LA COURBE DE FARGUES ET FONTAINE (PRÉFACE)

par

Pierre Colmez

La courbe de Fargues-Fontaine a changé la manière dont on pense à la théorie de Hodge p-adique [1] en introduisant des idées géométriques là où il n'y avait que de l'algèbre semi-linéaire : beaucoup de catégories apparaissant dans la théorie [2] comme les φ-modules ou les (φ, Γ)-modules sur l'anneau de Robba et ses variantes, les B-paires, les Espaces de Banach de Dimension finie [3] ou les presque $\mathbf{C}_p$-représentations sont étroitement liées à la catégorie des fibrés sur cette courbe ce qui explique, en grande partie, leurs bonnes propriétés. J'ai eu le privilège d'assister à la naissance de cette courbe et je suis heureux de pouvoir raconter cette histoire. Pour confirmer mes souvenirs de ces évènements remontant à plus de 7 ans, j'ai relu les courriels que nous avions échangés à l'époque ainsi que les nouvelles que je transmettais à Wiesława Nizioł ; j'ai inclus certains des passages les plus significatifs de ces messages.

1. L'anneau $\mathbf{B}_e$

1.1. $\mathbf{B}_e$ est principal !— Le premier acte se passe en juillet 2009, dans le train qui nous ramenait de Roscoff à Morlaix. Nous étions tous les trois, Fargues, Fontaine et moi, et Fontaine nous déclare : « j'ai regardé l'article de Berger sur les B-paires, et il

1. Que cette courbe introduise un point de vue intéressant est devenu indubitable avec la preuve [**FF**, § 10.5] de la conjecture "faiblement admissible implique admissible" esquissée au § 5.2 de cette préface, mais ce qui a suivi, à savoir la géométrisation de la correspondance de Langlands locale [**19, 20, 21, 22, 55**], est assez inattendu et totalement fascinant.

2. Tous ces objets sont définis au chap. 2 : les B-paires (n° 2.5.8), les φ-modules (n° 2.5.3) ou les (φ, Γ)-modules (n° 2.5.4) sur l'anneau de Robba sont en équivalence de catégories avec la catégorie des fibrés (équivariants) sur la courbe de Fargues-Fontaine (th. 4.7, rem. 4.9 et 5.10). Ce n'est pas le cas des Espaces de Banach de Dimension finie ou des presque C-représentations, mais on pourra consulter [**44**] pour le lien entre ces catégories et celle des fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine.

3. Connus aussi sous le nom d'espaces de Banach-Colmez.

prétend que l'anneau $\mathbf{B}_e$ est de Bézout [4] ; ça ne peut pas être vrai ; il faut que je lui écrive ». J'étais un peu embêté pour Berger mais, heureusement, le lendemain [5] :

> Fontaine $\to$ Colmez, Fargues, Wintenberger samedi 18/07/2009
>
> [...] Par ailleurs, j'ai dit à Pierre dans le train hier que je ne croyais pas que l'anneau $\mathbf{B}_e$ était de Bézout, comme l'affirme Berger. En fait, l'argument que je donnais est canulé, je me suis fait avoir par l'analogie trompeuse avec l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans C dont le terme constant est dans $\mathbf{Q}_p$. La preuve de Berger repose sur un résultat de Kedlaya et j'y crois. En fait, me semble-t-il, non seulement $\mathbf{B}_e$ est de Bézout, mais il est principal ! C'est un exercice [6] une fois que l'on sait qu'il est de Bézout.

1.2. Anneaux de Fontaine. — Avant de continuer, rappelons la définition de l'anneau $\mathbf{B}_e$ et des anneaux $\mathbf{A}_{\rm inf}$, $\mathbf{B}_{\rm cris}$, $\mathbf{B}_{\rm dR}$ de Fontaine.

Soient k un corps parfait de caractéristique p, $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}]$ le corps de caractéristique 0, complet, non ramifié, de corps résiduel k, K une extension finie totalement ramifiée de K_0, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $G_K = {\rm Gal}(\overline{K}/K)$ et C le complété de $\overline{K}$, ce qui fait de C un corps algébriquement clos, complet pour v_p, dont le corps résiduel k_C est une clôture algébrique de k. (Si $k = \mathbf{F}_p$, on a $K_0 = \mathbf{Q}_p$ et $C = \mathbf{C}_p$; on ne perd pas grand-chose à supposer que l'on est dans cette situation.)

Soit [7]

$$C^\flat = \{x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}},\ x^{(n)} \in C,\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)},\ \forall n \in \mathbf{N}\}.$$

On munit $C^\flat$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$(x^{(n)}) + (y^{(n)}) = (s^{(n)}),\ \text{avec } s^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k},$$
$$(x^{(n)}) \cdot (y^{(n)}) = (x^{(n)}y^{(n)})$$

Si $x = (x^{(n)}) \in C^\flat$, soit $x^\sharp = x^{(0)}$, et si $x \in C$, on note $x^\flat$ n'importe quel élément de $C^\flat$ tel que $(x^\flat)^\sharp = x$ (et donc $x^\flat$ n'est bien déterminé qu'à $\varepsilon^{\mathbf{Z}_p}$ près, où $\varepsilon = (1, \zeta_p, \dots)$ et ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité ; cela est source de bien

4. Il s'agit de [**5**, prop. 1,1,9] ; l'anneau $\mathbf{B}_e$ est l'anneau $\mathbf{B}_{\rm cris}^{\varphi=1}$.
5. Extrait d'un message au sujet de la soutenance proche de la thèse de son étudiant Jérome Plût, thèse soutenue le 29/09/2009, devant le jury composé de P. Elbaz-Vincent, L. Fargues, J-M. Fontaine, E, Ullmo, J-P. Wintenberger et moi-même.
6. Effectivement ! Cf. note 8.
7. La construction $C \mapsto C^\flat$ est une vieille construction de Fontaine [**26**], et s'applique à n'importe quelle algèbre munie d'une topologie plus faible que celle définie par la valuation p-adique. Les notations sont celles de Scholze [**54**] qui a globalisé cette construction en introduisant les espaces perfectoïdes ; dans la terminologie de Scholze, cette opération s'appelle le *basculement* (tilting), et $C^\flat$ est le *basculé* de C en caractéristique p.

des complications). Alors $C^\flat$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p, complet pour la valuation $v_{C^\flat}(x) = v_p(x^\sharp)$, de corps résiduel $k_{C^\flat} = k_C$.

Soit $\mathbf{A}_{\rm inf} = W(\mathscr{O}_{C^\flat})$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $\mathscr{O}_{C^\flat}$. Si $x \in \mathscr{O}_{C^\flat}$, notons $[x]$ son représentant de Teichmüller. Tout élément de $\mathbf{A}_{\rm inf}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments arbitraires de $\mathscr{O}_{C^\flat}$. Par fonctorialité des vecteurs de Witt, $\mathbf{A}_{\rm inf}$ est muni d'un frobenius φ donné par $\varphi(\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]) = \sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k^p]$, et d'une action de G_K commutant à φ.

On définit $\theta : \mathbf{A}_{\rm inf} \to \mathscr{O}_C$ par

$$\theta(\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]) = \sum_{k\in\mathbf{N}} p^k x_k^\sharp.$$

Alors $\theta : \mathbf{A}_{\rm inf} \to \mathscr{O}_C$ est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est engendré par $(p - [p^\flat])$ ([**24**, prop. 2.4]).

Soit $\mathbf{B}_{\rm dR}^+ = \varprojlim(\mathbf{A}_{\rm inf}[\frac{1}{p}]/(p-[p^\flat])^k)$. C'est un anneau de valuation discrète, de corps résiduel C, contenant le complété $\mathbf{A}_{\rm cris}$ de $\mathbf{A}_{\rm inf}[\frac{(p-[p^\flat])^k}{k!},\ k \in \mathbf{N}]$ pour la topologie p-adique. L'action de G_K s'étend à tous ces anneaux et, si on pose

$$t = \log[\varepsilon] = -\sum_{k\geq 1} \tfrac{(1-[\varepsilon])^k}{k},$$

alors $t \in \mathbf{A}_{\rm cris}$ est une uniformisante de $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$, et $\sigma(t) = \chi(\sigma)t$, où $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ est *le caractère cyclotomique*, ce qui fait de t un analogue p-adique de $2i\pi$.

Le frobenius φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\rm cris}$, et $\varphi(t) = pt$. L'action de φ s'étend donc au sous-anneau $\mathbf{B}_{\rm cris} = \mathbf{A}_{\rm cris}[\frac{1}{t}]$ de $\mathbf{B}_{\rm dR} = \mathbf{B}_{\rm dR}^+[\frac{1}{t}]$, et on note $\mathbf{B}_e$ le sous-anneau $\mathbf{B}_{\rm cris}^{\varphi=1}$. L'inclusion de $\mathbf{B}_e$ dans $\mathbf{B}_{\rm dR}$ induit alors la *suite exacte fondamentale* [**26**] :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_e \to \mathbf{B}_{\rm dR}/\mathbf{B}_{\rm dR}^+ \to 0.$$

Comme $\mathbf{B}_{\rm dR}$ est muni de la filtration par les puissances de t (i.e. $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\rm dR} = t^i\mathbf{B}_{\rm dR}^+$), ceci munit $\mathbf{B}_e$ d'une filtration [8] et l'algèbre graduée associée est $\mathbf{Q}_p \oplus \frac{1}{t}C[\frac{1}{t}]$.

1.3. Questions sur $\mathbf{B}_e$. — Le message de Fontaine a été suivi, le lendemain, d'un message intitulé « Devoirs de vacances » avec les mêmes destinataires.

> Fontaine → Colmez, Fargues, Wintenberger dimanche 19/07/2009
>
> Cet anneau $\mathbf{B}_e$ est trop rigolo. Comme il est principal et $\mathbf{B}_e^* = \mathbf{Q}_p^*$, les idéaux non nuls de $\mathbf{B}_e$ correspondent bijectivement aux $\mathbf{Q}_p$-droites de $\mathbf{B}_e$ (prendre l'idéal engendré par un élément non nul de la droite). On a une fonction degré sur $\mathbf{B}_e$ (le degré d'un élément non nul b est le plus petit

8. Et d'une fonction *degré* : si $x \in \mathbf{B}_e$, le degré $\deg x$ de x est le plus petit entier d tel que $x \in t^{-d}\mathbf{B}_{\rm dR}^+$. On a $\deg xy = \deg x + \deg y$, et x est inversible dans $\mathbf{B}_e$ si et seulement si $\deg x = 0$. Maintenant, si on sait que $\mathbf{B}_e$ est de Bézout, l'existence de cette fonction degré implique que $\mathbf{B}_e$ est principal : si I est un idéal, et si a est un élément de I, de degré minimal, alors a est un générateur de l'idéal principal (a, b) pour tout $b \in I$, et donc a est un générateur de I.

entier $m \geq 0$ tel que b est dans $\mathrm{Fil}^{-m}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$) donc aussi sur les idéaux. Si I est un idéal de degré m, le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent a une structure d'espace de Banach-Colmez de dimension m et de hauteur 0, mais ce n'est pas clair qu'il est "constructible", ni que la multiplication est analytique (il me semble que si quand même).

Les idéaux de degré 1 sont tous maximaux.

Question 1 : Soit I un idéal de degré 1 de $\mathbf{B}_e$. Le corps $F = \mathbf{B}_e/I$ est-il isomorphe à C ?

C'est assez concret : si je choisis un générateur t de $\mathbf{Z}_p(1)$ et un générateur b_0 de I, je peux écrire $b_0 = b/t$ avec b dans [9] U et j'ai une suite exacte de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $0 \to \mathbf{Q}_p \to U \to F \to 0$ (où 1 s'envoie sur b et u sur l'image $c(u)$ de u/t).

La multiplication s'obtient ainsi : si u et v sont dans U, il existe toujours un x dans U tel que $\theta(u)\theta(v) = \theta(b)\theta(x)$. Alors $(uv - bx)/t$ appartient à U et $c(u)c(v) = c((uv - bx)/t)$.

Si vous y voyez quelque chose, je veux voir aussi !

Question 2 : L'anneau $\mathbf{B}_e$ ressemble beaucoup à un anneau de polynômes à coefficients dans le corps algébriquement clos C. Est-ce que les éléments irréductibles sont tous de degré 1 ? Par exemple, un élément de degré 2 peut-il s'écrire comme un produit de deux éléments de degré 1 ?

C'est difficile d'y croire, mais c'est encore plus difficile de ne pas y croire !

Question 3 : Si la réponse aux questions 1 et 2 est "oui", montrer que, pour tout idéal non nul I de $\mathbf{B}_e$, le quotient $\mathbf{B}_e/I$ est un anneau de Banach-Colmez (i.e. la multiplication est analytique) effectif et est isomorphe à [10] $B_{m_1} \times B_{m_2} \times \cdots \times B_{m_d}$, pour $m_1, m_2, \ldots, m_d$ des entiers convenables (bien sûr, en tant qu'algèbre abstraite, B_m est isomorphe à $C[t]/(t^m)$, mais pas en tant que Banach-Colmez).

Le simple fait d'avoir écrit ce que je viens me convainc que la réponse à ces questions doit être "oui" et que la preuve ne doit pas être si dure. Soit cela sort tout seul de l'étude du gros corps gauche [11] de Pierre, soit cela résulte de ce qu'il ne devrait pas y avoir d'autre corps de Banach-Colmez que $\mathbf{Q}_p$ et C. Cependant, il semble peu probable que l'isomorphisme de C sur $\mathbf{B}_e/I$ soit canonique !

Nous avons probablement discuté de ces questions avec Fontaine début août, lors d'une conférence à Loen (Norvège), mais je n'ai pas souvenir que nous ayons fait quel

9. $U = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi=p}$, où $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+ = \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[\frac{1}{p}]$.
10. $B_m = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^m$.
11. Il s'agit du corps $\mathscr{C}$ du n° 2.2.1.

que progrès que ce soit [12], et j'ai dû écrire à Fontaine, un peu plus tard, que j'avais une preuve « simple », sans utiliser le théorème de Kedlaya, de la principalité de $\mathbf{B}_e$, ce qui m'a valu la réponse suivante.

> Fontaine → Colmez samedi 25/08/2009
>
> Je me suis effectivement convaincu que je savais prouver que $\mathbf{B}_e$ est principal sans me servir de Kedlaya, mais outre l'argument de degré que je t'ai vendu, je me sers du lemme fondamental [13] (en dimension 2 semble suffire). Je ne vois pas bien comment tu pourrais éviter un argument de ce genre (j'ai une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire "analytique" de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{C}_p/V$ (où V est de dimension 2 sur $\mathbf{Q}_p$) et je veux montrer que le noyau n'est pas nul). Le fait que $\mathbf{B}_e$ est principal est un résultat profond. Il me semble (il me reste des détails à vérifier et mon cerveau déconne) que l'on en déduit avec un argument Harder-Narasimhan que faiblement admissible implique admissible, ce qui est la plus jolie preuve que je connais... si ça marche. Et pourquoi pas aussi de Rham implique pst (je n'y ai pas encore réfléchi). En plus cela devrait expliquer la différence entre faiblement admissible et admissible dans le cas où la valuation n'est pas discrète. Il faut jouer avec des objets que j'avais essayé de vendre à Plût et qui est une variante sans action de Galois des « B-paires » de Berger. Du coup cela devrait très bien à la fois expliquer les trucs de Berger et se mélanger avec ce dont on discutait ces derniers temps. Je suis un peu tenté de raconter une partie de cela dans mon cours à Trieste la semaine prochaine mais c'est sans doute un peu prématuré [...]

1.4. La courbe. — Le second acte se passe à Trieste, lors d'une école d'été organisée par l'ICTP du 31 août au 18 septembre 2009 : deux semaines de cours suivies par une semaine de conférences. À côté de la résidence où nous étions logés se trouvait un petit restaurant avec une terrasse très agréable, des petits calamars délicieux, du vin local fort sympathique, et la grappa du patron. Nous avons passé de longues soirées sur cette terrasse à discuter de mathématiques.

Je suis arrivé le dimanche 6 septembre tard dans la soirée ; Fontaine était là depuis le début car il avait fait un cours la première semaine, et Fargues était arrivé le samedi. Le lundi matin, je les croise l'un après l'autre, très excités : ils avaient découvert

12. Disons tout de suite que la réponse à la première est "non" (cf. [**40**], et aussi [**45**, th.2] qui implique le résultat), la réponse à la seconde est "oui" et la réponse à la troisième est "non" à cause du "non" à la question 1, mais devient "oui" si on modifie la question en tenant compte de ce problème (cf. rem. 3.14 (i) pour la question 2, et rem. 3.14 (iii) pour la question 3).

13. Cf. rem 2.7. Ma preuve "simple" utilisait les mêmes arguments si j'en crois mes notes d'un exposé « Vector bundles on a strange curve » sur les travaux de Fargues et Fontaine que j'ai donné au Tata Institute en juillet 2010, mais elle comporte un trou (cf. n° 2.3.3), et peut-être n'avions nous de preuve ni l'un ni l'autre à ce moment-là.

La Courbe dans la nuit de samedi à dimanche, après un diner au petit [14] restaurant : manifestement, la conversation avait porté sur la catégorie des B-paires, en particulier sur le fait qu'elle ressemblait fort à une catégorie de fibrés sur une courbe projective du fait de l'existence de filtrations de Harder-Narasimhan. Si on commence à réfléchir en ces termes, il y a une courbe affine « naturelle » qui vient à l'esprit [15], à savoir $\operatorname{Spec}\mathbf{B}_e$ vu qu'une B-paire fait intervenir un $\mathbf{B}_e$-module libre et que $\mathbf{B}_e$ est de dimension 1 puisque c'est un anneau principal, mais une courbe projective ? Mystère, mais :

> Fargues $\to$ Colmez, Fontaine dimanche 06/09/2009, 02:26
>
> Suite à une conversation hier soir à Trieste avec Jean-Marc je me suis mis à penser à la catégorie introduite par Jean-Marc et je suis tombé sur la chose suivante (cf. fichier attachement). Je n'ose pas penser qu'une telle monstruosité existe (ceci dit on aurait pu dire de même pour le fait que $\mathbf{B}_e$ soit principal).

Voici le contenu du fichier envoyé par Fargues :

> **La courbe étrange (et les fibrés sur celle-ci)**
>
> Soient k un corps et X une courbe projective lisse sur k géométriquement connexe. On fixe un point $x \in X$. Soit $U = X \setminus \{x\}$, un ouvert affine de X. Je pose $A = \mathscr{O}_{X,x}$, $B = \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ et $K = k(X)$, le corps des fonctions rationnelles sur X. On a le dictionnaire suivant :
>
> $$k \longleftrightarrow \mathbf{Q}_p, \quad A \longleftrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+, \quad B \longleftrightarrow \mathbf{B}_e, \quad K \longleftrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$
>
> En effet, A est un anneau de valuation discrète comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus B est un anneau de Dedekind comme $\mathbf{B}_e$ (si on veut, on peut prendre

14. Il est possible que la courbe n'aurait jamais vu le jour sans ce petit restaurant : après tout, on obtient déjà une jolie théorie en utilisant seulement les propriétés de $\mathbf{B}_e$; c'était d'ailleurs l'idée initiale de Fontaine (le programme esquissé ci-dessous était très optimiste !).

> Fontaine $\to$ Colmez vendredi 28/08/2009
>
> Concernant cette histoire de $\mathbf{B}_e$ principal $\Rightarrow$ (faibl. adm. $\Rightarrow$ adm.), je n'ai plus aucun doute, tout est d'une simplicité biblique et Berger n'en n'est pas passé loin puisqu'après avoir introduit les « B-paires » avec une définition des morphismes qui l'empêche de travailler avec, il fabrique un théorème de comparaison avec les (φ, Γ)-modules et déduit de Kedlaya que (faibl. adm. $\Rightarrow$ adm.), alors que c'est complètement immédiat. En fait, il me semble qu'on doit pouvoir retrouver Kedlaya comme cela, probablement aussi, avec une variante de ce jeu les trucs de Kisin sur les modules à la Breuil (tout comme ceux de Berger avec les modules de Wach), refaire plus simplement les Banach-Colmez, comprendre pourquoi (faibl. adm. $\Rightarrow$ adm.) est faux quand la valuation n'est plus discrète, etc, etc... et retrouver aussi bien sûr une nouvelle preuve de deRham $\Rightarrow$ pst.

15. Personnellement, 7 ans plus tard, je suis encore stupéfait que l'on puisse penser à considérer le spectre d'un anneau comme $\mathbf{B}_e$ ou $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$: ces anneaux n'ont vraiment pas l'air d'avoir un lien raisonnable avec la géométrie.

$X = \mathbf{P}^1$ pour avoir B principal comme $\mathbf{B}_e$). Il y a de plus des plongements canoniques

$$A \hookrightarrow K \hookleftarrow B.$$

On a la propriété

$$A \cap B = \Gamma(X, \mathscr{O}_X) = k,$$

analogue de

$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cap \mathbf{B}_e = \mathbf{Q}_p.$$

On a de plus

$$B^\times = \Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times = k^\times$$

car si $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times$, alors $\mathrm{div}(f) = m[x]$ pour un entier $m \in \mathbf{Z}$, mais $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0 \Rightarrow m = 0$, et donc $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_K)^\times = k^\times$. Cela est bien sûr l'analogue de l'égalité $\mathbf{B}_e^\times = \mathbf{Q}_p^\times$.

Soient $I(A)$, resp. $I(B)$, le groupe des idéaux fractionnaires de A, resp. B, par exemple $I(B)$ consiste en les couples $(\mathscr{E}, s)$ formés d'un fibré en droites $\mathscr{E}$ sur U et d'une section rationelle s de $\mathscr{E}$ au point générique de U. Il y a alors deux fonctions additives degré sur I(A) et I(B) données par les valuations.

La catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à celle des triplets $(M, \mathscr{F}, \iota)$ où :

– M est un A-module libre de rang fini i.e. un germe de fibrés au voisinage de x,

– $\mathscr{F}$ est un fibré vectoriel sur U ou encore un B-module projectif de type fini $N = \Gamma(U, \mathscr{F})$,

– $\iota : M \otimes_A K \cong \mathscr{F}_\eta = N \otimes_B K$,

et de plus la filtration de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels sur X est obtenue grâce aux fonctions degrés sur $I(A)$ et $I(B)$.

Là on pourrait se dire que la catégorie de Harder-Narasimhan introduite par Jean-Marc est donc l'analogue de la catégorie des fibrés sur une courbe « $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \coprod_{\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})} \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$ » mais c'est un peu différent car $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_e)$ et $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ sont différents.

Qu'à cela ne tienne : on a le résultat élémentaire suivant (dû à Beauville-Laszlo et qui est à la base de l'uniformisation du champ des fibrés sur une courbe par les Grassmaniennes affines) qui est un exercice de descente fpqc. Le résultat est que l'on peut remplacer $\mathscr{O}_{X,x}$ par $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$. Plus précisément, la catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à la catégorie des triplets (M, N, ι) où :

– M est un $\widehat{A}$-module libre de rang fini,

– N est un B-module projectif de type fini,

– $\iota : M \otimes_{\widehat{A}} \mathrm{Frac}(\widehat{A}) \cong N \otimes_B \mathrm{Frac}(\widehat{A})$,

où je ferais remarquer que si x est un point k-rationnel alors $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} = k[[t]]$ qui ressemble beaucoup plus à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ que $\mathscr{O}_{X,x}$ qui n'était pas complet... (d'ailleurs ce n'est pas pour rien que j'ai noté t l'uniformisante en x).

Voici donc la question finale : peut-on constuire un schéma régulier X de dimension 1 sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}_p)$ (il ne sera bien sûr pas de type fini), muni d'un point C-rationnel $x \in X(C)$ (point donné par l'application θ, qui ne sera pas un point $\mathbf{Q}_p$-rationnel), d'un isomorphisme $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} \cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et d'un isomorphisme $\Gamma(X \setminus \{x\}, \mathscr{O}_X) \cong \mathbf{B}_e$? Si c'est le cas on peut définir des filtrations de Harder-Narasimhan sur les fibrés vectoriels sur X et on obtient une équivalence de catégories de Harder-Narasimhan avec la catégorie construite par Jean-Marc.

En tous cas si la courbe étrange X n'existe pas, la catégorie des fibrés vectoriels sur celle-ci existe bien ! Si la courbe étrange X existe le mot étrange est faible pour la décrire, il faudrait un terme encore plus fort qu'étrange, je n'ose pas imaginer une telle monstruosité...

Au moment même où Fargues écrivait son message, Fontaine réalisait que l'on pouvait parfaitement donner un sens à $\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \coprod_{\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})} \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$, et donc obtenir une courbe complète de cette manière : si on pose $X_e = \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$ et $X = X_e \cup \{\infty\}$ avec la topologie évidente, il suffit de définir le faisceau $\mathscr{O}_X$ par :

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathscr{O}_{X_e}) & \text{si } U \subset X_e, \\ \{b \in \Gamma(U \cap X_e),\ \deg b \geq 0\} & \text{si } \infty \in U. \end{cases}$$

Il s'est ensuite rendu compte que l'on pouvait même obtenir X comme une courbe projective : pour construire une courbe projective, il faut une algèbre graduée, et comme $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[\frac{1}{t}]^{\varphi=1}$ et $\varphi(t) = pt$, il y a une algèbre graduée naturelle P à considérer, à savoir,

$$P = \oplus_{n \in \mathbf{N}} (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi = p^n}.$$

Poser

$$X = \mathrm{Proj}\, P$$

définit une « variété projective » d'un genre un peu bizarre puisque son corps des constantes est $\mathbf{Q}_p$ et que le corps résiduel en $t = 0$ est C, et donc n'est pas de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. L'ouvert affine $t \neq 0$ n'est autre que $\mathrm{Spec}\, \mathbf{B}_e$, et donc X est une courbe puisque $\mathbf{B}_e$ est principal.

Quand je suis arrivé, on disposait donc de la courbe et d'une description de ses fibrés. Les soirées suivantes ont été largement consacrées à la courbe et aux propriétés de $\mathbf{B}_e$, en particulier aux questions posées par Fontaine dans son courriel « Devoirs de vacances ».

Colmez $\to$ Nizioł Mardi 08/09/2009

[...] Fontaine est surexcité au sujet de $\mathbf{B}_e$, et n'arrête pas de trouver de nouveaux résultats que Fargues s'empresse de traduire en termes de fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}^1$ (on aboutit à des objets franchement étranges en regardant $\mathrm{Spec}\,\mathbf{B}_e$). [...]

Une piste que nous avons contemplée pour répondre à ces questions consistait à faire agir le groupe des automorphismes de $C^\flat$. Si ce groupe avait eu la bonne idée d'opérer transitivement sur l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{C^\flat}$ de $\mathscr{O}_{C^\flat}$, alors il aurait opéré transitivement sur les éléments de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}$ car un tel élément est de la forme $\log[1+x]$, avec $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, et la réponse à la question 1 aurait été “oui”. Notons que, si $C^\flat$ avait le bon goût d'être maximalement complet, alors $\mathrm{Aut}(C^\flat)$ opérerait transitivement sur $\mathfrak{m}_{C^\flat}$. Malheureusement, $C^\flat$ n'est pas maximalement complet... Cela suggère qu'il peut être profitable de remplacer C par une clôture maximalement complète ($C^\flat$ est alors aussi maximalement complet), car alors l'action de $\mathrm{Aut}(C^\flat)$ sur les points de X induit une bijection $|X| \cong \mathrm{Aut}(C^\flat)/(\mathrm{Aut}(C) \times \varphi^{\mathbf{Z}})$.

2. Représentations de G_K et objets dérivés

Avant de passer aux travaux de Fargues et Fontaine, je vais essayer de décrire les objets qui sont apparus dans les courriels du chapitre précédent, et la manière dont ils sont utilisés pour prouver les conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » de Fontaine. Disons tout de suite que les preuves de « fa $\Rightarrow$ a » sont relativement directes, alors que celles de « dR $\Rightarrow$ pst » comportent trois étapes, dont deux utilisent des apports extérieurs :

• L'étape 1 consiste à faire le chemin inverse de ce que l'on fait pour « fa $\Rightarrow$ a ».

• L'étape 2 traite les objets “isoclines”, et utilise un résultat extérieur : le théorème de Sen [**52**] ou celui de Tsuzuki [**56**] rappelés ci-dessous (th. 2.4 et 2.44, la théorie des (φ,Γ)-modules permet de passer de l'un à l'autre [**3**, § 5.6]).

• L'étape 3 est une récurrence et demande un résultat plus ou moins facile selon le contexte, disant qu'un objet de Rham, extension d'objets semi-stables, est semi-stable (i.e. $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$).

2.1. Les conjectures

2.1.1. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. — L'énoncé originel des conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » fait intervenir l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}[u]$, avec $u = \log[p^\flat]$. Mais tous les objets jouant un rôle vivent dans des sous-espaces de dimension finie, stables par φ. On peut donc remplacer $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ par les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$, où $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[\frac{1}{p}])$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[u]$: ces anneaux sont plus proches de ceux utilisés dans les preuves, et on a encore $\mathbf{B}_e = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}])^{\varphi=1}$.

On étend les actions de φ et G_K sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$, et on munit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}[\frac{1}{t}]$ d'un opérateur N « de monodromie », en posant

$$\varphi(u) = pu, \quad \sigma(u) = u + \log[\sigma(p^\flat)/p^\flat], \quad N = -\tfrac{d}{du}.$$

Alors $N\varphi = p\varphi N$, et G_K commute à φ et N.

On fabrique un morphisme G_K-équivariant de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, prolongeant l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, en envoyant u sur $\log(\frac{[p^\flat]}{p})$ (la série définissant $\log(\frac{[p^\flat]}{p})$ converge car $\theta(\frac{[p^\flat]}{p}) = 1$). Ce morphisme induit une injection $K \otimes_{K_0} \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$; (cf. [**26**, th. 4.2.4]).

2.1.2. Faiblement admissible implique admissible. — Un (φ, N)-*module filtré sur* K est la donnée de :

• *un* (φ, N)-*module* D *sur* K_0, i.e. un K_0-espace vectoriel D de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire bijective d'un frobenius φ et d'un opérateur N vérifiant $N\varphi = p\varphi N$,

• une structure de K-*module filtré* sur $D_K = K \otimes D$, i.e. une filtration décroissante sur D_K par des sous-K-espaces vectoriels D^i_K, pour $i \in \mathbf{Z}$, avec $D^i_K = D_K$ si $i \ll 0$ et $D^i_K = 0$ si $i \gg 0$.

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, *le rang* $\mathrm{rg}(D)$ *de* D est la dimension de D sur K_0. Si D est de rang 1, on définit le *degré* $\deg(D)$ *de* D par la formule

$$\deg(D) = t_N(D) - t_H(D),$$

où $t_N(D)$ et $t_H(D)$ sont définis en choisissant une base e de D sur K_0 :

• il existe $\lambda \in K_0^*$ tel que $\varphi(e) = \lambda e$, et on pose $t_N(D) = v_p(\lambda)$;

• il existe $i \in \mathbf{Z}$, unique, tel que $e \in D^i_K - D^{i+1}_K$, et on pose $t_H(D) = i$.

Si D est de rang $r \geq 2$, alors $\det D = \wedge^r D$ est de rang 1, et on définit le degré de D par

$$\deg(D) = \deg(\det D) = t_N(D) - t_H(D),$$
$$t_N(D) = t_N(\det(D)), \quad t_H(D) = t_H(\det D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i \dim_K D^i_K / D^{i+1}_K.$$

Munie des fonctions rang et degré, la catégorie des (φ, N)-modules filtrés sur K est *une* $\otimes$-*catégorie de Harder-Narasimhan.* Si on définit *la pente* $\mu(D)$ d'un (φ, N)-module filtré non nul D par la formule $\mu(D) = \frac{\deg(D)}{\mathrm{rg}(D)} \in \mathbf{R}$, cela a pour conséquence l'existence, sur tout D, d'une filtration canonique $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ (la *filtration de Harder-Narasimhan*), strictement croissante, telle que D_i/D_{i-1} soit *semi-stable* pour tout $i = 1, \ldots, r$ (ce qui signifie que $\mu(D') \leq \mu(D_i/D_{i-1})$ pour tout sous-objet strict D' de D_i/D_{i-1}) et telle que la suite des pentes $\mu(D_i/D_{i-1})$ soit strictement décroissante.

Un (φ, N)-module filtré sur K est dit *faiblement admissible* s'il est semi-stable de pente 0 (c'est une reformulation [**17**] de la notion originelle [**23**]).

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, on définit une représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ de G_K par :

$$\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{Ker}\big[(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}] \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0\big]\,,$$

et on dit que D est *admissible* si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{rg}(D)$.

Conjecture 2.1. — (« fa $\Rightarrow$ a », [**27**, conj. 5.4.4]) *Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est faiblement admissible.*

(ii) *D est admissible.*

2.1.3. De Rham implique potentiellement semi-stable. — Si V est une représentation de G_K, on associe à V les invariants :

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}]\otimes V)^{G_K},\ \ \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{[L:K]<\infty} (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}]\otimes V)^{G_L},\ \ \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{G_K}.$$

• $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module sur K_0, de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *semi-stable* (ou *log-cristalline*) s'il y a égalité.

• $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ est un (φ, N)-module sur K_0^{nr}, muni d'une action lisse de G_K (l'inertie agit à travers un quotient fini), de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *potentiellement semi-stable* (ou *potentiellement log-cristalline*) s'il y a égalité.

• $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un K-module filtré, de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *de de Rham* s'il y a égalité. Si V est de de Rham et si i est un entier, alors $\dim_K(\mathbf{D}^{-i}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathbf{D}^{1-i}_{\mathrm{dR}}(V))$ est *la multiplicité de i comme poids* (de Hodge-Tate) *de V* et on dit que *i est un poids de V* si cette multiplicité est non nulle.

On a de plus des injections naturelles

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \big(\overline{K} \otimes_{K_0^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)\big)^{G_K} \subset \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

dont on tire les implications

semi-stable $\Rightarrow$ potentiellement semi-stable $\Rightarrow$ de Rham

Conjecture 2.2. — (« dR $\Rightarrow$ pst », [**27**, n° 6.2.2]) *Si V est une représentation de G_K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *V est de de Rham.*

(ii) *V est potentiellement semi-stable.*

Remarque 2.3. — Si V est semi-stable, le (φ, N)-module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est filtré sur K grâce à l'isomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, et le (φ, N)-module filtré ainsi obtenu est admissible. De plus, V est naturellement isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V))$.

Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est semi-stable et D est naturellement isomorphe à $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(V))$.

Les conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » fournissent donc une description complète de la catégorie des représentations de de Rham, en termes d'objets provenant de l'algèbre semi-linéaire.

Un des premiers résultats relatifs à cette conjecture est la traduction suivante d'un théorème de Sen [**52**] :

Théorème 2.4. — *Si V est une représentation de G_K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *V est de de Rham, à poids de Hodge-Tate tous nuls* (i.e. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V \cong (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\dim V}$).

(ii) *L'inertie agit à travers un quotient fini.*

Elles impliquent V potentiellement non ramifiée (*et potentiellement semi-stable*).

2.2. Le lemme fondamental

2.2.1. Le corps $\mathscr{C}$. — Soient $\widetilde{\mathscr{O}_C\{T\}}$ le complété p-adique de la clôture intégrale de $\mathscr{O}_C\{T\} = \{\sum_{n\geq 0} a_nT^n,\ a_n \in \mathscr{O}_C,\ a_n \to 0\}$ dans une clôture algébrique de son corps des fractions, et $\widetilde{C\{T\}} = \widetilde{\mathscr{O}_C\{T\}}[\frac{1}{p}]$. On munit $\widetilde{C\{T\}}$ de la norme spectrale, ce qui en fait une algèbre de Banach. L'espace $\mathrm{Spm}(\widetilde{C\{T\}})$ est un revêtement profini de la boule unité fermée $\mathbb{B} = \mathrm{Spm}(\mathscr{O}_C\{T\}[\frac{1}{p}])$, et on voit les éléments de $\widetilde{C\{T\}}$ comme des fonctions multivaluées sur $\mathbb{B}$.

On fixe $\tilde{0} \in \mathrm{Spm}(\widetilde{C\{T\}})$ au-dessus de 0. On appelle *correspondance analytique additive de rang fini*, un élément f de $\widetilde{C\{T\}}$ tel que :

- $f(\tilde{0}) = 0$ (et donc $0 \in \{f(0)\}$)
- $\{f(x+y)\} - \{f(x)\} - \{f(y)\}$ est [16] inclus dans un $\mathbf{Z}_p$-module de rang fini ne dépendant pas de x et y.

Le *graphe* Γ_f^0 de f, ensemble des $(x, y) \in \mathbb{B} \times \mathbb{A}$ (où $\mathbb{A}$ est la droite affine) avec $y \in \{f(x)\}$, est alors un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de $\mathbb{A}^2$, ce qui permet de $\mathbf{Q}_p$-linéariser la situation et de définir une correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire sur $\mathbb{A}$, encore notée f, dont le graphe Γ_f est le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbb{A}^2$ engendré par Γ_f^0. On appelle *correspondance analytique $\mathbf{Q}_p$-linéaire de rang fini* une correspondance sur $\mathbb{A}$ obtenue de cette manière, et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble de ces correspondances. On voit $f \in \mathscr{C}$ comme une fonction multivaluée sur $\mathbb{A}$, et on définit *le rang de f* comme la dimension du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel :

$$U_f = \{f(0)\}.$$

Les correspondances de rang 0 sont les f_c, avec $f_c = cT$, pour $c \in C$.

On alors les résultats suivants ([**12**, chap. 6], en particulier les §§ 6.5, 6.6, 6.7, et [**12**, chap. 10], en particulier le th. 10.5).

Théorème 2.5. — *Si $f \in \mathscr{C} \setminus \{0\}$, alors f est surjective* [17] *et*

$$V_f = \{x \in \mathbb{A},\ 0 \in \{f(x)\}\}$$

est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension le rang de f.

16. Si $X, Y \subset C$, on note $X + Y$ l'ensemble des $x + y$, avec $x \in X$ et $y \in Y$.
17. Si $y \in \mathbb{A}$, il existe $x \in \mathbb{A}$ tel que $y \in \{f(x)\}$.

Si $f, g \in \mathscr{C}$, il existe $f+g \in \mathscr{C}$ et $f \cdot g \in \mathscr{C}$, uniques, telles que, pour tout $x \in \mathbb{A}$,

$$\{(f+g)(x)\} \subset \{f(x)\} + \{g(x)\} \quad \text{et} \quad \{(f \cdot g(x))\} \subset f(\{g(x)\}).$$

Théorème 2.6. — (i) *Muni des lois* $+$ *et* $\cdot$ *ci-dessus,* $\mathscr{C}$ *est un corps de centre* $\mathbf{Q}_p$.

(ii) $c \mapsto f_c$ *identifie* C *à un sous-corps commutatif maximal de* $\mathscr{C}$.

(iii) *Si* g *est l'inverse de* f*, alors* Γ_g *est le transposé de* Γ_f (i.e., $\Gamma_g = \{(y,x),\ (x,y) \in \Gamma_f\}$), *et* f *et* g *ont même rang.*

Remarque 2.7. — On a une surjection $\theta : (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p} \to \widetilde{C\{T\}}$. Si $c \in C$, alors cT a un unique relèvement $\widehat{cT}$ dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p}$ tel que $\widehat{cT}(\tilde{0}) = 0$; on choisit aussi un relèvement $\hat{c}$ de c.

Soit $\mathrm{Tr} : C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \to C$ définie par $\mathrm{Tr}(\alpha \otimes \beta) = \alpha\beta$. Si $A = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$ vérifie $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $\sum_i \widehat{\beta}_i\, \widehat{\alpha_i T} \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p^2}$, est divisible par t, et :

$$f_A = \theta\big(t^{-1} \sum_i \widehat{\beta}_i\, \widehat{\alpha_i T}\big) \in \mathscr{C}.$$

Le « lemme fondamental » auquel il est fait allusion dans les courriels de Fontaine est le th. 2.5 appliqué à un élément de $\mathscr{C}$ de la forme f_A. (En fait (th. 2.8), tout élément de $\mathscr{C}$ est de cette forme, à addition près de f_c avec $c \in C$.)

Théorème 2.8. — *Tout élément* f *de* $\mathscr{C}$ *s'écrit sous la forme* $f = f_c + f_A$*, et si on définit* $\delta(f) \in C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ *par* $\delta(f) = A$*, alors* $\delta(f)$ *ne dépend pas de l'écriture de* f*, et on a la suite exacte*

$$0 \to C \to \mathscr{C} \xrightarrow{\delta} C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C \xrightarrow{\mathrm{Tr}} C \to 0.$$

2.2.2. Représentations voisines. — Soit V_1 une représentation de dimension finie de G_K ; soit $M_1 = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V_1$, et soit M_2 un sous $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_1$, stable par G_K, tel que $(M_1+M_2)/M_1$ et $(M_1+M_2)/M_2$ soient des C-espaces vectoriels de dimension 1. Si $e_1, \ldots, e_d$ est une base de V_1 sur $\mathbf{Q}_p$, il existe donc $(\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in C^d$ et $(\beta_1, \ldots, \beta_d) \in C^d$ tels que $(M_1+M_2)/M_1 = Ct^{-1}(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d)$, et $(M_1 \cap M_2)/tM_1$ est le sous espace de $C \otimes V_1$ des $x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d$ d'équation $\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_d x_d = 0$ (en particulier $\beta_1\alpha_1 + \cdots + \beta_d\alpha_d = 0$).

Soit $X = (\mathbf{B}_e \otimes V_1) \cap (M_1 + M_2)$, et soit $u_i : X \to (M_1+M_2)/M_i$ l'application naturelle. On déduit de la suite exacte fondamentale que l'on a une suite exacte

$$0 \to V_1 \to X \to (M_2 + M_1)/M_1 \to 0,$$

et des th. 2.5 et 2.8, que :

Proposition 2.9. — (i) *Si* $\beta_1 \otimes \alpha_1 + \cdots + \beta_d \otimes \alpha_d \neq 0$ *dans* $C \otimes_{\mathbf{Q}_p} C$*, alors* u_2 *est surjective et* $\operatorname{Ker} u_2$ *est une représentation* V_2 *de* G_K*, de dimension* d.

(ii) *Si* $\beta_1 \otimes \alpha_1 + \cdots + \beta_d \otimes \alpha_d = 0$*, alors* $\dim_{\mathbf{Q}_p}(\operatorname{Im} u_2) \leq d$ *et* $\operatorname{Ker} u_2$ *est de dimension infinie sur* $\mathbf{Q}_p$.

Remarque 2.10. — Supposons que l'on est dans le cas (i), ce qui est automatique [18] si V_1 est irréductible.

(i) On a des isomorphismes

$$\mathbf{B}_e \otimes V_2 = \mathbf{B}_e \otimes V_1, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_2 = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_1, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_i = M_i, \text{ si } i = 1, 2.$$

On en déduit en particulier que « V_2 de Rham » $\Leftrightarrow$ « V_1 de Rham ».

(ii) Si $V_1 = \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_1)$, alors $M_i = \mathrm{Fil}_i^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)$ si $i = 1, 2$, où Fil_2 est une filtration sur D_K *voisine* [19] *de* Fil_1. On en déduit que, si Fil_1 et Fil_2 sont deux filtrations voisines de D_K, alors « (D, Fil_1) admissible » $\Leftrightarrow$ « (D, Fil_2) admissible ».

2.2.3. Un critère d'égalité de sous-catégories. — Les démonstrations des conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » reposant sur le lemme fondamental **[14, 30]** utilisent, de manière implicite, le critère suivant d'égalité de sous-catégories.

On se donne une catégorie $\mathscr{T}$ dans laquelle les notions de dimension et suite exacte ont un sens, que l'on suppose munie d'une relation de voisinage (symétrique). On suppose que l'on dispose de sous-catégories $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}''$ de $\mathscr{T}$ vérifiant :

(0) Les objets de $\mathscr{T}'$ (et donc aussi ceux de $\mathscr{T}''$) sont de dimension finie.

(1) Si $T \in \mathscr{T}$ est de dimension 1, alors « $T \in \mathscr{T}' \Rightarrow T \in \mathscr{T}''$ ».

(2) Si T_1 et T_2 sont voisins dans $\mathscr{T}$, alors :

a) si T_1 et T_2 sont de dimension finie, alors $T_1 \in \mathscr{T}'' \Leftrightarrow T_2 \in \mathscr{T}''$,

b) T_1 irréductible dans $\mathscr{T}' \Rightarrow T_2 \in \mathscr{T}'$.

(3) Si $0 \to T_1 \to T \to T_2 \to 0$ est exacte dans $\mathscr{T}'$, et si $T_1, T_2 \in \mathscr{T}''$, alors $T \in \mathscr{T}''$.

(4) Si $T \in \mathscr{T}'$, il existe une chaîne $T = T_0, T_1, \dots, T_r$ d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que T_{i+1} soit voisin de T_i pour tout i, et $T_r \in \mathscr{T}''$.

Alors $\mathscr{T}'' = \mathscr{T}'$.

(La preuve se fait par récurrence sur la dimension, et ne pose pas de problème.)

2.2.4. La conjecture « fa $\Rightarrow$ a ». — On peut appliquer le critère ci-dessus en prenant pour $\mathscr{T}$ la catégorie des (φ, N)-modules filtrés avec la relation de voisinage sur les filtrations, et pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$ les sous-catégories des objets faiblement admissibles et admissibles. Tous les énoncés sont relativement élémentaires **[14]** à part le (2a) qui

18. La C-droite engendrée par $\alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d$ est stable par G_K. Soit $W \subset V_1$ minimal, tel que $\alpha \in C \otimes W$. Si W est de dimension r, et si $f_1, \dots, f_d$ est une base de V telle que $f_1, \dots, f_r$ soit une base de W sur $\mathbf{Q}_p$, on a $\alpha = \alpha'_1 f_1 + \cdots + \alpha'_r f_r$, où $\alpha'_1, \dots, \alpha'_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$, par minimalité de W. Si $\sigma(f_i) = \sum_j a_{j,i} f_j$, avec $a_{j,i} \in \mathbf{Q}_p$, on a $\sigma(\alpha) = \sum_j (\sum_i a_{j,i} \sigma(\alpha'_i)) f_j$, et comme la C-droite engendrée par α est stable par G_K, cela implique $\sum_i a_{j,i} \alpha'_i = 0$ si $j \geq r+1$, et donc $a_{j,i} = 0$ si $j \geq r+1$, puisque les α'_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$. Autrement dit, W est stable par G_K, et si V_1 est irréductible, cela implique que $r = d$ et donc que $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$. Il en résulte que $\beta_1 \otimes \alpha_1 + \cdots + \beta_d \otimes \alpha_d \neq 0$.

19. Cela signifie que $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \dim_K (\mathrm{Fil}_1^j + \mathrm{Fil}_2^j)/(\mathrm{Fil}_1^j \cap \mathrm{Fil}_2^j) = 2$. L'application qui à une filtration Fil_2 sur D_K associe $M_2 = \mathrm{Fil}_2^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)$ induit une bijection de l'ensemble des filtrations de D_K voisines de Fil_1 sur celui des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-résaux M_2 de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_1 = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$, stables par G_K, tels que $(M_1 + M_2)/M_1$ et $(M_1 + M_2)/M_2$ soient des C-espaces de dimension 1.

résulte du (ii) de la rem. 2.10 et le (4) sur l'existence d'une chaîne aboutissant à une filtration admissible. Mais la relation de voisinage permet d'augmenter de 1 un des poids de la filtration et de diminuer de 1 un autre, ce qui permet, en un nombre fini d'étapes, d'arriver à une filtration dont tous les poids sont de la forme k ou $k+1$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et on peut de plus s'arranger pour que la filtration soit définie sur K_0 auquel cas les résultats de [**31**] impliquent que cette filtration est admissible.

2.2.5. La conjecture « dR $\Rightarrow$ pst ». — On peut aussi essayer d'appliquer le critère en prenant pour $\mathscr{T}$ la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach munis d'une action continue de G_K, avec la relation de voisinage : « X_1 voisin de X_2 » s'il existe une représentation de dimension finie V de G_K et des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseaux M_1, M_2 de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$, avec $(M_1 + M_2)/M_i$ de dimension 1 sur C, si $i = 1, 2$, tels que $X_i = (\mathbf{B}_e \otimes V) \cap M_i$. On prend alors pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$ les sous-catégories des représentations de de Rham et potentiellement semi-stables respectivement.

(1) est alors immédiat, (2a) suit du (i) de la rem. 2.10, (2b) du (i) de la prop. 2.9, (3) est un résultat du type $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ pour lequel on peut référer à [**36**] ou [**47**, prop. 1.24] si k_K est fini, et à [**2**, th. VI.2] dans le cas général. Le problème principal est de construire une chaîne reliant une représentation de de Rham quelconque à une représentation potentiellement semi-stable. Comme le seul résultat général dont on dispose est le th. 2.4 dont une conséquence est qu'une représentation dont tous les poids de Hodge-Tate sont égaux est potentiellement semi-stable, on cherche à se ramener à ce cas, mais ce n'est pas possible si la somme des poids $t_H(V)$ n'est pas divisible par $\dim V$ puisque $t_H(V)$ ne change pas par voisinage.

Pour résoudre ce problème [**30**], on utilise le fait que V est de Rham (resp. potentiellement semi-stable) si et seulement si $\mathbf{Q}_{p^h} \otimes V$ l'est. Maintenant, si h est multiple de $d = \dim V$, on peut tordre $\mathbf{Q}_{p^d} \otimes V$ par une puissance du caractère de Lubin-Tate associé à $(\mathbf{Q}_{p^d}, p)$ pour obtenir une $\mathbf{Q}_{p^d}$-représentation vérifiant $t_H = 0$. Comme ce caractère de Lubin-Tate est cristallin, la torsion par ses puissances n'altère pas les propriétés "de Rham" ou "potentiellement semi-stable". On est donc amené à remplacer $\mathscr{T}$ par la limite inductive des $\mathbf{Q}_{p^h} \otimes \mathscr{T}$ (et pareil pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$), la limite étant prises pour les flèches $V \mapsto \mathbf{Q}_{p^k} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V$ si $h \mid k$. (On demande alors que les réseaux de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ utilisés pour la relation de voisinage soient stables par l'action de $\mathbf{Q}_{p^h}$.)

2.3. Les Espaces de Banach de Dimension finie. — La théorie des Espaces de Banach de Dimension finie a été modelée sur celle des presque C-représentations exposée au § 2.4. Elle correspond en gros à faire de l'algèbre linéaire sur le corps $\mathscr{C}$ du th. 2.6. La démonstration de « fa $\Rightarrow$ a » qui en résulte (cf. n° 2.3.1) est celle que Fontaine avait en vue quand il a développée la théorie des presque C-représentations, celle de « dR $\Rightarrow$ pst » (cf. n° 2.4) a été inspirée par les travaux de Berger [**3**] et Kedlaya [**37**].

Une *algèbre sympathique* Λ est une algèbre de Banach p-adique munie de la norme spectrale, telle que $x \mapsto x^p$ soit surjective sur $\{x,\ |x-1|<1\}$ (une telle algèbre est, en particulier, perfectoïde). Un *Espace de Banach* $\mathbb{W}$ est un foncteur $\Lambda \mapsto \mathbb{W}(\Lambda)$ de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des espaces de Banach p-adiques. Des exemples triviaux sont :

- les espaces V de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ (foncteur $\Lambda \mapsto V$, pour tout Λ),
- les espaces affines $\mathbb{V}^d$, avec $d \in \mathbf{N}$ (foncteur $\Lambda \mapsto \Lambda^d$, pour tout Λ).

Un exemple moins trivial (et fondamental) est celui *du Graphe* $\mathbb{G}_f \subset \mathbb{V}^2$ *d'un élément* f *de* $\mathscr{C}$: si Λ est une algèbre sympathique, alors $\mathbb{G}_f(\Lambda)$ est l'ensemble des $(\lambda_1, \lambda_2) \in \Lambda^2$ tels que $(s(\lambda_1), s(\lambda_2)) \in \Gamma_f$, pour tout $s \in \mathrm{Spm}(\Lambda)$. Les deux projections naturelles de $\mathbb{V}^2$ sur $\mathbb{V}^1$ induisent des suites exactes [**12**, cor. 7.9] :

$$0 \to U_f \to \mathbb{G}_f \to \mathbb{V}^1 \to 0, \quad 0 \to V_f \to \mathbb{G}_f \to \mathbb{V}^1 \to 0,$$

où U_f et V_f sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension le rang de f apparaissant dans le th. 2.5.

Un Espace de Banach est *de Dimension finie* si « il est égal à $\mathbb{V}^d$ à un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie près ». Plus formellement, on dit qu'une suite $0 \to \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W} \to \mathbb{W}_2 \to 0$ est exacte, si $0 \to \mathbb{W}_1(\Lambda) \to \mathbb{W}(\Lambda) \to \mathbb{W}_2(\Lambda) \to 0$ est exacte pour toute algèbre sympathique Λ, et on dit que $\mathbb{W}$ est de Dimension finie s'il existe $d \in \mathbf{N}$, des espaces V_1, V_2 de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, et des suites exactes

$$0 \to V_1 \to \mathbb{Y} \to \mathbb{V}^d \to 0, \quad 0 \to V_2 \to \mathbb{Y} \to \mathbb{W} \to 0,$$

de sorte que $\mathbb{W}$ est obtenu à partir de $\mathbb{V}^d$ en « rajoutant V_1 et quotientant par V_2 ». Une telle description s'appelle une *présentation de* $\mathbb{W}$.

Remarque 2.11. — La définition ci-dessus est la définition originelle [**12**]. Un point de vue plus naturel [**29, 49, 50, 51, FF**] (ou [**18**], dans un contexte proche) consiste à isoler les objets *effectifs* (ceux de la forme $0 \to V_1 \to \mathbb{W} \to \mathbb{V}^d \to 0$, sans passage au quotient), qui peuvent se définir comme des variétés « analytiques » – réunion de spectres d'algèbres de Banach (non noethériennes) – munies d'une structure de groupe analytique. On définit un objet général comme le quotient d'un effectif par un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie. Le cadre naturel pour considérer de tels quotients est celui des *diamants* [**55, 22**], et les Espaces de Banach de Dimension finie en fournissent des exemples non triviaux [**55, 44**].

Théorème 2.12. — (i) *Si* $\mathbb{W}$ *est un Espace de Banach de Dimension finie,*

$$\mathrm{Dim}\, \mathbb{W} = (\dim \mathbb{W}, \mathrm{ht}\, \mathbb{W}), \quad \textit{avec } \dim \mathbb{W} = d \textit{ et } \mathrm{ht}\, \mathbb{W} = \dim_{\mathbf{Q}_p} V_1 - \dim_{\mathbf{Q}_p} V_2,$$

ne dépend que de $\mathbb{W}$ *et pas de la présentation.*

(ii) *Si* $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ *est un morphisme d'Espaces de Banach de Dimension finie, alors* $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ *et* $\mathrm{Coker}\, f$ *sont des Espaces de Banach de Dimension finie, et :*

$$\mathrm{Dim}\, \mathbb{W}_1 = \mathrm{Dim}\, \mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Dim}\, \mathrm{Im}\, f \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}\, \mathbb{W}_2 = \mathrm{Dim}\, \mathrm{Coker}\, f + \mathrm{Dim}\, \mathrm{Im}\, f.$$

(iii) *Si* $\dim \mathbb{W} = 0$, *alors* $\operatorname{ht} \mathbb{W} \geq 0$.

(iv) *Si* $\mathbb{W}$ *est une extension successive de* $\mathbb{V}^1$, *et si* $\mathbb{W}'$ *est un sous-Espace de dimension finie de* $\mathbb{W}$, *alors* $\operatorname{ht} \mathbb{W}' \geq 0$.

Remarque 2.13. — On a $\mathbb{W} = 0$ si et seulement si $\mathbb{W}(C) = 0$. Il en résulte, grâce à l'existence de noyaux et conoyaux, que $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ est un isomorphisme si et seulement si $f_C : \mathbb{W}_1(C) \to \mathbb{W}_2(C)$ est un isomorphisme. Autrement dit, $\mathbb{W}$ est déterminé par $\mathbb{W}(C)$, ce qui permet de penser à $\mathbb{W}$ comme étant l'espace de Banach $\mathbb{W}(C)$ auquel on a ajouté des structures « analytiques » supplémentaires. En général, c'est l'espace $\mathbb{W}(C)$ qui nous intéresse, mais sans ces structures supplémentaires, il serait impossible de parler de sa Dimension.

Remarque 2.14. — Le corps $\mathscr{C}$ peut se voir comme l'anneau des endomorphismes de la limite projective des $\mathbb{V}^1/V$, où V décrit les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $C = \mathbb{V}^1(C)$. Que $\mathscr{C}$ soit un corps est une traduction de ce que cet objet est un objet simple (on a quotienté par tout ce qui était possible !).

2.3.1. La conjecture « fa ⇒ a ». — Soit D un (φ, N)-module filtré sur K, de rang h. Si $r \in \mathbf{N}$, on pose

$$X_{\mathrm{st}}^r(D) = (t^{-r}\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \quad \text{et} \quad X_{\mathrm{dR}}^r(D) = (t^{-r}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0.$$

Alors $X_{\mathrm{st}}^r(D)$ et $X_{\mathrm{dR}}^r(D)$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^r(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^r(D)$, et on a ([**12**, prop. 11.1 et 11.7]) :

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^r(D) = \sum\nolimits_{r_i \leq r} (r - r_i, 1), \text{ où les } r_i \text{ sont les pentes de } \varphi, \text{ avec multiplicité,}$$

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^r(D) = (r \dim_K D_K - \sum\nolimits_{i=1}^{r} \dim_K D_K^i, 0)$$

En particulier, si $r(D)$ est le plus petit entier r vérifiant $D_K^{r+1} = 0$ et $r_i \leq r$ pour tout r_i, et si $r \geq r(D)$, alors

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}_{\mathrm{st}}^r(D) = (rh - t_N(D), h) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim} \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^r(D) = (rh - t_H(D), 0).$$

L'application naturelle $X_{\mathrm{st}}^r(D) \to X_{\mathrm{dR}}^r(D)$ (induite par l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$) s'étend en un morphisme $\mathbb{X}_{\mathrm{st}}^r(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}^r(D)$ d'Espaces de Banach. Par ailleurs, si $r \geq r(D)$, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est le noyau de $X_{\mathrm{st}}^r(D) \to X_{\mathrm{dR}}^r(D)$. On déduit alors du th. 2.12, le résultat suivant.

Proposition 2.15. — *Si* $t_H(D) = t_N(D)$, *sont équivalents :*

(i) $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{Q}_p$.

(ii) $X_{\mathrm{st}}^r(D) \to X_{\mathrm{dR}}^r(D)$ *est surjective pour* $r = r(D)$.

(ii′) $X_{\mathrm{st}}^r(D) \to X_{\mathrm{dR}}^r(D)$ *est surjective pour tout* $r \geq r(D)$.

De plus, ces énoncés impliquent :

(iii) D *est faiblement admissible.*

(iv) $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \operatorname{rg} D$.

Comme on sait que « D faiblement admissible » implique que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, avec égalité si et seulement si D est admissible (en fait, on montre que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)=\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D')$, où D' est le plus grand sous-objet admissible de D, cf. [**14**, prop. 4.5] ou [**12**, prop. 11.11]), cette proposition permet d'en déduire que « D faiblement admissible » implique « D est admissible ».

2.3.2. La conjecture « dR $\Rightarrow$ pst ». — La théorie des Espaces de Banach de Dimension finie peut être utilisée pour démontrer le résultat ci-dessous (la preuve est trop combinatoire – le problème est qu'il n'y a pas moyen de prédire à l'avance quel h va marcher – pour être résumée ici).

Théorème 2.16. — ([**13**, prop. 0.3]) *Soit M un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et soit*

$$\widetilde{M}_{\mathrm{rig}}^+=\{x\in(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^d,\ \varphi^n(x)\in M,\ \forall n\in\mathbf{Z}\}.$$

Alors $\widetilde{M}_{\mathrm{rig}}^+$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d, et possède une base $e_1,\dots,e_d$ vérifiant :
- *il existe $h\in\mathbf{N}$ et $a_1\leq\cdots\leq a_d\in\mathbf{N}$, tels que $\varphi^h(e_i)=p^{a_i}e_i$, pour tout i,*
- *$\varphi^n(e_1),\dots,\varphi^n(e_d)$ est une base de M sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tout $n\in\mathbf{Z}$.*

On utilise ce résultat de la manière suivante pour démontrer « dR $\Rightarrow$ pst ». Soit V une représentation de de Rham à poids de Hodge-Tate ≤ 0 (on peut s'y ramener en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique). Soit

$$\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_K\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

C'est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$, isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ en tant que G_K-module. Soit $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ le sous-G_K-module de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+\otimes V$ défini par :

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)=\{x\in\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+\otimes V,\ \forall n\in\mathbf{Z},\ \varphi^{-n}(x)\in\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)\}.$$

Le th. 2.16, appliqué à $M=\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ (après avoir identifié $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$ à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$), fournit une base $e_1,\dots,e_d$ de $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant $\varphi^h(e_i)=p^{a_i}e_i$, si $1\leq i\leq d$.

Si tous les a_i sont égaux à un même a, alors $W=\mathbf{Q}_{p^h}e_1\oplus\cdots\oplus\mathbf{Q}_{p^h}e_d$ est l'ensemble des $x\in\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ vérifiant $\varphi^h(x)=p^ax$; c'est donc un $\mathbf{Q}_{p^h}$-espace de dimension d stable par G_K. Par ailleurs, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{\mathbf{Q}_p}W$ est le sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module de $(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V))$ engendré par les $(0,\dots,0,\varphi^j(e_i),0,\dots,0)$, pour $0\leq j\leq h-1$, $1\leq i\leq d$, le $\varphi^j(e_i)$ étant en $j+1$-ième position. Comme les $\varphi^j(e_i)$, pour $1\leq i\leq d$, forment une base de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ pour tout j, et comme $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[G_K]$-module trivial, on en déduit que W est une représentation de de Rham dont tous les poids de Hodge-Tate sont nuls. Il existe donc, d'après le th. 2.4, une extension finie L_1 de K telle que l'inertie de G_{L_1} agisse trivialement.

Dans le cas général, on démontre, par récurrence sur le nombre de a_i différents, en utilisant la prop. 2.17 ci-dessous, qu'il existe une extension finie L de K et des $\alpha_{i,j}\in(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{\varphi^h=p^{a_i-a_j}}$, tels que $f_i=e_i+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{i,j}e_j$ soit fixe par l'inertie de G_L. Cela prouve que la restriction de V à G_L est semi-stable, et donc que V est potentiellement semi-stable, puisque les f_i sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes V$.

Proposition 2.17. — ([**13**, prop. 0.4]) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocyle continu sur G_K, à valeurs dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\varphi^h = p^a}$, et tel que $\sigma \mapsto N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma))$ soit un cobord dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors il existe $c \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\varphi^h = p^a}$, tel que $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, pour tout $\sigma \in G_K$.*

2.3.3. $\mathbf{B}_e$ *est principal.* — Pour déduire le fait que $\mathbf{B}_e$ est principal de la théorie des Espaces de Banach, on a besoin, en plus du lemme fondamental (rem. 2.7), du résultat suivant (qui intervient aussi dans la preuve du th. 2.16).

Proposition 2.18. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace de Banach de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$, de Dimension finie, et si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{W}(C)$ désigne le sous-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ engendré par $\mathbb{W}(C)$, alors $\mathrm{ht}(\mathbb{W}) \geq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{W}(C))$. En particulier, $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de $\mathbb{V}^1$.*

Si $m \in \mathbf{N}$, soient $U_m = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi = p^m}$ et $B_m = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^m$, Alors U_m et B_m sont les C-points d'Espace de Banach $\mathbb{U}_m$ et $\mathbb{B}_m$, de Dimensions $(m, 1)$ et $(m, 0)$, et l'application naturelle $\mathbb{U}_m \to \mathbb{B}_m$ est surjective, de noyau $\mathbf{Q}_p t^m$.

L'anneau $\mathbf{B}_e$ est presque euclidien : si $a \in \mathbf{B}_e$ et si $b \in \mathbf{B}_e$ est non nul, il existe $q, r \in \mathbf{B}_e$ avec $\deg r \leq \deg b$ et $a = bq + r$. Si $\deg a \leq \deg b$, on prend $q = 0$ et $r = a$. Si $\deg a - \deg b = k \geq 1$, on choisit un relèvement q_0 dans U_k de l'image de $t^k(a/b)$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et on pose $q = \frac{q_0}{t^k}$ et $r = a - bq$. Si $d = \deg b$, alors $t^{k+d} r \in U_{k+d}$ et a une image nulle dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et donc $t^{k+d} r \in t^k U_d$ et $\deg r \leq d$.

Soit I un idéal non nul de $\mathbf{B}_e$, et soit $a \in I$ de degré minimal d. On veut prouver que a est un générateur de I, et donc que tout $b \in I$ est un multiple de a. Quitte à retirer à b un multiple de a comme ci-dessus, on peut supposer que $\deg b = \deg a$. Soient $a_0 = t^d a$ et $b_0 = t^d b$ de telle sorte que $a_0, b_0 \in U_d$. Il y a, *a priori*, deux cas :

• Si $\theta(a_0)$ et $\theta(b_0)$ sont colinéaires sur $\mathbf{Q}_p$, il existe $u, v \in \mathbf{Q}_p$, non tous deux nuls, tels que $\theta(ua_0 + vb_0) = 0$, ce qui implique que $ua_0 + vb_0 = tb'$, avec $b' \in U_{d-1}$, et donc que I contient $t^{1-d} b'$ qui est de degré $< d$ et donc nul par minimalité de a. Il s'ensuit que b est un multiple de a.

• Si $\theta(a_0)$ et $\theta(b_0)$ ne sont pas colinéaires sur $\mathbf{Q}_p$, alors $\theta(t^{-1}(\widehat{a}_0\widehat{b_0T} - \widehat{b}_0\widehat{a_0T})) \in \mathscr{C}$ est non nul, et il résulte du lemme fondamental (cf. rem. 2.7) que $(u, v) \mapsto a_0 u - b_0 v$ est une surjection de $U_1 \times U_1$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ dont le noyau V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2. Par ailleurs, il existe $(u_0, v_0) \in V$ tel que $a_0 u_0 - b_0 v_0 \neq 0$, sinon l'application $(u, v) \mapsto a_0 u - b_0 v$ se factoriserait à travers $(U_1 \times U_1)/V \cong \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$; et on aurait une injection d'Espaces de Banach de $t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cong \mathbb{V}^1$ dans $\mathbb{U}_{d+1} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui n'est pas possible (prop 2.18). On a donc construit un élément $\frac{u_0}{t} a - \frac{v_0}{t} b$ de I, de degré $< d$, contrairement à l'hypothèse, et donc ce cas n'est pas possible.

Remarque 2.19. — Notons $P_d = t^{-d}U_d$ l'ensemble des éléments de degré $\leq d$ de $\mathbf{B}_e$. Soient $a, b \in \mathbf{B}_e$, premiers entre eux, de degrés n et m respectivement, et $g_{a,b}$ l'application $(x, y) \mapsto ax + by$. Alors $g_{a,b} : P_m \oplus P_n \to P_{n+m}$ est surjective de noyau $\mathbf{Q}_p \cdot (-b, a)$ (comme pour les polynômes), mais $g_{a,b} : P_{m-1} \oplus P_{n-1} \to P_{n+m-1}$ n'est pas surjective (contrairement au cas des polynômes). (Si $g_{a,b}(x, y) = 0$, alors b divise x, et donc $x = bu$ et $y = -au$, avec u de degré 0 dans le premier cas et -1 dans le second ; il s'ensuit que le noyau est $\mathbf{Q}_p \cdot (-b, a)$ dans le premier cas, et 0 dans le second. Pour étudier la surjectivité, on passe aux Espaces de Banach associés et on regarde les Dimensions : $\mathbb{P}_d$ est de Dimension $(d, 1)$.)

2.4. Les presque C-représentations. — Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $C = \mathbf{C}_p$. La théorie des presque C-représentations [**29**] de G_K a été développée par Fontaine dans son cours à l'IHP, pendant le semestre p-adique, en 1997, avec pour but une preuve de « fa $\Rightarrow$ a » selon les lignes esquissées au n° 2.3.1 (cf. rem. 2.27). Elle était conditionnelle au th. 2.25 ci-dessous, dont la preuve utilise la prop. 2.9, conséquence du lemme fondamental (th. 2.5). Elle présente de grandes similarités avec celle des Espaces de Banach de dimension finie, ce qui s'explique, *a posteriori*, par le fait que la catégorie des presque C-représentations se plonge dans celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Un joli [(20)] résultat à la base de la théorie est le suivant [**28**, prop. 6.2] ou [**34**] :

Théorème 2.20. — *Si $\lambda : C \to C$ est $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue, et commute à l'action de Galois, alors il existe $c \in K$ tel que $\lambda(x) = cx$, pour tout $x \in C$.*

Combiné avec la classification des C-représentations en termes de l'opérateur de Sen [**53**], ce résultat permet de prouver [**28**, th. 6.1] que beaucoup d'information est encodée dans l'action de G_K :

Théorème 2.21. — *Si W_1, W_2 sont deux C-représentations de G_K, toute application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue, G_K-équivariante, de W_1 dans W_2, est C-linéaire.*

Une *presque-C représentation* W est un $\mathbf{Q}_p$-banach muni d'une action continue de G_K tel qu'il existe une C-représentation W' de G_K (i.e. un C-espace de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire de G_K) et $V' \subset W'$, $V \subset W$ des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie stables par G_K, tels que $W/V \cong W'/V'$, en tant que représentations de $\mathscr{G}_K$. On a donc des suites exactes :

$$0 \to V' \to W' \to W'/V' \to 0, \quad 0 \to V \to W \to W'/V' \to 0,$$

de telle sorte que W est obtenu à partir de W' « en quotientant par V' et en rajoutant V ». Une telle description s'appelle une présentation de W.

20. Ce résultat est frappant car il devient archi-faux si on remplace C par $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

Théorème 2.22. — ([**29**, th. 5.1])

(i) *Si W est une presque-C-représentation,*

$$\mathrm{Dim}\, W = (\dim W, \mathrm{ht}\, W), \quad \textit{avec } \dim W = \dim_C W' \textit{ et } \mathrm{ht}(W) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V - \dim_{\mathbf{Q}_p} V',$$

ne dépend que de W et pas de la présentation.

(ii) *Si $f : W_1 \to W_2$ est un morphisme de presque-C-représentations, alors* $\mathrm{Ker}\, f$, $\mathrm{Im}\, f$ *et* $\mathrm{Coker}\, f$ *sont des presque-C-représentations, et :*

$$\mathrm{Dim}\, W_1 = \mathrm{Dim}\,\mathrm{Ker}\, f + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}\, f \quad \text{et} \quad \mathrm{Dim}\, W_2 = \mathrm{Dim}\,\mathrm{Coker}\, f + \mathrm{Dim}\,\mathrm{Im}\, f.$$

Exemple 2.23. — (i) $U = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p}$ est une presque-C-représentation de Dimension $(1,1)$ puisque $U/\mathbf{Q}_p t = C$.

(ii) $B_2 = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2$ est une presque-C-représentation de Dimension $(2,0)$: si $V = \mathbf{Q}_p t \oplus \mathbf{Q}_p a$, avec $a = \log[1+p^\flat]$, alors V est une sous-$\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension 2 de U, et l'application $U \otimes V \to B_2$ envoyant $u \otimes v$ sur $uv \pmod{t^2}$ réalise B_2 comme le quotient de la presque-C-représentation $U \otimes V$, de Dimension $(2,2)$, par la $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension 2 engendrée par $t \otimes t$ et $t \otimes a - a \otimes t$.

Remarque 2.24. — (i) Que $\mathrm{ht}(W)$ ne dépende pas des choix peut se démontrer en utilisant les calculs de cohomologie galoisienne de Tate : les groupes $H^i(G_K, W)$ sont de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, nuls si $i \geq 2$, et

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(G_K, W) - \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(G_K, W) + \dim_{\mathbf{Q}_p} H^2(G_K, W) = -[K : \mathbf{Q}_p]\mathrm{ht}(W).$$

Bizarrement, il est beaucoup plus difficile de prouver que $\dim W$ ne dépend pas du choix de la présentation.

(ii) De manière surprenante, on peut imposer à W' d'être la représentation triviale C^d dans la définition de presque C-représentation (cf. [**29**], corollaire du th. 5.13, p. 355), ce qui donne une définition complètement analogue à celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Théorème 2.25. — ([**29**, th. 4.1]) *Soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K de dimension h, et soit E une extension de C par V. Soit $f : E \to C$, continue, G_K équivariant, telle que $f(E) \neq f(V)$. Alors f est surjective et* $\mathrm{Ker}\, f$ *est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K de dimension h.*

Démonstration. — Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, et si $\alpha \in (C \otimes V(-1))^{G_K}$, on peut considérer l'image inverse E_α de $C \cdot \alpha$ dans $U(-1) \otimes V$ qui vit dans la suite exacte $0 \to tV(-1) \to U \otimes V(-1) \to C \otimes V(-1) \to 0$. Alors E_α est une extension de C par $tV(-1) = V$, et *le point crucial est de prouver que toute extension de C par V est de ce type*; cela se fait par des calculs de dimensions de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui impose de travailler avec une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) du genre de ceux de la prop. 2.28 ci-dessous.

Maintenant, soit $\beta : V \to C$, un morphisme G_K-équivariant, i.e. $\beta \in (C \otimes V^*)^{G_K}$. Fixons une base $e_1, \ldots, e_h$ de V et notons $e_1^*, \ldots, e_h^*$ la base de V^* duale ; on peut écrire

β sous la forme $\beta_1 e_1^* + \cdots + \beta_h e_h^*$ et α sous la forme $\alpha_1 e_1(-1) + \cdots + \alpha_h e_h(-1)$, avec $\alpha_i, \beta_i \in C$. Alors $u = \sum_i (\beta_i e_i^* \otimes \alpha_i e_i) \in (C \otimes \mathrm{End}(V)(-1))^{G_K}$, et donc la trace de u appartient à $C(-1)^{G_K} = 0$; on en déduit que $\sum_i \beta_i \alpha_i = 0$. Ceci permet, en choisissant des relèvements $\hat{\beta}_i$ des β_i dans U, et en voyant E_α comme un sous-espace de $U \otimes V(-1)$ [c'est l'espace des $x_1 e_1 + \cdots + x_h e_h$ tels que $(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_h)) \in C \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$], de définir $f_\beta : E_\alpha \to C$, par $f_\beta(\sum_{i=1} x_i e_i) = \theta\big(\frac{1}{t} \sum_i \hat{\beta}_i x_i\big)$. Alors la restriction de f_β à V n'est autre que β, et on a construit une section de $0 \to \mathrm{Hom}_{G_K}(C, C) \to \mathrm{Hom}_{G_K}(E_\alpha, C) \to \mathrm{Hom}_{G_K}(V, C)$. Tout morphisme G_K-équivariant de E_α dans C est donc de la forme étudiée dans la prop. 2.9. Le résultat s'en déduit. $\square$

Remarque 2.26. — (i) Comme U est l'espace des C-points d'un Espace de Banach de Dimension finie, l'extension E_α construite dans la preuve du th. 2.25 est aussi l'espace des C-points d'un Espace de Banach de Dimension finie. Le fait que toute extension de C par une représentation finie est de la forme E_α implique que toute presque C-représentation peut « s'analytifier » : la catégorie des presque C-représentations peut se plonger dans celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

(ii) Soit $\mathscr{D}_K$ l'anneau des endomorphismes de la limite projective des C/V, où V décrit les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension finie et stables par G_K. Alors $\mathscr{D}_K$ est un corps et on a une suite exacte [(21)]

$$0 \to K \to \mathscr{D}_K \to (C \otimes C)^{G_K} \to K \to 0,$$

qui est la suite obtenue en prenant les G_K-invariants [(22)] de la suite du th. 2.8.

Remarque 2.27. — La catégorie des presque-C-représentations contient celle des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-*représentations* (i.e. des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-modules de longueur finie, munis d'une action semi-linéaire continue de G_K), cf. [**29**, th. 5.13]. Elle contient donc aussi celle des *presque* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-*représentations*. En particulier, si D est un (φ, N)-module filtré sur K, les espaces $X_{\mathrm{st}}^r(D)$ et $X_{\mathrm{dR}}(D)$ introduits au n° 2.3.1 sont des presque-C-représentations dont la Dimension est la même que celle de l'Espace de Banach correspondant. On peut donc

21. Fontaine utilise $(C \otimes C_f)^{G_K}$ au lieu de $(C \otimes C)^{G_K}$, où C_f est la réunion de toutes les sous-représentations de dimension finie de G_K contenues dans C, mais les deux espaces sont égaux. En effet, soit $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i \in (C \otimes C)^{G_K}$. Quitte à changer d'écriture, on peut supposer que les λ_i forment une base de $\mathscr{O}_C \cap (\mathbf{Q}_p \lambda_1 + \cdots + \mathbf{Q}_p \lambda_d)$, ce qui permet de compléter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en une base de Banach $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de C sur $\mathbf{Q}_p$. Alors tout élément de C (resp. de $C \widehat{\otimes} C$) peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{i \geq 1} a_i \lambda_i$ (resp. $\sum_{i \geq 1} \lambda_i \otimes x_i$), avec $a_i \in \mathbf{Q}_p$, (resp. $x_i \in C$) et $a_i, x_i \to 0$ quand $i \to +\infty$. En particulier, on peut écrire $\sigma(\lambda_i)$ sous la forme $\sum_{j \geq 1} a_{j,i}^\sigma \lambda_j$ et $\sigma(z)$ sous la forme $\sum_{j \geq 1} \lambda_j \otimes \big(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma \sigma(x_i)\big)$. L'invariance de z par G_K entraîne alors que $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma \sigma(x_i)$, et donc $\sigma^{-1}(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma x_i$. On en déduit que le $\mathbf{Q}_p$-espace engendré par les x_i est stable par G_K, ce qui permet de conclure.

22. On peut munir $\mathscr{C}$ d'une action de G_K par la formule $f^\sigma = f^{\tilde{\sigma}} - f^{\tilde{\sigma}}(0)$, où $\tilde{\sigma}$ est n'importe quel relèvement de σ dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{cont}}(\widetilde{C\{T\}}/K\{X\})$: on a $\{f^{\tilde{\sigma}}(x)\} = \sigma(f(\{\sigma^{-1}(x)\}))$, ce qui permet de montrer que, si f est une correspondance analytique additive, alors f^σ aussi et que f^σ ne dépend pas du choix de $\tilde{\sigma}$.

prouver « fa $\Rightarrow$ a », via la théorie des presque-C-représentations, de la même manière que via celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Terminons ce paragraphe par un résultat général [**29**, th. 6.1, prop. 6.9] sur les extensions de presque C-représentations ; des cas particuliers de cet énoncé sont présents dans la preuve du th. 2.25.

Proposition 2.28. — *Soient X, Y des presque C-représentations de G_K.*

(i) *Les* $\mathrm{Ext}^i(X, Y)$ *sont des* $\mathbf{Q}_p$*-espaces de dimension finie, nuls si $i > 2$, et*

$$\sum_{i=0}^{2}(-1)^i \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ext}^i(X, Y) = -[K : \mathbf{Q}_p]\,\mathrm{ht}(X)\,\mathrm{ht}(Y).$$

(ii) $\mathrm{Ext}^i(X, Y)$ *et* $\mathrm{Ext}^{2-i}(Y, X(1))$ *sont en dualité.*

Remarque 2.29. — Si X est une variété algébrique propre et lisse sur $\overline{K}$, les groupes de cohomologie syntomique $H^i_{\mathrm{Syn}}(X, r)$ de X sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie [**15, 48**]. Si X est définie sur K, alors ce sont en plus des presque-C-représentations.

2.5. Les (φ, Γ)-modules sur l'anneau de Robba. — L'équivalence de catégories de Fontaine [**25**] et le théorème de surconvergence [**9**] permettent de traduire les problèmes concernant les représentations de G_K en termes de (φ, Γ)-modules. Les démonstrations de « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » obtenues par cette voie résultent d'une interaction entre les travaux de Berger [**3, 4, 5**] et de Kedlaya [**37, 38, 39**]. Juste après sa thèse, Berger [**3**] a réalisé que l'on pouvait utiliser les bonnes propriétés de l'anneau de Robba pour *modifier un (φ, Γ)-module en un nombre infini de points* et réduire « dR $\Rightarrow$ pst » à la conjecture de Crew [**16**] sur les équations différentielles p-adiques. Cela semble avoir donné l'impulsion nécessaire pour la preuve de cette conjecture puisque, peu après, trois preuves (par André [**1**], Mebkhout [**46**] et Kedlaya [**37**]) ont vu le jour (cf. [**11**] pour un résumé de ces travaux). Un des apports de Kedlaya est l'existence d'une filtration canonique sur un φ-module sur l'anneau de Robba.

Quelques années plus tard, Berger [**4**] a réalisé que sa technique de modification de (φ, Γ)-modules, mélangée avec les propriétés de la filtration de Kedlaya, permettait d'obtenir une preuve très élégante de « fa $\Rightarrow$ a ». Cette technique a été reprise par Kisin [**41**] dans le cadre des « modules de Breuil-Kisin » pour fabriquer encore une preuve de « fa $\Rightarrow$ a ». Kedlaya [**38, 39**] a ensuite rendu plus naturels un certain nombre des ingrédients précédents en interprétant, inspiré par un travail de Hartl et Pink [**35**], sa filtration comme une filtration de Harder-Narasimhan sur la catégorie des φ-modules sur l'anneau de Robba.

2.5.1. L'anneau de Robba. — Si I est un intervalle de $]0,+\infty]$, on note $\mathscr{E}^I_{K_0}$ l'anneau des fonctions holomorphes sur la couronne $C(I) = \{v_p(T) \in I\}$ (cette couronne est un disque fermé si $+\infty \in I$ et un disque épointé si $+\infty \notin I$ mais $\sup I = +\infty$), définies sur K_0.

Si $r \in]0,+\infty]$, et si $f = \sum_k a_k T^k \in K_0[T,T^{-1}]$, soit $v_r(f) = \inf_k v_p(a_k) + kr$. Alors v_r est une valuation d'algèbre sur $K_0[T,T^{-1}]$, multiplicative ($v_r(fg) = v_r(f) + v_r(g)$). Si J est un intervalle compact de $]0,+\infty]$, on note v_J la valuation $v_J = \inf_{r\in J} v_r$ (c'est une valuation d'algèbre, i.e. $v_r(fg) \geq v_r(f) + v_r(g)$, non multiplicative sauf si J est réduit à un point) ; on a aussi $v_J(f) = \inf_{z\in C(J)} v_p(f(z))$. Alors $\mathscr{E}^I_{K_0}$ est le complété de $K_0[T,T^{-1}]$ pour la famille de valuations v_J, où J parcourt l'ensemble des intervalles compacts de I. Il s'ensuit que $\mathscr{E}^I_{K_0}$ est une algèbre de Fréchet, et même une algèbre de Banach si I est compact.

La structure algébrique de ces algèbres a été identifiée par Lazard [**43**]. On appelle *diviseur sur* $C(I)$ une somme formelle $D = \sum_{x\in C(I)} n_x(x)$, avec $n_x \in \mathbf{N}$. On dit que D *est localement fini* si, pour tout intervalle compact $J \subset I$, la somme $\sum_{x\in C(J)} n_x$ est finie, et que D *est* G_{K_0}*-invariant* si $n_{\sigma(x)} = n_x$, pour tous $x \in C(I)$ et $\sigma \in G_{K_0}$.

Théorème 2.30. — *Soit I un intervalle de* $]0,+\infty]$.

(i) $\mathscr{E}^I_{K_0}$ *est un anneau de Bézout* (*et même principal si I est compact*), *et un idéal de $\mathscr{E}^I_{K_0}$ est fermé si et seulement si il est principal.*

(ii) *L'application qui, à un idéal fermé, associe le diviseur d'un de ses générateurs est une bijection de l'ensemble des idéaux fermés de $\mathscr{E}^I_{K_0}$ sur l'ensemble des diviseurs localement finis sur $C(I)$, qui sont G_{K_0}-invariants.*

Remarque 2.31. — (i) Un des ingrédients principaux des preuves de ces résultats est la théorie des polygones de Newton qui permet de localiser les zéros des fonctions holomorphes d'une variable.

(ii) On peut remplacer K_0 par un corps valué complet arbitraire L dans la définition des anneaux ci-dessus, et le résultat reste inchangé si I est compact ; par contre, si I n'est pas compact, le résultat n'est vrai que si L est sphériquement complet.

On définit *l'anneau de Robba* $\mathscr{R}_{K_0}$ comme la limite inductive

$$\mathscr{R}_{K_0} = \varinjlim_{r>0} \mathscr{E}^{]0,r]}_{K_0}$$

des $\mathscr{E}^{]0,r]}_{K_0}$, pour $r > 0$. On peut le voir comme l'anneau des fonctions holomorphes sur la « couronne surconvergente » $C(]0,0])^\dagger = \varprojlim_{r>0} C(]0,r])$. C'est un anneau de Bézout, mais ses seuls idéaux fermés sont $\{0\}$ et $\mathscr{R}_{K_0}$.

2.5.2. Extensions de l'anneau de Robba. — Un élément x de $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p}, \frac{1}{[p^\flat]}]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]$, avec $x_k \in (p^\flat)^{-N(x)}\mathscr{O}_{C^\flat}$. Si

$r > 0$, on pose alors
$$w_r\Big(\sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]\Big) = \inf_k(k + rv_{C^\flat}(x_k)),$$
ce qui définit une valuation d'algèbre, multiplicative ([**38**, lemme 2.1.7 et def. 2.1.8]).

Si $0 < r_1 \le r_2$, on pose alors $w_{[r_1,r_2]}(x) = \inf_{s\in[r_1,r_2]} w_s(x)$, et $w_{[r_1,r_2]}$ est aussi une valuation d'algèbre sur $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$ (non multiplicative). Si I est un intervalle de $]0,+\infty[$, on note $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ le complété de $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$ pour la famille de valuations $w_{[r,s]}$, pour $[r,s] \subset I$. Alors $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ est une algèbre de Fréchet (de Banach si I est compact).

Enfin, on note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ la limite inductive $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} = \varinjlim_{r>0} \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ des $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, pour $r > 0$. Alors l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ du § 2.1 est l'adhérence de $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p}]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$.

Remarque 2.32. — (i) Comme $w_{s/p}(\varphi(x)) = w_s(x)$, le frobenius φ s'étend par continuité en des isomorphismes $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}^I \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}^{p^{-1}I}$ et $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$.

(ii) L'action de G_K sur $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p}, \frac{1}{[p^\flat]}]$ est isométrique pour w_r, et s'étend donc par continuité à tous les anneaux ci-dessus ; l'action ainsi obtenue commute à φ.

(iii) On aurait envie de penser [(23)], par continuité, que tout élément z de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[x_k]$, avec $x_k \in C^\flat$ vérifiant des conditions de croissance convenables, mais c'est FAUX ! La vie aurait été plus facile si, par exemple, tout élément de $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p^2}$ avait eu une écriture unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} p^{2k}[x^{p^{-k}}] + p^{2k+1}[y^{p^{-k}}]$, mais ce n'est pas le cas : l'Espace de Banach $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p^2}$ est vraiment un diamant, et pas un espace analytique.

Proposition 2.33. — ([**3**, prop. 3.2]) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, et si les $\varphi^n(x)$, pour $x \in \mathbf{N}$, engendrent un K_0-espace de dimension finie, alors $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.*

Soit $\pi = [\varepsilon] - 1$. On note $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K_0}$ (resp $\mathbf{B}^I_{K_0}$) l'adhérence de $K_0[\pi,\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^I$). Alors $f \mapsto f(\pi)$ induit un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{R}_{K_0}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K_0}$ (resp. $\mathscr{E}^I_{K_0}$ sur $\mathbf{B}^{I'}_{K_0}$, avec $I' = \frac{p}{p-1}I$, si $I \subset]0,1]$).

Si $F = K_0, K$, on note F_n le corps $F(\zeta_{p^n})$, et $F_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} F_n$ l'extension cyclotomique de F. On note $\chi : G_F \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique, $H_F \subset G_F$ le noyau de χ et $\Gamma_F = G_F/H_F$, et donc $H_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}/F_\infty)$ et $\Gamma_F = \mathrm{Gal}(F_\infty/F)$.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ les anneaux $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}})^{H_K}$ et $(\widetilde{\mathbf{B}}^I)^{H_K}$. Il existe $r(K) > 0$ tel que, si $I \subset]0, r(K)]$, alors $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ contient une unique extension étale $\mathbf{B}^I_K$ de $\mathbf{B}^I_{K_0}$ telle que l'application naturelle $\widetilde{\mathbf{B}}^I_{K_0} \otimes_{\mathbf{B}^I_{K_0}} \mathbf{B}^I_K \to \widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ soit un isomorphisme. On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} = \varinjlim_{r\le r(K)} \mathbf{B}^{]0,r]}_K$; alors $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K_0} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K_0}} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$.

Théorème 2.34. — (i) *Si $0 < r \le s$ (resp. $0 < r < s \le r(K)$), les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}_K$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{[r,s]}$ (resp. $\mathbf{B}^{[r,s]}_K$) sont principaux.*

23. Je suis tombé dans ce piège, et ne suis pas le seul...

(ii) $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ *et, si* $r \leq r(K)$, $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$*, sont de Bézout, et un idéal est fermé si et seulement si il est principal.*

(iii) $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$*,* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ *sont de Bézout.*

Les cas de $\mathbf{B}_K^{[r,s]}$, $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ découlent du th. 2.30 car ces anneaux sont du même type que l'anneau correspondant pour $K = K_0$. Le reste de l'énoncé est dû [(24)] à Kedlaya [**37**, th. 3.20] ou [**38**, prop. 2.6.8, th. 2.9.6].

Terminons ce numéro par un résultat fort utile sur les modules de rang fini ([**32**] pour $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et [**38**, § 2.8] pour $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$).

Théorème 2.35. — *Soit* $R = \mathbf{B}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$*, et soit* M *un* R*-module libre de rang* d*. Un sous-*R*-module de* M *est libre si et seulement si il est fermé, et alors son rang est* $\leq d$*.*

2.5.3. Le théorème de Dieudonné-Manin et ses variantes. — Rappelons l'énoncé du classique théorème de Dieudonné-Manin ($\breve{\mathbf{Q}}_p = W(\overline{\mathbf{F}}_p)[\frac{1}{p}]$) :

Proposition 2.36. — *Un* φ*-module* M *sur* $\breve{\mathbf{Q}}_p$ *admet une décomposition canonique*

$$M \cong \oplus_{\lambda\in\mathbf{Q}}\breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)^{m_\lambda},$$

où, si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$*, on note* $\breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)$ *le* φ*-module sur* $\breve{\mathbf{Q}}_p$ *de base* $e_1, \dots, e_h$*, avec* $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ *si* $i \leq h-1$*, et* $\varphi(e_h) = p^d e_1$*.*

Un φ-module M sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$-module libre de rang fini muni d'un frobenius semi-linéaire et bijectif φ. Si $\lambda \in \mathbf{Q}$, on note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)$ le φ-module $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)$.

Théorème 2.37. — ([**37**, th. 4.16], [**38**, th. 4.5.7]) *Si* M *est un* φ*-module sur* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$*, alors* M *admet une décomposition*

$$M \cong \oplus_{\lambda\in\mathbf{Q}}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)^{m_\lambda}.$$

Les λ pour lesquels $m_\lambda \neq 0$ sont *les pentes de frobenius de* M ; si $\lambda = \frac{d}{h}$, la multiplicité de λ comme pente est hm_λ. On dit que M est *isocline* s'il n'a qu'une pente et *étale* s'il est isocline de pente 0.

Remarque 2.38. — (i) La décomposition ci-dessus n'est pas canonique, contrairement au cas classique ; ce qui est canonique est la filtration croissante par les $M_\mu = \oplus_{\lambda\geq\mu}\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)^{m_\lambda}$.

(ii) Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ le sous-anneau des éléments bornés de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$: c'est l'intersection de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ et de $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$, ce qui permet de munir $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ de la valuation v_p existant sur $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$, et on a $v_p(\varphi(x)) = v_p(x)$, pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Par ailleurs, $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}})^* = (\mathbf{B}^\dagger)^*$. Il en résulte que, si M est un φ-module de rang 1 sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, et si e est une base de

24. (K_∞ est perfectoïde, et les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ correspondent aux anneaux $\Gamma_{\mathrm{an},r}^{K_\infty^\flat}$, $\Gamma_{\mathrm{an},r}^{C^\flat}$, $\Gamma_{\mathrm{an,con}}^{K_\infty^\flat}$ et $\Gamma_{\mathrm{an,con}}^{C^\flat}$ de Kedlaya).

M, alors $\varphi(e) = \lambda e$, avec $\lambda \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, et $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de e ; on note $\deg M$ cette quantité. Si M est de rang d, alors $\wedge^d M$ est de rang 1, et on définit *le degré* $\deg M$ de M par $\deg M = \deg(\wedge^d M)$. Munie des fonctions rang et degré, la catégorie des φ-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ a une structure de catégorie de Harder-Narasimhan, et la filtration du (i) n'est autre que la filtration de Harder-Narasimhan [**38, 39**].

La canonicité de la filtration de Harder-Narasimhan a la conséquence suivante ([**37**, th, 6.10], [**38**, th. 6.4.1] ou [**39**, th.1.7.1]) pour un φ-module Δ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ (les pentes de Δ sont celles de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta$, et $\mathbf{B}_K^\dagger = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$).

Théorème 2.39. — *Si Δ est un φ-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, alors Δ admet une unique filtration $0 = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_r = \Delta$ par des sous-φ-modules saturés, telle que :*
- *Si $1 \leq i \leq r$, alors Δ_i/Δ_{i-1} est isocline.*
- *Si λ_i est la pente de Δ_i/Δ_{i-1}, alors $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$.*

De plus, Δ_i/Δ_{i-1} admet un unique sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-module D_i, stable par φ, tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_i \cong \Delta_i/\Delta_{i-1}$.

Remarque 2.40. — Si Δ est un (φ,Γ)-module, alors tous les objets du th. 2.39 sont stables par Γ (par unicité).

2.5.4. Représentations de G_K et (φ,Γ)-modules. — Comme $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ et $\sigma(\pi) = (1+\pi)^{\chi(\sigma)} - 1$, les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K_0}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ sont stables par φ et G_K (qui agit à travers Γ_K).

Théorème 2.41. — (i) *Si Δ est un (φ,Γ)-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$), alors $V(\Delta) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta)^{\varphi=1}$ (resp. $V(\Delta) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}} \Delta)^{\varphi=1}$) est une représentation de G_K, de dimension le rang de Δ.*

(ii) *Si V est une représentation de G_K, alors $\widetilde{\Delta}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes V)^{H_K}$ est un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$, de rang $\dim V$, et $\widetilde{\Delta}(V)$ contient un unique sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module $\Delta(V)$, stable par φ et Γ, tel que $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta(V) \to \widetilde{\Delta}(V)$ soit un isomorphisme.*

(iii) *Les foncteurs $V \mapsto \Delta(V)$ et $\Delta \mapsto V(\Delta)$ (resp. $V \mapsto \widetilde{\Delta}(V)$ et $\Delta \mapsto V(\Delta)$) sont inverses l'un de l'autre, et induisent des équivalences de catégories :*

$$\begin{aligned}\{\text{représentations de } G_K\} &\cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales sur } \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}\}\\ &\cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales sur } \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}\}\end{aligned}$$

Ce théorème se démontre en combinant l'équivalence de catégories de Fontaine [**25**], le théorème de surconvergence de [**9**] (ou [**8**]) et le th. 2.39 ci-dessus.

2.5.5. Localisation. — Soit
$$\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}.$$
Alors ω est un générateur de $\ker\theta$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, et comme φ est bijectif sur $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, on a $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/(\varphi^n(\omega)) \cong \mathscr{O}_C$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et le complété du localisé de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ en $\varphi^n(\omega)$

est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tout n. On en déduit que, si $p^{-n} \leq r$, le complété du localisé de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ en $\varphi^n(\omega)$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (si $p^{-n} > r$, alors $\varphi^n(\omega)$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$). On note $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ la localisation en $\varphi^n(\omega)$. Alors ι_n commute à G_K et $\iota_{n+1}(\varphi(x)) = \iota_n(x)$.

On a $\iota_n(\pi) = \zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1$. On en déduit que $\iota_n(\mathbf{B}_K^{]0,r]}) \subset K_n[[t]]$, si $p^{-n} \leq r \leq r(K)$.

Si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, alors Δ est la limite inductive de sous $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-modules $\Delta^{]0,r]}$, pour $0 < r \leq r(\Delta)$, vérifiant les propriétés suivantes [**4**, th. I.3.3] :

- $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta^{]0,r]} \to \Delta$ est un isomorphisme ;
- $\Delta^{]0,r]}$ est stable par Γ et $\mathbf{B}_K^{]0,r/p]} \otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})} \varphi(\Delta^{]0,r]}) \xrightarrow{\sim} \Delta^{]0,r/p]}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $r_n = v_p(\zeta_{p^n} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$ et, si $r_n \leq r(\Delta)$, on note $\Delta_{\mathrm{dif},n}^+$ le complété $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}$ du localisé de $\Delta^{]0,r_n]}$ en $\varphi^n(\omega)$, et $\iota_n : \Delta^{]0,r_n]} \to \Delta_{\mathrm{dif},n}^+$ la localisation.

2.5.6. (φ, N)-modules filtrés et (φ, Γ)-modules. — On note $\mathbf{B}_{\log,K}$ l'anneau de polynômes $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}[\log \pi]$, que l'on munit d'actions de φ et Γ_K en posant

$$\varphi(\log \pi) = p \log \pi + \log \tfrac{\varphi(\pi)}{\pi^p} \quad \text{et} \quad \gamma(\log \pi) = \log \pi + \log \tfrac{\gamma(\pi)}{\pi},$$

et d'une dérivation $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-linéaire N, définie par $N(\log \pi) = \frac{-p}{p-1}$. On a $\iota_n(\log \pi) = \log(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$, et donc $\iota_n(\mathbf{B}_{\log,K}) \subset K_n[[t]]$.

Soit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}_{\log,K} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\log \pi]$; alors $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}$ contient

$$\log[p^\flat] = \tfrac{p}{p-1}\big(\log \pi + \log\big([(p^\flat)^{(p-1)/p}]/\pi\big)\big),$$

et donc aussi l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[\log[p^\flat]]$ du n° 2.1.1 (actions de φ, N et G_K comprises).

Si D est un (φ, N)-module, de rang h sur K_0, on définit un (φ, Γ)-module $\Delta(D)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, par

$$\Delta_0(D) = (\mathbf{B}_{\log,K} \otimes_{K_0} D)^{N=0}.$$

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, et si $r \leq r(K)$, on définit les $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-modules

$$\begin{aligned}
&\Delta_0^{]0,r]}(D) = (\mathbf{B}_K^{]0,r]}[\log \pi] \otimes_{K_0} D)^{N=0} \\
&\Delta^{]0,r]}(D) = \{z \in \Delta_0^{]0,r]}(D)[\tfrac{1}{t}],\ \iota_n(z) \in \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K),\ \text{si } r_n \leq \inf(r, r(\Delta))\}
\end{aligned}$$

Théorème 2.42. — (i) *Le $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module*

$$\Delta(D) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta^{]0,r]}(D)$$

ne dépend pas du choix de r, et est un (φ, Γ)-module de rang h sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$.

(ii) *Le foncteur $D \mapsto \Delta(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, qui respecte les filtrations de Harder-Narasimhan.*

Remarque 2.43. — (i) Le (i) correspond au th. II.1.2 de [**4**] et le (ii) correspond aux th. II.2.6 et IV.2.1 de [**4**].

(ii) Il résulte du (ii) de ce théorème que D est faiblement admissible si et seulement si $\Delta(D)$ est étale. La conjecture « fa $\Rightarrow$ a » s'en déduit en remarquant que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes \Delta(D))^{\varphi=1}$, et en utilisant le th. 2.41.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, comme N est nilpotent, on a $\Delta_0^{]0,r]}(D) \cong \mathbf{B}_K^{]0,r]} \otimes_{K_0} D$, en tant que $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module (et même en tant que φ-module sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$), l'isomorphisme réciproque étant donné par la formule $a \otimes x \mapsto \sum_{i\geq 0}(\frac{p-1}{p}\log \pi)^i a \otimes \frac{N^i x}{i!}$. En particulier, $\Delta_0^{]0,r]}(D)$ est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang h.

Quitte à tordre D, on peut supposer que $D_K^i = 0$ si $i > 0$, auquel cas $\mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K) \subset K_n[[t]] \otimes_K D_K$. Le « théorème des restes chinois » pour les modules de type fini sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ fournit la suite exacte :

$$0 \to \Delta^{]0,r]}(D) \to \Delta_0^{]0,r]}(D) \to \prod_{n\geq n(r)} (K_n[[t]] \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0 \to 0.$$

(La suite est exacte à gauche par définition de $\Delta^{]0,r]}(D)$ et à droite par le théorème des restes chinois.) En particulier, $\Delta^{]0,r]}(D)$ est un sous-$\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module fermé de $\Delta_0^{]0,r]}(D)$ qui contient $t^N\Delta_0^{]0,r]}(D)$ si $D_K^{-N} = D_K$. Il en résulte, grâce au th. 2.35, que $\Delta^{]0,r]}(D)$ est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang h.

Maintenant, $\Delta_0(D) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta_0^{]0,r]}(D) = (\mathbf{B}_{\log,K} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ est un (φ,Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ qui ne dépend pas de r ; on en déduit l'indépendance de $\Delta(D)$ et ce qui précède montre que $\Delta(D)$ est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module de rang h de $\Delta_0(D)$. De plus, $\Delta(D)$ est stable par Γ_K puisque ι_n commute à Γ_K, et on déduit de ce que $\iota_{n+1}(\varphi(x)) = \iota_n(x)$ et de la suite exacte ci-dessus que $\mathbf{B}_K^{]0,r/p]} \otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})} \varphi(\Delta^{]0,r]}(D)) \to \Delta^{]0,r/p]}(D)$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que $\Delta(D)$ est un sous-(φ,Γ)-module de rang h de $\Delta_0(D)$, ce qui prouve le (i).

Pour prouver que $D \mapsto \Delta(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, on utilise intensivement la suite exacte ci-dessus et le fait que $D \mapsto \mathrm{Fil}^0(K_n((t))\otimes_K D_K)$ est un $\otimes$-foncteur exact.

Enfin, pour montrer que $D \mapsto \Delta(D)$ respecte les filtrations de Harder-Narasimhan, il suffit de vérifier que :

• Tout sous-(φ,Γ)-module Δ', facteur direct de $\Delta(D)$, est de la forme $\Delta(D')$, avec D' sous-(φ, N)-module de D : de fait, on a $D' = (\mathbf{B}_{\log,K}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta')^{\Gamma_K}$.

• $\deg(\Delta(D)) = \deg(D)$, ce qui est immédiat si D est de rang 1, et le cas général s'en déduit car $\deg(D) = \deg(\det D)$ et $\deg(\Delta) = \deg(\det \Delta)$. □

2.5.7. La conjecture « dR $\Rightarrow$ pst ». — Si V est une représentation de G_K, et si $\Delta(V)$ est le (φ,Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ associé, l'opérateur $\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ a une limite ∇, quand $\gamma \to 1$, et ∇ est une connexion sur $\Delta(V)$, l'action de ∇ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ étant donnée par $\nabla = t\partial$, où $\partial = (1+\pi)\frac{d}{d\pi}$ (cf. [**3**, § 5.1]).

Supposons maintenant que V est de de Rham, de dimension d, et que les poids de Hodge-Tate de V sont ≤ 0 (on peut se ramener à ce cas en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique), de telle sorte que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$, et $K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un sous-$K_n[[t]]$-réseau de $\Delta_{\mathrm{dif},n}^+ \subset (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)^{H_K}$, si $r_n \leq r(\Delta)$ (cf. nº 2.5.5 pour la définition de $\Delta_{\mathrm{dif},n}^+$). Ceci permet de définir un modifié $N^{]0,r]}$ de $\Delta^{]0,r]}$ en les $\varphi^n(\omega)$ en posant :

$$N^{]0,r]} = \{z \in \Delta^{]0,r]},\ \iota_n(z) \in K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V),\ \text{si } r_n \leq \inf(r, r(\Delta))\}.$$

Alors $N^{]0,r]}$ est un sous-$\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de $\Delta^{]0,r]}$, stable par Γ et ∇ ; de plus il est de rang d car fermé et contenant $t^N \Delta^{]0,r]}$, si $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{Fil}^{-N} \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Le théorème des restes chinois fournit une suite exacte

$$0 \to N^{]0,r]} \to \Delta^{]0,r]} \to \prod_{n \geq n(r)} \Delta_{\mathrm{dif},n}^+ / (K_n[[t]] \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)) \to 0,$$

dont on déduit que $\nabla(N^{]0,r]}) \subset tN^{]0,r]}$ car $\nabla = 0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\nabla = t\frac{d}{dt}$ sur $K_n[[t]]$, et, comme ci-dessus, que $N^{]0,r/p]} = \mathbf{B}_K^{]0,r/p]} \otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})} \varphi(N^{]0,r]})$. Il s'ensuit que $N(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} N^{]0,r]}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, et comme $\partial \circ \varphi = p\varphi \circ \partial$ la filtration de Kedlaya $0 = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_r = \Delta$ est stable par ∂, ainsi que les $\mathbf{B}_K^\dagger$-modules D_i du th. 2.39. Il resulte alors du théorème de Tsuzuki [**56**] rappelé ci-dessous (th. 2.44), qu'il existe une extension finie L de K telle que la connexion ∂ devienne triviale sur $\mathbf{B}_L^\dagger \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_i$, et donc aussi sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} (\Delta_i/\Delta_{i-1})$. On en déduit que ∂ est triviale sur $\mathbf{B}_{\log,L} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta$, car $\partial : \mathbf{B}_{\log,L} \to \mathbf{B}_{\log,L}$ est surjective. L'action de Γ_L sur $(\mathbf{B}_{\log,L} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta)^{\partial=0}$ est alors localement constante puisque son action infinitésimale est nulle ; il existe donc n tel que Γ_{L_n} agisse trivialement, ce qui implique que $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log} \otimes V)^{G_{L_n}}$ est de dimension d sur $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log})^{G_{L_n}}$, puis, en utilisant la prop. 2.33, que $(\widehat{\mathbf{B}}_{\log}^+ \otimes V)^{G_{L_n}}$ est de dimension d sur $(\widehat{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{G_{L_n}}$ et donc que V est semi-stable comme représentation de G_{L_n}. Ceci termine la preuve de « dR $\Rightarrow$ pst ».

Théorème 2.44. — *Si D est un (φ, ∂)-module étale sur $\mathbf{B}_K^\dagger$, il existe une extension finie L de K telle que ∂ soit triviale sur $\mathbf{B}_L^\dagger \otimes D$.*

Remarque 2.45. — La représentation V ne joue pas vraiment de rôle dans ce qui précède, et le résultat s'étend [**4**, th. III.2.4] aux (φ, Γ)-modules Δ non nécessairement étales : la condition « V de Rham » étant remplacée par « $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{K_n[[t]]} \Delta_{\mathrm{dif},n}^+)^{G_K}$ de dimension $\mathrm{rg}\,\Delta$ sur K ».

2.5.8. Les B-paires. — Berger [**5**] définit une B-paire comme la donnée de :

- un $\mathbf{B}_e$-module libre M_e, de rang fini, avec action semi-linéaire continue de G_K,
- un sous $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau M_{dR}^+ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e$, stable par G_K.

Nous appellerons *(G_K, B)-paire* un tel objet pour insister sur l'existence d'une action de G_K, et *une B-paire* sera juste la donnée de :

- un $\mathbf{B}_e$-module libre de rang fini M_e,

- un sous $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau M_{dR}^+ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{\mathbf{B}_e} M_e$.

Exemple 2.46. — On peut associer à une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de G_K, un (φ,N)-module filtré D sur K ou un (φ,Γ)-module Δ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, des (G_K,B)-paires $M(V)$, $M(D)$ ou $M(\Delta)$, en posant [25] :

$$\begin{aligned}
M(V) &= (M_e(V), M_{\mathrm{dR}}^+(V)) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}\otimes V, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V)\\
M(D) &= (M_e(D), M_{\mathrm{dR}}^+(D)) = ((\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[\tfrac{1}{t}]\otimes D)^{N=0,\varphi=1}, \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_K D_K))\\
M(\Delta) &= (M_e(\Delta), M_{\mathrm{dR}}^+(\Delta)) = \big((\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\tfrac{1}{t}]\otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} D)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes_{K_n[[t]]}\iota_n(\Delta^{]0,r_n]})\big)
\end{aligned}$$

On a $V = M_e(V)\cap M_{\mathrm{dR}}^+(V)$, ce qui prouve que $V\mapsto M(V)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations de G_K sur une sous-catégorie de celle des (G_K,B)-paires.

Théorème 2.47. — ([**5**, th. 2.2.7]) *Le foncteur $\Delta\mapsto M(\Delta)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ,Γ)-modules sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ sur celle des (G_K,B)-paires.*

3. Les courbes X_E, Y_E et les espaces analytiques associés

Il se trouve que comprendre les idéaux de $\mathbf{B}_e$ demande de commencer par comprendre ceux de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Comme $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/([p^\flat]-p) = \mathscr{O}_C$, et comme $([p^\flat]-p)^n\to 0$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ quand $n\to+\infty$, relever une base de Banach de $\mathscr{O}_C$ sur $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ fournit un scindage $s:\mathscr{O}_C\to\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ de la projection $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}\to\mathscr{O}_C$, et permet d'écrire tout élément de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, de manière unique, sous la forme $\sum_{n\in\mathbf{N}} s(a_n)([p^\flat]-p)^n$. Ceci fait que $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ ressemble beaucoup à $\mathscr{O}_C[[T]]$.

Cette ressemblance est utile pour beaucoup de questions (par exemple pour démontrer la convergence de séries dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$), mais n'est pas assez fidèle pour comprendre l'arithmétique dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ en particulier pour déterminer ses idéaux premiers. La clé pour résoudre ce genre de questions est de prendre vraiment au sérieux l'analogie avec le cas d'égale caractéristique, et de considérer p comme une variable (par exemple, si on fait du 3-adique, il faut considérer 3 comme une variable !), ce qui demande d'écrire, comme dans [**38**], un vecteur de Witt sous la forme $\sum_{i\in\mathbf{N}}[x_i]p^i$ au lieu de la forme standard $\sum_{i\in I} p^i[x_i]$.

3.1. L'anneau A_E. — Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans C. On note $\mathscr{O}_E$ l'anneau de ses entiers, k_E son corps résiduel, et on choisit une uniformisante π. Soit $q=p^f$ le cardinal de k_E (et donc $k_E=\mathbf{F}_q$). Soit $\breve{E} = E\otimes_{W(k_E)} W(k_C)$, l'extension maximale non ramifiée de E dans C. Soit

$$A_E = \mathscr{O}_E\otimes_{W(k_E)}\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}.$$

25. Dans la définition de $M(\Delta)$, il faut prendre $n\gg 0$ pour que $r_n\le r(\Delta)$.

C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathrm{Ker}(A_E \to \mathscr{O}_{C^\flat} \to k_{C^\flat})$, séparé et complet pour la topologie $(\pi, [\pi^\flat])$-adique. On note φ_E l'automorphisme $1 \otimes \varphi^f$ de A_E. Tout élément de A_E peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{k \in \mathbf{N}} [x_k]\pi^k$, où les x_k sont des éléments arbitraires de $C^\flat$, et on a $\varphi_E(\sum_{k\in\mathbf{N}}[x_k]\pi^k) = \sum_{k\in\mathbf{N}}[x_k^q]\pi^k$.

3.1.1. Idéaux premiers de A_E.— L'écriture ci-dessus fait ressembler A_E à l'anneau $\mathscr{O}_C[[T]]$, où l'on a pris comme variable T l'uniformisante π. Par analogie, on définit le *polygone de Newton* NP_x de $x = \sum_{k\in\mathbf{N}}[x_k]\pi^k$ comme la plus grande fonction convexe $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $f(k) \leq \inf_{i \leq k} v_{C^\flat}(x_i)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Alors NP_x est une fonction convexe décroissante, linéaire par morceaux, et on dit que $\lambda < 0$ est *une pente de* NP_x s'il existe un intervalle sur lequel la dérivée de NP_x est λ ; la multiplicité de λ est alors la longueur de cet intervalle (c'est un entier). Le polygone de Newton de x peut fort bien comporter une infinité de pentes ; c'est le cas par exemple de $x = \sum [a^{q^{-k}}]\pi^k$, si $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$.

Le résultat suivant [**FF**, th. 2.4.6 et n° 1.5.2] est crucial pour l'étude des zéros des éléments de A_E.

Théorème 3.1. — (i) *Si* NP_x *est constant, alors x est inversible dans* $A_E[\frac{1}{[\pi^\flat]}]$.

(ii) *Si λ est une pente de* NP_x, *de multiplicité d, il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathscr{O}_{C^\flat}$ vérifiant $v_{C^\flat}(a_i) = -\lambda v_p(\pi)$ tels que $x = (\pi - [a_1]) \cdots (\pi - [a_d])y$ avec $y \in A_E$. De plus,* NP_y *est obtenu en enlevant*[26] *de* NP_x *le segment de pente λ.*

Remarque 3.2. — Dans l'énoncé analogue sur $\mathscr{O}_C[[T]]$, les a_i sont uniquement déterminés ; ce n'est pas le cas ici. Par exemple, l'idéal $\mathrm{Ker}\,\theta$ est engendré par $\pi - [\pi^\flat]$ pour n'importe quel choix de $\pi^\flat$. Il est un peu difficile d'expliciter la relation d'équivalence $a \sim b$ exprimant l'égalité des idéaux $(\pi - [a])$ et $(\pi - [b])$; cela revient à décrire[27] ε à partir de $\pi^\flat$.

Corollaire 3.3. — *Les idéaux premiers fermés*[28] *de A_E sont :*

- (0), *de corps résiduel* $\mathrm{Fr}(A_E)$,
- *l'idéal maximal, de corps résiduel $k_{C^\flat} = k_C$,*
- (π), *de corps résiduel $C^\flat$,*
- $(\pi - [a])$, *pour $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$ à équivalence près, de corps résiduel C_a algébriquement clos de caractéristique* 0, *complet pour v_p, et tel que $C_a^\flat \cong C^\flat$,*
- $W(\mathfrak{m}_{C^\flat})$, *noté* $([\pi^\flat])$, *de corps résiduel $\breve{E}$.*

26. $\mathrm{NP}_y(t) = \mathrm{NP}_x(t)$ si $t \gg 0$, et les pentes de NP_y sont celles de NP_x (avec les mêmes multiplicités) privées de λ.

27. On peut obtenir une description en utilisant le corps des normes de l'extension $E(\mu_{p^\infty}, \pi^{1/p^\infty})$: si ϖ en est une uniformisante, il existe des séries $P, Q \in \mathbf{F}_q[[X^{p^{-\infty}}]]$ telles que $\pi^\flat = P(\varpi)$ et $\varepsilon = Q(\varpi)$. Il n'est pas sûr qu'expliciter P et Q soit très utile (ou même faisable...).

28. Si on n'impose pas aux idéaux d'être fermés, le lemme de Zorn permet de fabriquer des idéaux maximaux exotiques à partir d'éléments dont le polygone de Newton comporte une infinité de pentes.

(Tout résulte facilement du th. 3.1, à part le fait que C_a est algébriquement clos [**FF**, prop. 2.2.19] ou [**54**, prop. 3.8].)

3.1.2. L'ensemble $|Y_E|$. — Les idéaux π et $[\pi^\flat]$ sont clairement de vilains petits canards, et on définit [29] $|Y_E|$ comme l'ensemble des idéaux fermés, non triviaux, de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$. On note $\infty \in |Y_E|$ l'idéal $\operatorname{Ker}\theta_E$, où $\theta_E = \mathrm{id}\otimes\theta : \mathscr{O}_E \otimes_{W(k_E)} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$.

Si $y \in |Y_E|$ (et donc y est de la forme $(\pi - [a])$), et si $K_y = A_E[\frac{1}{p}]/(\pi - [a]) = C_a$ est son corps résiduel, alors K_y contient E, et l'isomorphisme $\mathscr{O}_{K_y}/\pi \cong \mathscr{O}_{C^\flat}/a$ se prolonge, de manière unique, en un isomorphisme ι_y de $K_y^\flat$ sur $C^\flat$; autrement dit, (K_y, ι_y) est *un* E*-débasculé* [30] (untilt) de $C^\flat$. Réciproquement, si $(K, \iota : K^\flat \cong C^\flat)$ est un E-débasculé de $C^\flat$, on peut lui associer l'idéal $(\pi - [\iota(\pi^\flat)])$ de A_E. On en déduit le résultat suivant [**FF**, cor. 2.2.22 et 2.2.23].

Proposition 3.4. — *$|Y_E|$ est l'ensemble des E-débasculés de $C^\flat$.*

On peut donner une description agréable de $|Y_E|$ en utilisant la théorie de Lubin-Tate. Soit donc $\oplus$ une loi de groupe formel de Lubin-Tate associée [31] à (E, π). On dispose alors, pour tout $\alpha \in \mathscr{O}_E$, de $\sigma_\alpha \in \alpha T + T^2\mathscr{O}_E[[T]]$ telle que $\sigma_\alpha(X \oplus Y) = \sigma_\alpha(X) \oplus \sigma_\alpha(Y)$, et on a $\sigma_\pi \equiv X^q$ modulo π. Ceci munit $\mathfrak{m}_{C^\flat}$ d'une action de $\mathscr{O}_E$, que l'on prolonge en une action de E par $\sigma_{\alpha/\pi^n}(x) = \sigma_\alpha(x^{q^{-n}})$.

Théorème 3.5. — ([**FF**, prop. 2.3.9]) *Soit $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$.*

(i) $[x]_\pi = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{\pi^n}([x^{q^{-n}}])$ *est l'unique relèvement de x dans A_E tel que* $\varphi_E([x]_\pi) = \sigma_\pi([x])$.

(ii) *Si $\alpha \in E$, alors* $\sigma_\alpha([x]_\pi) = [\sigma_\alpha(x)]_\pi$.

(iii) $x \mapsto \xi_x = [x]_\pi/[x^{1/q}]_\pi$ *induit une bijection de* $(\mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\})/\mathscr{O}_E^*$ *sur* $|Y_E|$.

Remarque 3.6. — $\mathfrak{m}_{D^\flat}$ est, par construction, l'ensemble des points classiques de la boule perfectoïde $\tilde{D}_C$ sur C ou $\tilde{D}_{C^\flat}$ sur $C^\flat$ et donc $\mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des points classiques de la boule perfectoïde épointée, et le (iii) du th. 3.5 nous fournit des bijections :

$$|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^* \cong |\tilde{D}_{C^\flat}^\times|/\mathscr{O}_E^*.$$

3.1.3. L'anneau B_E. — Si $r \in]0, +\infty[$, notons v_r la valuation

$$v_r\Big(\sum_{k\gg 0} [x_k]\pi^k\Big) = \inf_k \big(v_{C^\flat}(x_k) + krv_p(\pi)\big).$$

29. La notation est justifiée par le fait [**19**] que $|Y_E|$ est l'ensemble des points de type I d'une courbe analytique (adique) Y_E^{ad} (cf. § 3.3).

30. Un E-débasculé de $C^\flat$ est un couple (K, ι), où K est un corps perfectoïde contenant E, complet pour v_p, et ι un isomorphisme de $K^\flat$ sur $C^\flat$.

31. Une telle loi n'est unique qu'à isomorphisme près ; en changer modifie les constructions qui suivent de manière parfaitement transparente.

Cette valuation est multiplicative [**FF**, prop. 1.4.9] : $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$. Si $x \in A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$, la fonction $r \mapsto v_r(x)$ est croissante, concave, linéaire par morceaux, à pentes entières ; elle admet donc des limites à gauche $\partial_g v_r(x)$ et à droite $\partial_d v_r(x)$ vérifiant $\partial_g v_r(x), \partial_d v_r(x) \in \mathbf{N}$ et $\partial_g v_r(x) \geq \partial_d v_r(x)$. La fonction $r \mapsto v_r(x)$ est la transformée de Legendre de NP_x, et on récupère NP_x en prenant la transformée de Legendre inverse (cf. [**FF**, § 1.5]) : la multiplicité de $-\lambda$ comme pente de NP_x est $\partial_g v_\lambda(x) - \partial_d v_\lambda(x)$. Notons que $v_r(x)$ admet une limite $v_0(x)$ quand $x \to 0$, mais la dérivée à droite en 0 peut être $+\infty$.

Si I est un intervalle de $]0, +\infty[$, on note $B_E(I)$ le complété de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$ pour la famille de valuations v_r, pour $r \in I$. Alors $B_E(I)$ est une algèbre de Fréchet (et même de Banach, si I est compact, avec $v_I(x) = \inf_{r \in I} v_r(x)$). On note simplement B_E et B_E^+ les anneaux :

$$B_E = B_E(]0, +\infty[), \quad B_E^+ \text{ adhérence de } A_E[\tfrac{1}{\pi}] \text{ dans } B_E.$$

Alors φ_E se prolonge par continuité en des isomorphismes $\varphi_E : B_E(I) \xrightarrow{\sim} B_E(qI)$, $\varphi_E : B_E \xrightarrow{\sim} B_E$, $\varphi_E : B_E^+ \xrightarrow{\sim} B_E^+$. Si $r > 0$, on a $B_E = \cap_{n \in \mathbf{N}} \varphi^{-n}(B_E([r, +\infty[))$ et, pour faire bonne mesure, on définit *l'anneau de Robba* $\mathscr{R}_E(C^\flat)$ relatif à cette situation par $\mathscr{R}_E(C^\flat) = \cup_{n \in \mathbf{N}} \varphi^n(B_E([r, +\infty[))$.

Remarque 3.7. — (i) Si $E = \mathbf{Q}_p$, les anneaux ci-dessus sont reliés à ceux du n° 2.5.2 : soit $\iota :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors

$$B_{\mathbf{Q}_p}(I) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\iota(I)}, \quad B_{\mathbf{Q}_p}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_E(C^\flat) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}.$$

(ii) Dans [**FF**], les normes sont préférées aux valuations, et notre $B_E(I)$ correspond au $B_{q(I)}$ de [**FF**], où $q :]0, +\infty[\to]0, 1[$ est la fonction $x \mapsto q^{-x}$.

3.1.4. Localisation des zéros. — Si $x \in B_E(I)$, on définit son polygone de Newton NP_x^I par passage à la limite : si x_n est une suite d'éléments de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$ ayant pour limite x dans $B_E(I)$, la suite de fonction $r \mapsto v_r(x_n)$ tend vers $r \mapsto v_r(x)$ sur I (la suite des restrictions à un sous-intervalle compact J de I est même constante à partir d'un certain rang [**FF**, lemme 1.6.10]). Concrètement, *si a, b sont les bornes inférieure et supérieure de I, alors NP_x^I est définie sur $]\partial_g v_b(x), \partial_d v_a(x)[$, intervalle qui peut être $\emptyset$, est convexe décroissante, à pentes dans $-I$ et, si $\lambda \in -I$, la multiplicité de λ comme pente est $\partial_g v_\lambda(x) - \partial_d v_\lambda(x)$.*

On a alors le résultat suivant ([**FF**, prop. 1.6.25]) et [**FF**, prop. 2.4.10]).

Théorème 3.8. — (i) *x est inversible dans $B_E(I)$ si et seulement si NP_x^I est vide.*

(ii) *Si λ est une pente de NP_x^I, de multiplicité d, il existe $a_1, \ldots, a_d \in \mathscr{O}_{C^\flat}$ vérifiant $v_{C^\flat}(a_i) = -\lambda v_p(\pi)$ tels que $x = (\pi - [a_1]) \cdots (\pi - [a_d])y$ avec $y \in B_E(I)$. De plus, NP_y^I est obtenu en enlevant de NP_x^I le segment de pente λ.*

Si $y = (\pi - [a]) \in |Y_E|$, notons K_y le corps résiduel de y ; c'est un corps algébriquement clos, complet pour v_p. Posons $\delta(y) = v_p(\pi)/v_p([\pi^\flat]) \in]0, +\infty[$ (on considère les images dans K_y pour évaluer v_p ; on a aussi $\delta(y) = v_{C^\flat}(a)/v_{C^\flat}(\pi^\flat))$. Si I est un intervalle de $]0,+\infty[$, on note $|Y_E(I)|$ l'image inverse de I par δ.

Un *diviseur sur* $|Y_E(I)|$ est une somme formelle $D = \sum_{y\in|Y_E(I)|} n_y(y)$, avec $n_y \in \mathbf{N}$. On dit que D *est localement fini* si, pour tout intervalle compact $J \subset I$, la somme $\sum_{y\in|Y_E(J)|} n_y(y)$ est finie. Le th. 3.8 permet d'associer à $x \in B_E(I)$, son diviseur $\mathrm{Div}(x)$, qui est un diviseur localement fini sur $|Y_E(I)|$. Si N est un idéal principal, de $B_E(I)$, on note $\mathrm{Div}(N)$ le diviseur de n'importe lequel de ses générateurs.

Le résultat suivant (combinaison des th. 2.5.1, 2.6.1 et 2.7.4 de [**FF**]), que l'on comparera au th. 2.30, précise les résultats de Kedlaya du th. 2.34.

Théorème 3.9. — (i) *Si I est un intervalle compact, alors $B_E(I)$ est un anneau principal et l'application $N \mapsto \mathrm{Div}(N)$ induit une bijection de l'ensemble des idéaux de $B_E(I)$ sur l'ensemble des diviseurs à support fini sur $|Y_E(I)|$.*

(ii) *Si I est de la forme $[r,+\infty[$, avec $r > 0$, alors $B_E(I)$ est un anneau de Bézout, un idéal est fermé si et seulement si il est principal, et l'application $N \mapsto \mathrm{Div}(N)$ induit une bijection de l'ensemble des idéaux fermés de $B_E(I)$ sur l'ensemble des diviseurs localement finis sur $|Y_E(I)|$.*

Remarque 3.10. — (i) Si $I = [r,+\infty[$, avec $r > 0$, et si $D = \sum_i n_i(\pi - [a_i])$ est un diviseur localement fini sur $|Y_E(I)|$, alors $\prod_i(1 - \frac{[a_i]}{\pi})$ converge dans $B_E(I)$ et le diviseur du produit est D.

(ii) Si $I =]0,+\infty[$, le produit n'a aucune raison de converger (il peut y avoir une sous-suite de a_i, avec $v_{C^\flat}(a_i) \to 0$), et il semble raisonnable de penser, par analogie avec le cas d'égale caractéristique, que B_E n'est pas de Bézout (au moins si $C^\flat$ n'est pas maximalement complet). En tout cas, B_E^+ n'est pas de Bézout [**5**, rem. 1.1.3].

3.2. La courbe algébrique X_E. — [FF, th. 6.5.2]

3.2.1. Factorisation des éléments de $B_E^{\varphi_E=\pi^d}$. — Soit ℓ le logarithme de la loi de Lubin-Tate introduite ci-dessus. Si $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, soit

$$t_x = \ell([x]_\pi) = \lim_{n\to+\infty} \pi^{-n}\sigma_{\pi^{2n}}([x^{q^{-n}}]) = [x]_\pi \prod_{n\geq 1} \frac{\varphi^n(\xi_x)}{\pi}.$$

Théorème 3.11. — (i) *Si $\alpha \in E^*$, alors $t_{\sigma_\alpha(x)} = \alpha t_x$.*

(ii) *$x \mapsto t_x$ induit une bijection de $\mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$ sur $B_E^{\varphi_E=\pi} \setminus \{0\}$.*

(iii) *A multiplication par E^* près, t_x est l'unique élément de $B_E^{\varphi_E=\pi}$ divisible par ξ_x.*

(iv) *Si $d \geq 1$, tout $y \in B_E^{\varphi_E=\pi^d}$ est le produit de $t_1,\dots,t_d \in B_E^{\varphi_E=\pi}$, uniques à permutation et multiplication près par des éléments de E^*.*

(v) *Tout élément y de $\mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}$ peut s'écrire sous la forme $y = \frac{t_1\cdots t_d}{t_{d+1}\cdots t_{2d}}$, avec $t_1,\dots,t_{2d} \in B_E^{\varphi_E=\pi}$, et donc $\mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1} = \mathrm{Fr}(B_E^{\varphi_E=1})$.*

Remarque 3.12. — (i) Le diviseur de t_x est $\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\varphi_E^k(\xi_x))$. Réciproquement, si $D\in|Y_E|$ est invariant par φ_E, il existe $x_1,\dots,x_d$ tels que $D=\sum_{i=1}^d\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\varphi_E^k(\xi_{x_i}))$, ce qui permet de déduire les (iv) et (v) du th. 3.11 du (ii) du th. 3.9.

(ii) En combinant des arguments de diviseurs, le (i) du th. 3.8 et le (i) de la remarque, on montre que $B_E^{\varphi_E=\pi^d}=(B_E^+)^{\varphi_E=\pi^d}$, pour tout $d\in\mathbf{N}$.

(iii) On peut aussi utiliser des produits de Weierstrass pour construire des éléments de $B_E^{\varphi_E=\pi}$ de diviseur donné. Si $a\in\mathfrak{m}_{C^\flat}$, le produit $\prod_{n\geq 0}\big(1-\frac{\varphi_E^n([a])}{\pi}\big)$ converge dans B_E^+, vers un élément ℓ_a^+ vérifiant $\varphi_E(\ell_a^+)=\frac{\pi}{\pi-[a]}\ell_a^+$. Soit ℓ_a^- une solution dans A_E de $\varphi_E(x)=(\pi-[a])x$. Alors $\mathrm{Div}(\ell_a^-)$ est à support dans $|Y_E(]0,r])|$, avec $r>0$, et satisfait $\varphi_E(\mathrm{Div}(\ell_a^-))=\mathrm{Div}(\ell_a^-)+(\pi-[a])$, et donc $\mathrm{Div}(\ell_a^-)=\sum_{k\leq -1}\varphi_E^k(\pi-[a])$. Il s'ensuit que, si $\ell_a=\ell_a^+\ell_a^-$, alors $\varphi_E(\ell_a)=\pi\ell_a$ et $\mathrm{Div}(\ell_a)=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi^k(\pi-[a])$.

Si $E=\mathbf{Q}_p$ et si $a=p^\flat$, on obtient de la sorte un élément ayant même diviseur que $t=\log[\varepsilon]$. On en déduit que, si $x\in A_E\smallsetminus\{0\}$ vérifie $\varphi(x)=(p-[p^\flat])x$, il existe $c\in\mathbf{Q}_p^*$ tel que $t=cx\prod_{n\geq 0}\big(1-\frac{[(p^\flat)^{p^n}]}{p}\big)$.

3.2.2. La courbe X_E. — Remarquons que $P_E=\oplus_{d\in\mathbf{N}}B_E^{\varphi_E=\pi^d}$ est une algèbre graduée. On définit la courbe algébrique X_E par :

$$X_E=\mathrm{Proj}(P_E)=\mathrm{Proj}\big(\oplus_{d\in\mathbf{N}}B_E^{\varphi_E=\pi^d}\big).$$

Notons $|X_E|$ l'ensemble des points fermés de X_E. On déduit du th. 3.12 que $|X_E|$ est en bijection avec $\big((B_E^+)^{\varphi_E=\pi}\smallsetminus\{0\}\big)/E^*$: si $x\in|X_E|$, l'idéal homogène correspondant est engendré par $t_x\in(B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$, bien déterminé à multiplication près par E^*.

Théorème 3.13. — (i) *$H^0(X_E,\mathscr{O})=E$, mais X_E n'est pas de type fini sur E.*

(ii) *Si $x\in|X_E|$, et si $t_x\in(B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$ est un générateur de l'idéal homogène correspondant, alors :*

a) *$\mathscr{O}(X_E\smallsetminus\{x\})=(B_E^+[\frac{1}{t_x}])^{\varphi_E=1}$ est un anneau principal* (et donc X_E est une courbe car recouvert par des spectres d'anneaux de Dedekind).

b) *Le corps résiduel K_x est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0, *complet pour v_p, t_x est un paramètre local en x, et $\widehat{\mathscr{O}}_{X_E,x}=\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_x)$.*

c) *Tout élément non nul de $\mathscr{O}(X_E\smallsetminus\{x\})$ se factorise sous la forme $\frac{t_1}{t_x}\cdots\frac{t_d}{t_x}$, où $t_i\in(B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$ et $t_i\notin E^*t_x$; de plus $t_1,\dots,t_d$ sont uniques à permutation et multiplication par E^* près.*

Remarque 3.14. — (i) Si $E=\mathbf{Q}_p$ et $t_x=t$, on a $(B_E^+[\frac{1}{t_x}])^{\varphi_E=1}=\mathbf{B}_e$. La principalité de $\mathbf{B}_e$ est donc un cas particulier du (ii) a) et le (ii) c) répond (positivement) à la question 2 des « devoirs de vacances » de Fontaine.

(ii) On a une suite exacte

$$0\to H^0(X_E,\mathscr{O})\to\mathscr{O}(X_E\smallsetminus\{x\})\to\mathscr{O}_{X_E,x}[\tfrac{1}{t_x}]/\mathscr{O}_{X_E,x}\to 0$$

induite par l'application qui à une fonction associe sa partie principale en x. Si $E=\mathbf{Q}_p$ et $t_x=t$, on retrouve la suite exacte fondamentale.

(iii) Si $x_0, x_1, \dots, x_d$ sont des points fermés de X_E, distincts deux à deux, et si $t_{x_0}, \dots, t_{x_d} \in (B_E^+)^{\varphi_E = \pi}$ sont des générateurs des idéaux homogènes correspondants, le théorème des restes chinois, couplé avec le (ii) b), implique que la réponse à la question 3 des « devoirs de vacances » est “oui”.

(iv) Si $y \in |Y_E|$, il existe $t_x \in (B_E^+)^{\varphi_E = \pi}$, bien déterminé à multiplication près par E^*, dont le diviseur est $\sum_{k \in \mathbf{Z}} (\varphi_E^k(y))$, et t_x détermine un élément x de $|X_E|$. On en déduit des bijections naturelles

$$|X_E| \cong |Y_E|/\varphi^{\mathbf{Z}} \cong |\tilde{D}_C^\times|/E^* \cong |\tilde{D}_{C^\flat}^\times|/E^*,$$

l'action de E^* sur $|\tilde{D}_C^\times| = |\tilde{D}_{C^\flat}^\times| = \mathfrak{m}_{C^\flat} \setminus \{0\}$ étant donnée par la loi de Lubin-Tate comme dans le th. 3.5. On note $\infty \in |X_E|$ l'image de $\infty \in |Y_E|$.

Théorème 3.15. — ([**FF**, th. 8.6.1])

(i) *Si E' est une extension finie de E, alors $X_{E'} = E' \otimes_E X_E$. En particulier $X_{E'}$ est un revêtement étale de degré $[E' : E]$ de X_E.*

(ii) *Tout revêtement étale fini de X_E est de cette forme, i.e. X_E est géométriquement simplement connexe.*

Si $k_{E'} = \mathbf{F}_{q^a}$, alors $\varphi_{E'} = \varphi_E^a$ et $\mathrm{Fr}(B_{E'}) = E' \otimes_{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E} \mathrm{Fr}(B_E)$, avec $\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E = \mathbf{Q}_{q^a} \otimes_{\mathbf{Q}_q} E$, et donc

$$\mathrm{Fr}(B_{E'})^{\varphi_{E'}=1} = E' \underset{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_{E'}=1} = E' \underset{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E}{\otimes} (\mathbf{Q}_{q^a} \underset{\mathbf{Q}_q}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}) = E' \underset{E}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}$$

On en déduit le (i). Le (ii) est un résultat profond, dont la preuve utilise la classification des fibrés sur X_E (th. 4.5).

3.3. La courbe analytique Y_E^{ad} et son quotient X_E^{ad}. — La bijection $|X_E| = |Y_E|/\varphi_E^{\mathbf{Z}}$ provient d'un morphisme de variétés analytiques : on a le résultat suivant.

Théorème 3.16. — ([**19**, th. 2.1]) *Si $I = [r_1, r_2]$, avec $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, alors $Y_E^{\mathrm{ad}}(I) = \mathrm{Spa}(B(I), B(I)^+)$ est un espace adique, i.e. le préfaisceau $\mathscr{O}$ est un faisceau.*

On définit Y_E^{ad} comme la limite inductive des $Y_E^{\mathrm{ad}}([r_1, r_2])$, pour $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ et, plus généralement, si I est un intervalle de $]0, +\infty[$, on note $Y_E(I)^{\mathrm{ad}}$ la limite inductive des $Y_E([r_1, r_2])^{\mathrm{ad}}$, pour $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, avec $[r_1, r_2] \subset I$. Alors

$$\mathscr{O}(Y_E^{\mathrm{ad}}) = B \quad \mathscr{O}(Y_E^{\mathrm{ad}}(I)) = B(I).$$

Il résulte du th. 3.9 que $|Y_E(I)|$ est l'ensemble des points classiques de $Y_E^{\mathrm{ad}}(I)$.

Remarque 3.17. — On peut même analytifier $\mathrm{Spec}(A_E)$ ([**55**, prop. 13.1.1]). Soit $\delta : \mathrm{Spa}\, A_E \setminus \{\mathfrak{m}_{A_E}\} \to [0, +\infty]$ définie par $\delta(x) = \frac{\overline{x}(\pi)}{\overline{x}([\pi^\flat])}$, où $\overline{x}$ est la valuation réelle déterminée par x. L'espace Y_E^{ad} est alors l'image inverse de $]0, +\infty[$ par δ.

On a $\delta(\varphi(x)) = q\delta(x)$, et donc φ opère proprement sur $Y_E^{\rm ad}$, ce qui permet de considérer l'espace quotient
$$X_E^{\rm ad} = Y_E^{\rm ad}/\varphi^{\mathbf{Z}}.$$

Remarque 3.18. — (i) $X_E^{\rm ad}$ est l'analytifiée de X_E.

(ii) Le (v) du th. 3.11 peut se traduire sous la forme : toute fonction méromorphe sur $X_E^{\rm ad}$ est une fonction rationnelle, ce qui est une manifestation du principe GAGA, la courbe X_E étant une courbe propre.

(iii) Écrire $X_E^{\rm ad}$ sous la forme $Y_E^{\rm ad}/\varphi^{\mathbf{Z}}$ fait ressembler $X_E^{\rm ad}$ à une courbe elliptique de Tate. Par ailleurs, X_E ressemble à $\mathbf{P}^1$ puisque tout diviseur de degré 0 est principal (i.e. X_E est de genre 0), mais il s'agit d'un $\mathbf{P}^1$ un peu spécial car il a des quotients qui ne sont pas de genre 0 : Si F un sous-corps fermé de $C^\flat$, on peut associer à F une courbe $X_{E,F}$ en remplaçant $C^\flat$ par F dans les formules. L'anneau $\mathbf{B}_{E,e}(F)$ correspondant est alors seulement un anneau de Dedekind [**FF**, prop. 7.2.1], et pas un anneau principal, et on a [**FF**, prop. 7.2.4]
$$\mathrm{Pic}^0(X_{E,F}) = \mathrm{Hom}(G_F, E^\times).$$

Remarque 3.19. — La bijection $|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^*$ peut aussi s'analytifer, mais il faut sortir du cadre des espaces analytiques (ou même adiques), et utiliser celui des diamants [**55, 22**]. Un certain nombre des énoncés ci-dessus prennent tout leur sens dans le monde des diamants (et ont fortement motivé son introduction).

- On a $E^\diamond \cong \widehat{E}_\infty^\diamond/\mathrm{Gal}(E_\infty/E)$, et comme $\mathrm{Gal}(E_\infty/E) \cong \mathscr{O}_E^*$, la bijection $|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^*$ est une manifestation de l'égalité de diamants
$$\widehat{E}_\infty^\diamond \times C^\diamond = (\widehat{E}_\infty^\flat)^\diamond \times (C^\flat)^\diamond \cong (\tilde{D}_{C^\flat}^\times)^\diamond = (\tilde{D}_C^\times)^\diamond$$
- La prop. 3.4 est une manifestation de l'égalité de diamants $E^\diamond \times C^\diamond \cong Y_E^\diamond$.
- Le th. 3.15 (ou sa version [**57**] pour $X_E^{\rm ad}$) se traduit par
$$\pi_1((E^\diamond \times C^\diamond)/(1\times\varphi)) = G_E.$$

Comme $C^\diamond/G_E \cong E^\diamond$, on a aussi
$$\pi_1((E^\diamond \times E^\diamond)/(1\times\varphi)) = G_E \times G_E.$$

Ce dernier énoncé est un analogue arithmétique d'un lemme de Drinfeld à la base de la construction des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires sur les corps de fonctions. Il réalise un vieux fantasme de pouvoir faire des produits « absolus » (dans le monde des schémas, $E\times E = E$...). C'est un des points de départ de la géométrisation de la correspondance de Langlands locale [**19, 20, 21, 22, 55**].

4. Fibrés sur X_E

Si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, on peut associer à $\mathscr{E}$ deux invariants additifs dans les suites exactes : son rang $\mathrm{rg}(\mathscr{E})$ et son degré $\deg(\mathscr{E})$ défini par $\deg(\mathscr{E}) = \deg(\det\mathscr{E})$

où, si $\mathscr{L}$ est un fibré de rang 1 sur X et si s une section rationnelle de $\mathscr{L}$, on définit $\deg(\mathscr{L})$ comme étant $\sum_{x\in|X_E|} v_x(s)$, ce qui ne dépend pas du choix de s car $\sum_{x\in|X_E|} v_x(f) = 0$ si $f \in \mathrm{Fr}(\mathbf{B}_e)^*$.

Munie de ces deux invariants, la catégorie des fibrés sur X_E est une catégorie de Harder-Narasimhan (comme celle des fibrés sur une courbe projective lisse). Tout fibré sur X_E est donc muni d'une filtration canonique, croissante, telle que les quotients successifs soient semi-stables et la suite des pentes strictement décroissante.

4.1. Modifications de fibrés. — Si $y_1, \dots, y_k \in X_E$, et si $U = X_E \setminus \{y_1, \dots, y_k\}$, on peut décrire un fibré $\mathscr{E}$ sur X_E, à la Beauville-Laszlo, en utilisant le recouvrement de X_E formé de U et de voisinages infinitésimaux des y_i. Soient $t_1, \dots, t_k$ les éléments de $(B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$ de diviseurs respectifs $(y_1), \dots, (y_k)$, et K_i le corps résiduel en y_i, de telle sorte que $\mathscr{O}(U) = (B_E^+[\frac{1}{t_1\cdots t_k}])^{\varphi_E=1}$ et $\widehat{\mathscr{O}}_{X_E,y_i} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$. Alors $\mathscr{E}$ est équivalent à la donnée de :

- un $\mathscr{O}(U)$-module projectif M de rang fini,
- pour $1 \le i \le k$, un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$-réseau $\widehat{M}_i$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}(K_i) \otimes_{\mathscr{O}(U)} M$.

L'application $\mathscr{E} \mapsto (M, (\widehat{M}_i)_{1\le i\le r})$ est celle obtenue en posant

$$M = H^0(U, \mathscr{E}), \quad \widehat{M}_i = \widehat{\mathscr{O}}_{X_E,y_i} \otimes_{\mathscr{O}_{X_E}} \mathscr{E}.$$

Cette description des fibrés rend totalement transparentes *les modifications d'un fibré* $\mathscr{E}$ en des points $y_1, \dots, y_k$: une telle modification revient juste à changer les sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$-réseaux $\widehat{M}_i$, pour $1 \le i \le k$.

Remarque 4.1. — (i) Nous n'aurons besoin que de modifications en ∞ dans la suite, mais les modifications en un nombre arbitraire de points [**19, 20, 21, 22, 55**], analogues aux chtoukas multipattes de V. Lafforgue [**42**], semblent devoir jouer un rôle important pour la géométrisation de la correspondance de Langlands locale.

(ii) Si $\{y_1, \dots, y_k\} = \{\infty\}$, et si on note $\mathbf{B}_{E,e}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ les anneaux $(B_E^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E=1}$ (avec $t = t_\infty$) et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_\infty)$, on obtient une B-paire (cf. n° 2.5.8). Il résulte de la discussion ci-dessus que *la catégorie des fibrés sur X_E est équivalente à celle des B-paires.*

4.2. Le fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$. — Si h est un entier ≥ 1, on note E_h l'extension non ramifiée de E, de degré h. Si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, avec d, h entiers premiers entre eux et $h \ge 1$, on note D_λ l'algèbre centrale simple de centre E et d'invariant λ :

$$D_\lambda = E_h[\Pi]/(\Pi^h = \pi^d), \quad \Pi x \Pi^{-1} = \varphi_E(x), \text{ si } x \in E_h.$$

Si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, on définit un fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ sur X_E de la manière suivante. On considère le P-module gradué $\oplus_{n\in\mathbf{N}} B_E^{\varphi_E^h=\pi^{d+n}}$, et on note $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ le fibré associé : si $y \in |X_E|$, alors $H^0(X_E \setminus \{y\}, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \big(B_E[\frac{1}{t_y}]\big)^{\varphi_E^h=\pi^d} = \big(B_E^+[\frac{1}{t_y}]\big)^{\varphi_E^h=\pi^d}$.

Remarque 4.2. — Il y a une définition plus conceptuelle [**FF**, n° 8.2.2] de $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$: X_{E_h} est un revêtement fini étale de degré h de X_E, et $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ est l'image directe du fibré en droites $\mathscr{O}_{X_{E_h}}(d)$ sur X_{E_h}.

Proposition 4.3. — (i) *$\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ est de rang h, de degré d, et de pente λ.*

(ii) *Les groupes de cohomologie $H^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda))$ sont donnés par* ([**FF**, prop. 8.2.3]) *:*

- $H^0(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \begin{cases} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^d} & si\ \lambda \geq 0, \\ 0 & si\ \lambda < 0, \end{cases}$,
- $H^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \begin{cases} 0 & si\ \lambda \geq 0, \\ \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/(t^d\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ + E_h) & si\ \lambda < 0, \end{cases}$,
- $H^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = 0$ *si* $i \geq 2$.

(iii) $\mathrm{End}(\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = D_\lambda$ ([**FF**, prop. 8.2.8]).

Remarque 4.4. — (i) On a privilégié le point ∞ mais, si $\lambda < 0$, on a, pour tout $y \in |Y_E|$, $H^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y)/(t_y^d\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y) + E_h)$, ce qui est un peu troublant car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y)$ dépend de y (en tant qu'anneau topologique [**40**]).

(ii) Les groupes de cohomologie de $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{H}^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda))$, et on a

$$\mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^0(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) - \mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = (d, h).$$

4.3. Classification des fibrés sur X_E. — [FF, chap. 8]

Théorème 4.5. — ([**FF**, th. 8.2.10]) *Si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, il existe des nombres rationnels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$, uniquement déterminés, tels que*

$$\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_{X_E}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{X_E}(\lambda_r).$$

Remarque 4.6. — (i) Il résulte de ce théorème que la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}$ est scindée, et que l'on a une décomposition de $\mathscr{E}$ sous la forme $\mathscr{E} = \oplus_{\lambda \in \mathbf{Q}} \mathscr{E}_\lambda$ où $\mathscr{E}_\lambda \cong \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)^{m_\lambda}$, est semi-stable de pente λ.

(ii) Un fibré semi-stable de pente 0 est trivial.

(iii) En utilisant le (ii) de la prop. 4.3 et la décomposition ci-dessus, on voit que :

$$\dim_E(H^0(X_E, \mathscr{E})) < +\infty \Leftrightarrow \text{toutes les pentes de } \mathscr{E} \text{ sont } \leq 0.$$

(iv) Il résulte du (ii) de la rem. 4.4 que, si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, les groupes de cohomologie de $\mathscr{E}$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{H}^i(X_E, \mathscr{E})$, et que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathscr{E}$ est :

$$\mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^0(X_E, \mathscr{E}) - \mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^1(X_E, \mathscr{E}) = (\deg(\mathscr{E}), \mathrm{rg}(\mathscr{E})).$$

4.4. Fibrés et φ-modules. — [FF, chap. 11].

Un φ-module sur $\Lambda = \breve{E}$ ou B_E^+ est un Λ-module libre M muni d'un morphisme semi-linéaire $\varphi : M \to M$, tel que $a \otimes x \mapsto a\varphi(x)$ induise un isomorphisme $\Lambda \otimes_{\varphi(\Lambda)} M \cong M$ (autrement dit, la matrice dans une base appartient à $\mathrm{GL}_d(\Lambda)$).

Théorème 4.7. — *On a des foncteurs naturels :*

$$\begin{tikzcd}
& \{B\text{-paires}\} \arrow[dr, "\sim"] & & \\
\{\text{Fibrés sur } X_E\} \arrow[ur, "\sim"] & & \{\varphi\text{-modules sur } B_E^+\} \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[r, shift left] & \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

(Les foncteurs du triangle sont des équivalences de catégories, les autres sont essentiellement surjectifs mais pas pleinement fidèles.)

On a déjà expliqué comment marchait l'équivalence $\{B\text{-paires}\} \cong \{\text{Fibrés sur } X_E\}$. Les autres foncteurs sont obtenus de la manière suivante.

• La projection $\mathscr{O}_{C^\flat} \to k_{C^\flat}$ induit des projections $A_E \to \mathscr{O}_{\breve{E}}$ et $B_E^+ \to \breve{E}$ commutant à φ_E. Réciproquement, le choix d'une section $k_{C^\flat} \to \mathscr{O}_{C^\flat}$ permet d'identifier $\breve{E}$ à un sous-anneau de B_E^+. D'où des foncteurs $B_E^+ \otimes_{\breve{E}} -$ et $\breve{E} \otimes_{B_E^+} -$ d'extension des scalaires. La preuve de la surjectivité essentielle [**FF**, n° 11.1.5] utilise un nouveau venu dans le monde des anneaux de Fontaine, à savoir l'anneau $\overline{B}_E$, qui est à la fois un quotient de B_E^+ et un quotient de $A[\frac{1}{p}]$ par des idéaux sur lesquels φ_E est très topologiquement nilpotent.

• Si M^+ est un φ-module sur B_E^+, la B-paire associée est

$$(M_e, M_{\mathrm{dR}}^+) = \big((B_E^+[\tfrac{1}{t}] \otimes_{B_E^+} M^+)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{B_E^+} M\big).$$

• Si (M_e, M_{dR}^+) est une B-paire, le φ-module sur B_E^+ associé est

$$M^+ = \{x \in B_E^+[\tfrac{1}{t}] \otimes M_e,\ \varphi^n(x) \in M_{\mathrm{dR}}^+,\ \forall n \in \mathbf{Z}\}.$$

• Si M est un φ-module sur $\breve{E}$,

◇ le φ-module sur B_E^+ associé est simplement $M^+ = B_E^+ \otimes_{\breve{E}} M$,

◇ la B-paire associée est $\big((B_E^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\breve{E}} M)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\breve{E}} M\big)$

◇ le fibré $\mathscr{E}(M)$ est celui défini par le P-module gradué $\oplus_{n\in\mathbf{N}}(B_E^+ \otimes_{\breve{E}} M)^{\varphi=\pi^n}$: si $y \in |X_E|$, alors $H^0(X \smallsetminus \{y\}, \mathscr{E}(M)) = (B_E^+[\frac{1}{t_y}] \otimes M)^{\varphi=1}$.

Il est élémentaire de vérifier que, si on part d'un φ-module sur $\breve{E}$, le diagramme obtenu en considérant les objets associés commute. Par contre, il n'est pas clair que le M^+ obtenu à partir d'une B-paire (M_e, M_{dR}^+) soit libre sur B_E^+ ni que, si M^+ est un φ-module sur B_E^+, le $\mathbf{B}_e$-module $\big((B_E^+[\frac{1}{t}] \otimes_{B_E^+} M^+)^{\varphi=1}$ ait le bon rang (ou même qu'il soit non nul si M^+ est non nul) ; cela résulte [(32)] du théorème de classification des fibrés sur X_E (th. 4.5), de l'équivalence entre φ-modules sur B_E^+ et $\breve{E}$, et du classique théorème de Dieudonné-Manin (prop. 2.36).

Remarque 4.8. — Via l'équivalence $\{\text{Fibrés sur } X_E\} \cong \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\}$, le fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ correspond à $\breve{E}(-\lambda)$. Autrement dit, *les pentes de Harder-Narasimhan sont les opposées des pentes de Frobenius.*

32. On peut aussi utiliser le th. 2.16 qui contient un certain nombre des énoncés précédents.

Remarque 4.9. — Le diagramme du th. 4.7, peut s'étendre en un diagramme faisant intervenir la courbe analytique X_E^{an}.

$$\begin{tikzcd}
& \{B\text{-paires}\} \arrow[dr, "\sim"] & & \\
\{\text{Fibrés sur } X_E\} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[d, "\wr", "\mathrm{GAGA}"'] & & \{\varphi\text{-modules sur } B^+\} \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\wr"] & \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\{\text{Fibrés sur } X_E^{\mathrm{an}}\} \arrow[rr, equal] & & \{\varphi\text{-modules sur } B\} \arrow[r, "\sim"] & \{\varphi\text{-modules sur } \mathscr{R}(C^\flat)\}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la flèche $\{\text{Fibrés sur } X_E\} \to \{\text{Fibrés sur } X_E^{\mathrm{an}}\}$ est l'analytification (que ce soit une équivalence de catégories est une manifestation d'un principe GAGA, mais les preuves existantes ne sont pas directes). Les φ-modules sur B sont les B-modules localement libres, de rang fini, munis d'une action semi-linéaire de φ telle que $B \otimes_{\varphi(B)} \varphi(M) \to M$ soit un isomorphisme. Les flèches non encore décrites s'obtiennent juste par extension des scalaires, en utilisant les injections $\breve{E} \subset B^+ \subset B \subset \mathscr{R}(C^\flat)$.

5. Fibrés G_K-équivariants et représentations de G_K

Comme il transparait des extraits des courriels de Fontaine reproduits dans le chap. 1, mieux comprendre les diverses démonstrations des conjectures « faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible » et « de Rham $\Rightarrow$ potentiellement semi-stable », ainsi que les objets qu'elles font intervenir, a été une motivation puissante pour l'introduction de la courbe X_E et l'étude des fibrés sur X_E.

L'utilisation des fibrés sur X_E fournit une preuve de « fa $\Rightarrow$ a » complètement naturelle ([**FF**, § 10.5] ou § 5.2 ci-dessous). Cette preuve est très proche dans sa structure de la preuve de Berger (cf. n° 2.5.6), mais l'utilisation des modifications de fibrés en trivialise l'étape la plus délicate, i.e. celle consistant à modifier un (φ, Γ)-module en un nombre infini de points.

Supposons dorénavant que $E = \mathbf{Q}_p$ *et notons* X *et* Y *les courbes* X_E *et* Y_E.

5.1. Fibrés G_K-équivariants et (G_K, B)-paires. — Le groupe G_K agit sur $C^\flat$, et donc aussi sur Y et X. Le morphisme $\theta : \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$ définit un point $\infty \in |Y|$ (correspondant à l'idéal $(p - [p^\flat])$), qui est invariant par G_K.

On note $\infty \in |X|$, l'image de $\infty \in |Y|$. C'est le zéro du $2i\pi$ p-adique $t = \log[\varepsilon]$ de Fontaine. Alors ∞ est fixe par G_K et tous les autres points de X ont une orbite infinie sous l'action de G_K ([**FF**, prop. 10.1.1] ou [**5**, lemme 1.1.8]). De plus,

$$\mathscr{O}(X \smallsetminus \{\infty\}) = \mathbf{B}_e \quad \text{et} \quad \widehat{\mathscr{O}}_{X,\infty} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+,$$

où $\mathbf{B}_e$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ sont les anneaux du § 1.2, et ces identifications respectent l'action naturelle de G_K.

Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, sa filtration de Harder-Narasimhan est constituée de fibrés G_K-équivariants (car l'action de G_K respecte les pentes des fibrés). Il découle du th. 4.5 que, si $\mathscr{E}$ est semi-stable de pente 0, alors $H^0(X, \mathscr{E})$ est *une* $\mathbf{Q}_p$*-représentation de* G_K, i.e. un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie muni d'une action linéaire continue de G_K. On déduit du (ii) de la rem. 4.6 le résultat suivant.

Théorème 5.1. — *Les foncteurs*

$$V \mapsto V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{O}_X \quad \text{et} \quad \mathscr{E} \mapsto H^0(X, \mathscr{E})$$

induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre la catégorie des $\mathbf{Q}_p$*-représentations de* G_K *et celle des fibrés* G_K*-équivariants sur* X*, semi-stables de pente* 0.

Remarque 5.2. — (i) Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, et si $\mathscr{E}'$ est un fibré obtenu par modification de $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{E}'$ est G_K-équivariant si et seulement si la modification n'a lieu qu'en ∞ (c'est une traduction du fait que ∞ est fixe par G_K et est l'unique point de X ayant une orbite finie sous l'action de G_K).

(ii) Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, X_E est un revêtement de degré $[E : \mathbf{Q}_p]$ de X, et la fibre au-dessus de ∞ est stable par G_K et finie. Une modification G_K-équivariante peut se faire en chacune des orbites de cette fibre sous l'action de G_K, ce qui complique un peu l'étude des E-représentations de G_K.

Si $\lambda = \frac{d}{h}$, on fait agir G_K sur $D_\lambda = \mathbf{Q}_{p^h}[\Pi]$ à travers son action sur $\mathbf{Q}_{p^h}$. Une D_λ*-représentation* V *de* G_K est alors un D_λ-module à droite de rang fini muni d'une action semi-linéaire de G_K : si $\sigma \in G_K$, $v \in V$, et $a \in D_\lambda$, alors $\sigma(x \cdot a) = \sigma(x) \cdot \sigma(a)$.

Théorème 5.3. — ([**FF**, th. 10.1.7]) *Les foncteurs*

$$V \mapsto V \otimes_{D_\lambda} \mathscr{O}_X(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathscr{E} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_X(\lambda), \mathscr{E})$$

induisent des équivalences inverses l'une de l'autre entre la catégorie des D_λ*-représentations de* G_K *et celle des fibrés* G_K*-équivariants sur* X*, semi-stables de pente* λ.

Remarque 5.4. — Via l'équivalence de catégories entre fibrés sur X et B-paires, un fibré G_K-équivariant sur X correspond à une (G_K, B)-paire (cf. n° 2.5.8), et le th. 5.3 est équivalent à [**5**, th. B].

5.2. (φ, N)**-modules et fibrés** G_K**-équivariants.** — Comme on l'a vu (ex. 2.46), à un (φ, N)-module filtré D sur K, on peut associer une (G_K, B)-paire $(M_e(D), M_{\mathrm{dR}}^+(D))$, et donc un fibré G_K-équivariant $\mathscr{E}(D)$ sur X, en posant

$$M_e(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[\tfrac{1}{t}] \otimes_{K_0} D)^{N=0, \varphi=1} \quad \text{et} \quad M_{\mathrm{dR}}^+(D) = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_K D_K)$$

On a alors

$$\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = H^0(X, \mathscr{E}(D)).$$

Il en résulte que D *est admissible si et seulement si* $\mathscr{E}(D)$ *est semi-stable de pente* 0.

Remarque 5.5. — (i) On dit que $\mathscr{E}$ est *log-cristallin* si $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes M_e(\mathscr{E}))^{G_K}$ est de dimension $\mathrm{rg}(\mathscr{E})$ sur K_0. Alors $D \mapsto \mathscr{E}(D)$ induit une équivalence de $\otimes$-catégories de la catégorie des (φ, N)-modules filtrés sur celle des fibrés G_K-équivariants, log-cristallins.

(ii) Si D est un (φ, N)-module sur K_0, on peut voir D comme un (φ, N)-module filtré sur K en mettant la filtration triviale sur D_K (i.e $D^0_K = D_K$ et $D^1_K = 0$). Le fibré $\mathscr{E}(D)$ associé est celui associé au P-module gradué $\oplus_{k\in\mathbf{Z}}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=p^k}$. Si $\mathrm{Fil}^\bullet$ est une filtration sur D_K, on obtient $\mathscr{E}(D, \mathrm{Fil}^\bullet)$ à partir de $\mathscr{E}(D)$ par une modification en ∞.

Proposition 5.6. — *Soit D un (φ, N)-module filtré sur K.*

(i) $\mathrm{rg}(\mathscr{E}(D)) = \mathrm{rg}(D)$, $\deg(\mathscr{E}(D)) = \deg(D)$ *et* $\mu(\mathscr{E}(D)) = \mu(D)$.

(ii) *Si* $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ *est la filtration de Harder-Narasimhan de D, alors celle de $\mathscr{E}(D)$ est* $0 = \mathscr{E}(D_0) \subset \mathscr{E}(D_1) \subset \cdots \subset \mathscr{E}(D_r) = \mathscr{E}(D)$.

(iii) *D est faiblement admissible si et seulement si $\mathscr{E}(D)$ est semi-stable, de pente* 0.

Démonstration. — L'égalité des rangs repose sur les ingrédients suivants :

• $a \otimes v \mapsto a \otimes (v + uNv + \frac{u^2}{2!}N^2 v + \cdots)$ induit un isomorphisme de φ-modules de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes D$ sur $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes D)^{N=0}$.

• $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes_{K_0} D = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} (\breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{K_0} D)$ et $\breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{K_0} D \cong \oplus_\lambda \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)^{m_\lambda}$.

• Si $\lambda = \frac{d}{h}$, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda))^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{B}_e$-module naturellement isomorphe à $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]^{\varphi^h=p^d} \cong t^d_h \mathbf{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_e$, et donc est libre de rang $h = \mathrm{rg}(\breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda))$.

Si la filtration sur D_K est triviale, l'égalité des degrés résulte de la décomposition ci-dessus et de la rem. 4.8. Le cas général s'en déduit en utilisant la formule reliant le degré d'un fibré et celui d'une de ses modifications ([**FF**, lemme 10.5.5]). L'égalité des pentes est alors immédiate, ce qui prouve le (i).

Pour prouver le (ii), commençons par remarquer que la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}(D)$ est stable par G_K (par unicité). Il suffit donc, compte-tenu du (i), de prouver qu'un sous-fibré $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}(D)$, stable par G_K, et facteur direct, est de la forme $\mathscr{E}(D')$, avec D' sous-(φ, N)-module filtré de D.

Pour cela, introduisons le foncteur $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}$ associant à une $\mathbf{B}_e$-représentation M (i.e. un $\mathbf{B}_e$-module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire de G_K) le (φ, N)-module $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M)$ sur K_0 défini par $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_e} M)^{G_K}$. Comme $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ est G_K-régulier et $\mathrm{Fr}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}])^{G_K} = K_0$, on a $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M)) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M)$ et, s'il y a égalité, l'application naturelle $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{K_0} \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) \to \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_e} M$ est un isomorphisme.

Soient alors $M = M_e(D)$, $M' = H^0(X \smallsetminus \{\infty\}, \mathscr{E}')$ et $M'' = M/M'$. Comme $\mathscr{E}'$ est facteur direct, M'' est un $\mathbf{B}_e$-module libre, et on a une suite exacte $0 \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M') \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M'')$. Or $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = D$ et donc $\dim_{K_0} \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M)$; il s'ensuit que les inégalités $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M')) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M')$ et $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M'')) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M'')$ sont des égalités et donc, en particulier, que si on pose $D' = \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M')$, alors $M' = M_e(D')$. Comme $\mathscr{E}'$ est facteur direct, cela implique que $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(D')$, ce qui prouve le (ii).

Le (iii) est une conséquence immédiate des (i) et (ii) et des définitions. □

Théorème 5.7. — *Soit D un (φ, N)-module filtré sur K.*
(i) *Si $\mu(D) > 0$, alors $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\rm st}(D) = +\infty$.*
(ii) *Si $\mu(D) = 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*
- *D est faiblement admissible,*
- *$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\rm st}(D) < +\infty$,*
- *$\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\rm st}(D) = \dim_{K_0} D$* (i.e. D est admissible).

Démonstration. — Soit $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ la filtration de Harder-Narasimhan de D. On rappelle que $\mathbf{V}_{\rm st}(D) = H^0(X, \mathscr{E}(D))$.

• Si $\mu(D) > 0$, alors $\mu(D_1) > 0$, et donc $\mu(\mathscr{E}(D_1)) > 0$, et $\dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(X, \mathscr{E}(D)) = +\infty$, d'après le (iii) de la rem. 4.6, puisque $H^0(X, \mathscr{E}(D))$ contient $H^0(X, \mathscr{E}(D_1))$. On en déduit le (i).

• Si $\mu(D) = 0$, alors $\mu(D_1) > 0$ sauf si D est semi-stable (et donc de pente 0, i.e. D est faiblement admissible), ce qui équivaut, d'après le (iii) de la prop. 5.6, à ce que $\mathscr{E}(D)$ soit semi-stable de pente 0, et donc à ce que D soit admissible. □

5.3. Le théorème de monodromie p-adique. — Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, de rang d, on pose

$$M_{\rm dR}^+(\mathscr{E}) = \widehat{\mathscr{O}}_{X,\infty} \otimes_{\mathscr{O}_X} \mathscr{E} \quad \text{et} \quad M_{\rm dR}(\mathscr{E}) = M_{\rm dR}^+(\mathscr{E})[\tfrac{1}{t}].$$

On dit que $\mathscr{E}$ *est de de Rham* si $\dim_K M_{\rm dR}(\mathscr{E})^{G_K} = d$. On dit que $\mathscr{E}$ *est potentiellement log-cristallin* s'il existe une extension finie L de K, telle que $\mathscr{E}$, vu comme fibré G_L-équivariant, soit de la forme $\mathscr{E}(D)$, où D est un (φ, N)-module filtré sur L. Il est élémentaire que « $\mathscr{E}$ potentiellement log-cristallin » implique « $\mathscr{E}$ de de Rham », et on a le résultat ci-dessous qui montre que la réciproque est vraie ; compte-tenu du lien entre représentations de G_K et fibrés G_K-équivariants sur X, cela fournit une preuve de « dR $\Rightarrow$ pst ».

Théorème 5.8. — ([**FF**, th. 10.6.10]) *Si $\mathscr{E}$ est de de Rham, alors $\mathscr{E}$ est potentiellement log-cristallin.*

Démonstration. — La preuve comporte trois étapes :

• Quitte à modifier $\mathscr{E}$ en ∞, ce qui ne fait que changer les pentes et la filtration finale, on peut supposer que $M_{\rm dR}^+(\mathscr{E}) = \mathbf{B}_{\rm dR}^+ \otimes_K M_{\rm dR}(\mathscr{E})^{G_K}$.

• Le cas isocline : si $\mathscr{E}$ est semi-stable de pente λ, alors $\mathscr{E} \cong V \otimes_{D_\lambda} \mathscr{O}(\lambda)$, où V est une $D_\lambda^{\rm op}$-représentation de G_K de dimension finie (th. 5.3). Maintenant, $M_{\rm dR}^+(\mathscr{O}(\lambda))$ est une $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$-représentation triviale, et comme il en est de même de $M_{\rm dR}^+(\mathscr{E})$ par hypothèse, on en déduit que $\mathbf{B}_{\rm dR}^+ \otimes V$ est une $\mathbf{B}_{\rm dR}^+$-représentation triviale. D'après le th. 2.4, cela implique que V est potentiellement non ramifiée, et donc que $\mathscr{E}$ est potentiellement cristallin.

• Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de pentes de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ n'a qu'une seule pente, on est dans le cas isocline qui a déjà été traité. Si $\mathscr{E}$ n'est pas isocline, on peut l'écrire comme une extension $\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2$ où les pentes de $\mathscr{E}_1$ sont strictement supérieures à celles de $\mathscr{E}_2$. L'hypothèse de récurrence implique que, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe des (φ, N)-modules D_1, D_2 tels que $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}(D_i)$, et on cherche à prouver que $\mathscr{E} = \mathscr{E}(D)$, où D est une extension $D_1 \to D \to D_2$ de (φ, N)-modules sur K_0. On peut, pour ce faire, supposer que k_K est algébriquement clos.

Si $\Delta = D_2^* \otimes D_1$, l'hypothèse sur les pentes de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ implique que les pentes de frobenius de Δ sont < 0 et, en particulier, que $\varphi - 1$ est bijectif sur Δ. On a $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta) = \Delta^{\varphi = p^{-1}}$ [**FF**, lemme 10.6.12] :

$$\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta) \cong \frac{\{(x, y) \in \Delta \times \Delta,\ (p\varphi - 1)x = Ny\}}{\{(Nz, (\varphi - 1)z),\ z \in \Delta\}} \cong \Delta^{\varphi = p^{-1}}$$

l'inverse du dernier isomorphisme envoyant a sur la classe de $(a, 0)$, le précédent envoyant une extension $\Delta \to E \to \mathbf{1}$ sur $(Ne, (\varphi - 1)e)$, où $e \in E$ est un relèvement de $1 \in \mathbf{1}$. En particulier, $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie.

Par ailleurs (cf. [**FF**, prop. 9.2.3]),

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1) = H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1)) = H^1(G_K, (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}).$$

L'hypothèse que $\mathscr{E}$ est trivial en ∞ se traduit par le fait que sa classe est nulle dans $H^1(G_K, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \Delta)$, et donc appartient à

$$Z = \mathrm{Ker}\big(H^1(G_K, (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}) \to H^1(G_K, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \Delta)\big).$$

Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur G_K, à valeurs dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}$, dont la classe appartient à Z. Comme k_K est algébriquement clos, on peut décomposer le G_K-module $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}$ comme une somme directe d'espaces de la forme $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{N^k=0, \varphi^h=p^d}$, et on déduit de la prop. 2.17 qu'il existe $c \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta$ tel que $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$ pour tout $\sigma \in G_K$. Alors $(\varphi - 1)c$ et Nc sont fixes par G_K, et donc appartiennent à Δ, et $(Nc, (\varphi - 1)c)$ définit un élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ qui est nul si et seulement si $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord, ce qui fournit une injection de Z dans $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$.

Comme $\mathscr{E}(D)$ est trivial en ∞, si D est un (φ, N)-module, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1)$ fournit une injection de $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1)$ dans Z, et comme $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ est de dimension finie et isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1)$, les injections $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) \to Z \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ sont des bijections. On en déduit que $\mathscr{E}$ est de la forme $\mathscr{E}(D)$, ce que l'on voulait. □

5.4. Descente à une extension de type de Lie. — Soit K_∞ une extension galoisienne de K, infiniment ramifiée, de type Lie (ce qui signifie que le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est un groupe de Lie p-adique). Une telle extension est perfectoïde, et son basculé $K_\infty^\flat$ est un sous-corps fermé de $C^\flat$ muni d'une action continue de Γ, et on a $\mathrm{Gal}(C^\flat/K_\infty^\flat) = \mathrm{Gal}(C/K_\infty)$.

L'anneau $\mathbf{B}_e(K_\infty^\flat)$ n'est plus principal, mais il est de Dedekind [**FF**, prop. 7.2.1]. Il s'ensuit que

$$X_{K_\infty} = \mathrm{Proj}(\oplus_{n\in\mathbf{N}}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(K_\infty^\flat))^{\varphi=p^n})$$

est une courbe complète, et comme Γ agit sur K_∞, la courbe X_{K_∞} est munie d'une action de Γ.

Par ailleurs, l'inclusion de $K_\infty^\flat$ dans $C^\flat$ induit un morphisme $\mathscr{O}_{X_{K_\infty}} \to \mathscr{O}_X$ de faisceaux, et donc un morphisme $X \to X_{K_\infty}$.

Théorème 5.9. — ([**FF**, th. 10.1.5]) *Le morphisme $X \to X_{K_\infty}$ induit une équivalence de catégories de Harder-Narasimhan :*

$$\{\text{Fibrés } \Gamma\text{-équivariants sur } X_{K_\infty}\} \cong \{\text{Fibrés } G_K\text{-équivariants sur } X\}.$$

Remarque 5.10. — (i) Si on combine ce résultat avec le th. 5.1, on obtient une classification des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_K en termes de fibrés Γ-équivariants sur X_{K_∞}, semi-stables de pente 0.

(ii) Dans le diagramme de la rem. 4.9, on peut rajouter une action de G_K partout, et utiliser le th. 5.9 pour descendre à K_∞ ; on obtient le diagramme de catégories suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{G_K\text{-Fibrés sur } X\} \arrow[r, "\sim"] & \{(G_K, B)\text{-paires}\} & \\
\{\Gamma\text{-Fibrés sur } X_{K_\infty}\} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\text{GAGA}"', "\wr"] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B^+(K_\infty^\flat)\} \arrow[l] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } K_0\} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\{\Gamma\text{-Fibrés sur } X_{K_\infty}^{\mathrm{an}}\} \arrow[r, equal] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B(K_\infty^\flat)\} \arrow[r, "\sim"] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \mathscr{R}(K_\infty^\flat)\}
\end{tikzcd}$$

Notons que $\{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B^+(K_\infty^\flat)\} \to \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B(K_\infty^\flat)\}$ n'est pas essentiellement surjective contrairement au cas algébriquement clos.

(iii) Si V est de de Rham, et si $\mathscr{E}(V)$ désigne le fibré Γ-équivariant sur X_{K_∞} qui lui correspond, alors $H^0(X_{K_\infty} \smallsetminus \{\infty\}, \mathscr{E}(V)) = (\mathbf{B}_e \otimes V)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)}$ est lié de près à la cohomologie d'Iwasawa de V, que ce soit dans le cas cyclotomique [**10**] (où ce module est noté $D_{\mathrm{Iw}}(V)$) ou dans le cas d'une extension du type Lubin-Tate [**33**].

(iv) Si K_∞ est l'extension cyclotomique, on a $\mathscr{R}(K_\infty^\flat) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$, et on peut décompléter un (φ,Γ)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ en utilisant des traces de Tate, ce qui permet de compléter le diagramme précédent en rajoutant l'équivalence de catégories

$$\{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}\} \cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}\}$$

qui entre dans la preuve des th. 2.47 et 2.41. Si la dimension de Γ est ≥ 2, on ne dispose plus de traces de Tate (et on n'a pas d'équivalence de catégories comme ci-dessus), mais [**7**] propose une solution alternative.

Références

[FF] L. Fargues et J.-M. Fontaine, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, ce volume.

[1] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. math. **148** (2002), 285–317.

[2] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, thèse Paris 6 (2001).

[3] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. math. **148** (2002), 219–284.

[4] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[5] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, Algebra Number Theory **2** (2008), 91–120.

[6] L. Berger, Presque $\mathbf{C}_p$-représentations et (φ, Γ)-modules, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), 653–668.

[7] L. Berger, Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors, Duke Math. J. **165** (2016), 3567–3595.

[8] L. Berger et P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008), 303–337.

[9] F. Cherbonnier, P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. math. **133** (1998), 581–611.

[10] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998), 485–571.

[11] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adique, Astérisque **290** (2003), 53–101.

[12] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[13] P. Colmez, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque **319** (2008), 117–186.

[14] P. Colmez et J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[15] P. Colmez et W. Nizioł, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. math. **208** (2017), 1–108.

[16] R. Crew, Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. ENS **31** (1998), 717–763.

[17] G. Faltings, Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), Vol. 1*, (1995), 648–655, Birkhäuser.

[18] L. Fargues, Groupes analytiques rigides p-divisibles, à paraître dans Math. Ann.

[19] L. Fargues, Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. Astérisque **369** (2015), 325–374.

[20] L. Fargues, Geometrization of the local Langlands correspondence, an overview, arXiv :1602.00999.

[21] L. Fargues, Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local, prépublication 2017.

[22] L. Fargues et P. Scholze, Geometrization of the local Langlands correspondence, en préparation.

[23] J.-M. Fontaine, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[24] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[25] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87** (1990) 249–309, Birkhäuser.

[26] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, avec un appendice de P. Colmez, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[27] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque **223** (1994), 113–184.

[28] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115.

[29] J.-M. Fontaine, Presque $\mathbf{C}_p$-représentations, Kazuya Kato's fiftieth birthday, Doc. Math., Extra Vol. (2003), 285–385.

[30] J.-M. Fontaine, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay 2004-12 (2004), 20p.

[31] J.-M. Fontaine, et G. Laffaille, Constructions de représentations p-adiques, Ann. ENS **15** (1982), 547–608.

[32] O. Forster, Zur Theorie der Steinschen Algebras und Moduln, Math. Z. **97** (1967), 376–405.

[33] L. Fourquaux, Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate, thèse Paris 6 (2005).

[34] L. Fourquaux, Applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires, continues et Galois-équivariantes de $\mathbf{C}_p$ dans lui-même. J. Number Theory **129** (2009), 1246–1255.

[35] U. Hartl et R. Pink, Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc, Compos. Math. **140** (2004), 689–716.

[36] O. Hyodo, $H^1_g(K,V) = H^1_{\rm st}(K,V)$, *proceedings of a symposium on arithmetic geometry*, ed. K. Kato, M. Kurihara, T. Saito, Univ. Tokyo (1991).

[37] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[38] K. Kedlaya, Slope filtrations revisited, Doc. math. **10** (2005), 447–525 ; errata, ibid. **12** (2007), 361-362.

[39] K. Kedlaya, Slope filtrations for relative Frobenius, Astérisque **319** (2008), 259–301.

[40] K. Kedlaya et M. Temkin, Endomorphisms of power series fields and residue fields of Fargues-Fontaine curves, proc. AMS **146** (2018), 489–495.

[41] M. Kisin, Crystalline representations and F-crystals, in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. in Math. **253** (2006) 459–496, Birkhäuser.

[42] V. Lafforgue, Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale, J. AMS **31** (2018), 719–891.

[43] M. Lazard, Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. IHES **14** (1962), 47–75.

[44] A.-C. Le Bras, Espaces de Banach-Colmez et faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine, arXiv :1801.00422 [math.NT].

[45] M.Matignon et M. Reversat, Sous-corps fermés d'un corps valué, J. Algebra **90** (1984), 491–515.

[46] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, Invent. math. **148** (2002), 319–351.

[47] J. Nekovář, On p-adic height pairings, in *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990-91*, Progr. in Math. **108** (1993), 127–202, Birkhäuser.

[48] W. Nizioł, Geometric syntomic cohomology and vector bundles on the Fargues-Fontaine curve, preprint 2016.

[49] J. Plût, Espaces de Banach analytiques p-adiques et espaces de Banach-Colmez, thèse Orsay (2009).

[50] J. Plût, Analytic p-adic Banach spaces and the fundamental lemma of Colmez and Fontaine, arXiv :1610.09821 [math.NT].

[51] J. Plût, Slope filtrations on Banach-Colmez spaces, arXiv :1610.09822 [math.NT].

[52] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[53] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. math. **62** (1980/81), 89–116.

[54] P. Scholze, Perfectoid spaces, Publ. IHES **116** (2012), 245–313.

[55] P. Scholze et J. Weinstein, Berkeley lectures on p-adic Geometry, `http://www.math.uni-bonn.de/people/scholze/Berkeley.pdf`

[56] N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

[57] J. Weinstein, $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)$ as a geometric fundamental group, I.M.R.N. **2017** (2017), 2964–2997.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.jussieu.fr`