overline{y}]$. D'après ce qui précède, on a $z \in \mathbb{J}_E^{[n]} \cap \pi_E \mathbb{A}_{\mathrm{inf}} = \pi_E \mathbb{J}_E^{[n]}$ pour tout n et donc $z \in \pi_E \mathbb{J}_E^{[+\infty]}$, ce qui permet de conclure.

Remarque 9.7. — On a $\theta(\omega_{E,1})^{q-1} = -\pi_E S(u_0) \in \pi_E \mathscr{O}_C$ et donc $\omega_{E,1}^{q-1} \in \mathrm{I}_E$. Comme $\xi_E \in \mathrm{J}_E \subset \mathrm{I}_E$, on en déduit l'appartenance de $\omega_E^{q-1} = \xi_E^{q-1} \omega_{E,1}^{q-1}$ à I_E^q. En particulier, si $q = 2$, alors $\omega_E \in \mathrm{I}_E^2$.

9.3. L'élément t_E. — Si $k \geqslant 1$, soit $\ell_q(k)$ le plus grand entier ℓ vérifiant $q^\ell \leqslant k$.

Lemme 9.8. — *La suite de terme général $\pi_E^{-n} P_E^{[n]}$ converge dans $E[[X]]$ vers une limite $F_E(X) = X + \sum_{k=2}^{+\infty} e_k X^k$ avec $v_p(e_k) \geqslant -\ell_q(k) v_p(\pi_E)$ et on a $F_E \circ P_E = \pi_E F_E$.*

Démonstration. — Posons $P_E^{[n]}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{n,k} X^k$ et montrons par récurrence sur n que l'on a $v_p(e_{n,k}) \geqslant (n - \ell_q(k)) v_p(\pi_E)$ quels que soient $k, n \geqslant 1$. Le résultat est immédiat pour $n = 1$. D'autre part, on a

$$P_E^{[n+1]}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} e_{n,k} (\pi_E X S + X^q)^k = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e_{n,k} \pi_E^j X^{j+(k-j)q} S^j$$

et il suffit de vérifier que l'on a $j + n - \ell_q(k) \geqslant n + 1 - \ell_q(j + q(k-j))$ si $k \geqslant 1$ et $0 \leqslant j \leqslant k$. Utilisant la croissance de ℓ_q et la formule $\ell_q(q^r s) = r + \ell_q(s)$, on se ramène à démontrer l'inégalité $q^j(j + (k-j)q) \geqslant qk$ qui est équivalente à $(q^j - 1)k \geqslant (q^j - q^{j-1})j$ et cette dernière inégalité est une évidence puisque j est un entier compris entre 0 et k.

En particulier, comme $\ell_q(k) \leqslant k$, on a $P_E^{[n]} \in \pi_E^n \mathscr{O}_E[[\frac{X}{\pi_E}]]$ et

$$\pi_E^{-(n+1)} P_E^{[n+1]} - \pi_E^{-n} P_E^{[n]} = \pi_E^{-(n+1)} R(P_E^{[n]}) \in \pi_E^{n-1} \mathscr{O}_E[[\frac{X}{\pi_E}]]$$

car $R = P_E - \pi_E X$ est de valuation $\geqslant 2$ en X. On en tire la convergence de la suite $\pi_E^{-n} P_E^{[n]}$ dans $E[[X]]$ et l'inégalité $v_p(e_k) \geqslant -\ell_q(k) v_p(\pi_E)$ suit de l'inégalité $v_p(\pi_E^{-n} e_{n,k}) \geqslant -\ell_q(k) v_p(\pi_E)$. Finalement,

$$F_E \circ P_E = \lim_{n\to+\infty} \pi_E^{-n} P_E^{[n]} \circ P_E = \pi_E \lim_{n\to+\infty} \pi_E^{-(n+1)} P_E^{[n+1]} = \pi_E F_E.$$

Remarque 9.9. — Si $E = \mathbf{Q}_p$, $\pi_E = p$ et $P_E(X) = (X+1)^p - 1$, alors $F_E(X) = \log(1+X)$.

Proposition 9.10. — *Soit $t_E = F_E(\omega_E)$.*

(i) *t_E est un élément de $\mathrm{A}_{\max,E}$ vérifiant $\varphi_E(t_E) = \pi_E t_E$ et $\omega_E^{-1} t_E$ est une unité de $\mathrm{A}_{\max,E}$; en particulier $v_H(t_E) = 1$.*

(ii) *$\mathbb{J}_{\max,E}^{[+\infty]} = \{x \in \mathbb{B}_{\max,E}^+ \mid \theta(\varphi_E^n(x)) = 0 \ \forall n \in \mathbf{N}\}$ est l'Idéal principal de $\mathbb{B}_{\max,E}^+$ engendré par t_E.*

Démonstration. — On a $\omega_E^{-1} t_E = 1 + \sum_{k=2}^{+\infty} e_k \omega_E^k$ et $e_k \in \pi_E^{-\ell_q(k)-1} \mathscr{O}_E$. Si $q \neq 2$ (resp. si $q = 2$), on a $\ell_q(k) \leqslant k - 2$ (resp. $\ell_q(k) \leqslant k - 1$) si $k \geqslant 2$ et l'appartenance de ω_E à J_E (resp. à I_E^2, cf. remarque 9.7) entraine $\omega_E^{-1} t_E \in 1 + \pi_E \mathrm{A}_{\max,E}$. On en déduit le fait que $\omega_E^{-1} t_E$ est une unité de $\mathrm{A}_{\max,E}$ et donc que t_E appartient à $\mathrm{A}_{\max,E}$. Finalement, on a $\varphi_E(t_E) = \varphi_E(F_E(\omega_E)) = F_E(\varphi_E(\omega_E)) = F_E(P_E(\omega_E)) = \pi_E F_E(\omega_E) = \pi_E t_E$, ce qui termine la démonstration du (i).

Passons au (ii). Compte tenu du (i), il suffit de démontrer que ω_E est un générateur de $\mathbb{J}_{\max,E}^{[+\infty]}$. Soit donc Λ une algèbre sympathique et soit $x \in \mathbb{J}_{\max,E}^{[+\infty]}(\Lambda)$; en particulier, x est tué par θ et il s'écrit donc sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\xi_E}{\pi_E}\right)^n = \frac{\xi_E}{\pi_E} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\frac{\xi_E}{\pi_E}\right)^{n-1}\right),$$

où $(a_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}(\Lambda)[\frac{1}{\pi_E}]$ tendant π_E-adiquement vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Si $n \geqslant 1$, soit $Q_n(X) = \frac{(1+X)^n - 1}{X}$; c'est un polynôme à coefficients entiers ; posons $Q_0 = 0$. On a $\varphi_E(\pi_E^{-1}\xi_E) = \pi_E^{-1}Q_E(\omega_E) = 1 + \omega_E A(\omega_E)$ et un petit calcul montre que l'on peut écrire $\varphi_E(x)$ sous la forme $\varphi_E(\pi_E^{-1}\xi_E)\left(\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_E(a_n)\right) + \omega_E\varphi_E(y)\right)$, où on a posé

$$y = A(\omega_{E,1})\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n Q_{n-1}\left(\frac{Q_E(\omega_{E,1})}{\pi_E} - 1\right)\right)$$

et la série converge dans $\mathbb{B}^+_{\max,E}(\Lambda)$ car $\omega_{E,1}^{q-1} \in \mathrm{I}_E$ d'après la remarque 9.7, ce qui fait que $\frac{Q_E(\omega_{E,1})}{\pi_E} - 1$ appartient à $\mathrm{A}_{\max,E}$.

Par hypothèse, on a $\theta(\varphi_E^k(x)) = 0$ quel que soit $k \in N$ et comme $\theta(\varphi_E^{k-1}(\omega_E)) = 0$ si $k \geqslant 1$, cela implique que $\theta\left(\varphi_E^k\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\right) = 0$ quel que soit $k \geqslant 1$. D'après le (ii) de la prop. 9.6, cela implique qu'il existe $b \in \mathbb{A}_{\inf,E}(\Lambda)[\frac{1}{\pi_E}]$ tel que l'on ait $\varphi_E\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right) = \omega_E b$ et on obtient

$$x = \varphi_E^{-1}\left(\varphi_E\left(\frac{\xi_E}{\pi_E}\right)\left(\omega_E b + \omega_E\varphi_E(y)\right)\right) = \frac{\xi_E\omega_{E,1}}{\pi_E}\left(y + \varphi_E^{-1}(b)\right) = \frac{\omega_E}{\pi_E}\left(y + \varphi_E^{-1}(b)\right),$$

ce qui permet de conclure.

9.4. L'Espace Vectoriel $\mathbb{U}$. — Dans ce n° , on se place dans le cas $E = \mathbf{Q}_p$ et $\pi_E = p$. Si Λ est une algèbre sympathique, soit $\mathbb{R}(\Lambda)^{**}$ l'ensemble des éléments de $\mathbb{R}(\Lambda)$ vérifiant $\|x - 1\|_{\mathbb{R}} < 1$; c'est un sous-groupe de $\mathbb{R}(\Lambda)^*$.

Lemme 9.11. — *Si $x \in \mathbb{R}(\Lambda)^{**}$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}([x]-1)^n$ converge dans $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ vers un élément noté $\log[x]$. De plus, $x \to \log[x]$ est un morphisme de groupes de $\mathbb{R}(\Lambda)^{**}$ dans $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ et on a $\varphi(\log[x]) = p\log[x]$ si $x \in \mathbb{R}(\Lambda)^{**}$.*

Démonstration. — Si $\|x - 1\|_{\mathbb{R}} < 1$, il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que l'on ait $\|(x-1)^r\|_{\mathbb{R}} \leqslant p^{-1}$. On a alors $([x]-1)^r \in \mathbb{I}(\Lambda)$ et, si on écrit la série définissant $\log[x]$ sous la forme

$$\sum_{i=1}^{r}([x]-1)^i\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{kr+i-1}p^k}{kr+i}\left(\frac{([x]-1)^r}{p}\right)^k\right)$$

et qu'on utilise le fait que, si i est fixé, la suite de terme général $\frac{(-1)^{kr+i-1}p^k}{kr+i}$ tend vers 0 dans $\mathbf{Q}_p$, on en déduit la convergence de la série définissant $\log[x]$ dans $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$. Le reste de la proposition suit des propriétés habituelles de la série entière $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}T^n$ et de la continuité du morphisme de groupes $x \to [x]$ de $\mathbb{R}(\Lambda)^{**}$ dans $\mathbb{A}_{\inf}(\Lambda)^*$. Finalement, on a $\varphi(\log[x]) = \log(\varphi([x])) = \log[x^p] = p\log[x]$.

Notons $\mathbb{U}$ l'Espace de Banach $(\mathbb{B}^+_{\max})^{\varphi=p}$ et posons $\mathrm{U} = \mathbb{U}(C)$. Cet espace de Banach p-adique contient l'élément $t = \log[\varepsilon]$ d'après le lemme 9.11 et cet élément est un générateur de $\mathbb{J}^{[+\infty]}_{\max}$ d'après la proposition 9.10 et les remarques 9.4, 9.5 et 9.9.

Proposition 9.12. — *$\mathbb{U}$ est un Espace Vectoriel de dimension $(1,1)$ dont une présentation est fournie par la suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathbf{Q}_p \cdot t \longrightarrow \mathbb{U} \xrightarrow{\ \theta\ } \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Si $x \in \mathbb{R}(\Lambda)^{**}$, on a $\theta(\log[x]) = \log x^{(0)}$; en particulier $\theta(t) = \log 1 = 0$ et $\mathbf{Q}_p \cdot t$ est inclus dans $\mathbb{U} \cap \ker \theta$. Si $x \in \mathbb{U}(\Lambda)$ est tué par θ, alors $\varphi^k(x) = p^k x$ est tué par θ quel que soit $k \in \mathbf{N}$. D'après la proposition 9.10, cela implique que x est divisible par t dans $\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda)$ et donc, comme $\varphi(t) = pt$, que x peut s'écrire sous la forme $t{\cdot}y$ avec $y \in (\mathbb{B}^+_{\max}(\Lambda))^{\varphi=1} = \mathbf{Q}_p$ [cf. prop. 9.2].

Il ne reste donc plus qu'à établir la surjectivité de θ pour terminer la démonstration de la proposition. Soit $\lambda \in \Lambda$. Si $n \in \mathbf{N}$ est tel que $p^n\lambda \in p^2\mathscr{O}_\Lambda$, alors $e^{p^n\lambda} \in 1 + p\mathscr{O}_\Lambda \subset \mathscr{O}_\Lambda^{**}$ et, Λ étant p-close, il existe $x = (x^{(m)})_{m\in\mathbf{N}} \in \mathbb{R}(\Lambda)^{**}$ vérifiant $x^{(0)} = e^{p^n\lambda}$. On a alors $\log[x] \in \mathbb{U}(\Lambda)$ et $\theta(\log[x]) = \log x^{(0)} = p^n\lambda$, ce qui, compte tenu de la $\mathbf{Q}_p$-linéarité de θ, permet de conclure.

Remarque 9.13. — Nous montrerons au n° 10.4 que $\mathbb{U}$ est l'extension universelle de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$, ce qui justifiera a posteriori les techniques employées dans le n° ci-dessous.

9.5. L'Espace Vectoriel $\mathbb{U}_{E,s}$. — Si $s \in \mathbf{N}$, notons $\mathbb{U}_{E,s}$ le sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{B}^+_{\max,E}$ défini par $\mathbb{U}_{E,s}(\Lambda) = \{x \in \mathbb{B}^+_{\max,E}(\Lambda) \mid \varphi_E(x) = \pi_E^s x\}$.

Lemme 9.14. — *Si $y \in \mathbb{U}_{E,s}(\Lambda)$ vérifie $\theta(y) = 0$, alors y peut s'écrire de manière unique sous la forme $y = t_E x$ avec $x \in \mathbb{U}_{E,s-1}(\Lambda)$.*

Démonstration. — L'existence de x résulte du (ii) de la proposition 9.10 et son unicité est une conséquence du fait que t_E n'est pas un diviseur de 0 dans $\mathbb{B}^+_{\max,E}(\Lambda)$.

Proposition 9.15. — *$\mathbb{U}_{E,0} = E$.*

Démonstration. — C'est une simple reformulation de la proposition 9.2.

Lemme 9.16. — *$(\mathbb{B}^+_{\max,E})^{\varphi_E=p^f}$ est un Espace Vectoriel de dimension (d_E, d_E) dont une présentation est fournie par la suite exacte*

$$0 \longrightarrow E\cdot t \longrightarrow (\mathbb{B}^+_{\max,E})^{\varphi_E=p^f} \xrightarrow{\ \Theta_E\ } \mathbb{V}^{\mathrm{H}_E} \longrightarrow 0,$$

où $\mathrm{H}_E = \mathrm{Hom}(E, C)$ et $\Theta_E : \mathbb{B}^+_{\max,E} \to \mathbb{V}^{\mathrm{H}_E}$ est l'application qui à x associe $(\theta(\sigma(x)))_{\sigma\in\mathrm{H}_E}$.

Démonstration. — Si $x \in (\mathbb{B}^+_{\max,E})^{\varphi_E=p^f}$, soit $\mathrm{T}(x) = \sum_{\sigma\in\mathrm{H}_E} p^{-i(\sigma)}x^\sigma$. Si $w \in \mathrm{W}^0_{\mathbf{Q}_p}$, on a

$$w(\mathrm{T}(x)) = \sum_{\sigma\in\mathrm{H}_E} p^{-i(\sigma)}x^{w(\sigma)} = \mathrm{T}(x)$$

car $\sigma \to w(\sigma)$ est une bijection de H_E et $i(w(\sigma)) = i(\sigma)$ puisque $\deg w = 0$. On en déduit l'appartenance de $\mathrm{T}(x)$ à $\mathbb{B}^+_{\max}$. Maintenant, si $\deg w = 1$, alors

$$w(\mathrm{T}(x)) = \sum_{i=0}^{f-2} p^{-i} \sum_{i(\sigma)=i} x^{w(\sigma)} + p^{1-f} \sum_{i(\sigma)=f-1} (\varphi_E(x))^{w(\sigma)}.$$

Or on a $i(w(\sigma)) = i(\sigma) + 1$ si $i(\sigma) \leqslant f-2$ et $i(w(\sigma)) = 0$ si $i(\sigma) = f-1$ et $\varphi_E(x) = p^f x$ par hypothèse. On en déduit la formule $w(\mathrm{T}(x)) = p\mathrm{T}(x)$ si $\deg w = 1$, ce qui implique que $\mathrm{T}(x) \in \mathbb{U}$. Ceci permet de définir un morphisme d'Espaces Vectoriels

$$\alpha_E : (\mathbb{B}^+_{\max,E})^{\varphi_E=p^f} \to E \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbb{U}$$

grâce à la formule $\alpha_E(x) = \sum_{i=1}^{d_E} e_i \otimes \mathrm{T}(e_i^* x)$, où $e_1, \dots, e_{d_E}$ est une base quelconque de E sur $\mathbf{Q}_p$ et $e_1^*, \dots, e_{d_E}^*$ est la base de E duale de $e_1, \dots, e_{d_E}$ pour la forme bilinéaire $(x, y) \to \mathrm{Tr}_{E/\mathbf{Q}_p}(xy)$. Ce morphisme est un isomorphisme ; l'isomorphisme réciproque β_E étant défini par $\beta_E(e \otimes x) = ex$. Comme $\mathbb{U}$ est un Espace Vectoriel de dimension $(1, 1)$, on en déduit le fait que $(\mathbb{B}_{\max,E}^+)^{\varphi_E = p^f}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie et que sa dimension est égale à (d_E, d_E).

Maintenant, on a $E \cdot t \subset \ker \Theta_E$ de manière évidente et réciproquement, si $x \in \ker \Theta_E$ et $e \in E$, alors $\theta(\sigma(ex)) = \sigma(e)\theta(\sigma(x)) = 0$ quel que soit $\sigma \in \mathrm{H}_E$ ce qui implique que, si $\alpha_E(x) = \sum_{i=1}^{d_E} u_i \otimes e_i$, alors $\theta(u_i) = 0$ et donc $u_i \in \mathbf{Q}_p \cdot t$ quel que soit i. On en déduit l'appartenance de $\alpha_E(x)$ à $E \otimes (\mathbf{Q}_p \cdot t)$ et celle de x à $E \cdot t$. On a donc démontré $\ker \Theta_E = E \cdot t$; en particulier, $\ker \Theta_E$ est un Espace Vectoriel de dimension $(d_E, 0)$ et $\operatorname{coker} \Theta_E$ est un Espace Vectoriel de dimension

$$\dim(\mathbb{B}_{\max,E}^+)^{\varphi_E = p^f} - \dim E - \dim \mathbb{V}^{\mathrm{H}_E} = (d_E, d_E) - (0, d_E) - (d_E, 0) = (0, 0);$$

on en déduit la surjectivité de Θ_E, ce qui permet de conclure.

Choisissons des uniformisantes π_σ de E telle que $\pi_E \prod_{\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}} \pi_\sigma = p^f$ et soit t_σ l'élément de $\mathbb{B}_{\max,E^\sigma}^+$ correspondant à l'uniformisante $\sigma(\pi_\sigma)$ de E^σ.

Lemme 9.17. — *Il existe $u \in E$ tel que l'on ait*

$$t_E \prod_{\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}} t_\sigma^{\sigma^{-1}} = ut.$$

Démonstration. — Posons $t_E = t_{\mathrm{id}}$ et $v = \prod_{\sigma \in \mathrm{H}_E} t_\sigma^{\sigma^{-1}}$. Comme $\sigma(v)$ est divisible par t_σ, on a $\Theta_E(v) = 0$ et $\varphi_E(v) = \prod_{\sigma \in \mathrm{H}_E} \sigma^{-1}(\sigma(\pi_\sigma))v = p^f v$, ce qui permet d'utiliser le lemme précédent pour conclure.

Lemme 9.18. — *Si $\tau \neq \sigma$, alors $\theta(t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}) \neq 0$.*

Démonstration. — Par construction, $t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}$ est un élément de $\mathbb{B}_{\max,E^\tau}^+$ vérifiant $\varphi^E(t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}) = \tau(\pi_\sigma) t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}$ et, si $\theta(t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}) = 0$, la proposition 9.10 permet de montrer que $t_\sigma^{\tau\sigma^{-1}}$ est divisible dans $\mathbb{B}_{\max,E^\tau}^+$ par t_τ. Utilisant le lemme 9.17, on en déduit la divisibilité de t par t_τ^2 dans $\mathbb{B}_{\max,E^\tau}^+$, ce qui est en contradiction avec la formule $v_H(t) = v_H(t_\tau) = 1$ (cf. (i) de la proposition 9.10). On en déduit le résultat.

Proposition 9.19. — *$\mathbb{U}_{E,1}$ est un Espace Vectoriel de dimension $(1, d_E)$ dont une présentation est fournie par la suite exacte*

$$0 \longrightarrow E \cdot t_E \longrightarrow \mathbb{U}_{E,1} \xrightarrow{\ \theta\ } \mathbb{V}^1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — D'après le lemme 9.19, l'application $\Theta'_E : (\mathbb{B}_{\max,E}^+)^{\varphi_E = p^f} \to \mathbb{V}^{\mathrm{H}_E - \{\mathrm{id}\}}$ qui à x associe $(\theta(\sigma(x)))_{\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}}$ est surjective et son noyau est un Espace Vectoriel de dimension $(1, d_E)$.

Si $x \in \ker \Theta'_E$, alors $\sigma(x) \in \mathbb{J}_{E^\sigma}^{[+\infty]}$ quel que soit $\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}$ donc $\sigma(x)$ est divisible par t_σ dans $\mathbb{B}_{\max,E^\sigma}^+$ quel que soit $\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}$ et une récurrence immédiate (en numérotant les éléments de $\mathrm{H}_E - \{\mathrm{id}\}$) utilisant le lemme 9.18 montre que x est divisible par $s = \prod_{\sigma \in \mathrm{H}_E - \mathrm{id}} t_\sigma^{\sigma^{-1}}$ dans dans $\mathbb{B}_{\max,E}^+$. On peut donc écrire x sous la forme $s \cdot y$ et, si on compare l'action de φ^f des deux cotés, on obtient $y \in \mathbb{U}_{E,1}$. On a donc établi l'inclusion $\ker \Theta'_E \subset s \cdot \mathbb{U}_{E,1}$ et l'inclusion inverse étant immédiate, on en déduit le fait que $\mathbb{U}_{E,1}$ est un Espace Vectoriel de dimension $(1, d_E)$. Comme d'autre part, le noyau de la restriction de $\theta : \mathbb{U}_{E,1} \to \mathbb{V}^1$ est $\mathbb{U}_{E,0} t_E$ d'après le lemme 9.14 et donc égal à $E \cdot t_E$ d'après la proposition 9.15, la dimension du conoyau de $\theta : \mathbb{U}_{E,1} \to \mathbb{V}^1$ est $(0, 0)$ et θ est surjective. Ceci permet de conclure.

Proposition 9.20. — *Si $u_E \in \mathbb{U}_{E,1}(C)$ est un relèvement de 1, on a la suite exacte suivante d'Espaces Vectoriels*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{x \to (u_E^{s-1}, t_E) \cdot x} \mathbb{U}_{E,s-1} \oplus \mathbb{U}_{E,1} \xrightarrow{(x,y) \to t_E x - u_E^{s-1} y} \mathbb{U}_{E,s} \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Un couple (x, y) est dans le noyau de l'application de $\mathbb{U}_{E,1}(\Lambda) \oplus \mathbb{U}_{E,s-1}(\Lambda)$ dans $\mathbb{U}_{E,s}(\Lambda)$ si et seulement si $u_E^{s-1} y = -t_E x$. Mais alors y est un élément de $\mathbb{U}_{E,1}(\Lambda)$ vérifiant $\theta(y) = 0$ et donc de la forme $t_E a$ avec $a \in \mathbb{U}_{E,0}(\Lambda)$ d'après le lemme 9.14 et comme t_E n'est pas un diviseur de 0, on a alors $x = -u_E^{s-1} a$, ce qui permet de vérifier l'exactitude au milieu. Finalement, soit $z \in \mathbb{U}_{E,s}(\Lambda)$. D'après la proposition 9.19, il existe $y \in \mathbb{U}_{E,1}(\Lambda)$ vérifiant $\theta(y) = \theta(z)$. Soit $z' = z - u_E^{s-1} y$; c'est un élément de $\mathbb{U}_{E,s}(\Lambda)$ vérifiant $\theta(z') = 0$. On peut donc écrire z' sous la forme $z' = t_E x$ avec $x \in \mathbb{U}_{E,s-1}(\Lambda)$ et z sous la forme $z = t_E x + u_E^{s-1} y$ avec $x \in \mathbb{U}_{E,s-1}(\Lambda)$ et $y \in \mathbb{U}_{E,1}(\Lambda)$, ce qui prouve l'exactitude à droite et termine la démonstration.

Corollaire 9.21. — *$\mathbb{U}_{E,s}$ est un Espace Vectoriel de dimension (s, d_E).*

Démonstration. — D'après la proposition 9.19, $\mathbb{U}_{E,1}$ est de dimension $(1, d_E)$ et une récurrence immédiate utilisant la suite exacte ci-dessus montre que $\mathbb{U}_{E,s}$ est un Espace Vectoriel de dimension (s, d_E) comme quotient d'un Espace Vectoriel de dimension $(s-1, d_E) + (1, d_E)$ par un Espace Vectoriel de dimension $(0, d_E)$.

9.6. L'Espace Vectoriel $\mathbb{B}_m$. — Dans ce n° , nous étudions l'Algèbre $\mathbb{B}_m$ introduite au n° 8.4 en tant qu'Espace Vectoriel Topologique.

Proposition 9.22. — *Le morphisme naturel de $\mathbb{B}^+_{\max,E}$ dans $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ induit la suite exacte suivante d'Espaces Vectoriels Topologiques*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{x \to t_E^s \cdot x} \mathbb{U}_{E,s} \longrightarrow \mathbb{B}_s \longrightarrow 0$$

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur s, le cas $s = 1$ correspondant à la proposition 9.19. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "x \to t_E^{s-1} x"] \arrow[d, equal] & \mathbb{U}_{E,s-1} \arrow[r] \arrow[d, "x \to t_E x"] & \mathbb{B}_{s-1} \arrow[r] \arrow[d, "x \to t_E x"] & 0 \\
0 \arrow[r] & E \arrow[r, "x \to t_E^{s} x"] & \mathbb{U}_{E,s} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{B}_{s} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathbb{V}^1 \arrow[r, equal] \arrow[d] & \mathbb{V}^1 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première ligne est exacte par l'hypothèse de récurrence et les deux colonnes sont exactes. Il s'ensuit que la seconde ligne est aussi exacte ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire 9.23. — *Si $s \in \mathbf{N}$, alors $\mathbb{B}_s$ est un Espace Vectoriel de dimension finie et on a* $\dim \mathbb{B}_s = (s, 0)$.

La suite exacte précédente montre que $\mathbb{B}_s$ est le quotient d'un Espace Vectoriel de dimension (s, d_E) par un Espace Vectoriel de dimension $(0, d_E)$; c'est donc un Espace Vectoriel de dimension $(s, 0)$.

Remarque 9.24. — On aurait pu aussi calculer la dimension de $\mathbb{B}_s$ par récurrence en utilisant la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{V}^1 \xrightarrow{x \to t^s x} \mathbb{B}_{s+1} \longrightarrow \mathbb{B}_s \longrightarrow 0,$$

mais cette suite exacte ne permet pas de démontrer par récurrence que $\mathbb{B}_s$ est un Espace Vectoriel de dimension finie car on ne sait pas (c'est d'ailleurs probablement faux) qu'un Espace Vectoriel extension de deux Espaces Vectoriels de dimension finie est encore de dimension finie.

9.7. Les suites exactes fondamentales. — On note $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ l'Anneau $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}] = \mathbb{B}_{\mathrm{dR},E}^+[\frac{1}{t_E}]$ et $\mathbb{B}_{\max}$, $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}$, $\mathbb{B}_{\max,E}$, $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}$ respectivement les sous-Anneaux $\mathbb{B}_{\max}^+[\frac{1}{t}]$, $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}^+[\frac{1}{t}]$, $\mathbb{B}_{\max,E}^+[\frac{1}{t_E}]$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}^+[\frac{1}{t_E}]$. Comme d'habitude, les anneaux $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}(C)$, $\mathbb{B}_{\max}(C)$, $\mathbb{B}_{\mathrm{st}}(C)$, $\mathbb{B}_{\max,E}(C)$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}(C)$ sont notés simplement B_{dR}, $\mathrm{B}_{\max}$, B_{st}, $\mathrm{B}_{\max,E}$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{st},E}$ respectivement. Contrairement à ce qui se passe d'habitude, $\mathbb{B}_{\max,E}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}$ sont *strictement* (si $E \neq \mathbf{Q}_p$) inclus dans $E \otimes_{E_0} \mathbb{B}_{\max}$ et $E \otimes_{E_0} \mathbb{B}_{\mathrm{st}}$.

Comme $\varphi_E(t_E) = \pi_E t_E$, on peut étendre l'action du Frobenius φ_E à $\mathbb{B}_{\max,E}$ et $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}$ et comme $N(t_E) = 0$, l'action de la dérivation N sur $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}^+$ s'étend à $\mathbb{B}_{\mathrm{st},E}$.

Proposition 9.25. — *On dispose des suites exactes suivantes d'Espaces Vectoriels*

(SEF $1E$) $$0 \longrightarrow \mathbb{B}_{\max,E} \longrightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{st},E} \xrightarrow{N} \mathbb{B}_{\mathrm{st},E} \longrightarrow 0.$$

(SEF $2E$) $$0 \longrightarrow \mathbb{B}_{\max,E}^{\varphi_E=1} \longrightarrow \mathbb{B}_{\max,E} \xrightarrow{\varphi_E-1} \mathbb{B}_{\max,E} \longrightarrow 0.$$

(SEF $3E$) $$0 \longrightarrow E \longrightarrow \mathbb{B}_{\max,E}^{\varphi_E=1} \longrightarrow \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — L'exactitude de la suite (SEF $1E$) est une évidence et celle de (SEF $3E$) provient, en faisant tendre n vers $+\infty$, de la suite exacte

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow (t_E^{-n}\mathbb{B}_{\max,E}^+)^{\varphi_E=1} \longrightarrow t_E^{-n}\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+/\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \longrightarrow 0.$$

que l'on obtient en multipliant la suite exacte de la proposition 9.22 par t_E^{-n}. Il ne reste donc à montrer que l'exactitude de (SEF $2E$) et la seule chose non immédiate est la surjectivité de φ_E-1. On a $\mathbb{B}_{\max,E} = \cup_{i=1}^{+\infty} t_E^{-i}\mathbb{B}_{\max,E}^+$ et résoudre l'équation $(1-\varphi_E)(t_E^{-i}x) = (t_E^{-i}y)$ est équivalent à résoudre l'équation $(1-\pi_E^{-i}\varphi_E)(x) = y$. Il suffit donc de prouver que si $i \geqslant 1$, alors l'application $1-\pi_E^{-i}\varphi_E : \mathbb{B}_{\max,E}^+ \to \mathbb{B}_{\max,E}^+$ est surjective.

$1-\pi_E^{-i}\varphi_E$ a formellement deux inverses possibles, à savoir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \pi_E^{-ki}\varphi_E^k \quad \text{ou} \quad -\sum_{k=1}^{+\infty} q^{ki}\varphi_E^{-k}.$$

D'autre part, tout élément de $\mathbb{B}_{\max,E}^+$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\big(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\big)^n$, où a_n est une suite d'éléments de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}[\frac{1}{\pi_E}]$ tendant vers π_E-adiquement vers 0 et quitte à multiplier x par une puissance de π_E, on peut supposer que les a_n sont dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$, auquel cas la série $-\sum_{k=1}^{+\infty} q^{ki}\varphi_E^{-k}(a_0)$ converge dans $\mathbb{A}_{\mathrm{inf},E}$ vers un élément y_0 vérifiant $(1-\pi_E^{-i}\varphi_E)(y_0) = a_0$.

De plus, on a $q^{-ki}\varphi^k\big(\big(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\big)^n\big) = \alpha\pi_E^{nq^k-n-dik}\big(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\big)^{nq^k}$, où $d = [E:\mathbf{Q}_p]$ et $\alpha \in \mathscr{O}_E^*$. Comme la suite double (pour $n \geqslant 1, k \geqslant 1$) de terme général $nq^k - n - dik$ est minorée par une constante $m(i)$ et tend vers $+\infty$ quand $n+k$ tend vers $+\infty$, la série double

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_E^k(a_n)\frac{\pi_E^{nq^k-n}}{q^{ik}}\left(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\right)^{nq^k}$$

converge dans $\mathbb{B}_{\max,E}^+$ vers un élément y_1 de $\pi_E^{-m(i)}\mathbb{A}_{\max,E}$ verifiant $(1-\pi_E^{-i}\varphi_E)(y_1) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\big(\frac{[\widetilde{\pi_E}]}{\pi_E}\big)^n = x - a_0$. On a donc $(1-\pi_E^{-i}\varphi_E)(y_0+y_1) = x$, ce qui permet de conclure.

§ 10
Un drôle de corps (suite)

Ce § est consacré à la détermination de la structure de $\mathscr{C}$ en tant que C-espace vectoriel ; les résultats obtenus ne sont pas utilisés dans le §11. La démonstration utilise de manière cruciale l'Espace de Banach $\mathbb{U} = (\mathbb{B}_{\max}^+)^{\varphi=p}$ qui se trouve être l'extension universelle de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$ dans la catégorie des Espaces de Banach de dimension finie ; il est assez amusant de constater que la seule manière que l'on ait pour construire des éléments non triviaux de $\mathscr{C}$ est de passer par les anneaux de Fontaine, alors que la définition de $\mathscr{C}$ n'en fait aucunement mention.

10.1. Les C-espaces vectoriels $\widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}$. — Comme $v_p(n!) = \frac{n-S_p(n)}{p-1}$, où $S_p(n)$ est la somme des chiffres du développement de n en base p, la série $e^{\alpha X}$ converge dans $C\{X\}$ si et seulement si $\alpha \in \mathfrak{a} = \{x \in C \mid v_p(x) > \frac{1}{p-1}\}$. De plus, si $\alpha \in \mathfrak{a}$, alors $e^{\alpha X} \in \mathscr{O}^{**}_{C\{X\}}$, ce qui fait que, si $n \in \mathbf{N}$, alors $e^{\alpha X}$ a une racine p^n-ième f dans $\widetilde{C\{X\}}$ et $X_{p^{-n}\alpha} = f(0)^{-1}f$ est l'unique racine p^n-ième de $e^{\alpha X}$ vérifiant $X_{p^{-n}\alpha}(0) = 1$ [rappelons que l'on considère les éléments de $\widetilde{C\{X\}}$ comme des fonctions sur T_C et que 0 désigne l'élément neutre de T_C]. On a donc construit une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in C}$ d'éléments de $\widetilde{C\{X\}}$ dont on vérifie les propriétés suivantes

(i) $X_{\alpha+\beta} = X_\alpha X_\beta$ si $\alpha, \beta \in C$,

(ii) $X_\alpha = e^{\alpha X} \in C\{X\}$ si $\alpha \in \mathfrak{a}$.

(iii) $X_\alpha(0) = 1$ si $\alpha \in C$.

D'autre part, si $\tau \in \mathrm{T}_C$ et $\alpha \in \mathfrak{a}$, on a $\tau(X_\alpha) = e^{\alpha x(\tau)}X_\alpha$. Ceci implique que si $\tau \in \mathrm{T}_C$ et $\alpha \in C$ est tel que $p^n\alpha \in \mathfrak{a}$, alors $(X_\alpha^{-1}\tau(X_\alpha))^{p^n} = e^{p^n\alpha x(\tau)} \in C^*$ et donc qu'il existe $\chi_\alpha(\tau) \in C^*$ tel que l'on ait $\tau(X_\alpha) = \chi_\alpha(\tau)X_\alpha$. L'application $\tau \to \chi_\alpha(\tau)$ est un morphisme de groupes de T_C dans C^* et la théorie de Kummer montre que la restriction de χ_α à $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ est à valeurs dans μ_{p^∞} et est triviale si et seulement si $X_\alpha \in F^*$, c'est-à-dire si et seulement si $\alpha \in \mathfrak{a}$.

Si $\alpha \in \mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$ et $n \in \mathbf{N}$, notons $K_{\alpha,n}$ l'extension de F engendrée par $X_{p^{-n}\alpha}$ et posons $K_{\alpha,\infty} = \cup_{n\in\mathbf{N}} K_{\alpha,n}$.

Lemme 10.1. — *Si $\alpha, \beta \in \mathfrak{a}$ et si $n \geqslant 1$, alors $K_{\alpha,n} = K_{\beta,n}$ si et seulement si α et β on même image dans $A_n = \mathbf{Z}_p^*\backslash\mathfrak{a}/p^n\mathfrak{a}$.*

Démonstration. — D'après la théorie de Kummer, on a $K_{\alpha,n} = K_{\beta,n}$ si et seulement si il existe un entier i premier à p tel que $e^{\alpha X}$ et $(e^{\beta X})^i$ aient même image modulo les puissances p^n-ièmes d'éléments de F^*, c'est-à-dire si et seulement si $e^{(\alpha-i\beta)X}$ est une puissance p^n-ième ou, autrement dit, si et seulement si $\alpha - i\beta \in p^n\mathfrak{a}$. Ceci permet de conclure.

Le résultat sur lequel repose la détermination de la structure de C-espace vectoriel de $\mathscr{C}$ est le suivant.

Proposition 10.2. — *Si K est une extension galoisienne de F de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ telle qu'il existe K' contenant K qui est stable par T_C et est galoisienne sur F avec $\mathrm{Gal}(K'/F) = \mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z}$, alors il existe $\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que l'on ait $K = K_{\alpha,n}$.*

La démonstration de cette proposition est assez technique et sera faite au n° suivant. Commençons par en tirer quelques conséquences.

Proposition 10.3. — *Si K_∞ est une extension galoisienne de F de groupe de Galois $\mathbf{Z}_p$ stable par T_C, alors il existe $\alpha \in \mathfrak{a}$ tel que l'on ait $K_\infty = K_{\alpha,\infty}$.*

Démonstration. — Si K_∞ est stable par T_C, si $n \in \mathbf{N}$ et si K_n est le sous-corps de K_∞ fixe par $p^n\mathbf{Z}_p$, alors K_n est une extension de F galoisienne de groupe de Galois $\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z}$ qui est stable par T_C. Comme ceci est vrai pour n et $n+1$ et que l'on a $K_n \subset K_{n+1}$, on est dans les conditions d'application de la proposition 10.2 ; il existe donc $\alpha_n \in \mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$ tel que l'on ait $K_n = K_{\alpha_n,n}$. Mais

$K_{\alpha_{n+1},n+1} = F(X_{p^{-(n+1)}\alpha_{n+1}})$ n'a qu'un sous-corps d'indice p, à savoir $F(X_{p^{-n}\alpha_{n+1}}) = K_{\alpha_{n+1},n}$. D'après le lemme 10.1, ceci implique que les α_n nous définissent un élément de la limite projective des A_n et, comme cette limite projective n'est autre que $\mathbf{Z}_p^*\backslash\mathfrak{a}$, cela permet de conclure.

On a choisi au n° 9.2 (cf. remarque 9.5) un système compatible $(1, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \ldots)$ de racines de l'unité avec $\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n$ si $n \in \mathbf{N}$ et $\varepsilon_1 \neq 1$, ce qui implique que ε_n est une racine primitive p^n-ième de l'unité quel que soit $n \in \mathbf{N}$.

Si $\alpha \in \mathfrak{a}$ et si $\tau \in \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$, il existe un unique élément $\psi_\alpha(\tau)$ de $\mathbf{Z}_p$ tel que l'on ait $\chi_{p^{-n}\alpha}(\tau) = \varepsilon_n^{\psi_\alpha(\tau)}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$. L'application $(\alpha, \tau) \to \psi_\alpha(\tau)$ de $\mathfrak{a} \times \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ dans $\mathbf{Z}_p$ est bilinéaire et on l'étend par linéarité en une application de $C \times \widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ dans $\mathbf{Q}_p$, ce qui permet de donner un sens à ψ_α si $\alpha \in C$. D'autre part, si $\alpha \in \mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$, alors ψ_α induit un isomorphisme de $\mathrm{Gal}(K_{\alpha,\infty}/F)$ sur $\mathbf{Z}_p$.

Proposition 10.4. — *Si ψ est un morphisme continu de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ dans $\mathbf{Z}_p$ (resp. $\mathbf{Q}_p$) invariant par conjugaison par un élément de T_C, alors il existe un unique α appartenant à $\mathfrak{a}$ (resp. C) tel que l'on ait $\psi = \psi_\alpha$.*

Démonstration. — Si ψ n'est pas le caractère trivial, le sous-corps de $\overline{F}$ fixé par le noyau de ψ est une $\mathbf{Z}_p$ extension de F stable par T_C et donc il existe $\beta \in \mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$ tel que ψ se factorise à travers $\mathrm{Gal}(K_{\beta,\infty}/F)$ et il existe alors $\lambda \in \mathbf{Q}_p$ tel que l'on ait $\psi = \lambda\psi_\beta = \psi_{\lambda\beta}$.

Si $f \in \widehat{\mathscr{C}}$, la restriction de f à $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ est un morphisme de groupes continu et comme $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ est compact, son image par f est un sous-groupe compact de C. Si cette image est de rang fini sur $\mathbf{Z}_p$ (ce qui signifie que $f \in \mathscr{C}$) et, si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ est une base de cette image sur $\mathbf{Z}_p$, on peut décomposer f de manière unique sous la forme $\sum_{i=1}^r \psi_i\lambda_i$, où ψ_i est un morphisme continu de $\widetilde{\mathrm{H}}_{C\{X\}}$ dans $\mathbf{Z}_p$ invariant par conjugaison par un élément de T_C d'après le lemme 6.6. Il existe donc $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathfrak{a}$ uniquement déterminés tel que l'on ait $\psi_i = \psi_{\alpha_i}$ et l'image de $\sum_{i=1}^r \lambda_i \otimes \alpha_i$ dans $C \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathfrak{a} = C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ ne dépend d'aucun des choix que l'on a fait, ce qui nous fournit une application naturelle $\delta : \mathscr{C} \to C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$.

Si l'image de $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ par f n'est pas de rang finie sur $\mathbf{Z}_p$, il existe une famille $(\lambda_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de C avec $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$, telle que tout élément de l'image s'écrive de manière unique sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} a_i\lambda_i$, où les a_i sont des éléments quelconques de $\mathbf{Z}_p$. Ceci permet, comme ci-dessus de définir une application (encore notée δ) de $\widehat{\mathscr{C}}$ dans le produit tensoriel complété $C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}C$; la restriction de cette application à $\mathscr{C}$ n'étant autre que l'application définie ci-dessus.

D'autre part, l'application qui à $\alpha \otimes \beta$ associe $\alpha\beta$ induit, par C-linéarité et continuité des applications $\mathrm{Tr} : C\otimes_{\mathbf{Q}_p}C \to C$ et $\mathrm{Tr} : C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}C \to C$.

Théorème 10.5. — *Les applications δ et* Tr *définies ci-dessus donnent naissance aux suites exactes*

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \mathscr{C} \xrightarrow{\delta} C\otimes_{\mathbf{Q}_p}C \xrightarrow{\mathrm{Tr}} C \longrightarrow 0$$

$$0 \longrightarrow C \longrightarrow \widehat{\mathscr{C}} \xrightarrow{\delta} C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}C \xrightarrow{\mathrm{Tr}} C \longrightarrow 0$$

Démonstration. — Si f est un élément de $\widehat{\mathscr{C}}$ vérifiant $\delta(f)=0$, alors f est de rang 0 et donc appartient à C d'après le corollaire 6.29 ; on en déduit l'exactitude des suites du théorème 10.5 en $\mathscr{C}$ et $\widehat{\mathscr{C}}$.

Comme les applications Tr sont manifestement surjectives, leurs noyaux sont de codimension 1 (sur C) et pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier que les applications δ ne sont pas surjectives, ce qui sera fait au n$^{\text{o}}$ 10.3 et que leurs images contiennent les noyaux des applications Tr (cf. n$^{\text{o}}$ 10.5).

10.2. Démonstration de la proposition 10.2. — Cette démonstration va nécessiter un peu de préparation. Soit π un élément de C vérifiant $\pi^{p-1}=-p$ (c'est le π de Dwork). Comme $v_p(n!)=\frac{n-S_p(n)}{p-1}$, où $S_p(n)$ est la somme des chiffres du développement de n en base p, si $a\in\mathscr{O}_\Lambda$ (resp. $a\in\mathfrak{m}_\Lambda$), la série entière $e^{a\pi X}$ appartient à $1+X\mathfrak{m}_\Lambda[[X]]$ (resp. $1+X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$). D'autre part, la série $e^{\pi(X-X^p)}$ est de rayon de convergence >1 et donc appartient à $1+X\mathfrak{m}_C\{X\}$ (c'est un des points de départ de la démonstration de Dwork de la rationalité des fonctions zêta).

Soient Λ une C-algèbre de Banach spectrale et S un sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ vérifiant la condition $(*)$ ci-dessous :

$$(*)\qquad \text{Quel que soit } \lambda\in\Lambda, \text{ il existe } s\in S \text{ tel que } \|\lambda\|_\Lambda=|s(\lambda)|.$$

Si Λ est une algèbre quelconque, un tel S n'existe pas forcément, mais dans l'application que nous avons en vue, on a $\Lambda=C\{Y\}$, et on peut prendre pour S tout sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(\Lambda)=\mathscr{O}_C$ dont l'image modulo $\mathfrak{m}_C$ est un sous-ensemble *infini* de k_C (cf. démonstration de la proposition 2.7) ; en particulier, tout sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{O}_C$ convient.

Lemme 10.6. — *Si $f\in 1+X\mathscr{O}_\Lambda\{X\}$, alors f a une unique racine p-ième g dans $1+X\Lambda[[X]]$. De plus,*

(i) *si $f\in 1+p\pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$, alors $g\in 1+\pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$*

(ii) *Si $s(f)$ a une racine p-ième dans $1+X\mathscr{O}_C\{X\}$ quel que soit $s\in S$, alors $g\in 1+X\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$.*

Démonstration. — Si $(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_iX^i)^p=(1+\sum_{i=1}^{+\infty}\mu_iX^i)^p$, une récurrence immédiate permet de montrer que l'on a $\mu_i=\lambda_i$ quel que soit $i\geqslant 1$, d'où l'unicité d'une racine p-ième. D'autre part, la série $\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/p}{k}(f-1)^k$ converge dans $1+X\Lambda[[X]]$ (et même dans $1+\pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ si $f\in 1+p\pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$) vers une racine p-ième $g=1+\sum_{i=1}^{+\infty}\lambda_iX^i$ de f. Finalement, l'unicité de la racine p-ième montre que la racine p-ième de $s(f)$ est $s(g)=1+\sum_{i=1}^{+\infty}s(\lambda_i)X^i$ et l'hypothèse implique donc que l'on a $|s(\lambda_i)|\leqslant 1$ quel que soit $s\in S$ si $i\geqslant 1$; comme S vérifie la propriété $(*)$, ceci implique que $\|\lambda_i\|_\Lambda\leqslant 1$, et donc $\lambda_i\in\mathscr{O}_\Lambda$ quel que soit $i\geqslant 1$. Ceci permet de conclure.

Lemme 10.7. — *Si $f\in\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$ a une puissance p-ième appartenant à $\mathscr{O}_\Lambda\{X\}$, alors il existe $P\in\mathscr{O}_\Lambda[X]$ tel que l'on ait $f-P\in\pi\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$.*

Démonstration. — Si $f=\sum_i a_iX^i$ et $f^p=\sum_i b_iX^i$, on a $b_{pi}\equiv a_i^p$ modulo p et comme, par hypothèse, b_i tend vers 0 quand i tend vers $+\infty$, il existe k tel que l'on ait $v_p(a_i)\geqslant\frac{1}{p}$ si $i>k$. Comme $\frac{2}{p}\geqslant\frac{1}{p-1}$, on obtient la congruence suivante modulo $p\pi$

$$f^p\equiv\Big(\sum_{i\leqslant k}a_iX^i\Big)^p+\sum_{i>k}a_i^pX^{pi}+p\Big(\sum_{i\leqslant k}a_iX^i\Big)\Big(\sum_{i>k}a_iX^i\Big).$$

Il existe alors $k' > pk$ tel que b_i soit congru à 0 modulo $p\pi$ si $i > k'$; on obtient donc

$$a_i^p + p\sum_{j\leqslant k} a_j a_{pi-j} \equiv 0 \mod p\pi,$$

si $i > k'$. Comme $pi-j > k$ si $i > \frac{k'}{p}$ et $j \leqslant k$, on tire de cette congruence l'inégalité $v_p(a_i) \geqslant \frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}$ si $i > k'$ et une récurrence immédiate permet de montrer que l'on a $v_p(a_i) \geqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^n}$ quel que soit $n \geqslant 1$ si $i > k'$. On peut donc prendre $P = \sum_{i\leqslant k'} a_i X^i$.

Lemme 10.8. — *Si $f \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda[[X]]$ a une puissance p-ième appartenant à $1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$, alors il existe $g \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ et $P \in \mathscr{O}_\Lambda[X]$ tels que l'on ait $f = ge^{\pi P}$.*

Démonstration. — D'après le lemme 10.7, il existe $g_0 \in \mathscr{O}_\Lambda[X]$ tel que $f - g_0 \in \pi\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$. Comme $f \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda[[X]]$ par hypothèse, cela implique que $g_0 \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda[X]$ et donc que g_0 a un inverse dans $1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ et on a $g_0^{-1}f \in 1 + X\pi\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$ et donc $h = g_0^{-p}f^p \in 1 + p\pi X\mathscr{O}_\Lambda[[X]] \cap 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$. On en déduit l'existence de $P \in X\mathscr{O}_\Lambda[X]$ tel que l'on ait $\frac{h-1}{p\pi} - P \in X\mathfrak{m}_X[[X]]$. Par construction, $e^{-p\pi P}h$ appartient à $1 + p\pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ et a donc (cf. lemme 10.6) une racine p-ième g_1 dans $1 + \pi X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$. Finalement, on a $f = g_0g_1e^{\pi P}$ et il suffit de poser $g = g_0g_1$ pour obtenir une écriture de f sous la forme voulue.

Lemme 10.9. — *Si $P = \sum_{i=1}^N a_iX^i \in X\mathscr{O}_\Lambda[X]$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) *Il existe $Q \in X\mathscr{O}_\Lambda[X]$ tel que $P(X) \equiv Q(X) - Q(X)^p$ modulo $X\mathfrak{m}_\Lambda[X]$,*
(ii) $e^{\pi P} \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$.
(iii) $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{P}^{p^n} \in k_\Lambda[X]$, *où $\overline{P}$ désigne la réduction de P modulo $\mathfrak{m}_\Lambda$.*
(iv) $e^{\pi s(P)} \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$ *quel que soit $s \in S$.*

Démonstration. — L'implication (i)⇒(ii) est une conséquence facile de l'appartenance de $e^{\pi(X-X^p)}$ à $1+X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$. D'autre part, on a $e^{\pi P} \in 1+\pi X\mathscr{O}_\Lambda[[X]]$ et la réduction de $\frac{1}{\pi}(e^{\pi P}-1)$ modulo π est égale à $\sum_{n=1}^{+\infty} \overline{P}^{p^n}$, car $\frac{\pi^{p^n-1}}{(p^n)!} = \frac{(-p)^{1+p+\cdots+p^{n-1}}}{(p^n)!}$ est congru à 1 modulo p (variante immédiate du « théorème de Wilson » $(p-1)!+1 \equiv 0$ mod. p) Si $e^{\pi P} \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$, cette réduction est un polynôme $\overline{Q}$ ce qui montre que (ii)⇒(iii). De plus, les applications $R \to R - R^p$ et $R \to R + R^p + \cdots + R^{p^n} + \cdots$ étant inverse l'une de l'autre sur $Xk_\Lambda[[X]]$, si $Q \in X\mathscr{O}_\Lambda[X]$ est n'importe quel polynôme dont la réduction est $\overline{Q}$, on a $\overline{P} = \overline{Q} - \overline{Q}^p$ et $P - (Q - Q^p) \in X\mathfrak{m}_\Lambda[X]$; d'où l'implication (iii)⇒(i).

L'implication (ii)⇒(iv) est vraie (et immédiate) même si S ne vérifie pas la condition $(*)$; il ne reste donc plus qu'à vérifier que si S vérifie $(*)$, alors (iv)⇒(iii). Soit $\overline{a}_i$ la réduction de a_i modulo $\mathfrak{m}_\Lambda$ et soit $b_i \in k_\Lambda$ le coefficient de X^i dans $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{P}^{p^n} = \sum_{i=1}^N \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{a}_i^{p^n} X^{p^n i}$. Si j n'est pas divisible par p et $r \in \mathbf{N}$, on a $b_{p^rj} = \sum_{k=0}^r (\overline{a}_{p^kj})^{p^{r-k}}$. Comme $\overline{a}_i = 0$ si $i > N$, on tire de la formule précédente l'égalité $b_{pi} = b_i^p$ si $i > N$ et $b_j = 0$ si p ne divise pas j et $j > N$, ce qui permet de montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \overline{P}^{p^n}$ est un polynôme si et seulement si $b_i = 0$ si $N+1 \leqslant i \leqslant pN$. Maintenant, si P vérifie la condition (iv), et $N+1 \leqslant i \leqslant pN$, on a $s(b_i) = 0$ quel que soit $s \in S$ et la condition $(*)$ implique alors que $b_i = 0$ si $N+1 \leqslant i \leqslant pN$, ce qui permet de conclure.

Lemme 10.10. — *Si $h \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda[[X]]$ vérifie*
(i) *$s(h) \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$ quel que soit $s \in S$,*
(ii) *il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $h^{p^n} \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$,*

alors $h \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$.

Démonstration. — Une récurrence immédiate permet de ramener le cas général au cas $n = 1$, auquel cas la condition (ii) implique, d'après le lemme 10.8, l'existence de $g \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ et $P \in X\mathscr{O}_\Lambda[X]$ tels que l'on ait $h = ge^{\pi P}$ et la condition (i) implique que $e^{\pi s(P)} \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$ quel que soit $s \in \mathrm{Spec}(\Lambda)$, ce qui implique $e^{\pi P} \in 1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ d'après le lemme 10.9 et permet de conclure.

Lemme 10.11. — *Si* $f \in 1 + X^2C[[X]]$ *est tel que* $g(X,Y) = \frac{f(X+Y)}{f(X)f(Y)}$ *appartient à* $1 + XY\mathfrak{m}_C\{X,Y\}$, *alors* $f^p \in 1 + X^2\mathfrak{m}_C\{X\}$.

Démonstration. — Une récurrence immédiate montre que $\frac{f(nX)}{f(X)^n} \in 1 + X^2\mathfrak{m}_C\{X\}$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$; en particulier, $\frac{f(pX)}{f(X)^p} \in 1 + X^2\mathfrak{m}_C\{X\}$. D'autre part, si $\partial_Y = \frac{\partial}{\partial Y}$, on a $\frac{\partial_Y g(X,Y)}{g(X,Y)} = \frac{f'(X+Y)}{f(X+Y)} - \frac{f'(Y)}{f(Y)}$ et donc $f(X) = \exp\bigl(\int \frac{\partial_Y g(X,0)}{g(X,0)}\bigr)$. Comme $g(X,Y) \in 1 + XY\mathfrak{m}_C\{X,Y\}$, on a $\frac{\partial_Y g(X,0)}{g(X,0)} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i X^i$ avec $a_i \in \mathfrak{m}_C$ et donc $\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{p^{i+1}}{i+1} X^{i+1} \in pX^2\mathfrak{m}_C\{X\}$ et $f(pX) = \exp\bigl(\sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{p^{i+1}}{i+1} X^{i+1}\bigr) \in 1 + X^2\mathfrak{m}_C\{X\}$, ce qui permet de conclure.

Venons-en à la démonstration de la proposition 10.2. La théorie de Kummer montre qu'il existe $f \in F^*/(F^*)^{p^{n+1}}$ tel que l'on ait $K' = F(\sqrt[p^{n+1}]{f})$ et $K = F(\sqrt[p^n]{f})$; la démonstration du lemme 6.9 montre que l'on peut supposer $f \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$. L'invariance de K par T_C se traduit alors par l'existence, si $a \in B(0,1)$, de $r(a) \in \{1, \ldots, p^{n+1} - 1\}$ premier à p et de $f_a \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$ uniquement déterminés tels que l'on ait $f(X+a) = f(a)f(X)^{r(a)} f_a(X)^{p^{n+1}}$. L'application $a \to \overline{r}(a)$, où $\overline{r}(a)$ désigne l'image de $r(a)$ dans $(\mathbf{Z}/p^{n+1}\mathbf{Z})^*$, est un morphisme de groupes et on note S son noyau, ce qui fait de S un sous-groupe d'indice fini de $\mathscr{O}_C$ (en fait, on a $S = \mathscr{O}_C$ comme on le verra plus loin) et donc S, vu comme sous-ensemble de $\mathrm{Spec}(\Lambda)$ avec $\Lambda = C\{Y\}$, vérifie la propriété $(*)$.

Soit $g(X,Y) = \frac{f(X+Y)}{f(X)f(Y)}$; c'est un élément de $1 + X\mathfrak{m}_\Lambda\{X\}$ tel que si $s \in S$, alors $s(g)$ a une racine p^{n+1}-ième dans $1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$. Les lemme 10.6 et 10.10 permettent de déduire de ceci l'existence d'une racine p^{n+1}-ième $h(X,Y)$ de $g(X,Y)$ appartenant à $1 + XY\mathfrak{m}\{X,Y\}$ (et de montrer que $S = \mathscr{O}_C$).

Soit alors $f_1 = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_i X^i$ la racine p^{n+1}-ième de f dans $1 + XC[[X]]$ et $f_2 = e^{-a_1 X} f_1$. Par construction, on a $f_2 \in 1 + X^2C[[X]]$ et, si on pose $g_i(X,Y) = \frac{f_i(X+Y)}{f_i(X)f_i(Y)}$ pour $i = 1, 2$, on a $g_1(X,Y) = g_2(X,Y) = h(X,Y)$ puisque toutes ces fonctions sont congrues à 1 modulo XY et leurs puissances p^{n+1}-ièmes sont toutes égales à $g(X,Y)$. Il résulte alors du lemme 10.11 que $f_2^p \in 1 + X\mathfrak{m}_C\{X\}$ et donc que $K = F(f_1^p) = F(\sqrt[p^n]{e^{p^n a_1 X}})$, ce qui permet de conclure.

10.3. Correspondances de rang 1. — Si $\alpha \in \mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$, soit $B_{\alpha,n}$ la sous-$C\{X\}$-algèbre de $\widetilde{C\{X\}}$ engendrée par $X_{p^{-n}\alpha}$; c'est une p-extension de $C\{X\}$ et la proposition 5.8 montre que $B_{\alpha,n}$ est la clôture intégrale de $C\{X\}$ dans $K_{\alpha,n}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, soit $I_n = p^{-n}\mathbf{Z} \cap [0, 1[= \{0, \frac{1}{p^n}, \ldots, \frac{p^n-1}{p^n}\}$. Tout élément de $B_{\alpha,n}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{r \in I_n} f_r X_{r\alpha}$, où les f_r sont des éléments de $C\{X\}$.

Proposition 10.12. — *Si $f \in K_{\alpha,n}$, alors*

$$p^{-4}\sup_{r\in I_n}\|f_r\|_{\mathrm{G}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \sup_{r\in I_n}\|f_r\|_{\mathrm{G}}.$$

Démonstration. — Écrivons $\sum_{r\in I_n} f_r X_{r\alpha}$ sous la forme $\sum_{i=0}^{p^n-1} f_i Z^i$, où $Z = X_{\frac{1}{p^n}\alpha}$. L'inégalité $\|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \sup_{0\leqslant i\leqslant p^n-1}\|f_i\|_{\mathrm{G}}$ est une évidence ; démontrons l'autre. Comme la majoration à démontrer ne dépend pas de n, nous supposerons $n > 4$. Si $\tau \in \mathrm{T}_C$, soit $u(\tau) = \chi_{\frac{\alpha}{p^n}}(\tau)$ et $h_\tau = \sum_{i=0}^{p^n-1} u(\tau)^i f_i Z^i$. Si $\tau_1, \dots, \tau_{p^n}$ sont p^n éléments de T_C dont les images par u sont toutes distinctes, la méthode d'interpolation de Lagrange nous fournit la formule

$$\sum_{i=0}^{p^n-1} T^i f_r X_{r\alpha} = \sum_{j=1}^{p^n} h_{\tau_j}\prod_{k\neq j}\frac{T-u(\tau_k)}{u(\tau_j)-u(\tau_k)}.$$

Identifiant les termes de degré i en T, on obtient l'existence d'éléments $\lambda_{i,j}$ de C vérifiant $|\lambda_{i,j}| \leqslant \sup_k(\prod_{\ell\neq k}|u(\tau_\ell)-u(\tau_k)|^{-1})$ tels que l'on ait $f_i Z^i = \sum_{j=1}^{p^n}\lambda_{i,j}h_{\tau_j}$.

Nous allons faire un choix judicieux pour les τ_j. Les conjugués de $X_{p^{-n}\alpha}$ sont les $\varepsilon_n^j X_{p^{-n}\alpha}$, où ε_n est une racine primitive p^n-ième de l'unité et $0 \leqslant j \leqslant p^n - 1$. Il existe donc pour tout $0 \leqslant j \leqslant p^n-1$, et donc a fortiori pour tout $0 \leqslant j \leqslant p^n - 1$ premier à p, un élément τ_j de $\mathscr{G}_F \subset \mathrm{T}_C$ vérifiant $u(\tau_j) = \varepsilon_n^j$. Comme $X_{p^{-n}\alpha}$ est une racine p^n-ième de $e^{\alpha X}$, on peut trouver $\sigma \in \mathrm{T}_C$ vérifiant $x(\sigma) = p^n$ et $u(\sigma) = e^\alpha$. Posons $\tau_{pj} = \sigma\tau_{pj+1}$ si $0 \leqslant j \leqslant p^{n-1}$. L'hypothèse $\frac{1}{p-1} < v_p(\alpha)$ implique que l'on a

$$v_p(u(\tau_j)-u(\tau_k)) = \begin{cases} v_p(\alpha) & \text{s'il existe } \ell \text{ tel que } (j,k)\in\{(p\ell,p\ell+1),(p\ell+1,p\ell)\},\\ \frac{1}{(p-1)p^{n-1}} & \text{sinon.}\end{cases}$$

On obtient donc

$$\sup_{i,j}|\lambda_{i,j}| \leqslant \sup_k\Big(\prod_{\ell\neq k}|u(\tau_\ell)-u(\tau_k)|^{-1}\Big) \leqslant |\alpha|^{-1}p^{\frac{p^n-2}{(p-1)p^{n-1}}} \leqslant p^4.$$

D'autre part, on a $\sup_j |c(\tau_j)| = p^{-n}$. Écrivant alors $f_i Z^i$ sous la forme

$$\sum_{j=1}^{p^n}\lambda_{i,j}f^{\tau_j} + \sum_{j=1}^{p^n}\lambda_{i,j}\Big(\sum_{k=1}^{p^n}u(\tau_j)^k(f_k - f_k^{\tau_j}Z^k\Big);$$

utilisant les majorations précédentes ainsi que la majoration $\|g^\tau - g\|_{\mathrm{G}} \leqslant |x(\tau)|\cdot\|g\|_{\mathrm{G}}$ si $g \in C\{X\}$ et la formule $\|f^\tau\|_{\mathrm{sp}} = \|f\|_{\mathrm{sp}}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sup_i\|f_i\|_{\mathrm{G}} = \sup_i\|f_iZ^i\|_{\mathrm{sp}} &\leqslant \sup\big(\sup_{i,j}|\lambda_{i,j}|\cdot\|f\|_{\mathrm{sp}},\ \sup_{i,j,k}|\lambda_{i,j}|\cdot|x(\tau_j)|\cdot\|f_k\|_{\mathrm{G}}\big)\\ &\leqslant \sup\big(p^4\|f\|_{\mathrm{sp}}, p^{4-n}\sup_k\|f_k\|_{\mathrm{G}}\big),\end{aligned}$$

et, comme on a supposé $n > 4$, on en tire la majoration souhaitée.

Notons $\widehat{B}_{\alpha,\infty}$ l'adhérence dans $\widetilde{C\{X\}}$ ou $\widehat{C\{X\}}$ de $B_{\alpha,\infty}$; c'est aussi la complétée de $B_{\alpha,\infty}$ pour la norme $\|\ \|_{\mathrm{sp}}$. Soit $I = \cup_{n\in\mathbf{N}} I_n = p^{-\infty}\mathbf{Z}\cap[0,1[$; c'est un système de représentants de $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p$.

Corollaire 10.13. — *Tout élément f de $\widehat{B}_{\alpha,\infty}$ s'écrit de manière unique sous la forme $\sum_{r\in I} f_r X_{r\alpha}$, où les f_r sont des éléments de $C\{X\}$ tendant vers* 0 *suivant le filtre complémentaire des parties finies de I et on a $p^{-4}\sup_{r\in I}\|f_r\|_{\mathrm{G}} \leqslant \|f\|_{\mathrm{sp}} \leqslant \sup_{r\in I}\|f_r\|_{\mathrm{G}}$.*

Proposition 10.14. — *Si $f\in\widehat{\mathscr{C}}$ est de rang $\leqslant 1$, alors f est de rang* 0.

Démonstration. — Si f est de rang $\leqslant 1$, il existe, d'après la prop. 10.4, $\lambda\in C$ et $\alpha\in\mathfrak{a}-p\mathfrak{a}$ tels que l'on ait $f(\tau)=\lambda\psi_\alpha(\tau)$ ou, autrement dit, $f^\tau - f = \lambda\psi_\alpha(\tau)$, quel que soit $\tau\in\mathrm{H}_{C\{X\}}$. La proposition 6.8 permet alors de montrer que f peut s'approcher par des éléments de $B_{\alpha,\infty}$ et donc appartient à $\widehat{B}_{\alpha,\infty}$. Écrivant f sous la forme $\sum_{r\in I} f_r X_{r\alpha}$, on obtient

$$\sum_{r\in I-\{0\}}(\chi_{\alpha r}(\tau)-1)f_r X_{r\alpha} = \lambda\psi_\alpha(\tau),$$

d'où l'on tire $\lambda=0$ (et $f_r=0$ si $r\in I-\{0\}$), ce qui permet de conclure.

Corollaire 10.15. — *Les applications δ ne sont pas surjectives.*

Démonstration. — D'après la proposition 10.14, l'image de δ ne contient pas d'élément de la forme $\lambda\otimes\alpha$ avec $\lambda\in C^*$ et $\alpha\in\mathfrak{a}-p\mathfrak{a}$ (ce serait l'image d'un élément additif de rang exactement 1).

10.4. L'extension universelle de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$. — On peut voir $\mathbb{U}$ comme une extension de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$ dans la catégorie des Espaces Vectoriels. Ces extensions forment un groupe $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{V}^1,\mathbf{Q}_p)$, la loi de groupe étant donnée par la formule habituelle, à savoir : si $0\longrightarrow\mathbf{Q}_p\longrightarrow\mathbb{E}_i\xrightarrow{\alpha_i}\mathbb{V}^1\longrightarrow 0$ pour $1\leqslant i\leqslant n$ est une extension de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$, la somme des $\mathbb{E}_i$ est l'Espace Vectoriel $\mathbb{E}_1\widehat{+}\cdots\widehat{+}\mathbb{E}_n$ quotient de

$$\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{E}_1\times\cdots\times\mathbb{E}_n \mid \alpha_i(x_i)=\alpha_j(x_j)\text{ quels que soient } i \text{ et } j\}$$

par l'ensemble des $(x_1,\dots,x_n)\in\mathbf{Q}_p\times\cdots\times\mathbf{Q}_p$ vérifiant $x_1+\cdots+x_n=0$. L'élément neutre pour cette loi de groupe est l'extension triviale $\mathbb{V}^1\oplus\mathbf{Q}_p$.

Si $\mathbb{E}$ est une extension de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$, soit $\ell\in\mathbb{E}(\widetilde{C\{X\}})$ le relèvement additif de X. La restriction de ℓ à $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ est un morphisme continu de $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ dans $\mathbf{Q}_p$ invariant par conjugaison par T_C et donc (cor. 10.4) est de la forme $\psi_{\alpha(\mathbb{E})}$ pour un certain élément $\alpha(\mathbb{E})$ de C. Il n'est pas difficile de vérifier, en revenant à la définition de la somme de deux extensions, que l'application $\mathbb{E}\to\alpha(\mathbb{E})$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{Ext}(\mathbb{V}^1,\mathbf{Q}_p)$ dans C.

Proposition 10.16. — *Le morphisme $\mathbb{E}\mapsto\alpha(\mathbb{E})$ est un isomorphisme de* $\mathrm{Ext}(\mathbb{V}^1,\mathbf{Q}_p)$ *sur C. De plus, on a $\alpha(\mathbb{U})=1$.*

Démonstration. — Commençons par l'injectivité. Soit $\mathbb{L}_\ell$ le sous-espace vectoriel de $\mathbb{E}$ engendré par ℓ (cf. n° 7.4). Il s'agit de prouver que, si $\alpha(\mathbb{E})=0$, alors l'extension est scindée et il suffit de prouver que l'on a $\mathbb{E}=\mathbb{L}_\ell\oplus\mathbf{Q}_p$ ou encore, que $\mathbb{L}_\ell\cap\mathbf{Q}_p=0$. Soit λ élément de cette intersection. Comme $\mathbf{Q}_p\subset\mathbb{E}(C)$, on a $\lambda\in\mathbb{L}_\ell(C)$ et comme $\mathbb{L}_\ell(C)$ est le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel engendré par $\ell(\mathrm{T}_C)$, il existe $n\in\mathbf{N}$, $a_1,\dots,a_k\in\mathbf{Z}_p$ et $\tau_1,\dots,\tau_k\in\mathrm{T}_C$ tels que l'on ait $\lambda=p^{-n}\sum_{i=1}^k a_i\ell(\tau_i)$. D'autre part, si, pour $1\leqslant i\leqslant k$, $(a_{i,j})_{j\in\mathbf{N}}$ est une suite d'entiers tendant vers a_i, alors λ est la limite quand j tend vers $+\infty$ de $p^{-n}\ell(\sigma_j)$, où $\sigma_j=\prod_{i=1}^k\tau_i^{a_{i,j}}$. Par construction, la suite de terme général $x(\sigma_j)$ tend vers 0 et donc la suite $(\sigma_j)_{j\in\mathbf{N}}$ admet une valeur d'adhérence σ dans T_C et on a $\lambda = p^{-n}\ell(\sigma)$. D'autre part, $\lambda \in \mathbf{Q}_p$ et donc son image dans $\mathbb{V}^1$ est nulle, ce qui implique que $\sigma \in \mathrm{H}_{C\{X\}}$ et comme on a supposé que $\alpha(\mathbb{E})$ est nul ce qui équivaut au fait que la restriction de ℓ à $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ est nulle, on en déduit la nullité de λ et l'injectivité de $\mathbb{E} \to \alpha(\mathbb{E})$.

Si $\alpha \in C$, soit $\mathbb{E}_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{U} \times \mathbb{V}^1 \mid \theta(x) = \alpha y\}$. Montrons que $\alpha(\mathbb{E}_\alpha) = \alpha$, ce qui terminera la démonstration de la proposition. Il s'agit de calculer le relèvement additif ℓ de X dans $\mathbb{E}_\alpha(\widetilde{C\{X\}})$. Par définition de $\mathbb{E}_\alpha$, on doit avoir $\ell = (f, X)$ avec $f \in \mathbb{U}(\widetilde{C\{X\}})$ vérifiant $\theta(f) = \alpha X$; autrement dit, f doit être le relèvement additif $\widehat{\alpha X}$ de αX dans $\mathbb{U}(\widetilde{C\{X\}})$.

Pour construire ce relèvement, considérons l'élément $\widetilde{X}_\alpha = (X_\alpha, \dots, X_{p^{-n}\alpha}, \dots)$ de $\mathbb{R}(\widetilde{C\{X\}})^{**}$ et, si $\tau \in \mathrm{T}_C$, soit $\widetilde{\chi}_\alpha(\tau) = (\chi_\alpha(\tau), \dots, \chi_{p^{-n}\alpha}(\tau), \dots) \in \mathrm{R}^{**}$. On a alors $\tau(\widetilde{X}_\alpha) = \widetilde{\chi}_\alpha(\tau)\widetilde{X}_\alpha$, ce qui, comme $\widetilde{X}_\alpha(0) = 1$, prouve que $\log[\widetilde{X}_\alpha]$ est un élément additif de $\mathbb{U}(\widetilde{C\{X\}})$, et comme d'autre part $\theta(\log[\widetilde{X}_\alpha]) = \log X_\alpha = \alpha X$, on a $\widehat{\alpha X} = \log[\widetilde{X}_\alpha]$. Finalement, comme $\widetilde{\chi}_\alpha(\tau) = \varepsilon^{\psi_\alpha(\tau)}$ si $\tau \in \mathrm{H}_{C\{X\}}$, on obtient $\tau(f) - f = \psi_\alpha(\tau) \cdot t$, si $\tau \in \mathrm{H}_{C\{X\}}$, ce qui permet de conclure.

Remarque 10.17. — Si $\alpha \neq 0$, la projection naturelle de $\mathbb{E}_\alpha$ sur $\mathbb{U}$ est un isomorphisme d'Espaces Vectoriels et $\mathbb{U}$ joue le rôle de *l'extension universelle* de $\mathbb{V}^1$ par $\mathbf{Q}_p$. D'autre part, on a fait un choix pour identifier $\ker\theta \cap \mathbb{U}$ à $\mathbf{Q}_p$ à savoir le choix d'une base de $\mathbf{Z}_p(1)$ ou, autrement dit, d'un système compatible de racines de l'unité. Si on revient à la définition de ψ_α, on voit que cette définition dépend du même choix et que l'égalité $\alpha(\mathbb{U}) = 1$ ne dépend d'aucun choix.

10.5. Construction d'éléments additifs non triviaux. — Si α et β sont deux éléments de $\mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$, et si $\widehat{\alpha}'$ et $\widehat{\beta}'$ sont deux éléments de $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ vérifiant $\theta(\widehat{\alpha}') = \alpha^{-1}$ et $\theta(\widehat{\beta}) = \beta^{-1}$, l'élément $\widehat{\alpha}'\widehat{\alpha X} - \widehat{\beta}'\widehat{\beta X}$ de $\mathbb{A}_{\max}(\widetilde{C\{X\}})[\frac{1}{p}]$ est tué par θ et donc divisible par $\frac{\omega}{p}$ dans $\mathbb{A}_{\max}(\widetilde{C\{X\}})[\frac{1}{p}]$, et on pose

$$f_{\alpha,\beta} = \theta\left(\frac{1}{t}\left(\widehat{\alpha}'\widehat{\alpha X} - \widehat{\beta}'\widehat{\beta X}\right)\right) = \frac{1}{p(\varepsilon_1 - 1)}\theta\left(\frac{p}{\omega}\left(\widehat{\alpha}'\widehat{\alpha X} - \widehat{\beta}'\widehat{\beta X}\right)\right) \in \widetilde{C\{X\}}.$$

Si $\tau \in \mathrm{T}_C$, on a $\tau(\widehat{\alpha X}) = \widehat{\alpha X} + \log[\widetilde{\chi}_\alpha(\tau)]$, et la proposition suivante est immédiate.

Proposition 10.18. — *Si α et β sont deux éléments de $\mathfrak{a}$, alors $f_{\alpha,\beta}$ est un élément de $\mathscr{C}$ vérifiant $f^\sigma_{\alpha,\beta} = f_{\alpha,\beta} + \alpha^{-1}\psi_\alpha(\sigma) - \beta^{-1}\psi_\beta(\sigma)$, si $\sigma \in \mathrm{H}_{C\{X\}}$.*

Remarque 10.19. — $f_{\alpha,\beta}$ n'est bien déterminée qu'à addition près d'un élément de la forme $[c]$ avec $c \in C$ (c'est apparent sur la construction si on change $\widehat{\alpha}'$ et $\widehat{\beta}'$ par des éléments de $\ker\theta$; c'est aussi une conséquence de la proposition 6.29). D'autre part, si α et β sont des éléments de $\mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$, on peut imposer à $\widehat{\alpha}'$ et $\widehat{\beta}'$ d'appartenir à $p^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$ (ce que nous supposerons avoir fait) et alors $f_{\alpha,\beta}$ vérifie $\|f_{\alpha,\beta}\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^3$.

Nous allons utiliser ce qui précède pour prouver que l'image de δ contient le noyau de Tr, ce qui terminera la démonstration du théorème 10.5. Tout élément x de $C\widehat{\otimes}_{\mathbf{Q}_p}C$ (resp. $C\otimes_{\mathbf{Q}_p}C$) peut s'écrire sous la forme $\sum_{i\in I}\lambda_i\otimes\beta_i$, où $(\beta_i)_{i\in I}$ est une famille (resp. famille finie) d'éléments de $\mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$ et $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille d'éléments de C tendant vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies. Si on se fixe un élément α de $\mathfrak{a} - p\mathfrak{a}$, on a alors

$$x = \sum_{i\in I}\lambda_i\otimes\beta_i = \Big(\sum_{i\in I}\lambda_i\beta_i \cdot (\beta_i^{-1}\otimes\beta_i - \alpha^{-1}\otimes\alpha)\Big) + \mathrm{Tr}(x)\cdot(\alpha^{-1}\otimes\alpha)$$

et, si $\mathrm{Tr}(x) = 0$, alors x est l'image par δ de $\sum_{i\in I} \lambda_i\beta_i \cdot f_{\beta_i,\alpha}$, la majoration $\|f_{\beta_i,\alpha}\|_{\mathrm{sp}} \leqslant p^3$ (cf. rem. 10.19) assurant la convergence de la série. Ceci permet de conclure.

Remarque 10.20. — Il résulte de la démonstration du théorème 10.5 que tout élément de $\mathscr{C}$ (resp. $\widehat{\mathscr{C}}$) est somme d'un élément de C et d'une combinaison linéaire finie (resp. infinie convergente) à coefficients dans C de $f_{\alpha,\beta}$, où α et β décrivent $\mathfrak{a}$.

10.6. Le centre de $\mathscr{C}$

Lemme 10.21. — *Si α, β sont des éléments de $\mathfrak{a}$ non nuls et si $c \in \mathscr{O}_C - \{0\}$, alors $f_{\alpha,\beta} \cdot [c] = cf_{c\alpha,c\beta}$.*

Démonstration. — Si $c \in \mathscr{O}_C - \{0\}$, il existe un unique morphisme $\varphi_{[c]} : C\{X\} \to C\{X\}$ tel que l'on ait $\varphi_{[c]}(X) = cX$. On peut étendre ce morphisme en un morphisme $\varphi_{[c]} : \widetilde{C\{X\}} \to \widetilde{C\{X\}}$ auquel on peut imposer la condition $\varphi_{[c]}(X_\alpha) = X_{c\alpha}$ si $\alpha \in C$. Si on reprend la démonstration de la proposition 6.11, on voit que, si $g \in \widetilde{C\{X\}}$, alors $\varphi_{[c]}(g)$ est un composé analytique de g et $[c]$. Si $\widehat{c}'$ est un élément de $\mathbb{A}_{\mathrm{inf}}(C)[\frac{1}{p}]$ vérifiant $\theta(\hat{c}) = c^{-1}$, on peut prendre $\widehat{c\alpha}' = \widehat{c}'\widehat{\alpha}'$ et $\widehat{c\beta}' = \widehat{c}'\widehat{\beta}'$; on obtient

$$\varphi_{[c]}(f_{\alpha,\beta}) = \theta\Big(\frac{1}{t}\left(\widehat{\alpha}'\widehat{c\alpha X} - \widehat{\beta}'\widehat{c\beta X}\right)\Big) = \theta\Big((\widehat{c}')^{-1}\frac{1}{t}\left(\widehat{c\alpha}'\widehat{c\alpha X} - \widehat{c\beta}'\widehat{c\beta X}\right)\Big) = cf_{c\alpha,c\beta},$$

ce qui permet de conclure.

Proposition 10.22. — *Les centres de $\widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}$ sont réduits à $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — D'après le lemme 6.17, les centres de $\widehat{\mathscr{C}}$ et $\mathscr{C}$ contiennent $\mathbf{Z}_p$ et donc aussi $\mathbf{Q}_p$. Réciproquement, la proposition 6.30 montre que ces centres sont contenus dans C. Or, si $c \in C - \mathbf{Q}_p$, on peut trouver α, β de telle sorte que α^{-1}, β^{-1}, $(c\alpha)^{-1}$ et $(c\beta)^{-1}$ forment une famille libre sur $\mathbf{Z}_p$. Comme ψ_α est à valeurs dans $\mathbf{Z}_p$, la proposition 10.18 montre que la fonction $cf_{\alpha,\beta} - f_{\alpha,\beta} \cdot [c] = c(f_{\alpha,\beta} - f_{c\alpha,c\beta})$ n'est pas fixe sous l'action de $\mathrm{H}_{C\{X\}}$ et en particulier n'est pas nulle, ce qui montre que $f_{\alpha,\beta}$ et $[c]$ ne commutent pas, que $[c]$ n'est pas dans le centre de $\widehat{\mathscr{C}}$ ou $\mathscr{C}$, et permet de conclure.

§ 11

(φ, N)-modules filtrés et représentations semi-stables

Ce § contient les applications de la théorie des Espaces de Banach de dimension finie à l'étude des (φ, N)-modules filtrés et en particulier une démonstration de la conjecture « faiblement admissible implique admissible » un peu différente de celle donnée dans l'introduction. Cette conjecture disant que tout (φ, N)-module filtré faiblement admissible est « galoisien » peut se retraduire sans faire appel au groupe de Galois et nous avons essayé de réduire le rôle du groupe de Galois au minimum au cours de la démonstration (il devrait être possible de le supprimer complètement).

11.1. Espaces vectoriels filtrés. — Un *K-espace vectoriel filtré* Δ est un K-espace vectoriel muni d'une filtration par des sous-K-espaces vectoriels $\mathrm{Fil}^i\Delta$ pour $i \in \mathbf{Z}$ qui est décroissante ($\mathrm{Fil}^{i+1}\Delta \subset \mathrm{Fil}^i\Delta$), exhaustive ($\cup_{i\in\mathbf{Z}}\mathrm{Fil}^i\Delta = \Delta$) et séparée ($\cap_{i\in\mathbf{Z}}\mathrm{Fil}^i\Delta = 0$). Une telle filtration définit une valuation v_H sur Δ : si $d \in \Delta - \{0\}$, on définit $v_H(d)$ comme le plus grand entier i tel que $d \in \mathrm{Fil}^i\Delta$ et on pose $v_H(0) = +\infty$.

Avec comme flèches les applications K-linéaires qui respectent la filtration, les K-espaces vectoriels filtrés forment une catégorie additive K-linéaire.

Si $f : \Delta' \to \Delta$ et $g : \Delta \to \Delta''$ sont des morphismes de K-espaces vectoriels filtrés, on dit que

$$0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$$

est une suite exacte de K-espaces vectoriels filtrés si, pour tout $i \in \mathbf{Z}$, la suite de K-espaces vectoriels

$$0 \to \mathrm{Fil}^i\Delta' \to \mathrm{Fil}^i\Delta \to \mathrm{Fil}^i\Delta'' \to 0$$

est exacte.

Si Δ est un K-espace vectoriel filtré, un *sous-objet* Δ' (resp. un *quotient* Δ'' de Δ est un sous-K-espace vectoriel (resp. un K-espace vectoriel quotient) de Δ muni de la filtration induite. Si Δ' est un sous-objet de Δ et si $\Delta'' = \Delta/\Delta'$,

$$0 \to \Delta' \to \Delta \to \Delta'' \to 0$$

est une suite exacte de K-espaces vectoriels filtrés.

Si Δ_1 et Δ_2 sont deux K-espaces vectoriels filtrés et si l'un d'eux est de dimension finie sur K, on munit le produit tensoriel $\Delta_1 \otimes_K \Delta_2$ d'une structure de K-espace vectoriel filtré en posant

$$\mathrm{Fil}^i(\Delta_1 \otimes \Delta_2) = \sum_{i_1+i_2=i} \mathrm{Fil}^{i_1}\Delta_1 \otimes \mathrm{Fil}^{i_2}\Delta_2 \ .$$

Si Δ est un K-espace vectoriel filtré de dimension 1, alors $v_H(d)$ ne dépend pas du choix de $d \in \Delta - \{0\}$; cet invariant sera noté $t_H(\Delta)$. Si Δ est un K-espace vectoriel filtré de dimension $h \geqslant 2$, $\wedge^h\Delta$ est un sous-objet de dimension 1 de $\Delta^{\otimes^h}$ et on pose $t_H(\Delta) = t_H(\wedge^h\Delta)$. On convient aussi que $t_H(\{0\}) = 0$.

On dit qu'une base $d_1, \dots, d_h$ de Δ sur K est *adaptée à la filtration* si, quel que soit $n \in \mathbf{N}$, on a $\mathrm{Fil}^n\Delta = \oplus_{v_H(d_j)\geqslant n} K \cdot d_j$; on a alors $t_H(\Delta) = \sum_{j=1}^h v_H(d_j)$.

Proposition 11.1. — *Si Δ est un K-espace vectoriel filtré de dimension h et n est un entier tel que* $\mathrm{Fil}^{n+1}\Delta = 0$, *alors* $\mathbb{X}^n_{\mathrm{dR}}(\Delta) = (t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K \Delta)/\mathrm{Fil}^0$ *est un Espace Vectoriel de dimension finie égale à* $(nh - t_H(\Delta), 0)$.

Démonstration. — Soit $d_1, \dots, d_h$ une base adaptée à la filtration et, si $1 \leqslant j \leqslant h$, soit $i_j = v_H(d_j)$. L'hypothèse $\mathrm{Fil}^{n+1}\Delta = 0$ se traduit par $i_j \leqslant n$ quel que soit $1 \leqslant j \leqslant h$. On a alors

$$\mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D) = \oplus_{j=1}^h t^{-i_j}\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot d_j \quad \text{et} \quad \mathbb{X}^n_{\mathrm{dR}}(\Delta) = \oplus_{j=1}^h t^{-n}\mathbb{B}_{n-i_j} \cdot d_j.$$

Comme $\mathbb{B}_m$ est un Espace Vectoriel de dimension finie égale à $\dim(\mathbb{B}_m) = (m, 0)$ d'après le corollaire 9.23, l'Espace Vectoriel $\mathbb{X}^n_{\mathrm{dR}}(\Delta)$ est aussi de dimension finie et on a

$$\dim(\mathbb{X}^n_{\mathrm{dR}}(\Delta)) = \sum_{j=0}^h (n - i_j, 0) = (nh - \sum_{j=1}^h i_j, 0) = (nh - t_H(\Delta), 0),$$

ce qu'il fallait démontrer

Remarque 11.2. — Comme $\mathbb{B}_m/t\mathbb{B}_{m-1} \cong \mathbb{V}^1$, ce qui précède montre que l'on peut munir $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(\Delta)$ d'une filtration décroissante par des sous-Espaces Vectoriels $\mathbb{X}_i$ avec $\mathbb{X}_0 = \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(\Delta)$ de telle sorte que $\mathbb{X}_i/\mathbb{X}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $i \leqslant \dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(\Delta) - 1$.

Lemme 11.3. — *Si $\mathbb{W}$ est un Espace Vectoriel admettant une filtration décroissante par des sous-Espaces Vectoriels $\mathbb{W}_i$, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, avec $\mathbb{W}_0 = \mathbb{W}$ et $\mathbb{W}_i/\mathbb{W}_{i+1} \cong \mathbb{V}^1$ si $0 \leqslant i \leqslant n-1$* ($\mathbb{W}$ est donc de dimension $(n,0)$) *et si $\mathbb{X}$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{W}$, alors*

(i) $\dim_{\mathrm{res}} \mathbb{X} \geqslant 0$ *;*

(ii) *si, de plus,* $\dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{X} = n$, *alors* $\mathbb{X} = \mathbb{W}$.

Démonstration. — Le (ii) est une conséquence du (i) car, si $\dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{X} = n = \dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{W}$ et si, $\dim_{\mathrm{res}} \mathbb{X} \geqslant 0 = \dim_{\mathrm{res}} \mathbb{W}$, les dimensions principale et résiduelle de $\mathbb{W}/\mathbb{X}$ sont toutes deux $\leqslant 0$ et donc sont nulles et $\mathbb{X} = \mathbb{W}$.

Le (i), quant à lui se démontre par récurrence sur n : il résulte du (ii) de la prop. 7.13 que les seuls sous-Espaces Vectoriels de dimension finie de $\mathbb{V}^1$ sont $\mathbb{V}^1$ et les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $\mathbb{V}^1(C)$; tous ces espaces ont une dimension résiduelle $\geqslant 0$. Pour passer de $n-1$ à n, soit $\mathbb{X}_1 = \mathbb{W}_1 \cap \mathbb{X}$. On dispose du diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{X}_1 & \longrightarrow & \mathbb{X} & \longrightarrow & \mathbb{X}/\mathbb{X}_1 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{W}_1 & \longrightarrow & \mathbb{W} & \longrightarrow & \mathbb{V}^1 & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dans lequel les lignes horizontales sont exactes et les flèches verticales sont injectives. La dimension résiduelle de $\mathbb{X}$ est donc la somme de celle de $\mathbb{X}_1$ (qui est $\geqslant 0$ grâce à l'hypothèse de récurrence) et de celle de $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ (qui est aussi positive puisque $\mathbb{X}/\mathbb{X}_1$ s'identifie à un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}^1$). Ceci permet de conclure.

Corollaire 11.4. — *Si Δ est un K-espace vectoriel filtré de dimension h, alors*

(i) *tout sous-Espace Vectoriel de dimension finie de $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(\Delta)$ est de dimension résiduelle $\geqslant 0$;*

(ii) *tout sous-Espace Vectoriel de dimension finie de $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(\Delta)$ de dimension principale $nh - t_H(\Delta)$ est égal à $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(\Delta)$.*

11.2. φ-modules. — On appelle φ-module sur K_0 (ou φ-module s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K_0) la donnée d'un K_0-espace vectoriel D muni d'une application $\varphi : D \to D$ semi-linéaire par rapport au Frobenius absolu sur K_0.

On appelle *dimension* d'un φ-module sa dimension sur K_0. On dit qu'un φ-module est *fini* si sa dimension est finie et si en outre φ est bijectif (il revient au même de demander que φ est injectif). Remarquons qu'un φ-module fini n'est autre que ce que l'on appelle souvent un F-isocristal (à condition de poser $\varphi = F$).

Les φ-modules sur K_0 forment, de manière évidente, une catégorie abélienne $\mathbf{Q}_p$-linéaire, de même que la sous-catégorie pleine des φ-modules finis.

La catégorie des φ-modules est munie d'un produit tensoriel : si D_1 et D_2 sont deux φ-modules, le K_0-espace vectoriel sous-jacent à $D_1 \otimes D_2$ est $D_1 \otimes_{K_0} D_2$ et on a $\varphi(d_1 \otimes d_2) = \varphi d_1 \otimes \varphi d_2$.

Soit D un φ-module fini de dimension 1. Si $d \in D$ est non nul et si $\varphi d = \lambda d$, avec $\lambda \in K_0$, l'entier $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de d et se note $t_N(D)$. Si D est un φ-module fini de dimension $h \geqslant 2$, on pose $t_N(D) = t_N(\wedge^h D)$. On convient de poser $t_N(\{0\}) = 0$. Si

$$0 \to D' \to D \to D'' \to 0$$

est une suite exacte de φ-modules finis, on a $t_N(D) = t_N(D') + t_N(D'')$.

Rappelons que, lorsque k_K est algébriquement clos, les φ-modules finis ont été classifiés par Dieudonné : Pour tout nombre rationnel α, posons $\alpha = r_\alpha / h_\alpha$ avec $r_\alpha, h_\alpha \in \mathbf{Z}$, $h_\alpha \geqslant 1$, r_α et h_α premiers entre eux. On note $D_{[\alpha]}$ l'unique φ-module fini sur K_0 dont le K_0-espace vectoriel sous-jacent est $K_0^{h_\alpha}$, avec, si $d_1, \dots, d_{h_\alpha}$ désigne la base canonique,

$$\varphi(d_i) = d_{i+1} \text{ si } i \neq h_\alpha \text{ et } \varphi(d_{h_\alpha}) = p^{r_\alpha} d_1 \ .$$

Proposition 11.5. — *Si k_K est algébriquement clos, alors la catégorie des φ-modules finis sur k_K est semi-simple. En outre, chaque $D_{[\alpha]}$ est un objet simple et chaque objet simple de cette catégorie est isomorphe à un et un seul de ces $D_{[\alpha]}$.*

Si k_K est quelconque et k_C est une clôture algébrique de k_K, notons P_0 le corps des fractions de l'anneau $W(k_C)$ des vecteurs de Witt à coefficients dans k_C. Si D est un φ-module sur K_0, alors $P_0 \otimes_{K_0} D$ est un φ-module sur P_0 ; il se décompose donc sous la forme $\oplus_{\alpha \in \mathbf{Q}} D_{[\alpha]}^{m_\alpha}$ avec $m_\alpha = 0$ pour presque tout α. Les α pour lesquels $m_\alpha \neq 0$ s'appellent *les pentes de D* et on a

$$\dim D = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} m_\alpha h_\alpha \quad \text{et} \quad t_N(D) = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} m_\alpha r_\alpha.$$

Proposition 11.6. — *Soit D un φ-module de dimension h sur K_0. Si n est un entier supérieur ou égal à la plus grande pente de D, alors $\mathbb{X}^n_{\max}(D) = (t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D)^{\varphi=1}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie égale à $(nh - t_N(D), h)$*

Démonstration. — Si $h \in \mathbf{N} - \{0\}$, soit E_h l'extension non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ de degré h et, si $s \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{U}_{h,s}$ l'Espace Vectoriel $\mathbb{U}_{E_h,s}$ correspondant à l'uniformisante p de E_h (et $\varphi_{E_h} = \varphi^h$). Un calcul immédiat montre que, si $\alpha = r_\alpha / h_\alpha$ et $nh_\alpha - r_\alpha \geqslant 0$, alors l'application qui à $x \in \mathbb{U}_{h_\alpha, nh_\alpha - r_\alpha}$ associe $t^{-n}xd_1 + \varphi(t^{-n}x)d_2 + \cdots + \varphi^{h_\alpha - 1}(t^{-n}x)d_{h_\alpha}$ est un isomorphisme d'Espaces Vectoriels de $\mathbb{U}_{h_\alpha, nh_\alpha - r_\alpha}$ sur $\mathbb{X}^n_{\max}(D_{[\alpha]})$. En particulier, ce dernier Espace Vectoriel est de dimension finie égale à $(nh_\alpha - r_\alpha, h_\alpha)$.

Maintenant, si D est un φ-module quelconque, on a

$$t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D \cong t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{P_0} (P_0 \otimes_{K_0} D) \cong \oplus_{\alpha \in \mathbf{Q}} \left(t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D_{[\alpha]}\right)^{m_\alpha}$$

et on déduit de la discussion précédente le fait que $\mathbb{X}^n_{\max}(D)$ est isomorphe en tant qu'Espace Vectoriel à $\oplus_{\alpha \leqslant n} (\mathbb{U}_{h_\alpha, nh_\alpha - r_\alpha})^{m_\alpha}$; il est donc de dimension finie égale à

$$\sum_{\alpha \leqslant n} m_\alpha (nh_\alpha - r_\alpha, h_\alpha).$$

Si l'on suppose alors que n est supérieur ou égal à la plus grande pente de D, ce qui se traduit par $m_\alpha = 0$ si $\alpha > n$, on a

$$\sum_{\alpha \leqslant n} m_\alpha h_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} m_\alpha h_\alpha = h \quad \text{et} \quad \sum_{\alpha \leqslant n} m_\alpha r_\alpha = \sum_{\alpha \in \mathbf{Q}} m_\alpha r_\alpha = t_N(D),$$

d'où l'on tire la formule voulue pour la dimension de $\mathbb{X}^n_{\max}(D)$.

11.3. (φ, N)**-modules.** — On appelle (φ, N)-*module sur* K_0 (ou (φ, N)-*module* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K_0) la donnée d'un φ-module D sur K_0 muni d'une application K_0-linéaire $N : D \to D$ vérifiant $N\varphi = p\varphi N$. Remarquons que tout φ-module peut être considéré comme un (φ, N)-module en posant $N = 0$.

Un (φ, N)-module *fini* est un (φ, N)-module dont le φ-module sous-jacent est fini. Pour un tel module D, on note $t_N(D)$ le t_N du φ-module fini sous-jacent.

On définit encore le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules D_1 et D_2 : le φ-module sous-jacent est le produit tensoriel des φ-modules sous-jacents et $N(d_1 \otimes d_2) = Nd_1 \otimes d_2 + d_1 \otimes Nd_2$.

Les (φ, N)-modules forment de façon évidente une catégorie abélienne $\mathbf{Q}_p$-linéaire de même que la sous-catégorie pleine des (φ, N)-modules finis. La catégorie des φ-modules finis s'identifie à la sous-catégorie pleine de cette dernière formée des D sur lesquels $N = 0$.

Proposition 11.7. — *Si D est un (φ, N)-module de dimension finie sur K_0, alors le φ-Module $(t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ est isomorphe à $t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D$.*

Démonstration. — Tout élément x de $t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $x = x_0 + ux_1 + \cdots + u^n x_n$ avec $x_0, \ldots, x_n \in t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D$ et on note α_D l'application de $t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$ dans $t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D$ qui à x associe x_0. Un calcul immédiat montre que α_D commute à l'action de φ et d'autre part, si $x \in t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D$, alors $N(x) = 0$ si et seulement si

$$(N(x_0) - x_1) + u(N(x_1) - 2x_2) + \cdots + u^{n-1}(N(x_{n-1}) - nx_n)) + u^n N(x_n) = 0,$$

ce qui équivaut à $x_i = \frac{1}{i!}N^i(x_0)$ quel que soit $i \in \mathbf{N}$. On en déduit le fait que α_D induit un isomorphisme de φ-modules de $(t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ sur $t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D$ dont l'inverse β_D est donné par la formule $\beta_D(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{u^i}{i!} N^i(x)$ si $x \in t^{-n}\mathbb{B}^+_{\max} \otimes_{K_0} D$.

Corollaire 11.8. — *Soit D un (φ, N)-module de dimension h sur K_0. Si n est un entier supérieur ou égal à la plus grande pente de D, alors $\mathbb{X}^n_{\mathrm{st}}(D) = (t^{-n}\mathbb{B}^+_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1}$ est un Espace Vectoriel de dimension finie égale à $(nh - t_N(D), h)$*

11.4. (φ, N)**-modules filtrés.** — On appelle (φ, N)-*module filtré sur* K (ou (φ, N)-*module filtré* s'il n'y a pas d'ambiguïté sur K) un (φ, N)-module D sur K_0 tel que le K-espace vectoriel $D_K = K \otimes_{K_0} D$ soit un K-espace vectoriel filtré. On pose alors $t_H(D) = t_H(D_K)$.

La *dimension* d'un (φ, N)-module filtré est la dimension du K_0-espace vectoriel sous-jacent. Un (φ, N)-module filtré *fini* est un (φ, N)-module filtré dont le (φ, N)-module sous-jacent est fini.

Avec comme flèches les morphismes des (φ, N)-modules sous-jacents qui respectent la filtration lorsque l'on étend les scalaires à K, les (φ, N)-modules filtrés forment une catégorie additive $\mathbf{Q}_p$-linéaire que nous notons $\underline{\mathrm{M}}$.

Si D est un (φ, N)-module filtré, un *sous-objet* (resp. un *quotient*) est un sous-objet (resp. quotient) du (φ, N)-module sous-jacent, avec la filtration induite sur le K-espace vectoriel correspondant. On a une notion évidente de suite exacte courte (une telle suite induit une suite exacte courte aussi bien des (φ, N)-modules sous-jacents que des K-espaces vectoriels filtrés sous-jacents).

En utilisant les définitions de produit tensoriel déjà données pour les espaces vectoriels filtrés et les (φ, N)-modules, on voit comment définir le produit tensoriel de deux (φ, N)-modules filtrés lorsque l'un des deux est fini.

Un (φ, N)-module filtré *faiblement admissible* est un (φ, N)-module filtré fini D vérifiant $t_H(D) = t_N(D)$ et $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D.

On note $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ la sous-catégorie pleine de $\underline{\mathrm{M}}$ dont les objets sont les (φ, N)-modules filtrés faiblement admissibles. C'est une catégorie abélienne. Si D est faiblement admissible, les sous-objets de D dans $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ sont les sous-objets D' de D dans $\underline{\mathrm{M}}$ qui vérifient $t_H(D') = t_N(D')$; de même, les quotients D'' de D dans $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ sont les quotients D'' de D dans $\underline{\mathrm{M}}$ qui vérifient $t_H(D'') = t_N(D'')$.

Lemme 11.9. — *Si D est un (φ, N)-module filtré tel que $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D, alors il existe un sous-objet D^{fa} de D appartenant à $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ et tel que tout sous-objet de D appartenant à $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ soit contenu dans D^{fa}.*

Démonstration. — Compte-tenu des hypothèses mises sur D, un sous-objet D' de D appartient à $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ si et seulement si $t_H(D') = t_N(D')$. Il suffit de prouver que si D_1 et D_2 sont deux sous-objets de D appartenant à $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$, alors $D_1 + D_2$ appartient à $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$. On dispose de la suite exacte de (φ, N)-modules filtrés

$$0 \longrightarrow D_1 \cap D_2 \longrightarrow D_1 \oplus D_2 \longrightarrow D_1 + D_2 \longrightarrow 0$$

et, comme $D_1 \cap D_2$ et $D_1 + D_2$ sont des sous-objets de D, on a $t_H(D_1 \cap D_2) \leqslant t_N(D_1 \cap D_2)$ et $t_H(D_1 + D_2) \leqslant t_N(D_1 + D_2)$. Comme d'autre part, $t_H(D_1 + D_2) + t_H(D_1 \cap D_2) = t_H(D_1) + t_H(D_2)$ et $t_N(D_1 + D_2) + t_N(D_1 \cap D_2) = t_N(D_1) + t_N(D_2)$ et que, par hypothèse, $t_H(D_1) = t_N(D_1)$ et $t_H(D_2) = t_N(D_2)$, les deux inégalités ci-dessus sont des égalités, ce qui prouve que $D_1 \cap D_2$ et $D_1 + D_2$ sont des objets de $\underline{\mathrm{M}}^{\mathrm{fa}}$ et permet de conclure.

Soit $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ le noyau de l'application naturelle de $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D) = (\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes D)^{\varphi=1, N=0}$ dans $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D) = (\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D)/\mathrm{Fil}^0$. Ceci fait de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$, $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D)$ des Espaces Vectoriels et on note simplement $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$, $\mathrm{X}_{\mathrm{st}}(D)$ et $\mathrm{X}_{\mathrm{dR}}(D)$ les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)(C)$, $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D)(C)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D)(C)$.

D'autre part, si $n \in \mathbf{N}$, soit $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ le noyau de l'application naturelle de $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ dans $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$; c'est un Espace Vectoriel de dimension finie puisque $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ le sont et $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est la réunion croissante des $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ pour $n \in \mathbf{N}$.

11.5. Intermède galoisien. — Le groupe $\mathscr{G}_K$ agit par continuité sur C et donc aussi par fonctorialité sur R, $\mathrm{A}_{\mathrm{inf}}$, $\mathrm{B}_{\max}$, B_{st}, B_{dR} et sur le corps des fractions C_{st} de B_{st}. En particulier, on a $g(t) = \chi(g)t$ si $g \in \mathscr{G}_K$. Cette action commute à φ et N sur B_{st} et respecte la filtration sur B_{dR}. Le résultat suivant est bien connu :

Proposition 11.10. — (i) $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_K} = K$;
(ii) $\mathrm{B}_{\max}^{\mathscr{G}_K} = \mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{\mathscr{G}_K} = C_{\mathrm{st}}^{\mathscr{G}_K} = K_0$.

Démonstration. — Soit $x \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_K} - \{0\}$ et soit $y = \log \theta(t^{-v_H(x)}x) \in C$. On a alors $g(y) = y - v_H(x)\log(\chi(g))$ si $g \in \mathscr{G}_K$. D'après la proposition 4.8, ceci implique $v_H(x) = 0$ et donc $z = \theta(x)$ est un élément de $C^{\mathscr{G}_K} = K$ d'après le théorème d'Ax-Sen-Tate (corollaire 4.2). Mais alors $x-z$ est un élément de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^{\mathscr{G}_K}$ vérifiant $v_H(x-z)\neq 0$; ce qui précède implique $x-z=0$ et termine la démonstration du (i).

Le (ii) est, quant à lui une conséquence du (i) et du fait que l'application naturelle de $K\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\max}$ dans B_{dR} est injective (proposition 8.14).

Proposition 11.11. — *Soit D un (φ,N)-module filtré fini de dimension $h\geqslant 1$ tel que $t_H(D')\leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D. Alors il existe un sous-objet D' de D faiblement admissible tel que l'on ait $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)=\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D')$ et $\dim_{\mathbf{Q}_p}\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)=\dim D'$; de plus l'application naturelle β_{st} de $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes D$ est injective.*

Démonstration. — Commençons par démontrer le résultat si $h=1$. Comme D est de dimension 1 et N est nilpotent, on a $Nd=0$. On a $\varphi(d)=ad=p^m a_0 d$ avec $m=v_p(a)=t_N(D)$ et $a_0\in K_0$ vérifie $v_p(a_0)=0$. Il existe alors $\alpha_0\in W(\overline{k})$ non nul tel que l'on ait $\varphi(\alpha_0)=a_0\alpha_0$ et si l'on pose $\alpha=\alpha_0^{-1}t^{-m}$, alors α est un élément inversible de $\mathrm{B}_{\max}$ et

$$V_{\mathrm{st}}(D)=\{\beta d\mid \beta\in\mathrm{Fil}^{-t_H(D)}\mathrm{B}_{\max}\text{ et }\varphi(\beta)=a^{-1}\beta\}=\{x\alpha d\mid x\in\mathrm{Fil}^{t_N(D)-t_H(D)}\mathrm{B}_{\max}^{\varphi=1}\}$$

est isomorphe à $\mathrm{Fil}^{t_N(D)-t_H(D)}\mathrm{B}_{\max}^{\varphi=1}$. Or, d'après la suite exacte fondamentale (SEF 3), ce dernier espace est nul si $t_N(D)>t_H(D)$, et est égal à $\mathbf{Q}_p$ si $t_N(D)=t_H(D)$. On en déduit le résultat quand $h=1$.

Dans le cas h quelconque, il n'y a rien à démontrer si $V=\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)=0$; supposons donc $V\neq 0$. On peut étendre N de manière unique en une dérivation de C_{st} et φ en un endomorphisme de C_{st}. Soit L le sous C_{st}-espace vectoriel de $C_{\mathrm{st}}\otimes D$ engendré par V. Il est stable par G_K ; il existe donc un sous-K_0-espace vectoriel D' de D tel que $L=C_{st}\otimes D'$. Comme V est fixe par φ et tué par N, L est stable par φ et N. Il en est de même de $D'=L^{G_K}$ qui est donc un sous-(φ,N)-module de D et on a $V\subset\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D')\subset\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)=V$ et donc $V=\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D')$.

Choisissons une base $v_1,\dots,v_r$ de L sur C_{st} constituée d'éléments de V et une base $d_1,\dots,d_r$ de D' sur K_0 ; on peut aussi considérer $d_1,\dots,d_r$ comme une base de L sur C_{st}.

Pour $1\leqslant j\leqslant r$, on peut écrire $v_i=\sum_{j=1}^r b_{ij}d_j$, avec les $b_{ij}\in\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ et le déterminant b de la matrice des b_{ij} est non nul. On voit que $w=v_1\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_r=b\,(d_1\wedge d_2\wedge\ldots\wedge d_r)$ est un élément non nul de $W=\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(\wedge^r D')$.

Par hypothèse, $t_H(\wedge^r D')=t_H(D')\leqslant t_N(D')=t_N(\wedge^r D')$ et la non nullité de W implique, d'après la discussion du cas $h=1$, que $t_H(D')=t_N(D')$ [en particulier, D' est faiblement admissible] et que $W=\mathbf{Q}_p w$.

Si $v\in V$, on peut écrire $v=\sum_{i=1}^r c_i v_i$, avec les $c_i\in C_{\mathrm{st}}$. Pour tout i, l'image de $v_1\wedge v_2\wedge\ldots\wedge v_{i-1}\wedge v\wedge v_{i+1}\wedge\ldots\wedge v_r$ dans W est $c_i w$, donc $c_i\in\mathbf{Q}_p$. On en déduit que $\{v_1,v_2,\dots,v_r\}$ est une base de V sur $\mathbf{Q}_p$, donc que $\dim_{\mathbf{Q}_p}V=\dim D'$. Comme de plus, le déterminant de $v_1,\dots,v_r$ dans la base $d_1,\dots,d_r$ est un élément non nul de B_{st}, l'application naturelle de $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes D'$ est injective, ce qui termine la démonstration de la proposition.

11.6. « Faiblement admissible implique admissible ». — La proposition 11.11 admet comme corollaire le résultat suivant (pour l'appliquer au (ii), on pourra remarquer que les conditions du (ii) impliquent que le seul sous-objet faiblement admissible de D est $\{0\}$).

Corollaire 11.12. — *Soit D un (φ,N)-module filtré fini sur K.*

(i) *Si $t_H(D')\leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D, alors la dimension principale $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est nulle quel que soit $n\in\mathbf{N}$.*

(ii) *Si $t_H(D') < t_N(D')$ pour tout sous-objet non nul D' de D, alors $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D) = 0$ quel que soit $n \in \mathbf{N}$.*

Remarque 11.13. — Il devrait être possible de démontrer ce corollaire directement (c'est-à-dire en n'utilisant que des propriétés des Espaces Vectoriels et des (φ, N)-modules filtrés comme, par exemple, le théorème de Faltings-Totaro selon lequel le produit tensoriel de deux modules faiblement admissibles est encore faiblement admissible) sans utiliser la proposition 11.11 et donc sans utiliser l'action du groupe de Galois.

Proposition 11.14. — *Si D est un (φ, N)-module filtré fini sur K, alors il existe $n(D)$ tel que l'on ait $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D) = \mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ si $n \geqslant n(D)$; en particulier, $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est un Espace Vectoriel de dimension finie.*

Démonstration. — Si $m \in \mathbf{N}$, soit $D^{(m)}$ le (φ, N)-module filtré dont le (φ, N)-module sous-jacent est D et la filtration est définie par $\mathrm{Fil}^i D_K^{(m)} = \mathrm{Fil}^{i+m} D_K$ (on a alors $v_H(x^{(m)}) = v_H(x) - m$ si $x^{(m)}$ désigne l'élément de $D_K^{(m)}$ correspondant à $x \in D_K$ par l'isomorphisme identité). Si $d_1, \dots, d_h$ est une base de D_K adaptée à la filtration, on a

$$\mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K) = \oplus_{j=1}^h t^{-v_H(d_j)} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes d_j \quad \text{et} \quad \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K^{(m)}) = \oplus_{j=1}^h t^{m-v_H(d_j)} \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes d_j.$$

On en déduit un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
 & & & \mathbb{B}_m \otimes_K D_K \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D^{(m)}) \arrow[r] & \mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D^{(m)}) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D^{(m)}) \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & \mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D) \arrow[r] & \mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D) \arrow[r] & \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D) \arrow[d] \\
 & & & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes et la colonne de droite sont exactes. D'autre part, si m est assez grand (par exemple strictement supérieur au sup. $v_H(d_j)$ moins la plus petite pente de D), alors $t_H(D') < t_N(D')$ pour tout sous objet non nul D' de $D^{(m)}$. D'après le corollaire 11.14, ceci implique la nullité de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D^{(m)})$ et $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ s'injecte dans $\mathbb{B}_m \otimes_K D_K$ qui est un Espace Vectoriel de dimension finie. La dimension principale de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est donc majorée par celle de $\mathbb{B}_m \otimes_K D_K$ et est donc stationnaire pour $n \geqslant n_1(D)$. La dimension résiduelle de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est alors croissante pour $n \geqslant n_1(D)$ et stationnaire à partir de $n_2(D)$ car, d'après le corollaire 11.4, l'image de $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ dans $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ est de dimension résiduelle $\geqslant 0$ et donc $\dim_{\mathrm{res}} \mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D) \leqslant \dim_{\mathrm{res}} \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) = \dim D$. Ceci implique $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^{n+1}(D) = \mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ si $n \geqslant n_2(D)$ et permet de conclure.

Théorème 11.15. — *Soit D un (φ, N)-module filtré fini de dimension $h \geqslant 1$.*

(i) *S'il existe un sous-objet D' de D vérifiant $t_H(D') > t_N(D')$, alors $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est un Espace Vectoriel de dimension finie dont la dimension principale est strictement positive ; en particulier, $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension infinie sur $\mathbf{Q}_p$.*

(ii) *Si D est faiblement admissible, la dimension principale de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est nulle et $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est l'Espace Vectoriel associé à $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ qui est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h. De plus, l'application naturelle β_{st} de $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ dans $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes D$ induit un isomorphisme de (φ, N)-Modules filtrés de $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ sur $\mathbb{B}_{\mathrm{st}} \otimes D$: la suite*

$$0 \longrightarrow \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte d'Espaces Vectoriels.

Remarque 11.16. — Dans le cas non couvert par ce théorème [i.e. $t_H(D') \leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet D' de D et $t_H(D) < t_N(D)$], le (φ, N)module filtré D^{fa} est strictement inclus dans D et on a $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D^{\mathrm{fa}})$, d'après la proposition 11.11, ce qui permet d'utiliser le (ii) du théorème.

Démonstration. — Si D' est un sous-objet de D, alors $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D')$ est un sous-Espace Vectoriel de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$ et si $t_H(D') > t_N(D')$ et n est assez grand, la dimension principale de $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D')$ qui est égale à $n \dim D' - t_N(D')$ [cf. corollaire 11.8] est strictement supérieure à celle de $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D')$ qui est égale à $n \dim D' - t_H(D')$ [cf. proposition 11.1]. Comme la dimension principale est additive, la dimension principale de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D')$ est strictement positive et il en est a fortiori de même de celle de $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D)$.

Ceci termine la démonstration du (i) ; passons à celle du (ii). D'après le corollaire 11.12, $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est de dimension principale 0 et l'image $\mathbb{X}_n$ de $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D)$ dans $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$ a donc pour dimension principale

$$\dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) = nh - t_N(D) = nh - t_H(D) = \dim_{\mathrm{pr}} \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D).$$

Le corollaire 11.4 montre que l'on a alors $\mathbb{X}_n = \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D)$; autrement dit, la suite

$$0 \longrightarrow \mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) \longrightarrow \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D) \longrightarrow 0$$

est exacte et $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}^n(D)$ est de dimension $\dim \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^n(D) - \dim \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^n(D) = (0, h)$. Ceci montre que $\mathbb{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension h.

Maintenant, si on pose $V = \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$, on dispose du diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathrm{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V) \oplus (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{st}} \oplus \beta_{\mathrm{dR}}"] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{dR}}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & V \arrow[r] & \mathrm{X}_{\mathrm{st}}(D) \oplus \mathrm{Fil}^0(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D) \arrow[r] & \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel la première ligne est exacte (elle est obtenue en tensorisant par V les suites exactes fondamentales de la proposition 9.25 (avec $E = \mathbf{Q}_p$)) et comme β_{st} est injective d'après la proposition 11.11, les noyaux de β_{dR} dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$ et $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ sont égaux et ils sont donc tous les deux nuls car l'un est un B_{dR}-espace vectoriel et l'autre un $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module de rang fini. Finalement, comme $\dim_{\mathbf{Q}_p} V = \dim D$, l'application $\beta_{\mathrm{dR}} : \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V \to \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes D$ est bijective car elle est injective et ces deux B_{dR}-espaces vectoriels ont la même dimension, et le lemme des 5 permet de montrer que la flèche du milieu est un isomorphisme et donc que $\beta_{\mathrm{st}}:\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes V\to \mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes D$ est un isomorphisme de (φ,N)-Modules filtrés.

Les mêmes arguments montrent que dans le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] \arrow[d, equal] & (\mathbb{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\otimes V)\oplus(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}^{+}\otimes V) \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{st}}\oplus\beta_{\mathrm{dR}}"] & \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{\mathrm{dR}}"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & \mathbb{X}_{\mathrm{st}}(D)\oplus \mathrm{Fil}^0(\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes D) \arrow[r] & \mathbb{B}_{\mathrm{dR}}\otimes D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

les flèches verticales sont des isomorphismes (pour celle de droite cela se fait en tensorisant par $\mathbb{B}_{\mathrm{dR}}$ au-dessus de B_{dR}) et donc que les deux lignes sont exactes, ce qui termine la démonstration.

Corollaire 11.17. — *Soit D un (φ,N)-module filtré fini sur K. Les conditions suivantes sont équivalentes.*

(i) *D est faiblement admissible.*

(ii) *$\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension $\dim D$ sur $\mathbf{Q}_p$.*

Démonstration. — Si $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension $\dim D$ sur $\mathbf{Q}_p$, alors $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est, en particulier, de dimension finie ce qui implique que $t_H(D')\leqslant t_N(D')$ pour tout sous-objet de D d'après le (i) du théorème 11.15. D'autre part, on a $\dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D))=\dim D^{\mathrm{fa}}$ d'après le (ii) du théorème 11.15 (et la remarque suivant ce théorème) et donc $D=D^{\mathrm{fa}}$, ce qui signifie que D est faiblement admissible. La réciproque est incluse dans le (ii) du théorème 11.15.

11.7. Représentations semi-stables. — Si B est une $\mathbf{Q}_p$-algèbre topologique munie d'une action continue de G_K, on dit qu'une représentation p-adique V de G_K est B-admissible si on a $B\otimes_{\mathbf{Q}_p}V\cong B^{\dim V}$ en tant que $\mathscr{G}_K$-modules. Si tel est le cas, le B^{G_K}-module $D_B(V)=(B\otimes V)^{G_K}$ est libre de rang $\dim V$ et l'application naturelle $\alpha_B:B\otimes_{B^{G_K}}D_B(V)\to B\otimes V$ est un isomorphisme commutant à l'action de G_K. (Si $v_1,\dots,v_h$ est une base de V sur $\mathbf{Q}_p$, si $a\in B$ et si $d=\sum_{j=1}^h b_j\otimes v_j\in D_B(V)\subset B\otimes V$, on a $\alpha_B(a\otimes d)=\sum_{j=1}^h ab_j\otimes v_j$.)

Une représentation B_{st}-admissible (resp. B_{dR}-admissible) est dite *semi-stable* (resp. *de de Rham*). Comme B_{st} est un sous-anneau de B_{dR}, une représentation semi-stable est a fortiori de de Rham. Si V est une représentation semi-stable de dimension h, on note respectivement $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ et $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ les modules $(\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes V)^{G_K}$ et $(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{G_K}$. Comme G_K commute à l'action de φ et N sur B_{st}, le module $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ hérite naturellement de ces actions et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ,N)-module de dimension h sur K_0. De même, comme la filtration sur B_{dR} est respectée par G_K, le module $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ hérite de cette filtration, ce qui en fait un module filtré sur K de dimension h. Finalement, comme l'application naturelle de $K\otimes_{K_0}\mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ dans B_{dR} est injective, l'application naturelle de $K\otimes\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ dans $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est injective et est un isomorphisme de K-espaces vectoriels pour des questions de dimension, ce qui permet de considérer $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ comme un (φ,N)-module filtré sur K de dimension h.

Lemme 11.18. — *Si V est une représentation semi-stable de G_K, alors*

(i) *l'application naturelle $\alpha_{\mathrm{st}}:\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{K_0}\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)\to\mathrm{B}_{\mathrm{st}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ est un isomorphisme de (φ,N)-modules.*

(ii) *l'application naturelle $\alpha_{\mathrm{dR}}:\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)\to\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{Q}_p}V$ est un isomorphisme de modules-filtrés.*

Démonstration. — On sait déjà, car V est semi-stable et donc aussi de de Rham, que α_{st} et α_{dR} sont des isomorphismes ; il suffit donc de vérifier que les structures additionnelles sont préservées. Si $v_1, \dots, v_h$ est une base de V sur $\mathbf{Q}_p$, si $a \in \mathrm{B}_{\mathrm{st}}$ et si $d = \sum_{i=1}^h b_i \otimes v_i \in \mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes V$, on a $\alpha_{\mathrm{st}}(a \otimes d) = \sum_{i=1}^h ab_i \otimes v_i$ et le (i) découle des calculs suivants

$$\begin{aligned}\alpha_{\mathrm{st}}(\varphi(a\otimes d)) &= \alpha_{\mathrm{st}}(\varphi(a)\otimes\varphi(d)) = \sum_{i=1}^h \varphi(a)\varphi(b_i)\otimes v_i = \sum_{i=1}^h \varphi(ab_i)\otimes v_i = \varphi(\alpha_{\mathrm{st}}(a\otimes d)),\\ \alpha_{\mathrm{st}}(N(a\otimes d)) &= \alpha_{\mathrm{st}}(N(a)\otimes d + a\otimes N(d))\\ &= \sum_{i=1}^h (N(a)\otimes b_i + a\otimes N(b_i))\otimes v_i = \sum_{i=1}^h N(ab_i)\otimes v_i = N(\alpha_{\mathrm{st}}(a\otimes d)).\end{aligned}$$

En ce qui concerne le (ii), on montre facilement, en utilisant l'inclusion $\mathrm{Fil}^i\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \cdot \mathrm{Fil}^j\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \subset \mathrm{Fil}^{i+j}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ que

$$\alpha_{\mathrm{dR}}(\mathrm{Fil}^n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V))) \subset \mathrm{Fil}^n\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V = \mathrm{Fil}^n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V).$$

Le problème est de montrer la surjectivité. Soit $d_1, \dots, d_h$ une base de $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ adaptée à la filtration et soit $i_j = v_H(d_j)$. Si on écrit $d_j = \sum_{k=1}^h t^{i_j} c_{j,k} \otimes v_k$, les conditions précédentes sont équivalentes au fait que la matrice des $(c_{j,k})$ est inversible dans $\mathrm{GL}_h(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$. Soit $b_1 \otimes v_1 + \cdots + b_h \otimes v_h \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ et soit $a_1 \otimes d_1 + \cdots + a_h \otimes d_h \in \mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ son antécédent par α_{dR}. On a alors $b_k = \sum_{j=1}^h c_{j,k} t^{i_j} a_j$ et si $b_k \in \mathrm{Fil}^n\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $1 \leqslant k \leqslant h$, l'inversibilité de la matrice de $c_{j,k}$ dans $\mathrm{GL}_h(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ implique que $t^{i_j} a_j \in \mathrm{Fil}^n\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ quel que soit $1 \leqslant j \leqslant h$. On a donc $a_j \in \mathrm{Fil}^{n-i_j}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ et

$$a_1\otimes d_1 + \cdots + a_h \otimes d_h \in \sum_{j=1}^h \mathrm{Fil}^{n-i_j}\mathrm{B}_{\mathrm{dR}} \otimes \mathrm{Fil}^{i_j}\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathrm{Fil}^n(\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}\otimes \mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)),$$

ce qui permet de conclure.

Théorème 11.19. — (i) *Si V est une représentation semi-stable de G_K, alors $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module filtré sur K faiblement admissible dont la dimension est égale à celle de V et $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) = V$.*

(ii) *Si D est un (φ, N)-module filtré sur K faiblement admissible, alors $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est une représentation semi-stable de G_K dont la dimension est égale à celle de D et $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)) = D$.*

Démonstration. — Si V est semi-stable, on déduit du lemme précédent des isomorphismes

$$\alpha_{\mathrm{st}} : \mathrm{X}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) \cong \mathrm{B}_{\max}^{\varphi=1} \otimes V \quad \text{et} \quad \alpha_{\mathrm{dR}} : \mathrm{X}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) \cong (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+) \otimes V.$$

On a alors le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & V \arrow[r] & \mathrm{B}_{\max}^{\varphi=1}\otimes V \arrow[r] & (\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}/\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+)\otimes V \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) \arrow[r] & \mathrm{X}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) \arrow[r] \arrow[u, "\alpha_{\mathrm{st}}"] & \mathrm{X}_{\mathrm{dR}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)) \arrow[u, "\alpha_{\mathrm{dR}}"'] & \end{tikzcd}$$

d'où l'on tire le fait que α_{st} induit un isomorphisme de $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V))$ sur V et donc en particulier que la dimension de $\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V))$ est égale à celle de $\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(V)$ sur K_0, ce qui, en vertu du corollaire 11.17 permet de démontrer le (i).

Le (ii) a quant à lui pratiquement été démontré dans le théorème 11.15. La seule chose à rajouter est que l'isomorphisme naturel de (φ, N)-modules filtrés de $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)$ sur $\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes D$ commute à l'action de Galois et donc

$$\mathrm{D}_{\mathrm{st}}(\mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D)) = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{V}_{\mathrm{st}}(D))^{G_K} = (\mathrm{B}_{\mathrm{st}} \otimes_{K_0} D)^{G_K} = \mathrm{B}_{\mathrm{st}}^{G_K} \otimes_{K_0} D = D.$$

Références

[1] J. Ax, Zeros of polynomials over local fields—The Galois action, J. Algebra **15** (1970), 417–428.

[2] V. Berkovich, *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Math. Surveys and Monographs **33**, Amer. Math. Soc., 1990.

[3] S. Bosh, U. Güntzer et R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis ; a systematic Approach*, Grund. der Math. Wiss. **261**, Springer-Verlag, 1984.

[4] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Annals of Math. **148** (1998), 485–571.

[5] P. Colmez et J-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. Math. **140** (2000), 1-43.

[6] J-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Annals of Math. **115** (1982), 529–577.

[7] J-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, avec un appendice par P. Colmez, in *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[8] J-M. Fontaine, cours au centre E. Borel 1997, en cours de rédaction.

[9] J. Fresnel et M. van der Put, *Géométrie analytique rigide et applications*, Progress in Mathematics **18**, Birkhäuser 1981.

[10] J. Tate, p-Divisible Groups, in *Proceedings of a Conference on Local Fields*, Springer, Berlin (1967), 158–183.

Pierre Colmez, Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France
E-mail : colmez@math.jussieu.fr