Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld: le cas de dimension 1

Pierre Colmez
(joint work with Gabriel Dospinescu, Wiesława Nizioł)

Il s'agit d'un travail en commun avec Gabriel Dospinescu et Wiesława Nizioł dans lequel nous prouvons que la cohomologie étale p-adique des revêtements du demi-plan de Drinfeld encode la correspondance de Langlands locale p-adique pour les représentations de de Rham (il est maintenant classique que la cohomologie étale ℓ-adique, pour $\ell \neq p$, encode la correspondance de Langlands locale classique en même temps que celle de Jacquet-Langlands).

Soient $G = \mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et $\check{G} = D^*$, où D est l'algèbre de quaternions sur $\mathbf{Q}_p$. Soit $\mathcal{M}_\infty$ la tour de Drinfeld en niveau infini (non complétée): c'est un revêtement du demi-plan de Drinfeld $\Omega_{\mathrm{Dr}} = \mathbf{P}^1 - \mathbf{P}^1(\mathbf{Q}_p)$ de groupe de Galois $\check{G}$. Par ailleurs l'action naturelle de G sur Ω_{Dr} (par homographies) s'étend à $\mathcal{M}_\infty$. Enfin, $\mathcal{M}_\infty$ est définie sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, mais est munie d'une action du groupe de Weil $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$, et les actions de G, G' et $\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$ commutent. Il s'ensuit que la cohomologie géométrique de $\mathcal{M}_\infty$ (i.e. celle de $\mathbf{C}_p \times \mathcal{M}_\infty$) est munie d'une action de $G \times \check{G} \times \mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}$.

Soit V une représentation p-adique de dimension 2 du groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}_p}$ de $\mathbf{Q}_p$. Disons que V est *pertinente* si V est de de Rham, à poids de Hodge-Tate 0 et 1, et si la représentation du groupe de Weil-Deligne associée est irréductible. Grâce aux correspondances de Langlands locales p-adique et classique et à la correspondance de Jacquet-Langlands, on peut associer à V les objets suivants:

- $\mathrm{LL}(V)$, représentation lisse, supercuspidale, de G,
- $\Pi(V)$, représentation unitaire admissible de G,
- $\mathrm{JL}(V)$, représentation irréductible de dimension finie de $\check{G}$,

et $\mathrm{LL}(V)$ est l'espace des vecteurs lisses de $\Pi(V)$ et est inclus dans l'espace $\Pi(V)^{\mathrm{an}}$ des vecteurs localement analytiques.

Théorème 1. [2] *Soit V une représentation p-adique irréductible de $\mathrm{Gal}_{\mathbf{Q}_p}$, de dimension 2.*

(i) *Alors*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}}(V, \mathbf{Q}_p \otimes H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{M}_\infty, \mathbf{Z}_p(1))) = \begin{cases} \mathrm{JL}(V)^* \otimes \Pi(V)^* & \textit{si } V \textit{ est pertinente,} \\ 0 & \textit{sinon.} \end{cases}$$

(ii) *Si V est pertinente,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{W}_{\mathbf{Q}_p}}(V, H^1_{\mathrm{et}}(\mathcal{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))) = \mathrm{JL}(V)^* \otimes (\Pi(V)^{\mathrm{an}})^*.$$

Le (i) est une conséquence du (ii) et des résultats de [3]. La preuve du (ii) repose sur deux ingrédients: la conjecture de Breuil-Strauch prouvée par Dospinescu et Lebras [5] qui décrit le complexe de de Rham de $\mathcal{M}_\infty$ en termes de la correspondance de Langlands locale p-adique, et le théorème ci-dessous qui décrit la cohomologie étale surconvergente d'un affinoïde de dimension 1 en termes de la cohomologie de Hyodo-Kato surconvergente (définie par Grosse-Klönne). (Le calcul de $H^1_{\rm et}(\mathcal{M}_\infty, \mathbf{Q}_p(1))$ s'en déduit en écrivant $\mathcal{M}_\infty$ comme une réunion croissante d'affinoïdes (non connexes).)

Soit Y un affinoïde connexe de dimension 1 défini sur une extension finie K de $\mathbf{Q}_p$, et soit $Y^\dagger$ l'espace surconvergent associé (en ayant étendu les scalaires à $\mathbf{C}_p$). Les espaces vectoriels $H^1_{\rm dR}(Y^\dagger)$ et $H^1_{\rm HK}(Y^\dagger)$ sont de dimension finie sur $\mathbf{C}_p$ et $\mathbf{Q}_p^{\rm nr}$ respectivement, et on a un isomorphisme $\iota_{\rm HK} : \mathbf{C}_p \otimes H^1_{\rm HK}(Y^\dagger) \cong H^1_{\rm dR}(Y^\dagger)$.

Théorème 2. *On dispose d'un diagramme commutatif naturel, muni d'une action de* Gal_K*,*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y^\dagger} \arrow[r, "\exp"] \arrow[d, equal] & H^1_{\rm et}(Y^\dagger, \mathbf{Q}_p(1)) \arrow[r] \arrow[d, "\rm dlog"] & (\mathbf{B}^+_{\rm st} \otimes H^1_{\rm HK}(Y^\dagger))^{\varphi=p, N=0} \arrow[r] \arrow[d, "\theta\otimes\iota_{\rm HK}"] & 0 \\
C \arrow[r] & \mathcal{O}_{Y^\dagger} \arrow[r, "d"] & \Omega^1_{Y^\dagger} \arrow[r, "\pi_{\rm dR}"] & H^1_{\rm dR}(Y^\dagger) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

dans lequel les lignes sont exactes, et les flèches verticales injectives.

Il ressort de ce théorème que la cohomologie étale p-adique géométrique d'un affinoïde (surconvergent), bien que très grosse, possède des propriétés de finitude raisonnables: c'est une extension d'un Espace de Banach de Dimension finie par les sections globales d'un faisceau cohérent.

Une démonstration de ce théorème consiste à utiliser l'isomorphisme entre la cohomologie étale et la cohomologie syntomique [4]: cette dernière s'exprime naturellement en utilisant les objets intervenant dans le diagramme. Une autre preuve consiste à calculer la cohomologie étale en termes de symboles; ceci fait apparaître le revêtement universel $\widehat{J}$ du groupe p-divisible de la jacobienne d'une compactification de Y, et on relie $\widehat{J}$ à $(\mathbf{B}^+_{\rm st}\otimes H^1_{\rm HK}(Y^\dagger))^{\varphi=p,N=0}$ en utilisant l'intégration p-adique (en particulier les résultats de [1]).

References

[1] R. Coleman et A. Iovita, The Frobenius and monodromy operators for curves and abelian varieties, Duke Math. J. **97** (1999), 171–215.

[2] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Nizioł, *Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld: le cas de dimension* 1, en préparation.

[3] P. Colmez et G. Dospinescu, *Complétions unitaires de représentations de* $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[4] P. Colmez et W. Nizioł, *Syntomic complexes and p-adic nearby cycles*, Invent. math. (à paraître).

[5] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras, *Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique*, preprint 2015.