UNE CONSTRUCTION DE $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous démontrons que les nombres algébriques sont denses dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et décrivons la topologie induite par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ en termes de différentielles successives.

Abstract. — We prove that algebraic numbers are dense in $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ and describe the topology induced by that of $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ in terms of higher differentials.

Soit K un corps local de caractéristique 0 et caractéristique résiduelle p. Fontaine a construit [**4, 5**] un anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ qui contient les périodes p-adiques des variétés algébriques définies sur K. Nous montrons que $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est le complété de $\overline{K}$ pour une topologie que nous décrivons de manière intrinsèque (th. 3.1). Cette topologie fait intervenir des normes sous-multiplicatives mais pas multiplicatives sur $\overline{K}$; peut-être serait-il possible d'étendre la théorie de Berkovich pour inclure de telles normes.

Nous commençons par donner une formule permettant d'écrire explicitement un élément de $\overline{K}$ comme élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Cette formule n'est pas strictement nécessaire pour démontrer la densité de $\overline{K}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ mais est assez utile pour visualiser la topologie induite sur $\overline{K}$ par celle de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le § 1, qui ne prétend à aucune originalité, renferme quelques lemmes sur les algèbres locales complètes. Le § 2 est consacré à la formule permettant de visualiser $\overline{K}$ comme un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. Le § 3 contient la démonstration de la densité de $\overline{K}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et de ses conséquences. Enfin, le § 4 étend les résultats au cas relatif où l'on part d'une algèbre de Banach (par exemple l'algèbre de Tate $\mathbf{Q}_p\{T_1, \ldots, T_d\}$) au lieu d'un corps local.

Les trois premiers § correspondent, à des modifications mineures près, à l'article qui aurait dû[1] paraître en appendice à [**5**], si des fichiers n'avaient pas été intervertis. La publication de la présente version correspond à un regain d'intérêt [**1, 3, 7**] pour le sujet ; c'est avec grand plaisir que je la dédie à Francesco Baldassarri.

(1)La version publiée contient un trou dont j'ai pris conscience en préparant un exposé à Harvard en 1993 : la démonstration du cor. 6 laisse à désirer...

1. Préliminaires

Ce paragraphe contient quelques lemmes probablement standard sur les algèbres locales et complètes en caractéristique 0.

1.1. Extensions de corps locaux. — Soit F un corps commutatif de caractéristique 0. Soient $P \in F[X]$ un polynôme irréductible, $F[X]_P$ le complété du localisé de $F[X]$ en l'idéal engendré par P et $L = F[X]/P$ le corps résiduel de cet anneau de valuation discrète complet ; on note $\theta : F[X]_P \to L$ la réduction modulo P. Comme P est une uniformisante de $F[X]_P$, il existe une unique dérivation continue D de $F[X]_P$, F-linéaire et vérifiant $D(P) = 1$, à savoir la dérivation $D = \frac{1}{P'(X)} \frac{d}{dX}$.

Lemme 1.1. — *$\operatorname{Ker} D$ est un corps et θ induit un isomorphisme de $\operatorname{Ker} D$ sur L.*

Démonstration. — Les formules

$$D(Q+R) = D(Q) + D(R) \ \text{ et } \ D(QR) = QD(R) + RD(Q)$$

montrent que $\operatorname{Ker} D$ est un anneau. Montrons que tout élément non-nul de $\operatorname{Ker} D$ a un inverse dans $\operatorname{Ker} D$; pour cela commençons par montrer que si $H \neq 0$ n'est pas inversible dans $F[X]_P$, alors $D(H) \neq 0$. Écrivons H sous la forme $P^n H_1$, où $n \geq 1$ et H_1 est inversible dans $F[X]_P$ (ce qui équivaut à $\theta(H_1) \neq 0$). Alors $D(H) = P^{n-1}(nH_1 + PD(H_1))$ et donc $D(H) \neq 0$ puisque $\theta(nH_1 + PD(H_1)) = n\theta(H_1) \neq 0$. Enfin, si H est un élément non-nul de $\operatorname{Ker} D$ et G est son inverse dans $F[X]_P$, la formule $0 = D(HG) = HD(G) + GD(H) = HD(G)$ montre que $G \in \operatorname{Ker} D$.

Il nous reste à vérifier que $\theta : \operatorname{Ker} D \to L$ est surjectif (car, étant un morphisme de corps, il est automatiquement injectif). Soit donc $y \in L$ et Q n'importe quel élément de $F[X]_P$ tel que $\theta(Q) = y$; la série $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-P)^k}{k!} D^k(Q)$ converge dans $F[X]_P$ vers un élément S vérifiant $\theta(S) = \theta(D^0(Q)) = y$ et

$$D(S) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-P)^k}{k!} D^{k+1}(Q) - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-P)^{k-1}}{(k-1)!} D^k(Q) = 0,$$

ce qui permet de conclure.

1.2. Relèvement d'éléments algébriques. — On note $s_L : L \to \operatorname{Ker} D \subset F[X]_P$ l'isomorphisme inverse de θ.

Tout élément de $F[X]_P$ peut s'écrire de manière unique $\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k$ avec $Q_k \in F[X]$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$. Une telle écriture est dite *minimale*. Si $y \in L$, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_P^k(y) P^k$ l'écriture minimale de $s_L(y)$.

Remarque 1.2. — On peut calculer $\delta_P^k(y)$ en utilisant l'algorithme suivant : il existe une unique suite de couples de polynômes (Q_k, R_k) vérifiant

(i) $\deg(R_k) < \deg(P')$ et $\deg(Q_k) < \deg(P)$,

(ii) $Q_0 - y \in P\,F[X]_P$ et $R_0 = 0$,

(iii) $Q_k' + R_k + (k+1)P'Q_{k+1} = PR_{k+1}$.
On a alors

$$\begin{aligned} P'D(\sum_{k=0}^{+\infty} Q_k P^k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(Q_k'P^k + kQ_kP'P^{k-1}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P^k Q_k' + \sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)Q_{k+1}P'P^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} P^k(PR_{k+1} - R_k) = 0 \end{aligned}$$

et donc $\delta_P^k(y) = Q_k$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

Lemme 1.3. — *Soient F un corps de caractéristique 0, B une F-algèbre locale d'idéal maximal I de corps résiduel C et θ_B le morphisme naturel de B sur C. On suppose B séparée et complète pour la topologie I-adique (i.e. $B = \varprojlim_n B/I^n$). Soient $\overline{F}$ la clôture intégrale de F dans C et F_{sep} la clôture séparable de F dans B ; alors θ_B induit un isomorphisme de F_{sep} sur $\overline{F}$.*

Démonstration. — Commençons par prouver que θ_B est surjectif. Soient $L \subset \overline{F}$ une extension finie de F et $\pi \in L$ tel que $L = F[\pi]$. Soit $P \in F[X]$ le polynôme minimal de π. Si $\tilde{\pi}$ est n'importe quel élément de B vérifiant $\theta_B(\tilde{\pi}) = \pi$, on a $P(\tilde{\pi}) \in I$ et l'application $f_{\tilde{\pi}} : F[X] \to B$ définie par $f_{\tilde{\pi}}(X) = \tilde{\pi}$ se prolonge donc par continuité en un morphisme que nous noterons encore $f_{\tilde{\pi}}$ de $F[X]_P$ dans B. De plus, $\theta_B \circ f_{\tilde{\pi}} = \theta$; on en déduit que $s_{\tilde{\pi}} = f_{\tilde{\pi}} \circ s_L$ est un isomorphisme de L sur une sous-algèbre de F_{sep} qui est tel que $\theta_B \circ s_{\tilde{\pi}}$ est l'identité de L. Il s'ensuit que $\theta_B(F_{\mathrm{sep}})$ contient toute extension finie de F contenue dans $\overline{F}$, et donc contient $\overline{F}$; d'où la surjectivité.

Passons maintenant à l'injectivité. Soit $y \in B$, séparable sur F et vérifiant $\theta(y) = 0$. Soit $P \in F[X]$ un polynôme séparable admettant y comme racine. Alors P admet 0 comme racine simple dans C et peut donc s'écrire sous la forme XQ où $Q(0) \neq 0$. Mais alors $\theta_B(Q(y)) \neq 0$ et donc $Q(y)$ est inversible dans B ; comme $0 = P(y) = yQ(y)$, on en déduit $y = 0$, ce qui permet de conclure.

Corollaire 1.4. — *Soient B_1 et B_2 deux F-algèbres locales ayant même corps résiduels C. On note θ_i le morphisme canonique de B_i sur C et I_i le noyau de θ_i. On suppose que si $i \in \{1, 2\}$, alors B_i est séparée et complète pour une topologie moins fine que la topologie I_i-adique et que la clôture intégrale $\overline{F}$ de F dans C qui peut être vue comme une sous-algèbre de B_i par le lemme précédent, est dense dans B_i. On suppose de plus que si $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$, il existe un morphisme $f_{i,j} : B_i \to B_j$ qui est F-linéaire, continu et tel que $\theta_j \circ f_{i,j} = \theta_i$. Alors les morphismes $f_{1,2}$ et $f_{2,1}$ sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre.*

Démonstration. — Le lemme précédent implique que $f_{i,j} \circ f_{j,i}$ est l'identité sur $\overline{F}$ donc sur B_i tout entier par continuité.

2. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

2.1. L'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — Soient k un corps parfait de caractéristique p, $F = W(k)[\frac{1}{p}]$ le corps local absolument non ramifié de corps résiduel k, K une extension finie de F totalement ramifiée, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et C le complété de $\overline{K}$ pour la valuation p-adique. Soient ϖ une uniformisante de K et v (resp. v_p) la valuation de C normalisée par $v(\varpi) = 1$ (resp. $v_p(p) = 1$). Si $x \in C$, on a $v(x) = ev_p(x)$ où $e = [K : F]$ est l'indice de ramification absolu de K. Si L est un sous-corps de C, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers.

Soit $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ l'ensemble[(2)] des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x + y = s$ et $x \cdot y = t$, où

$$s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m} \quad \text{et} \quad t^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}.$$

Alors $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation v_E définie par $v_E(x) = v(x^{(0)})$, et qui contient une clôture algébrique $\overline{k}$ de k.

Soit $W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ et, si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$. Soit $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = \mathscr{O}_K \otimes_{\mathscr{O}_F} W(\widetilde{\mathbf{E}}^+)$ le $\mathscr{O}_K$-épaississement infinitésimal p-adique universel de $\mathscr{O}_C$. Soit θ le morphisme de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ dans $\mathscr{O}_C$ qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} \varpi^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} \varpi^n x_n^{(0)}$. Alors θ est surjectif et son noyau I_+ est un idéal principal. Remarquons que si K^{nr} désigne l'extension maximale non-ramifiée de K contenue dans $\overline{K}$, alors $K \otimes_{\mathscr{O}_F} W(\overline{k}) \subset \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\varpi^{-1}]$ est le complété de K^{nr} pour la topologie p-adique ; en particulier, $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\varpi^{-1}]$ contient K^{nr}.

Notons encore θ le morphisme de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\varpi^{-1}]$ dans C et soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ le complété de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\varpi^{-1}]$ pour la topologie $\mathrm{Ker}\,\theta$-adique. On peut prolonger θ par continuité à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et on note I son noyau. Alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est un anneau de valuation discrète, complet, d'idéal maximal I et de corps résiduel C. Notons que $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et que l'on a $I \cap \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = I_+$. De plus, si pour $k, n \in \mathbf{N}$, on pose $U_{n,k} = \varpi^n \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$, alors les $U_{n,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$.

2.2. Écriture minimale d'un élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. — D'après le lemme 1.3, $\overline{K}$ s'identifie à la clôture séparable (ou intégrale ce qui est ici la même chose car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ est intègre) de K ou K^{nr} dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$; nous allons utiliser les résultats du n° 1.2, appliqués à $B = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et à K^{nr} au lieu de F, pour rendre cette identification plus concrète.

Si u est un générateur de I_+, tout élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ peut s'écrire sous la forme $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$, avec $a_k \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\varpi^{-1}]$. Une telle écriture est loin d'être unique, mais certaines sont meilleures que d'autres. Si $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, soit $w_k(x) = \sup\{m \in \mathbf{Z} \mid x \in U_{m,k}\}$; en particulier, $w_0(x)$ est la partie entière de $v(\theta(x))$ et $w_{k+1}(x) \leq w_k(x)$ pour tout $k \in \mathbf{N}$.

(2) Nous renvoyons à **[5]** pour les constructions qui suivent et les démonstrations des résultats.

On appelle *écriture minimale* de x toute série $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ dont la somme est x et telle que $a_k \in \varpi^{w_k(x)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$.

Remarque 2.1. — Si $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de x, alors l'image de $\theta(a_k)$ dans $C/\varpi^{w_{k-1}(x)}\mathscr{O}_C$ ne dépend que de x et de u et peut être vue comme la k-ième dérivée de x par rapport à u. En effet, si $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k u^k$ est une autre écriture minimale de x, alors $\sum_{i\leq k-1}(a_i - b_i)u^i \in \varpi^{w_{k-1}(x)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \cap I^k = u^k \varpi^{w_{k-1}(x)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$; on a donc $(a_k - b_k)u^k \in u^k\varpi^{w_{k-1}(x)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$ et $\theta(a_k - b_k) \in \varpi^{w_{k-1}(x)}\mathscr{O}_C$.

On dit qu'un élément a de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est *plat* si $w_k(a)$ ne dépend pas de k (i.e. si toutes ses « dérivées » sont nulles) ; on note alors $w(a)$ la valeur commune des $w_k(a)$.

Lemme 2.2. — (i) *$a \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est plat si et seulement si $a = 0$ ou bien $\theta(a)$ est non-nul et $a \in \varpi^{w(a)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ où $w(a)$ est la partie entière de $v(\theta(a))$.*

(ii) *Tout élément x de C a un relèvement plat dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$; c'est-à-dire qu'il existe $\tilde{x} \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ plat et vérifiant $\theta(\tilde{x}) = x$.*

(iii) *Si u est un générateur de I_+ et $(a_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une suite d'éléments plats de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, alors $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de sa somme x et $w_k(x) = \inf_{0\leq i\leq k} w(a_i)$.*

(iv) *Tout élément de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ a une écriture minimale.*

Démonstration. — (i) Si a est plat et $\theta(a) = 0$, alors $w(a) = w_0(a) = +\infty$ et a est nul. Si a est plat et $\theta(a) \neq 0$, alors $w(a) = w_0(a)$ est égal à la partie entière de $v(\theta(a))$ et donc $a \in \cap_{k=1}^{+\infty} U_{w(a),k} = \varpi^{w(a)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$; la réciproque est immédiate.

(ii) Soit $x \in C$. Si $x = 0$, on peut prendre $\tilde{x} = 0$. Si $x \neq 0$, soit n la partie entière de $v(x)$ et $a \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tel que $\theta(a) = \varpi^{-n}x$. Alors $\tilde{x} = \varpi^n a$ est un relèvement plat de x.

(iii) Soit $w_k = \inf_{0\leq i\leq k} w(a_i)$ et $x = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$. Il suffit de prouver que l'on a $w_k(x) = w_k$ pour tout k car $a_k \in \varpi^{w_k}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Tous les termes de la série sont éléments de $U_{w_k,k}$ car $a_i u^i \in \varpi^{w_k}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ si $i \leq k$, par définition de w_k, et $a_i u^i \in I^{k+1}$ si $i \geq k+1$. On en tire $x \in U_{w_k,k}$ et $w_k(x) \geq w_k$. Pour montrer l'autre inégalité, il nous faut vérifier que x n'est pas élément de $U_{w_k+1,k}$. Soit k_0 le plus petit entier i tel que $w(a_i) = w_k$. Alors $a_i u^i \in \varpi^{w_k+1}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \subset U_{w_k+1,k_0}$ si $i < k_0$ et $a_i u^i \in I^{k_0+1} \subset U_{w_k+1,k_0}$ si $i > k_0$, et comme $a_{k_0}u^{k_0} \notin U_{w_k+1,k_0}$ car $a_{k_0} \notin U_{w_k+1,0}$ puisque $w(a_{k_0}) = w_0(a_{k_0}) = w_k$, on voit que tous les termes de la série sauf un sont dans U_{w_k+1,k_0}, ce qui implique que la somme de la série n'est pas dans U_{w_k+1,k_0} et comme cet ouvert contient $U_{w_k+1,k}$, cela termine la démonstration.

(iv) Soit $x \in \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. Définissons par récurrence deux suites (a_k) et (x_k) d'éléments de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ en posant $x_0 = x$ et $x_{k+1} = u^{-1}(x_k - a_k)$ où a_k est n'importe quel relèvement plat de $\theta(x_k)$. Un petit calcul montre que $x - u^{k+1}x_{k+1} = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i$ et donc que $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k u^k$ est une écriture minimale de x d'après le (iii).

2.3. Écriture minimale d'un élément de $\overline{K}$. — Soient $y \in \overline{K}$, $L \neq K^{\mathrm{nr}}$ une extension finie de K^{nr} contenant y, π une uniformisante de L, P le polynôme minimal de π sur K^{nr} et $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_P^k(y)P^k$ l'écriture minimale de $s(y)$ dans $K^{\mathrm{nr}}[X]_P$.

Lemme 2.3. — *Si $\tilde{\pi} \in \mathbf{A}_{\rm inf}$ est tel que $\theta(\tilde{\pi}) = \pi$, alors $P(\tilde{\pi})$ est un générateur de I_+.*

Démonstration. — Soit $u \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $u^{(0)} = \pi$. On a $\tilde{\pi} = [u] + \alpha$ avec $\alpha \in I_+$ et si $e = [L : K^{\rm nr}]$, alors $P([u]) \equiv [u^e] \bmod \varpi\mathbf{A}_{\rm inf}$. Comme $v_E(u^e) = 1$ et $P([u]) \in I_+$, ceci implique [**4**, Prop.2.4] que $P([u])$ est un générateur de I_+. On peut donc écrire $\alpha = \beta P([u])$ avec $\beta \in \mathbf{A}_{\rm inf}$ et on a $P(\tilde{\pi}) = P([u])\big(1 + P'([u])\beta\big) \bmod I_+^2$. Pour conclure, il suffit de remarquer que $\theta\big(1 + P'([u])\beta\big) = 1 + P'(\pi)\theta(\beta)$ est une unité de $\mathscr{O}_C$ (car $v(P'(\pi)) > 0$ puisque L est non triviale et totalement ramifiée), et donc $1 + P'([u])\beta \in \mathbf{A}_{\rm inf}^*$.

Si $Q \in K^{\rm nr}[X]$, notons $v(Q)$ le minimum de la valuation des coefficients de Q. Si $i \in \mathbf{N}$ et $a_i \in K^{\rm nr}$, alors $v(a_i\pi^i) = v(a_i) + \frac{i}{\deg(P)}$. On en déduit que si $Q = \sum_i a_i X^i$ est un polynôme à coefficients dans $K^{\rm nr}$ de degré strictement inférieur à celui de P, alors $v(Q)$ est aussi égal à la partie entière de $v(Q(\pi))$.

Proposition 2.4. — (i) *$\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$ est une écriture minimale de y dans $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$.*
(ii) $w_k(y) = \inf_{0\leq i\leq k} v(\delta_P^i(y))$

Démonstration. — On a $\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k = s_{\tilde{\pi}}(y)$ dans les notations de la démonstration du lemme 1.3 ; c'est donc une écriture de y. Pour montrer qu'elle est minimale, il suffit de vérifier que si $Q \in K^{\rm nr}[X]$ est tel que $\deg(Q) < \deg(P)$, alors $Q(\tilde{\pi})$ est un élément plat de $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$. On a $Q(\tilde{\pi}) \in \varpi^{v(Q)}\mathbf{A}_{\rm inf}$ et d'autre part, la condition $\deg(Q) < \deg(P)$ fait que $v(Q)$ est aussi la partie entière de $v(Q(\pi))$. Il n'y a plus qu'à utiliser le (i) du lemme 2.2 pour conclure. Le (ii) est une conséquence immédiate de la minimalité de l'écriture, de l'égalité $w(Q(\tilde{\pi})) = v(Q)$ si $\deg(Q) < \deg(P)$, et du (iii) du lemme 2.2.

3. Calcul différentiel sur les nombres algébriques

3.1. Densité de $\overline{K}$ dans $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$. — Définissons par récurrence une suite décroissante de sous-anneaux $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ et une suite de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-modules de torsion $\Omega^{(k)}$ en posant :

- $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathscr{O}_{\overline{K}}$,
- $\Omega^{(k)} = \mathscr{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/\mathscr{O}_K}$, si $k \geq 1$, (le produit tensoriel est au-dessus de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$) ;
- $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathrm{Ker}\big(d^{(k)} : \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \to \Omega^{(k)}\big)$, où $d^{(k)}$ est la dérivation canonique[3].

Nous nous proposons de décrire ces objets en utilisant l'anneau $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$. Pour cela, posons $\mathbf{A}_{\rm inf}^k = \mathbf{A}_{\rm inf}/I_+^{k+1}$, si $k \in \mathbf{N}$.

Théorème 3.1. — (i) $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \overline{K} \cap (\mathbf{A}_{\rm inf} + I^{k+1}) = \{x \in \overline{K} \mid w_k(x) \geq 0\}$.

[3] Le module $\Omega^{(k)}$ est de torsion car $d^{(k)}(x)$ est tué par p^r, si $r \geq v_p(P'(x))$ où $P \in \mathscr{O}_K[X]$ admet x comme racine simple.

(ii) *L'inclusion de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$ induit, par passage aux quotients, un isomorphisme $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cong \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$, pour tout couple d'entiers (k,n).*

(iii) *$\overline{K}$ est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est le séparé complété de $\overline{K}$ pour la topologie définie en prenant les $p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, avec $n, k \in \mathbf{N}$, pour base de voisinages de 0.*

(iv) *Si $k \geq 1$, $d^{(k)}$ est surjective et $\Omega^{(k)}$ s'identifie[4] à $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$.*

(v) *De plus, si $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ est écrit sous la forme minimale $\sum_k \delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$, alors $d^{(k)}(y)$ est l'image dans $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$ de $\delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$.*

Remarque 3.2. — (i) Une autre démonstration des points (i), (ii) et (iv) pour $k = 1$ peut se trouver dans [**5**, § 1.4].

(ii) Il est relativement facile, à partir de la définition de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(1)}$, de décider si un élément x de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ lui appartient ou non car $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est une limite inductive d'anneaux monogènes. Décider si x appartient à $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est beaucoup plus ardu si $k \geq 2$ car $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ n'est plus une limite inductive d'anneaux monogènes, mais le (i) du th. 3.1 fournit un critère assez raisonnable permettant de le faire car $w_k(x)$ est une quantité tout-à-fait calculable en pratique.

(iii) En tant que module galoisien, on a $I^k/(I_+^k + I^{k+1}) \simeq \overline{K}/\mathfrak{a}^k(k)$ où le (k) désigne la torsion par la puissance k-ième du caractère cyclotomique, et $\mathfrak{a}$ est l'inverse de l'idéal $(\varepsilon_1 - 1)\mathfrak{d}_{K/F}$, où ε_1 est une racine primitive p-ième de l'unité et $\mathfrak{d}_{K/F}$ est la différente absolue de K. Cette identification s'obtient en prenant t^k comme générateur de I^k (où $t = \log[\varepsilon]$ est le $2i\pi$ p-adique de Fontaine, cf. l'identification entre $\Omega^{(1)}$ et $\overline{K}/\mathfrak{a}(1)$ de [**5**, § 1.4]).

3.2. Construction d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. — Soient $x \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$, $P \in \mathscr{O}_K[X]$ admettant x comme racine simple et $r \in \mathbf{N}$ vérifiant $r \geq v_p(P'(x))$. Soit $r_k = \frac{(3^k-1)r}{2} \in \mathbf{N}$ (et donc $r_{k+1} = 3r_k + r$). Si $a \in \mathbf{N}$ et $k \in \mathbf{N}$, posons $r_k(a) = \inf(r_k, v_p(a))$ et $z_{k,a} = p^{r_k - r_k(a)}x^a$.

Lemme 3.3. — *Pour tout $k \in \mathbf{N}$ et tout $a \in \mathbf{N}$, on a $z_{k,a} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.*

Démonstration. — Le résultat est trivial pour $k = 0$; supposons le vrai pour k. Utilisant la relation

$$p^{r_k + r_k(a)}z_{k,a} = z_{k,1}(p^{r_k(a-1)}z_{k,a-1}),$$

on démontre, par récurrence sur a, la relation

$$p^{r_k + r_k(a)}d^{(k+1)}(z_{k,a}) = p^{r_k}ax^{a-1}d^{(k+1)}(z_{k,1}); \tag{1}$$

[4] Voir la démonstration du lemme 3.4 pour cette identification.

En effet,

$$\begin{aligned} p^{r_k+r_k(a)}d^{(k+1)}(z_{k,a}) &= d^{(k+1)}(p^{r_k(a-1)}z_{k,a-1}z_{k,1}) \\ &= p^{r_k(a-1)}z_{k,a-1}d^{(k+1)}(z_{k,1}) + p^{r_k(a-1)}z_{k,1}d^{(k+1)}(z_{k,a-1}) \\ &= p^{r_k}x^{a-1}d^{(k+1)}(z_{k,1}) + p^{r_k+r_k(a-1)}xd^{(k+1)}(z_{k,a-1}) \\ &= p^{r_k}ax^{a-1}d^{(k+1)}(z_{k,1}) \end{aligned}$$

D'où, pour tout $A \in \mathscr{O}_K[X]$:

$$p^{r_k}d^{(k+1)}(p^{r_k}A(x)) = p^{r_k}A'(x)d^{(k+1)}(z_{k,1}).$$

En particulier, on obtient pour $A = P$:

$$p^{r_k}P'(x)d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0 \Longrightarrow p^{r_k+r}d^{(k+1)}(z_{k,1}) = 0,$$

et utilisant le fait que $r_k(a) \leq r_k$, on obtient, en multipliant (1) par p^r :

$$\forall a \in \mathbf{N},\ p^{2r_k+r}d^{(k+1)}(z_{k,a}) = 0. \qquad (2)$$

Il y a deux cas :

• Si $v_p(a) \leq r_k$, on a $z_{k+1,a} = p^{2r_k+r}z_{k,a}$ et donc $z_{k+1,a} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k+1)}$ car (2) implique $d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = 0$.

• Si $v_p(a) > r_k$, écrivons $a = p^{r_k}b$ et posons $y_k = z_{k,p^{r_k}} = x^{p^{r_k}}$. On obtient :

$$d^{(k+1)}(z_{k+1,a}) = p^{r_{k+1}-r_{k+1}(a)}d^{(k+1)}(y_k^b) = bp^{r_{k+1}-r_{k+1}(a)}y_k^{b-1}d^{(k+1)}(y_k) = 0,$$

car $v_p(b) + r_{k+1} - r_{k+1}(a) = v_p(a) - r_k + 3r_k + r - \inf(r_{k+1}, v_p(a)) \geq 2r_k + r$ et $p^{2r_k+r}d^{(k+1)}(y_k) = d^{(k+1)}(z_{k+1,p^{r_k}}) = 0$.

Ceci permet de conclure.

3.3. Densité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/I_+^{k+1}$. — Le lemme suivant permet de considérer $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ comme un sous-anneau de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$.

Lemme 3.4. — *On a $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur k, le résultat étant évident si $k = 0$. Supposons donc $k \geq 1$ et $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \subset \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^k$.

Si $x \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ soit $\tilde{x} \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ tel que $x - \tilde{x} \in I^k$. Notons $\partial^{(k)}(x)$ l'image de $x - \tilde{x}$ dans le $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-module $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$. Alors $\partial^{(k)}(x)$ ne dépend pas du choix de $\tilde{x}$ et $\partial^{(k)}$ est une dérivation de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ à valeurs dans un $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-module. La propriété universelle satisfaite par $\Omega^{(k)}$ implique qu'il existe un morphisme $i^{(k)} : \Omega^{(k)} \to I^k/(I_+^k + I^{k+1})$, de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-modules, tel que $\partial^{(k)} = i^{(k)} \circ d^{(k)}$. On a donc $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \operatorname{Ker} d^{(k)} \subset \operatorname{Ker} \partial^{(k)} = \overline{K} \cap (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1})$, ce qui permet de conclure.

Remarque 3.5. — Si $y = \sum_{i=0}^{+\infty} \delta_P^i(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^i \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$, alors $\partial^{(k)}(y)$ est l'image dans $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$ de $\delta_P^k(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^k$ car on peut prendre $\tilde{x} = \sum_{i=0}^{k-1} \delta_P^i(y)(\tilde{\pi})P(\tilde{\pi})^i$.

Proposition 3.6. — *Si $k \in \mathbf{N}$, alors $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est dense dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$.*

Démonstration. — Si $\alpha \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$, soit $\widetilde{\mathbf{E}}_\alpha^+ = \{x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+ \mid x^{(0)} = \alpha\}$. Soient $\alpha \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$, $x = (x^{(n)}) \in \widetilde{\mathbf{E}}_\alpha^+$ et P le polynôme minimal de α sur K^{nr}. Soient m un entier ≥ 1 et $S_m(X) = X^{p^m} + \varpi X$. Soit $x_{n,m} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ vérifiant $(x_{n,m})^{p^m} + \varpi x_{n,m} = x^{(n)}$. Le polynôme $P_{n,m} = P\big(S_m(X)^{p^n}\big)$ admet $x_{n,m}$ comme racine simple. On a $P'_{n,m} = p^n S'_m S_m^{p^n-1} P'\big((S_m)^{p^n}\big)$ et

$$v_p(P'_{n,m}(x_{n,m})) = n + 1/e + (1 - p^{-n})v_p(\alpha) + v_p(P'(\alpha))$$

est indépendant de m ; nous le noterons u_n. Utilisant le lemme 3.3, on voit que si $m \geq (3^k - 1)(u_n + 1)/2$, alors $y_{n,m} = (x_{n,m})^{p^m} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. On a de plus $\theta(y_{n,m} - [x^{p^{-n}}]) = \varpi x_{n,m}$ et on peut donc écrire $y_{n,m}$ sous la forme $y_{n,m} = a + b\varpi + cu$ modulo I^{k+1}, où $a = [x^{p^{-n}}]$, b et c sont des éléments de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ et u est un générateur de I_+. Élevons cette égalité à la puissance p^n ; utilisant l'inégalité

$$v_p\Big(\frac{p^n!}{i_1!i_2!i_3!}\Big) \geq n - \inf(v_p(i_1), v_p(i_2), v_p(i_3)),$$

valable si i_1, i_2, i_3 sont des éléments de $\mathbf{N}$ vérifiant $i_1 + i_2 + i_3 = p^n$, on obtient que $(y_{n,m})^{p^n} - [x]$ est élément de $\varpi^{en-\ell(k)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$, où, si $\ell(K) = \sup_{i\geq 1}(v(i) - i)$ et $\ell'(k)$ est le plus grand entier ℓ tel que $p^\ell \leq k$, on a posé $\ell(k) = \sup(\ell(K), e\ell'(k))$. Ceci implique que si $\phi(n)$ est une suite d'entiers vérifiant $\lim_{n\to+\infty} \phi(n)/n = +\infty$, alors $y_{n,\phi(n)} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ pour n assez grand et la suite $(y_{n,\phi(n)})^{p^n}$ tend vers $[x]$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$. On en déduit que l'adhérence de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ contient la sous-$\mathscr{O}_K$-algèbre de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ engendrée par les $[x]$ pour $x \in \widetilde{\mathbf{E}}_\alpha^+$ et $\alpha \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$, et comme celle-ci est dense dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ (l'application $x \mapsto [x]$ est continue et la réunion des $\widetilde{\mathbf{E}}_\alpha^+$ est dense dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$ puisque $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est dense dans $\mathscr{O}_C$; cette adhérence contient donc tous les $[x]$, pour $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et donc toutes les sommes du type $\sum_{i\in\mathbf{N}} \varpi^i[x_i]$, et donc tout $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$), cela démontre le lemme.

3.4. Démonstration du th. 3.1

Posons $\mathscr{O}^k = \overline{K} \cap (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1})$; on cherche à prouver que $\mathscr{O}^k = \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, et il résulte du lemme 3.4 que $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathscr{O}_k$ et de la prop. 3.6 que $\mathscr{O}_k$ est dense dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$. La preuve de l'égalité $\mathscr{O}^k = \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ se fait par récurrence sur k ; il n'y a rien à démontrer si $k = 0$. Supposons donc que $k \geq 1$, que $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} = \mathscr{O}^{k-1} = \overline{K} \cap (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^k)$, et que $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k-1}/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k-1} \simeq \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$.

Lemme 3.7. — *Pour tout $n \in \mathbf{N}$, les anneaux $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathscr{O}^k/p^n\mathscr{O}^k$ sont des $\mathscr{O}_K/p^n\mathscr{O}_K$ épaississements infinitésimaux d'ordre k de $\mathscr{O}_C/p^n\mathscr{O}_C = \mathscr{O}_{\overline{K}}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}$.*

Démonstration. — La démonstration étant la même dans les deux cas (remplacer $d^{(k)}$ par $\partial^{(k)}$ dans la démonstration suivante), nous ne la ferons que pour $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$.

La densité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ implique que l'application naturelle de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ est surjective. Composant avec la surjection de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ sur $\mathscr{O}_C/p^n\mathscr{O}_C$, on en déduit une surjection θ de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ sur $\mathscr{O}_C/p^n\mathscr{O}_C$.

Il reste à vérifier que $\mathrm{Ker}\,\theta$ est de puissance $(k+1)$-ième nulle. On peut écrire θ comme le composé de $\theta_1 : \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \to \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k-1}/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k-1} \simeq \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et de $\theta_2 : \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \to \mathscr{O}_C/p^n\mathscr{O}_C$. On sait déjà que $\mathrm{Ker}\,\theta_2$ est de puissance k-ième nulle [et donc que $(\mathrm{Ker}\,\theta)^k \subset \mathrm{Ker}\,\theta_1$], il suffit donc de montrer que si $x \in \mathrm{Ker}\,\theta$ et $y \in \mathrm{Ker}\,\theta_1$, alors $xy = 0$. Choisissons des relèvements $\tilde{x}$ et $\tilde{y}$ de x et y dans $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. Alors $\tilde{x} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}$ et $\tilde{y} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cap p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$. Donc $p^{-n}\tilde{y} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et $d^{(k)}(\tilde{x}p^{-n}\tilde{y}) = \tilde{x}d^{(k)}(p^{-n}\tilde{y}) = 0$ car $p^n d^{(k)}(p^{-n}\tilde{y}) = 0$ et $\tilde{x} \in p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}$, ce qui implique $p^{-n}\tilde{x}\tilde{y} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et donc $xy = 0$.

Lemme 3.8. — *$\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$, $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ et $\mathscr{O}^k/p^n\mathscr{O}^k$ sont canoniquement isomorphes.*

Démonstration. — L'application naturelle de $\mathscr{O}^k/p^n\mathscr{O}^k$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ est injective par définition de $\mathscr{O}^k$. La densité de $\mathscr{O}^k$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ montre qu'elle est surjective ; c'est donc un isomorphisme.

Soit $A^{(k)} = \varprojlim_n \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. D'après le lemme 3.7, $A^{(k)}$ est un $\mathscr{O}_K$-épaississement d'ordre k de $\mathscr{O}_C$ et nous noterons $\theta^{(k)}$ le morphisme canonique de $A^{(k)}$ dans $\mathscr{O}_C$. Il existe donc un unique morphisme continu f de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ dans $A^{(k)}$ tel que l'on ait $\theta^{(k)} \circ f = \theta$.

Notons g l'application naturelle de $A^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ provenant de l'inclusion de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$; on déduit de la densité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ le fait que g est une surjection. Par ailleurs, comme $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est sans p-torsion, il en est de même de $A^{(k)}$ qui s'identifie donc à un sous-anneau de $B^{(k)} = A^{(k)}[p^{-1}]$.

On peut prolonger par linéarité g (resp. $\theta^{(k)}$, resp. f) en une application que nous noterons encore g (resp. $\theta^{(k)}$, resp. f) de $B^{(k)}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/I^{k+1}$ (resp. de $B^{(k)}$ dans C, resp. de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/I^{k+1}$ dans $B^{(k)}$) et l'on a encore $\theta^{(k)} \circ f = \theta$ et $\theta \circ g = \theta^{(k)}$. De plus $B^{(k)}$ (resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/I^{k+1}$) est une K-algèbre locale d'idéal maximal $\mathrm{Ker}\,\theta^{(k)}$ (resp. I) qui est nilpotent ; la clôture algébrique $\overline{K}$ de K dans C s'identifie donc canoniquement à une sous-algèbre de ces deux algèbres en vertu du lemme 1.3. Maintenant, la densité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $A^{(k)}$ et $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ implique celle de $\overline{K}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/I^{k+1}$ et $B^{(k)}$. On est donc dans les conditions d'application du corollaire 1.4, ce qui implique en particulier que $g : B^{(k)} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/I^{k+1}$ est injective, et donc que $g : A^{(k)} \to \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ est un isomorphisme puisqu'on a déjà prouvé sa surjectivité ; il en est donc de même de l'application naturelle de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = A^{(k)}/p^nA^{(k)}$ sur $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k/p^n\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$.

Lemme 3.9. — $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \mathscr{O}^k$

Démonstration. — On a $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \subset \mathscr{O}^k$ et $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \simeq \mathscr{O}^k/p\mathscr{O}^k$. On en déduit, via le lemme du serpent, que la multiplication par p dans $\mathscr{O}^k/\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est un isomorphisme, et comme ce module est de p^∞-torsion, il est nul ; d'où le résultat.

Remarque 3.10. — Les lemmes 3.8 et 3.9 permettent de terminer la démonstration des points (i) et (ii) du th. 3.1. Le (iii) résulte de la densité de $\overline{K}$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}/I^{k+1}$ pour tout k (densité qui résulte de celle de $\mathscr{O}^k$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$), et du fait général que si B est un anneau topologique séparé et complet et A est un sous-anneau dense de B, alors B est le complété de A pour la topologie induite sur A par celle de B. Il ne nous reste donc plus que les (iv) et (v) à démontrer.

Lemme 3.11. — *$\partial^{(k)}$ et $d^{(k)}$ sont surjectives.*

Démonstration. — Soit $\omega \in I^k/(I_+^k + I^{k+1})$ et soit $\tilde{x} \in I^k$ relevant ω. Comme $\overline{K}$ est dense dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$, il existe $x \in \overline{K}$ tel que $x - \tilde{x} \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$. Mais alors $x \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et on a $\partial^{(k)}(x) = \omega$ par définition ; ce qui règle le cas de $\partial^{(k)}$.

Tout élément de $\Omega^{(k)}$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme $ad^{(k)}x$ avec $x \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$ et $a \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$. Comme $\Omega^{(k)}$ est de p^∞-torsion, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $p^n d^{(k)}x = 0$ et comme l'application naturelle de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathscr{O}_{\overline{K}}/p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est surjective, on peut trouver $b \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ tel que $a - b \in p^n\mathscr{O}_{\overline{K}}$. On a alors $ad^{(k)}x = bd^{(k)}x = d^{(k)}(bx)$; d'où le résultat.

On peut maintenant terminer la preuve du th. 3.1 (il ne reste que les (iv) et (v) à prouver). Soit $i^{(k)} : \Omega^{(k)} \to I^k/(I_+^k + I^{k+1})$ le morphisme de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-modules défini par $i^{(k)} \circ d^{(k)} = \partial^{(k)}$. Alors $i^{(k)}$ est surjectif car $\partial^{(k)}$ l'est et $i^{(k)}$ est injectif car $d^{(k)}$ est surjectif et $\operatorname{Ker}\partial^{(k)} = \mathscr{O}^k = \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \operatorname{Ker} d^{(k)}$. On peut donc identifier $\Omega^{(k)}$ et $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$ ainsi que $d^{(k)}$ et $\partial^{(k)}$ et on tire la formule pour $d^{(k)}(y)$ donnée dans le (v) du th. 3.1 de la formule pour $\partial^{(k)}$ de la rem. 3.5.

4. Le cas relatif

4.1. Extensions étales d'algèbres de Banach. — Soit F comme au n° 2.1. Une F-algèbre de Banach K est dite *spectrale* si la valuation définissant sa topologie (et pour laquelle elle est complète) est la *valuation spectrale* v_{sp} donnée par la formule $v_{\mathrm{sp}}(x) = \inf_{s \in \operatorname{Spm} K} v_p(s(x))$, où $\operatorname{Spm} K$ est l'ensemble des morphismes continus de K dans le complété de la clôture algébrique de F.

Dans ce §, on se donne une F-algèbre K, que l'on suppose intègre, intégralement close, spectrale et noethérienne : par exemple, l'algèbre de Tate $K = F\{X_1, \ldots, X_d\}$. On note $\overline{K}$ la clôture intégrale de K dans l'extension maximale de K, contenue dans une clôture algébrique de $\mathrm{Fr}(K)$, non ramifiée au-dessus de $\operatorname{Spm} K$; alors $\overline{K}$ est une limite inductive d'extensions finies étales de K. On munit $\overline{K}$ de la valuation spectrale et on note C le complété de $\overline{K}$. Si L est une sous-F-algèbre de C, on note $\mathscr{O}_L$ l'anneau de ses entiers pour $v_{\rm sp}$ (i.e. l'ensemble des $x\in L$ vérifiant $v_{\rm sp}(x)\geq 0$) ; alors $\mathscr{O}_L$ est intégralement clos dans L et $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est la clôture intégrale de $\mathscr{O}_K$ dans $\overline{K}$.

Lemme 4.1. — *Soit L une extension finie étale de K.*
(i) *L est un K-module de type fini.*
(ii) *L est complète.*

Démonstration. — Il existe $f\in K$ tel que $L[f^{-1}]$ soit libre de rang fini sur $K[f^{-1}]$ et la forme ${\rm Tr}(xy)$ soit un accouplement parfait sur $L[f^{-1}]$. Si $e_1,\dots,e_d$ est une base de $L[f^{-1}]$ sur $K[f^{-1}]$ constituée d'éléments de L, l'application $x\mapsto\iota(x)=({\rm Tr}(e_1x),\dots,{\rm Tr}(e_dx))$ est une injection K-linéaire de L dans K^d. Comme K est supposée noethérienne, cela démontre le (i).

Soit M l'adhérence de $\iota(L)$ dans K^d (que l'on muni de la valuation v_∞ définie par $v_\infty(x_1,\dots,x_s)=\inf_{1\leq i\leq s}v_{\rm sp}(x_i)$). Soit $\alpha_1,\dots,\alpha_r$ une famille génératrice de L sur K, posons $\beta_i=\iota(\alpha_i)$ et soient $\beta_{r+1},\dots,\beta_s$ tels que $\beta_1,\dots,\beta_s$ engendrent M sur K. Par hypothèse, on peut approcher β_s par des éléments λ de $\iota(L)$. Maintenant, l'application $(x_1,\dots,x_s)\mapsto x_1\beta_1+\cdots+x_s\beta_s$ est surjective et continue de K^n sur M ; comme les espaces de départ et d'arrivée sont des banach, on peut utiliser le théorème de l'image ouverte pour, si $\beta_s-\lambda$ est assez petit, écrire $\beta_s-\lambda$ sous la forme $\sum_{i=1}^s x_i\beta_i$ avec $x_i\in p\mathscr{O}_K$. Mais alors $1-x_s$ est inversible dans $\mathscr{O}_K$, et donc β_s appartient au K-module engendré par les β_i, pour $i\leq s-1$. Une récurrence immédiate permet d'en déduire que $\beta_1,\dots,\beta_r$ engendrent M, et donc que $\iota(L)=M$; en particulier, $\iota(L)$ est un sous-banach de K^d.

Notons $\pi:K^r\to L$ l'application $(x_1,\dots,x_r)\mapsto\sum_{i=1}^s x_i\alpha_i$. Cette application est continue et il existe $C\in\mathbf{R}$ tel que l'on ait $v_{\rm sp}(\pi(x))\geq v_\infty(x)+C$ pour tout $x\in K^r$. Par ailleurs, $\iota\circ\pi:K^r\to\iota(L)$ est continue, surjective, et comme les espaces de départ et d'arrivée sont des banach, il résulte du théorème de l'image ouverte qu'il existe $C'\in\mathbf{R}$ tel que, pour tout $y\in\iota(L)$, il existe $x\in K^r$ tel que $\iota\circ\pi(x)=y$ et $v_\infty(x)\geq v_\infty(y)+C'$. Mais alors $\pi(x)=\iota^{-1}(y)$ et donc $v_{\rm sp}(\iota^{-1}(y))\geq v_\infty(y)+C+C'$. Il s'ensuit que $\iota:L\to\iota(L)$ est bicontinue, et donc que L est un banach puisque $\iota(L)$ en est un. Ceci démontre le (ii) et conclut la preuve du lemme.

Remarque 4.2. — On peut aussi déduire le (ii) de [**2**, 3.8.3 prop. 6].

4.2. Épaississements infinitésimaux universels. — L'application $x\mapsto x^p$ est surjective sur $\mathscr{O}_C/p\mathscr{O}_C=\mathscr{O}_{\overline{K}}/p\mathscr{O}_{\overline{K}}$ (cf. lemme 4.7), et donc $\mathscr{O}_C$ et C possèdent des $\mathscr{O}_K$-épaississements infinitésimaux universels. On note $\mathbf{A}_{\rm inf}$ celui de $\mathscr{O}_C$ et $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$ celui de C. Rappelons la construction de ces objets(5).

(5)Nous renvoyons à [**5**] pour les constructions qui suivent et les démonstrations des résultats.

Soit $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ l'ensemble des suites $x = (x^{(0)}, \dots, x^{(n)}, \dots)$ d'éléments de $\mathscr{O}_C$ vérifiant $(x^{(n+1)})^p = x^{(n)}$ muni des lois $+$ et $\cdot$ définies par $x + y = s$ et $x \cdot y = t$, où

$$s^{(n)} = \lim_{m \to +\infty} (x^{(n+m)} + y^{(n+m)})^{p^m} \quad \text{et} \quad t^{(n)} = x^{(n)} y^{(n)}.$$

Alors $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ est un anneau de caractéristique p, complet pour la valuation v_E définie par $v_E(x) = v_{\mathrm{sp}}(x^{(0)})$.

Soit $\widetilde{\mathbf{A}}^{+} = W(\widetilde{\mathbf{E}}^{+})$ l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\widetilde{\mathbf{E}}^{+}$ et, si $x \in \widetilde{\mathbf{E}}^{+}$, soit $[x]$ son représentant de Teichmüller dans $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$. Soit θ le morphisme de $\widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ dans $\mathscr{O}_C$ qui à $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n [x_n]$ associe $\sum_{n=0}^{+\infty} p^n x_n^{(0)}$. On étend θ un un morphisme de $\mathscr{O}_K$-algèbres de $\mathscr{O}_K \otimes \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ dans $\mathscr{O}_C$, et alors $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ est le séparé complété de $\mathscr{O}_K \otimes \widetilde{\mathbf{A}}^{+}$ pour la topologie $(p, \operatorname{Ker}\theta)$-adique. Le morphisme θ s'étend en un morphisme surjectif de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ sur $\mathscr{O}_C$, et on note I_+ son noyau.

Notons encore θ le morphisme de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ dans C. Alors $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ est le complété de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ pour la topologie $\operatorname{Ker}\theta$-adique. On peut prolonger θ par continuité à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et on note I son noyau. Notons que $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ s'identifie canoniquement à un sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ et que l'on a $I \cap \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = I_+$. De plus, si pour $k, n \in \mathbf{N}$, on pose $U_{n,k} = p^n \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$, alors les $U_{n,k}$ forment une base de voisinages de 0 dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$.

4.3. $\overline{K}$ comme sous-anneau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$. — Définissons par récurrence une suite décroissante de sous-anneaux $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ et une suite de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$-modules $\Omega^{(k)}$ en posant :

- $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(0)} = \mathscr{O}_{\overline{K}}$,
- $\Omega^{(k)} = \mathscr{O}_{\overline{K}} \otimes \Omega^1_{\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}/\mathscr{O}_K}$, si $k \geq 1$, (le produit tensoriel est au-dessus de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)}$) ;
- $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \operatorname{Ker}\bigl(d^{(k)} : \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k-1)} \to \Omega^{(k)}\bigr)$, où $d^{(k)}$ est la dérivation canonique.

Enfin, soit $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k} = \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/I_+^{k+1}$, si $k \in \mathbf{N}$.

Théorème 4.3. — (i) $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} = \overline{K} \cap (\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}) = \{x \in \overline{K} \mid w_k(x) \geq 0\}$.

(ii) *L'inclusion de* $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ *dans* $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} + I^{k+1}$ *induit, par passage aux quotients, un isomorphisme* $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}/p^n \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)} \cong \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}/p^n \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$, *pour tout couple d'entiers* (k, n).

(iii) $\overline{K}$ *est dense dans* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *et* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ *est le séparé complété de* $\overline{K}$ *pour la topologie définie en prenant les* $p^n \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, *avec* $n, k \in \mathbf{N}$, *pour base de voisinages de* 0.

(iv) *Si* $k \geq 1$, $d^{(k)}$ *est surjective et* $\Omega^{(k)}$ *s'identifie à* $I^k/(I_+^k + I^{k+1})$.

Démonstration. — La démonstration est la même que celle du th. 3.1, à ceci près qu'il faut modifier les arguments qui utilisaient le fait que K était un corps, à savoir :

— La preuve du lemme 3.8 utilise le n° 1.2 qui est rédigé dans le cas d'un corps.

— Celle du lemme 3.3 utilise l'existence de $r \in \mathbf{N}$ tel que $P'(x)$ divise p^r.

— Dans celle de la prop. 3.6, on extrait des racines p-ièmes, ce qui ne produit des extensions étales que si les éléments dont on extrait les racines p-ièmes sont des unités.

Il s'agit donc d'étendre le n° 1.2 au cas d'extensions étales d'algèbres, ce qui est un cas particulier du « théorème de prolongement des relèvements » (cf. [**6**, cor. 5.6] ; la démonstration consiste à localiser pour se ramener à un cas où on peut utiliser le preuve du lemme 1.3 et à utiliser l'unicité du prolongement pour recoller), et d'adapter les démonstrations du lemme 3.3 (cf. lemme 4.6) et de la prop. 3.6 (cf. prop. 4.9).

4.4. Construction d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$. — Si $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ et si $r \in \mathbf{N}$, on dit que y est *de profondeur* $\leq r$, s'il existe :

- $x_1 = y, x_2, \ldots, x_d \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$,
- $P_1, \ldots, P_e \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$,
- $R_1, \ldots, R_d \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$
- $Q_{i,j} \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$ pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq e$,

vérifiant les propriétés suivantes, où l'on a noté J l'idéal de $\mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$ annulateur de $x = (x_1, \ldots, x_d)$:

— $P_1, \ldots, P_e \in J$.

— Si $1 \leq i \leq d$,

$$\sum_{j=1}^{e} Q_{i,j} \frac{\partial P_j}{\partial X_h} = \begin{cases} p^r(1 + pR_i) \bmod J & \text{si } h = i, \\ 0 \bmod J & \text{si } h \neq i. \end{cases}$$

Remarque 4.4. — Les conditions ci-dessus impliquent que $p^r dx_i = 0$ pour tout i, et donc en particulier pour $x_1 = y$. En effet :

$$p^r(1 + pR_i(x))\, dx_i = \sum_{h=1}^{d} \sum_{j=1}^{e} Q_{i,j}(x) \frac{\partial P_j}{\partial X_h}(x)\, dx_h = \sum_{j=1}^{e} Q_{i,j}(x)\, dP_j(x) = 0,$$

puisque $P_j(x) = 0$; on conclut en remarquant que $1 + pR_i(x)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ (son inverse est $\sum_{n=0}^{+\infty}(-pR_i(x))^n$ qui converge dans C vers un élément de $\overline{K}$ d'après le (ii) du lemme 4.1).

On dit que $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ est *de profondeur finie* s'il existe $r \in \mathbf{N}$ tel que y soit de profondeur $\leq r$.

Lemme 4.5. — *Tout élément de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$ est de profondeur finie.*

Démonstration. — Soit $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$. Il existe donc une extension finie étale L de K telle que $y \in \mathscr{O}_L$. Soient $x_1, = y, x_2, \ldots, x_d$ des éléments de $\mathscr{O}_L$ engendrant L comme K-module. Alors $x_1, \ldots, x_d$ engendrent aussi L vue comme K-algèbre, et si l'on note J l'idéal des $P \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$ vérifiant $P(x_1, \ldots, x_d) = 0$, on a $L = K[X_1, \ldots, X_d]/J[\frac{1}{p}]$. Soient $P_1, \ldots, P_e$ engendrant $J[\frac{1}{p}]$. Comme l'extension L/K est étale, le module $\Omega_{L/K}$ est nul, ce qui se traduit par l'existence d'éléments $Q_{i,j} \in K[X_1, \ldots, X_d]$ tels que $dX_i = \sum_{j=1}^{e} Q_{i,j} dP_j \bmod \oplus_{i=1}^{d} J[\frac{1}{p}] dX_i$ dans $\Omega_{K[X_1,\ldots,X_d]/K} = \oplus_{j=1}^{d} K[X_1, \ldots, X_d]\, dX_i$. Il n'y a plus qu'à multiplier par p^r, pour r assez grand, pour que les polynômes intervenant soient tous à coefficients dans $\mathscr{O}_K$ et obtenir ce que l'on veut (avec $R_i = 0$).

Lemme 4.6. — *Si $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ est de profondeur $\leq r$, alors $p^{r_k - r_k(a)} y^a \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$, pour tous $k, a \in \mathbf{N}$, où l'on a posé $r_k = \frac{(3^k-1)r}{2}$ et $r_k(a) = \inf(r_k, v_p(a))$.*

Démonstration. — Choisissons :

- $x_1 = y, x_2, \ldots, x_d \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$,
- $P_1, \ldots, P_e \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$,
- $R_1, \ldots, R_d \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$,
- $Q_{i,j} \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$, pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq e$,

vérifiant les propriétés demandées pour la définition de profondeur $\leq r$. Si $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_d)$, posons $x^{\mathbf{a}} = x_1^{a_1} \cdots x_d^{a_d}$ et $r_k(\mathbf{a}) = \inf(r_k, v_p(a_1), \ldots, v_p(a_d))$. Posons aussi $z_{k,\mathbf{a}} = p^{r_k - r_k(\mathbf{a})} x^{\mathbf{a}}$. Nous allons montrer, plus généralement, que $z_{k,\mathbf{a}} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $\mathbf{a} \in \mathbf{N}^d$.

Le résultat est trivial pour $k = 0$; supposons le vrai pour k. Notons δ_i l'élément $(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ de $\mathbf{N}^d$, où le 1 est à la i-ième place. On a donc $z_{k,\delta_i} = p^{r_k} x_i$. En reprenant la récurrence de la preuve du lemme 3.3, on vérifie que

$$p^{r_k + r_k(\mathbf{a})} d^{(k+1)}(z_{k,\mathbf{a}}) = p^{r_k} \sum_{i=1}^d a_i x^{\mathbf{a} - \delta_i} d^{(k+1)}(z_{k,\delta_i}). \tag{3}$$

[C'est trivial si $\mathbf{a} = 0$, et dans le cas contraire on choisit i tel que $a_i \geq 1$ et on utilise la relation $p^{r_k + r_k(\mathbf{a})} z_{k,\mathbf{a}} = z_{k,\delta_i}(p^{r_k(\mathbf{a}-\delta_i)} z_{k,\mathbf{a}-\delta_i})$.] Il en résulte que, pour tout $P \in \mathscr{O}_K[X_1, \ldots, X_d]$, on a

$$p^{r_k} d^{(k+1)}(p^{r_k} P(x)) = p^{r_k} \sum_{i=1}^d \frac{\partial P}{\partial X_i}(x)\, d^{(k+1)}(z_{k,\delta_i}).$$

En particulier, pour $P = P_j$, on obtient la relation

$$p^{r_k} \sum_{i=1}^d \frac{\partial P_j}{\partial X_i}(x)\, d^{(k+1)}(z_{k,\delta_i}) = 0.$$

En multipliant cette relation par $Q_{i,j}(x)$ et en faisant la somme sur j, on en déduit, car $1 + pR_i(x)$ est une unité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$, que $p^{r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,\delta_i}) = 0$ pour tout i et, utilisant le fait que $r_k(a) \leq r_k$, on obtient, en multipliant (3) par p^r :

$$\forall \mathbf{a} \in \mathbf{N}^d,\ p^{2r_k + r} d^{(k+1)}(z_{k,\mathbf{a}}) = 0. \tag{4}$$

Il y a deux cas :

- Si $\inf(v_p(a_1), \ldots, v_p(a_d))) \leq r_k$, on a $z_{k+1,\mathbf{a}} = p^{2r_k + r} z_{k,\mathbf{a}}$, et donc $z_{k+1,\mathbf{a}} \in \mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k+1)}$ car (4) implique $d^{(k+1)}(z_{k+1,\mathbf{a}}) = 0$.
- Si $\inf(v_p(a_1), \ldots, v_p(a_d))) > r_k$, écrivons $\mathbf{a} = p^{r_k} \mathbf{b}$ et posons $y_{k,i} = z_{k,p^{r_k}\delta_i} = x_i^{p^{r_k}}$ et $y_k = (y_{k,1}, \ldots, y_{k,d})$. On obtient :

$$d^{(k+1)}(z_{k+1,\mathbf{a}}) = p^{r_{k+1} - r_{k+1}(\mathbf{a})} d^{(k+1)}(y_k^b) = \sum_{i=1}^d b_i p^{r_{k+1} - r_{k+1}(\mathbf{a})} y_k^{\mathbf{b} - \delta_i} d^{(k+1)}(y_{k,i}) = 0,$$

car $v_p(b_i)+r_{k+1}-r_{k+1}(\mathbf{a}) = v_p(a_i)-r_k+3r_k+r-\inf(r_{k+1}, v_p(a_1), \dots, v_p(a_d)) \geq 2r_k+r$ et $p^{2r_k+r}d^{(k+1)}(y_{k,i}) = d^{(k+1)}(z_{k+1,p^{r_k}\delta_i}) = 0$.

Ceci permet de conclure.

4.5. Densité de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/I_+^{k+1}$

Lemme 4.7. — *Si $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ est de profondeur $\leq r$, et si $z \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ est une solution, dans la clôture algébrique de $\mathrm{Fr}(K)$, de l'équation $z^{p^m} + pz = y$, avec $m \geq 2$, alors $z \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ et z est de profondeur $\leq r+1$.*

Démonstration. — Si L est une extension finie étale de K contenant y, et si $L' = L[X]/(X^{p^m} + pX - y)$, alors $p(1 + p^{m-1}X^{p^m-1})$ est inversible dans L' car $p^{m-1}X^{p^m-1} \in p\mathscr{O}_{L'}$. L'extension L'/L est donc étale et l'image z de X appartient donc bien à $\mathscr{O}_{\overline{K}}$.

Maintenant, choisissons :

- $x_1 = y, x_2, \dots, x_d \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$,
- $P_1, \dots, P_e \in \mathscr{O}_K[X_1, \dots, X_d]$,
- $R_1, \dots, R_d \in \mathscr{O}_K[X_1, \dots, X_d]$,
- $Q_{i,j} \in \mathscr{O}_K[X_1, \dots, X_d]$, pour $1 \leq i \leq d$ et $1 \leq j \leq e$,

vérifiant les propriétés demandées pour la définition de profondeur $\leq r$. Posons $x'_1 = z$, et $x'_i = x_i$ si $i \geq 2$. Si $P \in \mathscr{O}_K[X_1, \dots, X_d]$, notons $f(P)$ le polynôme $P(X_1^{p^m} + pX, X_2, \dots, X_d)$. L'idéal $\tilde{J}$ de $\mathscr{O}_K[X_1, \dots, X_d]$ annulateur de x' est l'idéal engendré par les $f(P)$, pour P parcourant l'idéal annulateur J de x. En particulier, les $f(P_j)$ appartiennent à $\tilde{J}$ et, si on pose :

- $\tilde{Q}_{i,j} = pf(Q_{i,j})$ si $i \geq 2$, et $\tilde{Q}_{1,j} = f(Q_{1,j})$,
- $\tilde{R}_i = f(R_i)$ si $i \geq 2$ et $\tilde{R}_1 = f(R_1) + p^{m-1}X_1^{p^m-1} + p^m X_1^{p^m-1} f(R_1)$,

on a
$$\sum_{j=1}^{e} \tilde{Q}_{i,j} \frac{\partial f(P_j)}{\partial X_h} = \begin{cases} p^{r+1}(1 + p\tilde{R}_i) \bmod \tilde{J} & \text{si } h = i, \\ 0 \bmod \tilde{J} & \text{si } h \neq i. \end{cases}$$

Il s'ensuit que z est de profondeur $\leq r+1$, ce que l'on voulait démontrer.

Lemme 4.8. — *Si Λ est une sous-$\mathscr{O}_K$-algèbre fermée de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *Λ contient $[\tilde{p}]$, où $\tilde{p} = (p, p^{1/p}, \dots, p^{1/p^n}, \dots) \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, et, pour tout $x \in \mathscr{O}_C$, il existe $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $[\alpha] \in \Lambda$ et $\theta([\alpha]) - x \in p\mathscr{O}_C$.*

(ii) $\Lambda = \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$.

Démonstration. — Il n'y a que l'implication (i)$\Rightarrow$(ii) à prouver. Comme $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^k$ est un quotient de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ qui est obtenu en complétant $\mathscr{O}_K \otimes_{\mathbf{Z}_p} \widetilde{\mathbf{A}}^+$, et comme Λ contient $\mathscr{O}_K$, il suffit de prouver que Λ contient l'image A_k de $1 \otimes \widetilde{\mathbf{A}}^+$. Pour cela, il suffit de prouver que l'on peut écrire tout élément x de A_k sous la forme $\alpha + p\beta + [\tilde{p}]\gamma$, avec $\alpha \in A_k \cap \Lambda$ et $\beta, \gamma \in A_k$ (si c'est le cas, une récurrence immédiate utilisant le fait que $[\tilde{p}] \in \Lambda$ montre que l'on peut, pour tout $n \in \mathbf{N}$, écrire x sous la forme $x_n + \sum_{i=1}^n p^i [\tilde{p}]^{n-i} x_{n,i}$, avec $x_n \in \Lambda$ et $x_{n,i} \in A_k \cap \Lambda$, et x est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donc appartient à Λ ; pour passer de n à $n+1$, on écrit $x_{n,i}$ sous la forme $\alpha_{n,i} + p\beta_{n,i} + [\tilde{p}]\gamma_{n,i}$ et on pose $x_{n+1} = x_n + \sum_{i=1}^{n} p^i[\tilde{p}]^{n-i}\alpha_{n,i})$.

Or un élément x de A_k peut s'écrire sous la forme $x = [\alpha_0] + p\beta$ avec $\alpha_0 \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ et $\beta \in A_k$. L'hypothèse fournit $\alpha_1 \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ tel que $\alpha = [\alpha_1] \in \Lambda$ et $\theta([\alpha_1] - [\alpha_0]) \in p\mathscr{O}_C$. On peut donc écrire $\alpha - [\alpha_0]$ sous la forme $[\alpha_2] + p\beta_2$ avec $\alpha_2 \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$, $\beta_2 \in A_k$ et $\theta([\alpha_2]) \in p\mathscr{O}_C$. Maintenant, la propriété $\theta([\alpha_2]) \in p\mathscr{O}_C$ implique que $[\alpha_2]$ est divisible par $\tilde{p}$ dans $\widetilde{\mathbf{E}}^+$: si $\alpha_2 = (\alpha_2^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$, alors $v_{\mathrm{sp}}(\alpha_2^{(n)}) \geq p^{-n}$ car $v_{\mathrm{sp}}(z^n) = nv_{\mathrm{sp}}(z)$, et donc $\alpha_2^{(n)}$ est divisible par p^{1/p^n} dans $\mathscr{O}_C$. On en déduit l'appartenance de $\alpha - [\alpha_0]$ à $[\tilde{p}]A_k + pA_k$ et donc celle de $x - \alpha$ à $[\tilde{p}]A_k + pA_k$. Ceci permet de conclure.

Proposition 4.9. — *Si $k \in \mathbf{N}$, alors $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ est dense dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$.*

Démonstration. — Soit Λ l'adhérence de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$. On déduit du cas où K est une extension finie de F l'appartenance de $[\tilde{p}]$ à Λ. Il suffit donc, grâce au lemme 4.8, de prouver que pour tout $x \in \mathscr{O}_C$, il existe $\alpha \in \widetilde{\mathbf{E}}^+$ vérifiant $[\alpha] \in \Lambda$ et $\theta([\alpha]) - x \in p\mathscr{O}_C$.

Soit $y \in \mathscr{O}_{\overline{K}}$ tel que $y - x \in p\mathscr{O}_C$, et soit $r \in \mathbf{N}$ tel que y soit de profondeur $\leq r$. Définissons, par récurrence, une suite $(y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}$, en posant $y_0 = y$ et en prenant pour y_{n+1} une solution de l'équation $y_{n+1}^{p^2} + py_{n+1} = y_n$. Comme $y_n - y_{n+1}^{p^2} \in p\mathscr{O}_C$, la suite de terme général $y_{n+i}^{p^{2i}}$ converge dans $\mathscr{O}_C$; on note $\alpha^{(2n)}$ sa limite et on pose $\alpha^{(2n-1)} = (\alpha^{(2n)})^p$. On a alors $\alpha^{(n)} = (\alpha^{(n+1)})^p$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, ce qui permet de voir $(\alpha^{(n)})_{n\in\mathbf{N}}$ comme un élément α de $\widetilde{\mathbf{E}}^+$. De plus, $\theta([\alpha]) = \alpha^{(0)}$ est congru à y_0, et donc aussi à x, modulo $p\mathscr{O}_C$. Il suffit donc de vérifier que $[\alpha] \in \Lambda$.

Pour ce faire, notons $y_{n,m}$ une solution de l'équation $y_{n,m}^{p^m} + py_{n,m} = y_n$, si $m \geq 2$. Il résulte du lemme 4.7 que $y_{n,m}$ est de profondeur $\leq r+n+1$, et on déduit du lemme 4.6 que $z_{n,m} = y_{n,m}^{p^m} = y_n - py_{n,m}$ appartient à $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(k)}$ si $m \geq \frac{3^k-1}{2}(r+n+1)$; on suppose donc $m \geq \frac{3^k-1}{2}(r+n+1)$ dans ce qui suit. Comme $y_n \equiv \alpha^{(2n)}$ mod $p\mathscr{O}_C$, on a $\theta([\alpha^{1/p^{2n}}]) - z_{n,m} \in p\mathscr{O}_C$, et on peut donc écrire $z_{n,m}$ sous la forme $[\alpha^{1/p^{2n}}] + p\beta + [\tilde{p}]\gamma$, avec $\beta, \gamma \in \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$. On en déduit que $[\alpha]$ est la limite dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}^{k}$ de la suite $(z_{n,m}^{p^{2n}})_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathscr{O}_{\overline{K}}^{(n)}$, et donc que $[\alpha] \in \Lambda$, ce qui permet de conclure.

Remarque 4.10. — On aurait pu utiliser la démonstration ci-dessus pour la prop. 3.6.

Références

[1] A. Beilinson, p-adic periods and derived de Rham cohomology, J. of A.M.S. **25** (2012), 715–738.

[2] S. Bosch, U. Güntzer et R. Remmert, *Non-Archimedean Analysis : A Systematic Approach to Rigid Analytic Geometry*, Grundlehren der math. Wiss. **261**, Springer-Verlag 1984.

[3] L. Fargues, Lettre à Luc Illusie (2010).

[4] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[5] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, avec un appendice de Pierre Colmez, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[6] A. Grothendieck et al., *Revêtements étales et groupe fondamental* (SGA 1), Documents Mathématiques **3**, Soc. Math. de France, 2003.

[7] S. Ohkubo, Galois theory of $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^{+}$ in the imperfect residue field case, J. Number Theory **130** (2010), 1609–1641.

Pierre Colmez, CNRS, Institut de mathématiques de Jussieu, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* colmez@math.jussieu.fr