PRÉFACE

par

Pierre Colmez

Le cours Peccot de Gabriel Dospinescu est consacré à la preuve d'une conjecture de Breuil et Strauch concernant la correspondance de Langlands locale p-adique. Il constitue une bonne introduction aux techniques utilisées dans cette correspondance et, dans cette préface [1], je vais essayer d'expliquer d'où vient le problème en remontant assez loin dans le temps.

1. Le programme de Langlands

Le programme de Langlands est un programme multi-facettes dont un des buts est de comprendre le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} = \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels (ou plus généralement le groupe de Galois absolu Gal_K d'un corps de nombres K, i.e. d'une extension finie K de $\mathbb{Q}$) à travers ses $\mathbb{C}$-représentations [2], en reliant ces représentations à des objets provenant de l'analyse harmonique sur des groupes arithmétiques (formes modulaires, formes automorphes ou représentations automorphes). Si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-représentation de Gal_K, on sait associer à ρ une fonction $s \mapsto L(\rho, s)$, holomorphe pour $\mathrm{Re}\, s > 1$, et un des buts du programme de Langlands est de prouver la conjecture d'Artin (1923), selon laquelle $s \mapsto L(\rho, s)$ admet un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier (avec un pôle éventuel en $s = 1$).

Le théorème de Kronecker-Weber. — D'après un théorème classique de théorie de Galois, si N est un entier ≥ 1, alors $\mathbb{Q}(e^{\frac{2i\pi}{N}})$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$. Il s'ensuit que l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}^{\mathrm{cyl}}$ de $\mathbb{Q}$, obtenue

1. Le lecteur intéressé pourra consulter **[20]** pour une perspective un peu différente.
2. Si G est un groupe et L un corps, on utilise la terminologie "L-représentation" pour désigner, suivant les cas, un L-espace vectoriel V muni d'une action L-linéaire (continue si L a une topologie) de G ou bien le morphisme de groupes (continu) $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ qui s'en déduit.

en rajoutant toutes les racines de l'unité, est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de groupe de Galois $\varprojlim_N (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* = \widehat{\mathbb{Z}}^* = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$.

D'après le théorème de Kronecker-Weber (1853-1886), toute extension finie de $\mathbb{Q}$, de groupe de Galois abélien, est contenue dans $\mathbb{Q}^{\rm cyl}$. On en déduit que le plus grand quotient abélien $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\rm ab}$ de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ est $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}^{\rm cyl}/\mathbb{Q}) \cong \widehat{\mathbb{Z}}^*$.

Comme $\mathbb{C}^*$ est abélien, il s'ensuit que, si $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ est une $\mathbb{C}$-représentation de dimension 1, il existe un caractère de Dirichlet $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$, tel que ρ soit obtenue en composant les applications naturelles $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\rm ab} \cong \widehat{\mathbb{Z}}^* \to (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*$ avec χ. On a alors $L(\rho, s) = L(\chi, s) = \sum_{n\geq 1} \chi(n)n^{-s}$, et comme il est très facile de prouver que $s \mapsto L(\chi, s)$ a un prolongement holomorphe à $\mathbb{C}$ tout entier, cela prouve la conjecture d'Artin pour les représentations de dimension 1 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$.

La théorie du corps de classes. — Soit K un corps de nombres. Si $\rho : \mathrm{Gal}_K \to \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^*$ est une représentation de dimension 1, alors ρ se factorise à travers le plus grand quotient abélien $\mathrm{Gal}_K^{\rm ab}$ de Gal_K, et la description de ce groupe est l'objet de la théorie du corps de classes qui a occupé les arithméticiens pendant une trentaine d'années (fin du 19$^{\rm ème}$-siècle jusqu'aux années 1920). Une formulation compacte a été rendue possible grâce à l'introduction de l'anneau $\mathbb{A}_K$ des adèles [(3)] de K (Artin-Whaples (1945) ; auparavant Chevalley (1940) avait défini le groupe des idèles qui, a posteriori, n'est autre que le groupe $\mathrm{GL}_1(\mathbb{A}_K) = \mathbb{A}_K^*$ des éléments inversibles de $\mathbb{A}_K$). alors

$$\mathrm{Gal}_K^{\rm ab} \cong \mathbb{A}_K^*/K^* \cdot (K \otimes \mathbb{R})_+^*,$$

où $(K \otimes \mathbb{R})_+^*$ est la composante connexe de 1 dans $(K \otimes \mathbb{R})^*$. [(4)]

Il résulte de ce qui précède qu'il y a une bijection naturelle $\rho \longleftrightarrow \pi$ entre les $\mathbb{C}$-représentations de dimension 1 de Gal_K et les $\mathbb{C}$-représentations de dimension 1 de $\mathbb{A}_K^*/K^*$ d'image finie. L'intérêt de cette bijection est qu'elle préserve les fonctions L, et Tate a montré dans sa thèse (1950), sous la direction d'Artin, comment utiliser l'analyse de Fourier sur les groupes $\mathbb{A}_K$ et $\mathbb{A}_K^*$ pour prouver que les $L(\pi, s)$ sont

---

3. On peut définir $\mathbb{A}_K$, de manière compacte, comme $K \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$, où $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} \times (\mathbb{Q} \otimes \widehat{\mathbb{Z}})$, et $\widehat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_N (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})$ est le completé profini de $\mathbb{Z}$ (c'est aussi le produit des $\mathbb{Z}_p$, où p décrit l'ensemble des nombres premiers). De manière peut-être plus parlante, $\mathbb{A}_K$ est le produit (restreint) de tous les complétés possibles de K : par exemple, $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} = \{x = (x_\infty, x_2, x_3, x_5, \dots)\}$, avec $x_\infty \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{Q}_2$, $x_3 \in \mathbb{Q}_3$, etc., et $x_p \in \mathbb{Z}_p$ pour presque tout p premier, (i.e. sauf un nombre fini de p). Pour un K général, on note S_K l'ensemble des *places* de K (i.e. des classes déquivalence de normes non triviales $|\ | : K \to \mathbb{R}_+$), et, si $v \in S_K$, K_v le complété de K pour la norme $|\ |_v$ correspondante (cette norme est ultramétrique sauf pour un nombre fini de v, et alors $\mathscr{O}_v = \{x \in K_v,\ |x|_v \leq 1\}$ est un sous-anneau – l'anneau des entiers – de K_v) ; alors $\mathbb{A}_K$ est l'ensemble des $(x_v)_{v\in S_K}$ avec $x_v \in K_v$ pour tout v et $x_v \in \mathscr{O}_v$ pour tout v sauf un nombre fini.

4. Par exemple, si $K = \mathbb{Q}$, alors $K \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}$ et donc $(K \otimes \mathbb{R})_+^* = \mathbb{R}_+^*$, et $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}^*/\mathbb{R}_+^*$ est l'ensemble des $x = (x_\infty, x_2, x_3, \dots,)\}$, avec $x_\infty \in \{\pm 1\}$, $x_2 \in \mathbb{Q}_2^*$, $x_3 \in \mathbb{Q}_3^*$, etc., et $x_p \in \mathbb{Z}_p^*$ pour presque tout p premier ; comme $\mathbb{Q}_p^* = \mathbb{Z}_p^* \times p^{\mathbb{Z}}$ et $\mathbb{Q}^* = \{\pm 1\} \times (\oplus_p p^{\mathbb{Z}})$, on retrouve le théorème de Kronecker-Weber sous la forme $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}^{\rm ab} = \prod_p \mathbb{Z}_p^*$.

holomorphes [5] sur $\mathbb{C}$ tout entier (à l'exception d'un pôle simple dans certains cas exceptionnels), et donc que les $L(\rho,s)$ le sont.

Représentations automorphes. — On veut étendre ce qui précède à la dimension n, ce qui va demander de remplacer le groupe GL_1 ci-dessus par $G=\mathrm{GL}_n$.

Si Φ est un espace de fonctions sur $G(\mathbb{A}_K)$, on peut faire agir $g\in G(\mathbb{A}_K)$ et $\gamma\in G(K)$ sur X grâce aux formules

$$(g\cdot\phi)(x)=\phi(xg)\quad\text{et}\quad(\gamma\star\phi)(x)=\phi(\gamma^{-1}x).$$

Ces deux actions commutent, ce qui fait que $G(\mathbb{A}_K)$ agit sur l'espace $H^0(G(K),\Phi)$ des fonctions fixes sous l'action $G(K)$ (i.e. sur l'espace des fonctions sur $G(K)\backslash G(\mathbb{A}_K)$) et on peut s'intéresser aux représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans cet espace.

Par exemple, si $G=\mathrm{GL}_1$, et si Φ est l'espace des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, les représentations qui apparaissent sont exactement les caractères continus $\mathbb{A}_K^*/K^*\to\mathbb{C}^*$ qui se sont manifestés plus haut.

Si $G=\mathrm{GL}_n$, on prend pour Φ un espace bien choisi (proche [6] de L^2 pour pouvoir faire de l'analyse de Fourier), et les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ qui apparaissent dans $H^0(G(K),\Phi)$ sont dites *automorphes.* On sait associer **[51, 44]** à une représentation automorphe π une fonction $L(\pi,s)$ holomorphe sur $\mathbb{C}$, et on conjecture que, pour tout $\rho:\mathrm{Gal}_K\to G(\mathbb{C})$, irréductible, il existe $\pi(\rho)$ automorphe telle que $L(\rho,s)=L(\pi(\rho),s)$, ce qui prouverait la conjecture d'Artin sous une forme particulièrement satisfaisante.

Ce qui précède n'est qu'une petite partie [7] de l'édifice dont l'existence est conjecturée par Langlands et dont l'un des principes directeurs est le principe de fonctorialité **[58]** selon lequel toute opération qui a un sens du coté Galois doit avoir une traduction du côté automorphe.

Un des premiers grands succès du programme de Langlands a été la preuve de la conjecture d'Artin pour des représentations de dimension 2. Si $\rho:\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}\to\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est une $\mathbb{C}$-représentation de dimension 2, l'image de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ dans $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ est abélienne, diédrale, ou bien isomorphe à A_4, S_4 ou A_5. La conjecture d'Artin dans les cas abélien et diédral a été prouvée par Artin lui-même, celle dans les cas A_4 et S_4 par Langlands et Tunnell **[59, 75]**. Le cas de A_5 a résisté, jusqu'ici, aux méthodes classiques. Par contre les méthodes p-adiques, dont il est question ci-dessous, ont permis (**[73, 11]**,...,**[62]**) de traiter ce cas pour les représentations *impaires* (celles pour

5. Cette holomorphie a été démontrée, sans recours à l'analyse sur les adèles, par Hecke (1920), mais l'introduction des méthodes adéliques simplifie considérablement la preuve.

6. Le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{A}_K)$ n'est pas de volume fini, et il faut prendre un peu de précautions.

7. En particulier, on peut prendre pour G n'importe quel groupe algébrique réductif (par exemple un groupe symplectique, unitaire ou orthogonal, ou encore le groupe des unités d'une algèbre de quaternions, etc.), et pas seulement le groupe GL_n.

lesquelles $\det \rho(c) = -1$, où c est la conjugaison complexe, i.e. $\rho(c)$ est une symétrie et pas une homothétie).

2. Le programme de Langlands p-adique

Le programme de Langlands p-adique est aussi un programme multi-facettes dont un des buts est de comprendre les représentations p-adiques de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ (ou, plus généralement, de Gal_K, si K est un corps de nombres), en particulier de prouver une conjecture de Fontaine et Mazur [**43**] sur les représentations [8] "géométriques", en termes de formes modulaires (ou automorphes) p-adiques ou de représentations p-adiques de groupes adéliques [9]. Une raison pour l'introduction de ce programme est que les formes ou représentations automorphes, et les représentations complexes de Gal_K sont des objets extrêmement rigides, alors que leurs analogues p-adiques peuvent se déformer continûment (ceci a été utilisé avec profit par Wiles [**76**] pour démontrer le théorème de Fermat ou, plus exactement, un énoncé d'automorphie (modularité de courbes elliptiques) impliquant le théorème de Fermat grâce aux travaux de Ribet [**63**] sur la conjecture de Serre rappelée ci-dessous ; ce résultat relevait du programme de Langlands classique, mais résistait aux méthodes classiques ; les travaux de Wiles ont donné un fort coup d'accélérateur au programme de Langlands p-adique). Un des points de départ de ce programme est d'ailleurs les travaux de Serre (dans les années 1970) et Hida (dans les années 1980) sur les familles p-adiques de formes modulaires et les représentations galoisiennes qui leur sont associées [**70, 49, 50**]. Contrairement au programme de Langlands classique, la forme précise que doit prendre le programme p-adique n'est pas encore parfaitement claire. En particulier, on n'a pas encore d'énoncé correspondant au principe de fonctorialité qui sert de fil conducteur dans le cas classique.

La conjecture de Serre. — Un point saillant du monde p-adique est la possibilité de réduire modulo p, et le programme de Langlands p-adique comporte un programme

8. Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, une L-représentation $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_n(L)$ est *géométrique* si elle est irréductible, sa restriction à $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_\ell}$ est non ramifiée sauf pour un nombre fini de nombres premiers $\ell \neq p$, et sa restriction à $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ est de de Rham (voir plus loin). La conjecture de Fontaine-Mazur, qui date de 1988, prédit qu'une telle représentation vient de la géométrie ce qui a des tas de conséquences qui semblent absurdes au vu du peu de conditions imposées.

9. Une forme modulaire classique f est une fonction sur $\mathscr{H} = \{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ vérifiant une propriété d'invariance sous l'action d'un sous-groupe d'indice fini de $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$. Comme $\mathscr{H} \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})_+/\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$, on peut associer à f, de manière naturelle, une fonction ϕ_f sur $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$, invariante par $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$, et donc une représentation de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ en considérant l'espace des translatés de ϕ_f par l'action de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (les actions de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ et $\mathrm{GL}_2(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ sont celles considérées plus haut). Cela fournit un lien assez transparent entre formes modulaires et représentations automorphes. En p-adique, ce lien est moins évident ce qui explique que le point de vue des représentations p-adiques de groupes adéliques n'ait été introduit que relativement récemment.

modulo p dont le point de départ est la conjecture de Serre, énoncée (sous une forme embryonnaire) dans une lettre à Tate du 1er mai 1973 [**72**].

Je vais être prudent, et considérer uniquement des représentations

$$\rho : \mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \to \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_q), \qquad q = p^f,$$

non ramifiées en dehors de p et vérifiant la condition suivante :

$$(*) \qquad \det\rho : \mathrm{Gal} \to \mathbf{F}_q^* \text{ est égal à } \chi^{k-1} \quad (k \text{ pair}),$$

où $\chi : \mathrm{Gal} \to \mathbf{F}_q^*$ est le caractère fondamental modulo p (donnant l'action sur μ_p).

En fait, cette condition équivaut à :

$(**)$ L'image par ρ du Frobenius réel a pour valeurs propres $+1$ et -1 (*i.e.* $\det\rho$ est un caractère *impair*).

(Si, au lieu de $\mathbf{F}_q$, on avait $\mathbb{C}$, la condition $(**)$ équivaudrait à dire que la fonction L d'Artin correspondante a pour facteur γ tout juste $\Gamma(s)$ et pas $\Gamma(s/2)^2$ ni $\Gamma((s+1)/2)^2$.)

Si $\ell \neq p$, la trace et le déterminant de $\rho(\mathrm{Frob}_\ell)$ ont un sens évident ; note-les a_ℓ et ℓ^{k-1}, et forme la série de Dirichlet (à coefficients dans $\mathbf{F}_q$) $\prod_{\ell\neq p}\big(1 - a_\ell\ell^{-s} + \ell^{k-1-2s}\big)^{-1}$, à la Hecke ; note-la $\sum a_n n^{-s}$, et forme la série formelle

$$f = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n q^n,$$

où cette fois q désigne une indéterminée... mille excuses pour avoir appelé q le nombre d'élements du corps fini, mais j'ai la flemme de recommencer pour si peu !

Conjecture. — *La série f est une forme modulaire (modulo p) sur $\mathbf{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids congru à k mod $(p-1)$.*

Cette conjecture (prouvée depuis par Khare et Wintenberger [**52, 53**] avec l'aide de Kisin [**55**]) n'a été publiée [**71**] qu'en 1987 (sous une forme renforcée impliquant le théorème de Fermat [10]). Notons qu'elle est énoncée dans le langage des formes modulaires, et une question naturelle [**71**, question 3.4 (2)] est :

Peut-on formuler ces conjectures dans le cadre d'une théorie des représentations (mod p) des groupes adéliques ? Autrement dit, existe-t-il une "philosophie de Langlands modulo p", comme le demandent Ash et Stevens dans [**1**] ? Si oui, cela permettrait peut-être :

10. Si $a^p + b^p = c^p$ est un contre-exemple au théorème de Fermat, la $\mathbf{F}_p$-représentation de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$, de dimension 2, fournie par les points de p-torsion de la courbe elliptique introduite par Hellegouarch [**47**], d'équation $y^2 = x(x-a^p)(x+b^p)$, est un contre-exemple à la conjecture de Serre.

de donner une définition plus naturelle du poids k attaché à ρ ;

de remplacer GL_2 par GL_N, ou même par un groupe réductif ;

de remplacer $\mathbb{Q}$ par d'autres corps globaux.

Des formes modulo p aux formes p-adiques. — Passer du modulo p au p-adique est parfaitement naturel comme le montre cette question de Tate à Serre dans une lettre du 21 juin 1974 [**72**].

A question I've been meaning to ask you is this.

Langlands says :	complex representation $\longleftrightarrow$ complex modular form
You say :	representation modulo ℓ $\longleftrightarrow$ modular form modulo ℓ.
What about :	ℓ-adic representation $\longleftrightarrow$ ℓ-adic modular form ??

On manquait d'outils pour formuler proprement le problème à l'époque. Cela a changé avec les travaux de Hida, Gouvéa-Mazur, Coleman-Mazur, Coleman, etc. Je renvoie à l'exposé Bourbaki d'Emerton [**32**] pour une introduction lucide à ce cercle d'idées.

Représentations automorphes p-adiques. — Soient K un corps de nombres et $G = \mathrm{GL}_n$, avec $n \geq 1$. Pour définir la notion de représentation automorphe p-adique, on aurait envie de copier la définition complexe et de considérer les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans $H^0(G(K), \Phi)$, en prenant pour Φ l'espace $\mathscr{C}(G(\mathbb{A}_K))$ des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbb{Q}_p$ (ou, plus généralement, dans un corps p-adique complet L).

Si $n = 1$, ce qui précède marche très bien : on obtient les caractères continus $\mathbb{A}_K^*/K^* \to L^*$, et la théorie du corps de classes fournit une bijection entre ces caractères et les L-représentations [11] $\rho : \mathrm{Gal}_K \to L^*$ de dimension 1.

Si $n \geq 2$, le groupe $H^0(G(K), \Phi)$ ne contient pas assez de représentations de $G(\mathbb{A}_K)$. Le problème est qu'une fonction continue sur $G(\mathbb{A}_K)$ est déjà constante modulo $G(K \otimes \mathbb{R})_+$ car $G(K \otimes \mathbb{R})_+$ est connexe, alors que $\mathbb{Q}_p$ est totalement discontinu. Or on la force à être aussi constante modulo $G(K)$, et $G(K) \cdot G(K \otimes \mathbb{R})_+$ n'est pas loin d'être dense dans $G(\mathbb{A}_K)$, ce qui fait que $H^0(G(K), \Phi)$ est "trop petit". On est donc amené à considérer les représentations irréductibles de $G(\mathbb{A}_K)$ apparaissant dans les $H^i(G(K), \Phi)$, pour $i \geq 1$. (Des conjectures de Calegari et Emerton [**12, 35**] suggèrent qu'il y a un unique i, dépendant de G et de K, tel que $H^i(G(K), \Phi)$ soit intéressant ; si $G = \mathrm{GL}_2$ et si $K = \mathbb{Q}$, le seul i intéressant est $i = 1$.)

La version modulo p de ce qui précède consiste à prendre pour Φ l'espace des fonctions continues sur $G(\mathbb{A}_K)$ à valeurs dans $\mathbf{F}_p$ (ou sa clôture algébrique).

L'espace $\Phi = \mathscr{C}(G(\mathbb{A}_K), L)$ contient plusieurs sous-espaces intéressants ; en particulier, l'espace Φ^{alg} des fonctions qui sont "localement constantes hors de p et localement

11. Notons qu'une telle représentation n'est pas forcément d'image finie contrairement au cas complexe ; cette différence de comportement est due au fait que Gal_K est un groupe profini.

algébriques [12] en p". Le sous-groupe $H^i(G(K), \Phi^{\mathrm{alg}})$ est constitué de représentations reliées aux représentations automorphes classiques, et permet de faire le pont entre le programme de Langlands p-adique et le programme classique.

Représentations automorphes p-adiques et représentations galoisiennes. — On ne sait pas, en général, comment établir un lien entre les représentations automorphes p-adiques telles que définies ci-dessus et les représentations de Gal_K. Il y a quand-même des cas où sait le faire : par exemple, si $n = 2$ et $K = \mathbb{Q}$, le groupe $H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi)$ est relié à la cohomologie étale p-adique de la tour des courbes modulaires, et comme cette tour est définie sur $\mathbb{Q}$, ce groupe est muni d'une action de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$ commutant à celle de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$. On peut alors espérer que :

• Si $\rho : \mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}} \to \mathrm{GL}_2(L)$ est irréductible, impaire, alors la représentation $\mathrm{Hom}(\rho, H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi))$ de $G(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ (i.e. la multiplicité de ρ dans $H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi))$ est non nulle et peut se décrire en termes de la correspondance locale (p-adique).

• Si ρ est de plus "géométrique" (et à poids de Hodge-Tate distincts), alors $\mathrm{Hom}(\rho, H^1(G(\mathbb{Q}), \Phi^{\mathrm{alg}})) \neq 0$.

Le premier point, qui fournit une "description automorphe" des représentations p-adiques impaires de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}}$, de dimension 2, est une variante d'une conjecture d'Emerton [**33, 34**], et le second est la combinaison d'un cas particulier de la conjecture de Fontaine-Mazur avec le programme de Langlands classique. Ces deux énoncés sont en grande partie démontrés [**54, 56, 34**] (un ingrédient important des preuves est la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ que nous rencontrerons un peu plus loin).

3. La correspondance locale

Les correspondances de Langlands et Jacquet-Langlands locales. — On suppose de nouveau que $G = \mathrm{GL}_n$ et que K est un corps de nombres. Le groupe $G(\mathbb{A}_K)$ est le produit restreint [13] des $G(K_v)$, pour $v \in S_K$. Il s'ensuit qu'une représentation

12. Le groupe $G(\mathbb{A}_K)$ est le produit restreint de $G(\mathbb{R} \otimes K)$ et des $G(\mathbb{Q}_\ell \otimes K)$, pour ℓ premier ; on peut donc écrire $x \in G(\mathbb{A}_K)$ sous la forme $(x_\infty, x_2, x_3, \dots)$, et on considère les ϕ qui sont localement constantes en la variable x_ℓ, si $\ell \neq p$, et localement polynomiales en les coordonnées de x_p et en $(\det x_p)^{-1}$. (Plus précisément, on demande que $g \mapsto g \cdot \phi$ soit constante sur un sous-groupe ouvert de $\prod_{\ell \neq p} G(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}_K)$ et polynomiale sur un sous-groupe ouvert de $G(\mathbb{Z}_p \otimes \mathscr{O}_K)$, où $\mathscr{O}_K$ est l'anneau des entiers de K.) Notons que, comme les topologies de $\mathbb{Q}_p$ et $\mathbb{Q}_\ell$ sont très différentes, si $p \neq \ell$, les fonctions continues de $G(\mathbb{Z}_\ell \otimes \mathscr{O}_K)$ dans L ne présentent pas beaucoup de subtilité. Par contre les fonctions continues de $G(\mathbb{Z}_p \otimes \mathscr{O}_K)$ dans L ont beaucoup de sous-espaces naturels, comme dans le cas des fonctions réelles d'une variable réelle. Il s'ensuit que les complications posées par les places non archimédiennes dans le cas classique sont transférées aux places p-adiques ; les autres places ne voient pas leur rôle changer beaucoup en passant de la situation classique au p-adique.

13. I.e. l'ensemble des $(g_v)_{v \in S_K}$, avec $g_v \in G(K_v)$ pour tout v et $v \in G(\mathscr{O}_v)$ sauf pour un nombre fini de v.

automorphe π de $G(\mathbb{A}_K)$ se factorise [14] sous la forme $\pi = \otimes_{v\in S_K}\pi_v$, où π_v est une représentation irréductible de $G(K_v)$.

La factorisation ci-dessus permet de décomposer beaucoup de problèmes "globaux" (i.e. concernant $G(\mathbb{A}_K)$) en problèmes "locaux" (concernant $G(K_v)$). Une composante fondamentale du programme de Langlands est sa version "locale" reliant représentations (complexes) de groupes algébriques p-adiques (comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$) et représentations de groupes de Galois de corps p-adiques (correspondance de Langlands locale), ainsi que représentations de deux groupes algébriques p-adiques devenant isomorphes sur une clôture algébrique (comme $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et D^*, où D est l'algèbre de quaternions sur $\mathbb{Q}_p$) (correspondance de Jacquet-Langlands locale).

La correspondance de Langlands locale pour GL_2 a été établie par Jacquet-Langlands [**51**], Tunnell [**74**] et Kutzko [**57**] (voir aussi [**10**]). Le cas de GL_n a été résolu par Harris et Taylor [**46**] et par Henniart [**48**]. De fait, Harris et Taylor font mieux qu'établir la correspondance : ils en donnent une réalisation géométrique, suivant un programme initié par Carayol [**15**].

Une correspondance locale p-adique ?. — Une composante locale pour le programme de Langlands p-adique a longtemps relevé du fantasme. Il y avait bien quelques travaux du côté des représentations p-adiques ou modulo p des groupes algébriques p-adiques, mais aucun lien avec les représentations galoisiennes. Parmi ces travaux mentionnons ceux de Barthel et Livné [**2, 3**] donnant un début de classification des représentations de $\mathrm{GL}_2(F)$, où F est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, sur un corps de caractéristique p, et ceux de Schneider et Teitelbaum [**65, 72, 67, 68**] développant les fondements d'une théorie générale des représentations p-adiques de groupes algébriques p-adiques, avec l'introduction d'un certain nombre de concepts utiles (admissibilité, vecteurs localement analytiques ou localement algébriques, etc.) à laquelle il manquait un "Lemme de Schur" qui a été démontré par la suite [**28**].

En ce qui concerne les représentations de Gal_F, la situation était bien meilleure car Fontaine avait développé [**38, 39, 40, 42**], depuis le début des annés 1980, un programme visant à classifier et décrire ces représentations en termes plus concrets. Le programme de Fontaine était arrivé à maturité à la fin des années 1990, avec la preuve des principales conjectures de Fontaine (cf. [**17**] pour un panorama des résultats). La stratégie de Fontaine part de l'observation suivante : si on dispose d'un anneau B, muni d'une action de Gal_F et de structures additionnelles stables sous l'action de Gal_F, on peut associer à toute représentation de Gal_F un invariant $D_B(V) = H^0(\mathrm{Gal}_F, B\otimes V)$ qui est un B_F-module, où $B_F = H^0(\mathrm{Gal}_F, B)$, muni des structures additionnelles sur B et qui est souvent plus facile à décrire

14. Il s'agit d'un produit tensoriel restreint (éventuellement complété suivant la définition que l'on prend de représentation automorphe) : en dehors d'un ensemble fini de v, l'espace des invariants de π_v sous l'action de $G(\mathscr{O}_v)$ est de dimension 1 ; on en choisit une base a_v, et on considère l'espace engendré par les tenseurs de la forme $\otimes_v x_v$, avec $x_v = a_v$ sauf pour un nombre fini de v.

que la représentation V dont on est parti. Un tel anneau B permet en outre de découper la sous-catégorie des *représentations B-admissibles* (celles pour lesquelles $\dim_{B_F} D_B(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p} V$). Tout l'art consiste à ciseler de bons anneaux et Fontaine a été un véritable orfèvre en la matière. Il a, en particulier, construit **[39, 41]** des anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{st}} \subset \mathrm{B}_{\mathrm{dR}}$ pour comprendre les représentations provenant de la géométrie (et construire le "foncteur mystérieux" dont l'existence avait été pressentie par Grothendieck) ; les *représentations de de Rham* apparaissant dans la conjecture de Fontaine-Mazur (note 8) sont les représentations B_{dR}-admissibles.

La situation a changé au début des années 2000 quand Breuil a compris ce que l'on pouvait attendre d'une correspondance de Langlands locale p-adique dans le cas des représentations de de Rham et fasse des conjectures précises **[5, 6, 7, 9]** pour les représentations de dimension 2 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ (voir aussi **[8]** pour des considérations historiques).

La correspondance p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. — La preuve **[18, 4]** des conjectures de Breuil a débouché sur une correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec des propriétés particulièrement satisfaisantes **[19, 61, 24]**. Si L est une extension finie de $\mathbb{Q}_p$, cette correspondance associe à toute L-représentation ρ de dimension 2 de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$ une représentation unitaire $\Pi(\rho)$ de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ (i.e. un L-espace de Banach, muni d'une action L-linéaire continue de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ laissant globalement stable la boule unité). Cette correspondance vérifie des tas de propriétés mirifiques : elle est compatible à la réduction modulo p, à la torsion par un caractère, à la théorie locale du corps de classe ; elle est fonctorielle, ce qui implique qu'elle se comporte bien en famille ; enfin, elle contient et raffine la correspondance classique **[19, 27, 21]**.

Une réalisation géométrique ?. — La situation pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ est donc remarquablement bien comprise. Par contraste, on ne sait pas vraiment à quoi s'attendre pour $\mathrm{GL}_n(F)$, si $n \geq 3$ ou si $[F : \mathbb{Q}_p] \geq 2$. Une solution possible à ce problème serait de fabriquer une réalisation "géométrique" de la correspondance pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ avec l'espoir que l'énoncé obtenu se généralise naturellement à $\mathrm{GL}_n(F)$ pour tous n et F. Une telle approche **[13]**, utilisant la cohomologie étale de tours de variétés de Shimura associées à des groupes unitaires, fournit des candidats pour $\Pi(\rho)$, si ρ est une représentation irréductible de dimension n de Gal_F. Le problème de cette approche est qu'elle semble fournir beaucoup trop de $\Pi(\rho)$, chacun dépendant d'une multitude de choix auxiliaires, et qu'on ne sait pas prouver que tous ces choix aboutissent au même $\Pi(\rho)$ (il n'est d'ailleurs pas totalement clair que l'on puisse vraiment espérer que ce soit le cas).

La tour de Drinfeld. — Pour éviter ce problème des choix auxiliaires, l'idéal serait de réaliser la correspondance dans la cohomologie d'un objet local. Ce programme a été mené à bien pour la correspondance classique, grâce aux travaux de Drinfeld, Carayol, Harris et Taylor, Faltings, Dat et Fargues **[30, 31, 14, 15, 45, 46, 36, 26, 37]**.

Drinfeld a construit une tour $\mathscr{M}_\infty(F,n)$ d'espaces analytiques munie d'actions de G, $\check{G}$, et W_F, où $G=\mathrm{GL}_n(F)$, $\check{G}$ est le groupe des unités de l'algèbre à divisions d'invariant $\frac{1}{n}$, et $W_F\subset \mathrm{Gal}_F$ est le groupe de Weil de F. La cohomologie de $\mathscr{M}_\infty(F,n)$ est donc munie d'une action du groupe $G\times\check{G}\times W_F$. C'est en particulier le cas de la cohomologie étale ℓ-adique, avec $\ell\neq p$, et on peut se demander quelles représentations de W_F apparaissent dans cette cohomologie étale, et avec quelle multiplicité. Le résultat est particulièrement satisfaisant car les représentations qui apparaissent sont (essentiellement) les $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations absolument irréductibles de dimension n de W_F, et pour une telle représentation M, on a

$$\mathrm{Hom}_{W_F}(M,H^n_{\text{proét}}(\mathscr{M}_\infty(F,n),\overline{\mathbb{Q}}_\ell))=\mathrm{JL}(M)\otimes\mathrm{LL}(M)^*,$$

où $\mathrm{LL}(M)$ (resp. $\mathrm{JL}(M)$) est la représentation de G associée à M par la correspondance de Langlands (resp. de Jacquet-Langlands) locale classique [15]. Autrement dit, la cohomologie (pro)étale ℓ-adique, $\ell\neq p$, de la tour de Drinfeld encode à la fois les correspondances de Langlands et de Jacquet-Langlands locales classiques ; on peut difficilement rêver d'une réponse plus esthétique.

La conjecture de Breuil-Strauch. — En ce qui concerne la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, une conjecture non publiée de Breuil et Strauch, pour laquelle je renvoie au texte de Gabriel Dospinescu, fournit une première approximation de ce que l'on cherche : l'objet qui réalise (une partie de) la correspondance est le complexe de de Rham

$$\mathscr{O}(\mathscr{M}_\infty)\to\Omega^1(\mathscr{M}_\infty)$$

de la tour de Drinfeld $\mathscr{M}_\infty=\mathscr{M}_\infty(\mathbb{Q}_p,2)$. La démonstration de cette conjecture par Dospinescu et Le Bras [**29**] utilise une palette impressionnante de techniques différentes. Lue Pan [**60**] a obtenu des résultats "au niveau entier", pour le premier étage de la tour.

Prolongements. — Il est un peu surprenant de voir la correspondance s'incarner dans le complexe de de Rham car celui-ci n'a pas d'action de $\mathrm{Gal}_{\mathbb{Q}_p}$, mais des théorèmes de comparaison [**25**] entre cohomologies montrent que ce complexe de de Rham est très proche de la cohomologie (pro)étale p-adique qui, elle, est munie de toutes les actions requises.

Le résultat de Dospinescu et Le Bras, combiné avec d'autres ingrédients [**22**], permet de montrer [**23**] qu'il n'y a essentiellement que des représentations de dimension 2 (de surcroit de de Rham) qui apparaissent dans la cohomologie étale p-adique de $\mathscr{M}_\infty=\mathscr{M}_\infty(\mathbb{Q}_p,2)$, et que, si ρ apparait, alors elle apparait avec une multiplicité

$$\mathrm{Hom}(\rho,H^1_{\text{ét}}(\mathscr{M}_\infty,\mathbb{Q}_p(1)))\cong\mathrm{JL}(\rho)\otimes\Pi(\rho)^*,$$

15. A ceci près que la correspondance classique fournit des $\mathbb{C}$-représentations et que les représentations ci-dessus sont des $\overline{\mathbb{Q}}_\ell$-représentations, mais dans les deux cas la topologie n'a pas d'importance et on peut passer des unes aux autres sans problème.

où JL(ρ) est une représentation de $\check{G}$ obtenue en combinant la correspondance de Jacquet-Langlands locale classique et un des foncteurs de Fontaine, et $\Pi(\rho)$ est la représentation de G associée à ρ par la correspondance de Langlands locale p-adique.

Le résultat ci-dessus est assez suggestif pour la forme que pourrait prendre la correspondance de Langlands locale p-adique en général. En ce qui concerne la correspondance de Jacquet-Langlands p-adique, une approche prometteuse a été suggérée par Scholze [**69**].

Références

[1] A. Ash et G. Stevens, Cohomology of arithmetic groups and congruences between systems of Hecke eigenvalues, J. Reine Angew. Math. **365** (1986), 192–220.

[2] L. Barthel et R. Livné, Irreducible modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field, Duke Math. J. **75** (1994), 261–292.

[3] L. Barthel et R. Livné, Modular representations of $\mathbf{GL}_2$ of a local field : the ordinary, unramified case. J. Number Theory **55** (1995), 1–27.

[4] L. Berger et C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_\mathrm{p})$, Astérisque **330** (2010), 155–211.

[5] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ I, Comp. Math. **138** (2003) 165–188.

[6] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p-adiques de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q})$ II, J. Institut Math. Jussieu **2** (2003), 23–58.

[7] C. Breuil, Invariant $\mathscr{L}$ et série spéciale p-adique, Ann. E.N.S. **37** (2004) 559–610.

[8] C. Breuil, Introduction générale, Astérisque **319** (2008), 1–12.

[9] C. Breuil, Série spéciale p-adique et cohomologie étale complétée, Astérisque **331** (2010), 65–115.

[10] C. Bushnell et G. Henniart, The local Langlands conjecture for $\mathbf{GL}(2)$, Grundlehren der Math. Wiss. **335**, Springer-Verlag, 2006.

[11] K. Buzzard et R. Taylor, Companion forms and weight one forms, Ann. of Math. **149** (1999), 905–919.

[12] F. Calegari et M. Emerton, Completed cohomology – a survey, in *Non-abelian fundamental groups and Iwasawa theory*, 239–257, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **393**, Cambridge Univ. Press, 2012.

[13] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paškūnas et S. W. Shin, Patching and the p-adic local Langlands correspondence, Cambridge J. Math. **4** (2016), 197–287.

[14] H. Carayol, Sur les représentations ℓ-adiques associées aux formes modulaires de Hilbert, Ann. ENS **19** (1986), 409–468.

[15] H. Carayol, Non-abelian Lubin-Tate theory, in L. Clozel and J.S. Milne, editors, *Automorphic forms, Shimura varieties and L-functions, volume II*, 15–39. Academic Press, 1990.

[16] R. Coleman et B. Mazur, The eigencurve, *Galois representations in arithmetic algebraic geometry (Durham, 1996)*, 1–113, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **254**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1998.

[17] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adiques, *Séminaire Bourbaki 2001/02*, exp. 897, Astérisque **290** (2003), 53-101.

[18] P. Colmez, La série principale unitaire de $\mathbf{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$, Astérisque **330** (2010), 213–262.

[19] P. Colmez, Représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Q}_p)$ et (φ, Γ)-modules, Astérisque **330** (2010), 281–509.

[20] P. Colmez, Le programme de Langlands p-adique, *European Congress of Mathematics Krakow 2012*, European Math. Soc. (2013), 259-284.

[21] P. Colmez, Correspondance de Langlands locale p-adique et changement de poids, J. E.M.S., à paraître.

[22] P. Colmez et G. Dospinescu, Complétions unitaires de représentations de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **8** (2014), 1447–1519.

[23] P. Colmez, G. Dospinescu et W. Niziol, Cohomologie p-adique de la tour de Drinfeld, le cas de la dimension 1, arXiv :1704.08928 [math.NT].

[24] P. Colmez, G. Dospinescu et V. Paškūnas, The p-adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Cambridge J. Math. **2** (2014), 1–47.

[25] P. Colmez et W. Niziol, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. math. **208** (2017) 1–108.

[26] J.-F. Dat, Théorie de Lubin-Tate non-abélienne et représentations elliptiques, Invent. math. **169** (2007), 75-152.

[27] G. Dospinescu, Actions infinitésimales dans la correspondance de Langlands locale p-adique pour $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Math. Ann. **354** (2012), 627–657.

[28] G. Dospinescu et B. Schraen, Endomorphism algebras of p-adic representations of p-adic Lie groups, Representation Theory **17** (2013), 237–246.

[29] G. Dospinescu et A.-C. Le Bras, Revêtements du demi-plan de Drinfeld et correspondance de Langlands locale p-adique, Ann. of Math. **186** (2017), 321–411.

[30] V. Drinfeld, Elliptic modules, Math. Sb. **94** (1974), 594-627.

[31] V. Drinfeld, Coverings of p-adic symmetric regions, Funktsional. Anal. i Prilozhen., (1976), 29-40 ; Funct. Anal. Appl., (1976), 107-115.

[32] M. Emerton, p-adic families of modular forms [after Hida, Coleman, and Mazur], *Séminaire Bourbaki 2009-2010*, exp. 1013, Astérisque **339** (2011).

[33] M. Emerton, A local-global compatibility conjecture in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2/\mathbb{Q}}$, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), 279–393.

[34] M. Emerton, Local-global compatibility in the p-adic Langlands programme for $\mathrm{GL}_{2,\mathbb{Q}}$, preprint 2008 !

[35] M. Emerton, Completed cohomology and the p-adic Langlands program, *Proceedings of the 2014 ICM, Seoul*, `http://www.icm2014.org/en/vod/proceedings.html`.

[36] G. Faltings, A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld in *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math. **300** (2002), 115-129.

[37] L. Fargues, L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques, 1–325, Progr. Math. **262**, Birkhäuser 2008.

[38] J-M. Fontaine, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, *Journées arithmétiques de Rennes III*, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[39] J-M. FONTAINE, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate. Ann. Math. **115** (1982), 529–577.

[40] J.-M. FONTAINE, Représentations p-adiques des corps locaux, dans "*The Grothendieck Festschrift*", vol 2, Prog. in Math. **87**, 249–309, Birkhäuser 1991.

[41] J-M. FONTAINE, Le corps des périodes p-adiques, *Périodes p-adiques* exp. II, Astérisque **223** (1994), 59–102.

[42] J-M. FONTAINE, Représentations p-adiques semi-stables, *Périodes p-adiques*, Astérisque **223** (1994) 113–184.

[43] J-M. FONTAINE et B. MAZUR, Geometric Galois representations, *Elliptic curves, modular forms, & Fermat's last theorem (Hong Kong, 1993)*, 41–78, Ser. Number Theory, I, Int. Press, 1995.

[44] R. GODEMENT et H. JACQUET, *Zeta functions of simple algebras*, Lecture Notes in Math **260**, Springer-Verlag, 1972.

[45] M. HARRIS, Supercuspidal representations in the cohomology of Drinfeld's upper half-space ; elaboration of Carayol's program, Invent. math. **129** (1997) 75–119.

[46] M. HARRIS et R. TAYLOR, *The geometry and cohomology of some simple Shimura varieties*, with an appendix by Vladimir G. Berkovich, Ann. of Math. Studies **151**, Princeton University Press, 2001.

[47] Y. HELLEGOUARCH, Points d'ordre $2p^h$ sur les courbes elliptiques, Acta Arith. **26** (1974/75), 253–263.

[48] G. HENNIART, Une preuve simple des conjectures de Langlands locales pour $\mathbf{GL}_n$ sur un corps p-adique, Invent. Math. **139** (2000), 439-455.

[49] H. HIDA, Iwasawa modules attached to congruences of cusp forms, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **19** (1986), 231–273.

[50] H. HIDA, Galois representations into $\mathrm{GL}_2(\mathbf{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms, Invent. Math. **85** (1986), 545–613.

[51] H. JACQUET et R. LANGLANDS, Automorphic forms on GL(2), Lect. Notes in Math. **114**, Springer 1970.

[52] C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER, Serre's modularity conjecture (I), Invent. Math. **178** (2009), 485–504.

[53] C. KHARE et J.-P. WINTENBERGER, Serre's modularity conjecture (II), Invent. Math. **178** (2009), 505–586.

[54] M. KISIN, Overconvergent modular forms and the Fontaine-Mazur conjecture, Invent. Math. **153** (2003), 373–454.

[55] M. KISIN, Modularity of 2-adic Barsotti-Tate representations, Invent. Math.**178** (2009), 587–634.

[56] M. KISIN, The Fontaine-Mazur conjecture for $\mathbf{GL}_2$, J. Amer. Math. Soc. **22** (2009), 641–690.

[57] P. KUTZKO, The Langlands conjecture for Gl_2 of a local field, Ann. of Math. **112** (1980), 381–412.

[58] R. LANGLANDS, Lettre à André Weil, 1967.

[59] R. LANGLANDS, Base change for GL(2), Ann. of Math. Studies **96**, Princeton University Press, 1980.

[60] L. Pan, First covering of the Drinfel'd upper half-plane and Banach representations of $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Algebra and Number Theory **11** (2017), 405–503.

[61] V. Paškūnas, The image of Colmez's Montreal functor, Publ. IHES **118** (2013), 1–191.

[62] V. Pilloni et B. Stroh, Surconvergence, ramification et modularité, Astérisque **382** (2016), 195–266.

[63] K. Ribet, On modular representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ arising from modular forms, Invent. Math. **100** (1990), 431–476.

[64] T. Saito, Hilbert modular forms and p-adic Hodge theory, Compositio Math. **145** (2009), 1081–1113.

[65] P. Schneider et J. Teitelbaum, Locally analytic distributions and p-adic representation theory, with applications to GL_2, J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 443–468.

[66] P. Schneider et J. Teitelbaum, (with an appendix by D. Prasad), $U(\mathfrak{g})$-finite locally analytic representations, Representation Theory **5** (2001), 111–128.

[67] P. Schneider et J. Teitelbaum, Banach space representations and Iwasawa theory, Israel J. Math. **127** (2002), 359–380.

[68] P. Schneider et J. Teitelbaum, Algebras of p-adic distributions and admissible representations, Invent. Math. **153** (2003), 145–196.

[69] P. Scholze, On the p-adic cohomology of the Lubin-Tate tower, Ann. ENS, à paraître.

[70] J-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular functions of one variable, III, pp. 191–268. Lecture Notes in Math. **350**, Springer, 1973.

[71] J-P. Serre, Sur les représentations modulaires de degré 2 de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$, Duke Math. J. **54** (1987), 179–230.

[72] *Correspondance Serre-Tate* (P. Colmez et J-P. Serre édit.), Documents Mathématiques **13** et **14** (2015).

[73] R. Taylor, Icosahedral Galois representations, Pacific J. of Math., Olga Taussky-Todd memorial issue (1997) 337–347.

[74] J. Tunnell, On the local Langlands conjecture for $\mathbf{GL}(2)$, Invent. Math. **46** (1978), 179–200.

[75] J. Tunnell, Artin's conjecture for representations of octahedral type, Bull. Amer. Math. Soc. **5** (1981), 173–175.

[76] A. Wiles, Modular elliptic curves and Fermat's last theorem, Ann. of Math. **141** (1995) 443–551.

Pierre Colmez, CNRS, IMJ-PRG, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `pierre.colmez@imj-prg.fr`