L'équation fonctionnelle de la fonction $\log \eta$.

Pierre Colmez

Dans cette note nous utilisons la méthode de Shintani pour donner une démonstration d'un certain nombre de formules classiques comme l'équation fonctionnelle du logarithme de la fonction η de Dedekind, équation fonctionnelle qui fait intervenir les sommes de Dedekind.

Soient $\mathscr{H}$ le demi-plan de Poincaré et $\tau \in \mathscr{H}$. Soit log la branche du logarithme complexe déterminée par $-\pi \leq \mathrm{Im}(\log z) < \pi$. La série

$$E(\tau, s) = \sum\nolimits_{m,n}' \frac{1}{(m+n\tau)^s},$$

où la somme porte sur les couples $(m,n) \in \mathbf{Z}^2$ distincts de (0,0) et $z^s = e^{s \log z}$, converge absolument si $\mathrm{Re}(s) > 2$ et définit une fonction holomorphe de s sur ce demi-plan.

Proposition 1: Si $\mathrm{Re}(s) > 2$, alors on a

$$E(\tau, s) = (1 + e^{i\pi s})\Big(\zeta(s) + e^{-\frac{i\pi}{2}s} \frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)} \sum_{k=1}^{+\infty} \sigma_{s-1}(k) e^{2i\pi k\tau}\Big),$$

où ζ désigne la fonction zêta de Riemann, Γ la fonction Gamma d'Euler et $\sigma_t(k)$ est la somme des puissances t-ièmes des diviseurs positifs de k.

Corollaire 2: (i) La fonction $s \mapsto E(\tau, s)$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, holomorphe en dehors d'un pôle simple en $s = 1$.

(ii) Si on pose $F(\tau) = \frac{\partial}{\partial s} E(\tau, 0)$, et si $\eta(\tau) = e^{\frac{i\pi}{12}\tau} \prod_{n=1}^{+\infty} (1 - e^{2i\pi n\tau})$ désigne la fonction êta de Dedekind, alors on a

$$F(\tau) = -2\log \eta(\tau) + \frac{2i\pi\tau}{12} + i\pi\zeta(0) + 2\zeta'(0) = -2\log \eta(\tau) + \frac{2i\pi\tau}{12} - \frac{i\pi}{2} - \log 2\pi.$$

Démonstration: La fonction $(s, \tau) \mapsto E(\tau, s)$ est périodique en τ de période 1, elle admet donc un développement de Fourier. Pour calculer ce développement de Fourier, commençons par regrouper les termes (m,n) et $(-m,-n)$; on obtient

$$E(\tau, s) = (1 + e^{i\pi s})\Big(\zeta(s) + \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m \in \mathbf{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^s}\Big).$$

La fonction $\tau \mapsto \sum_{m\in\mathbf{Z}} \frac{1}{(m+n\tau)^s}$ est périodique de période $\frac{1}{n}$ et admet donc (si l'on pose $\tau = x+iy$) un développement du type $\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_{n,k}(y)e^{2i\pi nkx}$, avec

$$a_{n,k}(y) = n\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\big(n(x+iy)\big)^s} e^{-2i\pi nkx}dx = (ny)^{1-s}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)^s} e^{-2i\pi nkyx}dx.$$

Lemme 3: Si $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)^s} e^{-itx}dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ e^{-\frac{i\pi}{2}s}\frac{2\pi}{\Gamma(s)}\frac{e^{-t}}{t^{1-s}} & \text{si } t > 0. \end{cases}$$

Démonstration: Si $t \leq 0$ (et $\mathrm{Re}(s) > 1$), on peut déplacer la ligne d'intégration vers $+i\infty$ pour obtenir le résultat. Si $t > 0$, on peut déformer le contour d'intégration sur le contour C_ε constitué d'une demi-droite allant de $-i\infty$ à $-i(1+\varepsilon)$ (argument $\frac{3i\pi}{2}$) suivi d'un cercle de centre $-i$ et de rayon ε parcouru dans le sens négatif, suivi d'une demi-droite allant de $-i(1+\varepsilon)$ à $-i\infty$ (argument $-\frac{i\pi}{2}$). La décroissance exponentielle de e^{-itx} au voisinage de $-i\infty$ prouve que l'intégrale, qui n'est *a priori* définie que pour $\mathrm{Re}(s) > 1$, possède un prolongement analytique à $\mathbf{C}$ tout entier. De plus, si $\mathrm{Re}(s) < 1$, on peut laisser ε tendre vers 0, ce qui nous donne, faisant le changement de variable $x = -i(1+u)$ sur les deux demi-droites allant de $-i\infty$ à $-i$ et de $-i$ à $-i\infty$,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x+i)^s} e^{-itx}dx =& i(e^{-\frac{3i\pi}{2}s} - e^{\frac{i\pi}{2}s})e^{-t}\int_0^{+\infty} e^{-tu}u^{-s}du \\ =& 2e^{-\frac{i\pi}{2}s}\sin\pi s\,\Gamma(1-s)\frac{e^{-t}}{t^{1-s}}. \end{aligned}$$

Le résultat découle alors facilement de la formule $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin\pi s}$.

Corollaire 4:

$$a_{n,k}(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 0 \\ e^{-\frac{i\pi}{2}s}\frac{(2\pi)^s}{\Gamma(s)}n^{s-1}e^{-2\pi nky} & \text{si } n > 0. \end{cases}$$

La proposition s'en tire alors sans problème.

Nous allons maintenant nous intéresser au comportement de $E(\tau,s)$ sous l'action de $SL_2(\mathbf{Z})$. En général, on obtient une formule faisant intervenir des fonctions zêta multiples, formule qui se simplifie grandement si k est un entier; on retrouve ainsi l'équation fonctionnelle de la série d'Eisenstein holomorphe de poids 2 (prop. 9) ainsi que celle de la fonction $\log\eta$ (prop. 10)

Soit $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbf{Z})$ avec $c > 1$. Faisons agir γ sur $\mathscr{H}$ de la manière habituelle, c'est-à-dire en envoyant τ sur $\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$. On a alors

$$E(\gamma \cdot \tau, s) = \sum\nolimits'_{m,n} \Big(\frac{m+n\tau}{c\tau+d}\Big)^{-s}.$$

On ne peut pas sortir $(c\tau+d)^s$ car on n'a pas en général $(z_1z_2)^s = z_1^s z_2^s$. Pour pallier cette difficulté, nous allons décomposer $\mathbf{C}^*$ en cônes, ce qui nous permettra d'exprimer $E(\tau,s)$ en termes de fonctions zêta multiples de Barnes-Shintani.

Soient $\mathbf{R}[0] = \mathbf{R}_+$, $\mathbf{R}[1] = \mathbf{R}_+^*$, $\mathbf{R}[2] = \mathbf{R}_-$ et $\mathbf{R}[3] = \mathbf{R}_-^*$. Si $i \in \mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$, soit $\mathscr{C}_i$ le cône des éléments de $\mathbf{C}$ de la forme $u + v(c\tau+d)$ avec $u \in \mathbf{R}[i+1]$ et $v \in \mathbf{R}[i]$. On vérifie facilement que $\mathbf{C}^* = \amalg_{i\in\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}} \mathscr{C}_i$ et que $z \in \mathscr{C}_i \Leftrightarrow -z \in \mathscr{C}_{i+2}$. D'autre part, on a

$$\Big(\frac{z}{c\tau+d}\Big)^{-s} = \begin{cases} (c\tau+d)^s z^{-s} & \text{si } z \in \mathscr{C}_0 \cup \mathscr{C}_1 \cup \mathscr{C}_3 \\ e^{-2i\pi s}(c\tau+d)^s z^{-s} & \text{si } z \in \mathscr{C}_2. \end{cases}$$

Posant alors

$$E_i(\tau,s) = \sum_{z \in (\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)\cap\mathscr{C}_i} z^{-s},$$

on obtient, si $\mathrm{Re}(s) > 2$,

$$\begin{aligned} E(\tau,s) &= \sum_{i\in\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}} E_i(\tau,s) = (1+e^{i\pi s})\Big(E_0(\tau,s) + E_1(\tau,s)\Big) \\ E(\gamma\cdot\tau,s) &= (c\tau+d)^s\Big(E_0(\tau,s) + E_1(\tau,s) + E_3(\tau,s) + e^{-2i\pi s}E_2(\tau,s)\Big) \\ &= (c\tau+d)^s\Big(E(\tau,s) + (e^{-i\pi s} - e^{i\pi s})E_0(\tau,s)\Big). \end{aligned}$$

Il nous reste à étudier la fonction $E_0(\tau,s)$ pour tirer quelque chose de cette équation fonctionnelle. En fait $E_0(\tau,s)$, considérée comme fonction de s, est une fonction zêta multiple, fonction qui admet une expression simple sous forme d'une intégrale (cor. 6).

Si $x \in \mathbf{R}$, notons $\{x\}$ sa partie partie fractionnaire. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$ ayant une partie imaginaire strictement negative et tel que, de plus, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$ et $\mathrm{Re}(\alpha(c\tau+d)) > 0$.

Lemme 5: Soit t un réel strictement positif. La série $G(t) = \sum_{z\in(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)\cap\mathscr{C}_0} e^{-\alpha_i t z}$ converge absolument et l'on a

$$G(t) = \frac{1}{(1-e^{-\alpha_0 t})(1-e^{-\alpha_0 t(c\tau+d)})} \sum_{x=0}^{c-1} e^{-\alpha_0 t(1-\{\frac{dx}{c}\}+\frac{x}{c}(c\tau+d))}.$$

Démonstration: Les éléments de $(\mathbf{Z}+\mathbf{Z}\tau)\cap\mathscr{C}_0$ s'écrivent de manière unique sous la forme $n_1 + 1 - \{\frac{dx}{c}\} + (n_2 + \frac{x}{c})(c\tau+d)$ avec $n_1, n_2 \in \mathbf{N}$ et $x \in \{0,\ldots,c-1\}$, ce qui nous ramène à une étude de séries géométriques.

Corollaire 6:
$$E_0(\tau,s)=\frac{\alpha^s}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}G(t)t^s\frac{dt}{t}.$$

Démonstration: Il suffit d'utiliser la formule
$$z^{-s}=\frac{\alpha^s}{\Gamma(s)}\int_0^{+\infty}e^{-\alpha zt}t^s\frac{dt}{t},$$
formule qui est valable dès que $z\in\mathscr{C}_0$.

Lemme 7: Soit φ une fonction continue sur $\mathbf{R}_+$, C^∞ en 0 et à décroissance rapide à l'infini, alors l'intégrale $\Lambda(\varphi,s)=\int_0^{+\infty}\varphi(t)t^{s-1}dt$ qui converge si $\mathrm{Re}(s)>0$ possède un prolongement méromorphe à $\mathbf{C}$ tout entier, holomorphe en dehors de pôles simples aux entiers négatifs. De plus, si $\varphi(t)=\sum_{i=0}^n a_nt^n+O(t^{n+1})$, alors $\lim\limits_{s\to -n}(s+n)\Lambda(\varphi,s)=a_n$.

Démonstration: Il suffit (par exemple) de couper l'intégrale en deux morceaux, l'un allant de 0 à 1 où l'on utilise un développement limité de φ et l'autre allant de 1 à $+\infty$ et qui ne pose aucun problème.

Corollaire 8: La série $E_0(\tau,s)$ définie pour $\mathrm{Re}(s)>2$ possède un prolongement méromorphe (en s) à $\mathbf{C}$ tout entier, holomorphe en dehors de pôles simples en $s=1$ et $s=2$. De plus, on a
$$\lim_{s\to 2}(s-2)E_0(\tau,s)=\frac{c}{c\tau+d}.$$

Démonstration: Il suffit d'appliquer le lemme précédent à la fonction $t^2G(t)$.

Remarque : On peut utiliser la même technique pour étudier les fonctions $E_i(\tau,s)$, où $i=1,2,3$, et obtenir ainsi une autre démonstration du prolongement analytique de $E(\tau,s)$.

Proposition 9: (i) $E(\gamma\cdot\tau,2)=(c\tau+d)^2E(\tau,2)-2i\pi c(c\tau+d)$.

(ii) La fonction $E^*(\tau,2)$ définie par $E^*(\tau,2)=E(\tau,2)-\frac{2i\pi}{\tau-\overline{\tau}}$ est une forme modulaire de poids 2.

Démonstration: Le (ii) est une conséquence immédiate du (i). D'autre part, on a
$$E(\gamma\cdot\tau,2)=\lim_{s\to 2}(c\tau+d)^s\Big(E(\tau,s)+\big((e^{-i\pi s}-e^{i\pi s})E_0(\tau,s)\big)\Big)=(c\tau+d)^2\Big(E(\tau,2)-\frac{2i\pi c}{c\tau+d}\Big).$$

Soit $B_n(x)$, pour $n\in\mathbf{N}$, la suite de polynômes donnés par la formule
$$t\frac{e^{-tx}}{(1-e^{-t})}=\sum_{n=0}^{+\infty}B_n(x)t^n.$$

De la définition, sortent immédiatement les formules

$$B_0(x)=1 \qquad B_1(x)=\frac{1}{2}-x \qquad B_2(x)=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}+\frac{1}{12}$$
$$\sum_{k=0}^{c-1} B_n\Big(\frac{k}{c}\Big)=c^{1-n}B_n(0) \qquad\qquad \sum_{k=1}^{c} B_n\Big(\frac{k}{c}\Big)=c^{1-n}B_n(1).$$

Finalement, si (c,d) est un couple d'entiers premiers entre eux, soit $S(c,d)$ la somme de Dedekind donnée par la formule

$$S(c,d)=\sum_{x\in\mathbf{Z}/c\mathbf{Z}} B_1\big(\{\frac{x}{c}\}\big)B_1\big(\{\frac{dx}{c}\}\big).$$

Proposition 10: (i) $F(\gamma\cdot\tau)=F(\tau)-\log(c\tau+d)-2i\pi\Big(\frac{1}{12c(c\tau+d)}+\frac{c\tau+d}{12c}-S(c,d)\Big)$.

(ii) $\log\eta(\gamma\cdot\tau)=\log\eta(\tau)+\frac{1}{2}\log(c\tau+d)+i\pi\frac{a+c}{12c}-i\pi S(c,d)$.

Démonstration: Compte-tenu de la relation entre $F(\tau)$ et $\eta(\tau)$, les formules (i) et (ii) se déduisent facilement l'une de l'autre; nous ne démontrerons donc que la formule (i). Pour cela, partons de l'identité

$$\begin{aligned}F(\gamma\cdot\tau)=\frac{\partial}{\partial s}E(\gamma\cdot\tau,0)&=\frac{\partial}{\partial s}\Big((c\tau+d)^s\Big(E(\tau,s)+(e^{-i\pi s}-e^{i\pi s})E_0(\tau,s)\Big)\Big)_{|s=0}\\&=\log(c\tau+d)E(\tau,0)+F(\tau)-2i\pi E_0(\tau,0).\end{aligned}$$

Comme $E(\tau,0)=2\zeta(0)=-1$, il ne reste plus que $E_0(\tau,0)$ à évaluer. D'après le lemme 7, $E_0(\tau,0)$ est égal au coefficient du terme de degré 2 dans le développement de Taylor à l'origine de $t^2G(t)$. Un calcul sans mystère nous donne alors

$$E_0(\tau,0)=\sum_{x=0}^{c-1}\Big(B_1\big(\frac{x}{c}\big)B_1\big(1-\{\frac{dx}{c}\}\big)+\frac{1}{c\tau+d}B_2\big(1-\{\frac{dx}{c}\}\big)+(c\tau+d)B_2\big(\frac{x}{c}\big)\Big).$$

On obtient le résultat voulu en utilisant les formules

$$B_1(1-x)=-B_1(x) \quad \text{et} \quad \sum_{x=1}^{c}B_2\big(\frac{x}{c}\big)=\sum_{x=0}^{c-1}B_2\big(\frac{x}{c}\big)=\frac{1}{12c},$$

ajoutées au fait que quand x décrit $\{0,\ldots,c-1\}$, alors $c(1-\{\frac{dx}{c}\})$ décrit $\{1,\ldots,c\}$.