FONCTIONS ZÊTA p-ADIQUES EN $s = 0$

par

Pierre Colmez

Résumé. — Nous calculons le terme dominant (en plusieurs variables) de la fonction zêta p-adique d'un corps CM en $s = 0$; la formule fait intervenir le nombre de classes d'idéaux et des logarithmes de p-unités comme dans la conjecture de Gross.

Abstract. — We compute the leading term (in several variables) of the leading term of the p-adic zeta function of a CM field ; the formula involves the class number and logarithms of p-units in the spirit of the conjecture of Gross.

Table des matières

Introduction

Soit K un corps de nombres. Notons $\mathscr{O}_K$ l'anneau des entiers de K et S_∞ l'ensemble des places archimédiennes de K. Si S est un ensemble fini de places de K contenant S_∞, soit $\mathscr{O}_{K,S}$ l'anneau des S-entiers et soit $\zeta_{K,\infty,S}$ la fonction zêta (incomplète) de

Dedekind de K. La formule de Dedekind donnant le résidu en $s = 1$ de la fonction $\zeta_{K,\infty,S_\infty}$ (qui n'est autre que la fonction zêta de Dedekind de K) alliée à l'equation fonctionnelle satisfaite par celle-ci nous dit que l'on a (cf. [**38**])

$$\zeta_{K,\infty,S}(s) \sim -h(\mathscr{O}_{K,S})R_\infty(\mathscr{O}_{K,S}^*)s^{|S|-1} \tag{1}$$

au voisinage de $s = 0$, où $h(\mathscr{O}_{K,S})$ est le nombre de classes de $\mathscr{O}_{K,S}$ et $R_\infty(\mathscr{O}_{K,S}^*)$ le régulateur du groupe de ses unités (voir ci-dessous pour une définition précise). Notre but est de démontrer un analogue p-adique de cette formule. Nous obtenons en particulier une expression pour le premier terme significatif du développement de Taylor en le caractère trivial de la fonction-L p-adique de Katz [**26**]. Si on restreint cette formule dans la direction du caractère cyclotomique, on obtient une formule tout à fait analogue à la formule (1) (cf. théorème 6) dans laquelle le régulateur $R_\infty(\mathscr{O}_{K,S}^*)$ est remplacé par un régulateur p-adique qui est une combinaison des régulateurs de Leopoldt et de Gross. La démonstration de cette formule est très courte et complètement élémentaire ; la longueur de l'article s'explique par la nécessité de définir des analogues p-adiques des différents termes apparaissant dans la formule (1) et par le fait que nous en avons profité pour comparer les différentes constructions de fonctions-L p-adiques existant dans la littérature ([**1**], [**5**], [**10**], [**13**], [**22**], [**24**], [**26**], [**28**]). Pour être tout à fait honnète, il nous faut admettre que la situation n'est pas entièrement satisfaisante ; par exemple, pour appliquer notre résultat à la fonction-L de Katz, il faut étendre la construction de Katz à un cas non couvert par la littérature. Cette extension ne présente aucune difficulté autre que recopier l'article de Katz en faisant de petites modifications par-ci par-là ; nous nous sommes contenté d'énoncer le résultat pour éviter à l'article de grandir de manière démesurée.

1. Le régulateur

Fixons un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_p$. Un corps de nombres sera dit être CM si c'est une extension quadratique totalement imaginaire d'une extension finie totalement réelle de $\mathbf{Q}$ ou bien si c'est $\mathbf{Q}$. Si K_0 est un corps CM, un type CM de K_0 sera par définition un sous-ensemble de $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$ tel que l'application de Σ dans S_∞ (ne pas oublier que l'on a choisi un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$) soit une bijection.

Soit K un corps de nombres. Un sous-ensemble Σ de $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$ sera appelé un type CM de K si l'application de Σ dans S_∞ est une bijection et s'il existe un sous-corps CM K_0 de K et un type CM Σ_0 de K_0 tel que Σ soit constitué des éléments de $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$ dont la restriction à K_0 appartient à Σ_0 (on dira alors que Σ provient de K_0 ou de (K_0, Σ_0) si on veut être plus précis). Notons que si $K_0 = \mathbf{Q}$, alors K doit être totalement réel ; en particulier K ne possède des types CM que s'il est totalement réel ou s'il contient un corps CM différent de $\mathbf{Q}$.

Si Σ est un type CM de K, nous dirons qu'il est ordinaire en p si les images de Σ et $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}}) - \Sigma$ dans l'ensemble S_p des places de K au-dessus de p (ne pas oublier que l'on a choisi un plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}_p$) sont disjoints. Si K est totalement réel, alors $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$ est le seul type CM de K et il est ordinaire en p pour tout p. Si K n'est pas totalement réel, pour qu'il ait des types CM ordinaires en p, il faut et il suffit que si K_0 désigne le plus grand sous-corps CM de K et K_0^+ le plus grand sous-corps totalement réel de K_0, alors toutes les places de K_0^+ au-dessus de p se décomposent dans K_0.

Dans la suite de ce paragraphe, on suppose que Σ est un type CM de K ordinaire en p et on note encore Σ l'image de Σ dans S_p. On note aussi Σ^* l'image de $\mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}}) - \Sigma$ dans S_p ; on a donc par hypothèse $\Sigma \cap \Sigma^* = \emptyset$ et $\Sigma \cup \Sigma^* = S_p$. Si v est une place de K, nous noterons $|\ |_{v,\infty}$ la norme usuelle (à valeurs dans $\mathbf{R}_+$) sur K induite par v et normalisée de telle sorte que la formule du produit soit vérifiée (ce qui fait d'ailleurs que $|\ |_{v,\infty}$ n'est pas une norme si v est une place archimédienne complexe) ; en particulier, $|\ |_{v,\infty}$ est à valeurs dans $\mathbf{Q}$ si v est une place finie.

Si v est une place de K n'appartenant pas à $S_p \cup S_\infty$ et $x \in K$, on pose $|x|_{v,\Sigma} = |x|_{v,\infty} \in \mathbf{Q} \subset \mathbf{C}_p$. Si $v \in S_\infty$, notons σ_v l'élément de Σ induisant v et posons $|x|_{v,\Sigma} = \sigma_v(x) \in \overline{\mathbf{Q}} \subset \mathbf{C}_p$. Finalement, si $v \in \Sigma^*$ et $x \in K$, nous poserons $|x|_{v,\Sigma} = N_{K_v/\mathbf{Q}_p}(x)$ (nous ne définirons pas $|\ |_{v,\Sigma}$ si $v \in \Sigma$).

Soient $? \in \{\infty, \Sigma\}$ et $S = \{v_1, \dots, v_{|S|}\}$ un ensemble fini de places de K contenant S_∞ (dans le cas où $? = \Sigma$, nous imposerons à S de vérifier de plus, soit $S = S_\infty$ soit $S \cap S_p = \Sigma^*$). Si $U = (u_1, \dots, u_{|S|-1})$ est un $(|S| - 1)$-uplet d'éléments de $\mathscr{O}_{K,S}^*$, on note $M_?(U)$ la matrice dont le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est égal à $\log_? |u_j|_{v_i,?}$, où $\log_\infty$ désigne le logarithme usuel sur $\mathbf{R}_+$ et $\log_\Sigma$ désigne le logarithme d'Iwasawa sur $\mathbf{C}_p$ normalisé par la convention $\log_\Sigma p = 0$.

Lemme 1. — *Sous les hypothèses précédentes,* $\sum_{v \in S} \log_? |u|_{v,?} = 0$ *si* $u \in \mathscr{O}_{K,S}^*$.

Démonstration. — Dans le cas où $? = \infty$, c'est une conséquence de la formule du produit car on a $|u|_{v,\infty} = 1$ si $u \in \mathscr{O}_{K,S}^*$ et $v \notin S$. Dans le cas où $? = \Sigma$ et $S \cap S_p = \Sigma^*$, la formule du produit implique que $\prod_{v \in S} |u|_{v,\Sigma}$ est une puissance de p si $u \in \mathscr{O}_{K,S}^*$. Finalement si $S = S_\infty$, supposons que Σ provient de K_0. Si K_0^+ est le sous-corps réel maximal de K_0, le groupe des unités de $\mathscr{O}_{K_0^+}$ est d'indice fini dans celui de $\mathscr{O}_{K_0}$. D'autre part, si Σ_0 est le type CM de K_0 induisant Σ et $u \in \mathscr{O}_{K_0^+}^*$, on a $\prod_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma(u) = \mathrm{N}_{K_0^+/\mathbf{Q}}(u) \in \{\pm 1\}$. On en déduit le fait que si $u \in \mathscr{O}_K^*$, alors

$$\prod_{\sigma \in \Sigma} \sigma(u) = \prod_{\sigma \in \Sigma_0} \sigma(\mathrm{N}_{K/K_0}(u))$$

est une racine de l'unité, ce qui permet de conclure.

Utilisant ce lemme, on montre facilement que si U est choisi de telle sorte que le sous-groupe $\langle U \rangle$ de $\mathscr{O}_{K,S}^*$ engendré par U est d'indice fini dans $\mathscr{O}_{K,S}^*$ et si $M_?^i(U)$ désigne la matrice carrée obtenue à partir de $M_?(U)$ en enlevant la i-ème ligne, alors la quantité

$$\frac{1}{[\mathscr{O}_{K,S}^* : \langle U\rangle]}\mathrm{sign}(\det M_\infty^i(U))\det M_?^i(U)$$

ne dépend pas des choix de U et i ; ce sera par définition le régulateur $R_?(\mathscr{O}_{K,S}^*)$ de $\mathscr{O}_{K,S}^*$. Notons que ceci fixe le signe de $R_\Sigma(\mathscr{O}_{K,S}^*)$. Remarquons tout de même que $R_\Sigma(\mathscr{O}_{K,S}^*)$, ainsi que la plupart des objets que nous allons définir, dépend du choix du plongement de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}_p$.

2. Caractères de Hecke

Soient K un corps de nombres possédant des types CM et Σ un type CM de K. Notons H_K le groupe abélien libre de base les éléments de $\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})$. Soit χ un caractère de Hecke de K de type A_0 ; notons $\mathfrak{m}_\chi$ son conducteur. Nous verrons indifféremment χ comme un caractère continu du groupe $\mathbf{A}_K^*$ des idèles de K trivial sur K^* ou comme un caractère du groupe des idéaux fractionnaires de K étrangers à $\mathfrak{m}_\chi$. Il existe un unique élément $T(\chi)=\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}k_\sigma(\chi)\sigma$ de H_K appelé type à l'infini de χ, tel que la valeur de χ sur l'idéal principal (α) engendré par α soit donnée par $\chi((\alpha))=\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\sigma(\alpha)^{-k_\sigma(\chi)}$ si $\alpha\equiv 1[\mathfrak{m}_\chi]$ et α totalement positif dans le cas où K est totalement réel. Par exemple, le type à l'infini du caractère norme N est $-\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\sigma$. Notons que dans le cas où K est totalement réel, $k_\sigma(\chi)$ ne dépend pas de σ ; nous le noterons $k(\chi)$.

Nous dirons que χ est Σ-admissible si K est totalement réel et χ est critique au sens de Deligne [**12**] ou si K n'est pas totalement réel et si l'on a $k_\sigma(\chi)\geq 1$ si $\sigma\in\Sigma$ et $k_\sigma(\chi)\leq 0$ si $\sigma\notin\Sigma$. Un caractère de Hecke Σ-admissible est donc toujours critique au sens de Deligne. Dans le cas où K est totalement réel, la condition peut s'expliciter de la manière suivante : on a

$$\begin{cases}\text{soit } k(\chi)\geq 1 \text{ et } \chi((\alpha))=\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\sigma(\alpha)^{-k(\chi)}, \\ \text{soit } k(\chi)\leq 0 \text{ et } \chi((\alpha))=\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\big(\mathrm{sign}(\sigma(\alpha))\sigma(\alpha)^{-k(\chi)}\big)\end{cases}\quad \text{si } \alpha\equiv 1\ [\mathfrak{m}_\chi].$$

On peut aussi, en utilisant la formule

$$N((\alpha))=\prod_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\big(\mathrm{sign}(\sigma(\alpha))\sigma(\alpha)\big)$$

réinterpréter cette condition en une relation entre la parité de $k(\chi)$ et celle du caractère d'ordre fini $\chi N^{k(\chi)}$.

Nous dirons que χ est strictement Σ-admissible si $k_\sigma(\chi)=0$ pour tout $\sigma\notin\Sigma$ (cette condition est donc automatiquement vérifiée si K est totalement réel).

Si v est une place de K au dessus de p, soient K_v le complété de K en v, $\mathscr{O}_v$ l'anneau des entiers de K_v et χ_v la restriction de χ à K_v^*. Soit γ_v un élément de $\mathscr{O}_v$ vérifiant $v(\gamma_v)=v(\mathfrak{m}_\chi\mathfrak{d}_K)$. Si $x\in\mathbf{Q}_p$, définissons $\exp(2i\pi x)$ par la formule $\exp(2i\pi x)=$

$\exp(2i\pi\tilde{x})$, où $\tilde{x}$ est l'image de x dans $\mathbf{Q}_p/\mathbf{Z}_p \subset \mathbf{Q}/\mathbf{Z}$ et posons, si e est un entier supérieur ou égal à $v(\mathfrak{m}_\chi)$,

$$W_v(\chi) = \begin{cases} \chi_v(\gamma_v) & \text{si } v(\mathfrak{m}_\chi) = 0, \\ \chi_v(\gamma_v) N(v)^{-e} \sum_{x \in (\mathscr{O}_v/\pi_v^e)^*} \chi_v(x^{-1}) \exp\Big(2i\pi \mathrm{Tr}_{K_v/\mathbf{Q}_p}(\gamma_v^{-1} x)\Big) & \text{si } v(\mathfrak{m}_\chi) \geq 1. \end{cases}$$

On vérifie facilement que $W_v(\chi)$ ne dépend pas des choix de γ_v et e ; en fait, $W_v(\chi)$ est à peu de chose près une somme de Gauss, mais sa valeur absolue archimédienne n'est pas forcément égale à $\sqrt{N(v)}$ si $v(\mathfrak{m}_\chi) \geq 1$.

3. Valeurs spéciales de fonctions-L

Nous dirons que nous sommes dans le cas I si χ est Σ-admissible et si $k_\sigma(\chi) \geq 1$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ et dans le cas II si $k_\sigma(\chi) \leq 0$ pour tout $\sigma \in \Sigma$. Notons que si K n'est pas totalement réel, on est toujours dans le cas I. La différence entre les 2 cas se comprend bien si on considère le motif $M(\chi)$ attaché à χ. Dans le cas I, les $M(\chi)^+_{B,\tau}$, où τ parcourt l'ensemble des plongements du corps des coefficients de $M(\chi)$ dans $\overline{\mathbf{Q}}$ (cf. [**12**]), sont de dimension $|S_\infty|$, alors que dans le cas II, ils sont de dimension 0.

Si χ est un caractère de Hecke Σ-admissible de K, notons $L(\chi, s)$ sa fonction L et posons

$$\Lambda_\infty(\chi) = \begin{cases} \Big(\prod_{\sigma \in \Sigma} \frac{\Gamma(k_\sigma(\chi))}{(2i\pi)^{k_\sigma(\chi)}}\Big) L(\chi, 0) & \text{si on est dans le cas I,} \\ L(\chi, 0) & \text{si on est dans le cas II.} \end{cases}$$

Une conjecture de Deligne [**12**] démontrée par Harder [**21**] (voir aussi [**36**] et [**35**] dans le cas K totalement réel, [**11**] et [**7**] pour le cas où Σ provient d'un corps quadratique imaginaire et [**34**] et [**26**] pour le cas où K est un corps CM) prédit la valeur de $\Lambda_\infty(\chi)$ à un nombre algébrique près. Plus précisément, $\Lambda_\infty(\chi)$ est un nombre algébrique si K est totalement réel. Si K n'est pas totalement réel et Σ provient de (K_0, Σ_0), soit A une variété abélienne à multiplication complexe par K_0 définie sur $\overline{\mathbf{Q}}$ et dont le type CM est Σ_0. Si $\sigma \in \Sigma_0$, soit ω_σ une base du sous-$\overline{\mathbf{Q}}$-espace vectoriel de dimension 1 de $H^1_{DR}(A)$ sur lequel $\alpha \in K_0$ agit par multiplication par $\overline{\sigma(\alpha)}$. Soient u une base de $H_1(A(\mathbf{C}), \mathbf{Q})$ (considéré comme un K_0-espace vectoriel de dimension 1) et $\Omega_\infty(K_0, \Sigma_0, \sigma) = \int_u \omega_\sigma$. Le théorème de Harder nous dit que si χ est un caractère de Hecke Σ-admissible de K, alors

$$\tilde{\Lambda}_\infty(\chi) = \Lambda_\infty(\chi) \Big(\prod_{\sigma \in \Sigma_0} \Omega_\infty(K_0, \Sigma_0, \sigma)^{k_{\overline{\sigma}}(\chi) - k_\sigma(\chi)} \Big)^{[K:K_0]} \in \overline{\mathbf{Q}}.$$

La théorie de l'intégration p-adique [**6**], [**9**] permet de définir des analogues p-adiques $\Omega_p(K_0, \Sigma_0, \sigma)$ (éléments de $\mathbf{C}_p$ ou $\mathbf{B}^+_{DR,p}$) de $\Omega_\infty(K_0, \Sigma_0, \sigma)$. La non dégénérescence de l'application "périodes p-adiques" implique que ces nombres sont non nuls dans le cas de multiplication complexe qui est celui qui nous importe. Dans le cas où

Σ est ordinaire en p (le seul que nous considérerons dans le reste de cet article), $\Omega_p(K_0,\Sigma_0,\sigma)$ est élément de l'anneau engendré par $\overline{\mathbf{Q}}$ et le complété p-adique de l'extension maximale non ramifiée de $\mathbf{Q}_p$ (qui est naturellement un sous-anneau de $\mathbf{C}_p$ et de $\mathbf{B}_{DR,p}^+$). Nous noterons $\Lambda_p(\chi)$ l'élément de $\mathbf{C}_p$ donné par la formule $\tilde\Lambda_p(\chi)=\tilde\Lambda_\infty(\chi)$, l'égalité ayant lieu dans $\overline{\mathbf{Q}}$ et $\tilde\Lambda_p(\chi)$ et $\Lambda_p(\chi)$ étant reliés par

$$\tilde\Lambda_p(\chi)=\Lambda_p(\chi)\Big(\prod_{\sigma\in\Sigma_0}\Omega_p(K_0,\Sigma_0,\sigma)^{k_{\overline{\sigma}}(\chi)-k_\sigma(\chi)}\Big)^{[K:K_0]}.$$

Ceci fait de $\Lambda_p(\chi)$ est un élément bien défini de $\mathbf{C}_p$ ne dépendant pas des choix de A, ω_σ ou u, mais dépendant quand même des plongements de $\overline{\mathbf{Q}}$ dans $\mathbf{C}$ et $\mathbf{C}_p$ que l'on a fixés.

4. Caractères de Hecke p-adiques

La théorie du corps de classe nous permet de voir un caractère de Hecke χ de type A_0 de K (donc en particulier un caractère Σ-admissible) comme un caractère continu du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale K^{ab} de K à valeurs dans $\mathbf{C}_p^*$. Par exemple, le caractère N vu comme caractère de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$ est le caractère cyclotomique. Si S est un ensemble fini de places de K contenant S_∞ et tel que $S\cap\Sigma=\emptyset$, notons $\mathscr{G}_{K,S}$ le groupe de Galois de l'extension maximale de K qui est abélienne et non ramifiée en dehors de $S\cup\Sigma$ (et composée de corps CM si K est totalement réel). Si χ est un caractère Σ-admissible de K dont le conducteur $\mathfrak{m}_\chi$ vérifie $v(\mathfrak{m}_\chi)=0$ si $v\notin S\cup\Sigma$, alors χ (vu comme caractère de $\mathrm{Gal}(K^{\mathrm{ab}}/K)$) se factorise à travers $\mathscr{G}_{K,S\cup\Sigma^*}$ et même à travers $\mathscr{G}_{K,S}$ si χ est strictement Σ-admissible. On a la suite exacte

$$0\to\Big(\prod_{v\in(S\cup\Sigma)-S_\infty}\mathscr{O}_v^*\Big)/\overline{\mathscr{O}_K^*}\to\mathscr{G}_{K,S}\to\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_K)\to 0,$$

où $\overline{\mathscr{O}_K^*}$ désigne l'adhérence de $\mathscr{O}_K^*$ dans $\prod_{v\in(S\cup\Sigma)-S_\infty}\mathscr{O}_v^*$ et $\mathrm{Pic}(\mathscr{O}_K)$ est un groupe fini de cardinal $h=h(\mathscr{O}_K)$. Le $\mathbf{Z}_p$-rang de $\mathscr{G}_{K,S}$ est supérieur ou égal à $1+\sum_{v\in S\cap\Sigma^*}[K_v:\mathbf{Q}_p]$ avec égalité si on suppose que $R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*)\neq 0$ (conjecture de Leopoldt). En particulier, le $\mathbf{Z}_p$-rang de $\mathscr{G}_{K,S_\infty}$ est conjecturalement égal à 1.

Si χ est un caractère continu de $\mathscr{G}_{K,S}$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_p^*$, la restriction de $\log_p\chi$ à $\big(\prod_{v\in S}\mathscr{O}_v^*\big)/\overline{\mathscr{O}_K^*}$ peut se voir comme un caractère additif continu de $\prod_{v\in S}\mathscr{O}_v^*$ à valeurs dans $\overline{\mathbf{Q}}_p$ trivial sur le groupe $\mathscr{O}_K^*$. D'autre part, la restriction de $\log_p\chi$ à $\mathscr{O}_v^*$ pour $v\notin S_p$ est identiquement nulle pour des raisons topologiques et $\log_p\chi$ peut donc s'écrire sous la forme $\sum_{v\in\Sigma\cup(S\cap S_p)}\sum_{\sigma|v}b_\sigma(\chi)\log_p\sigma(x_v)$, où $\sigma|v$ signifie que σ a comme image v dans S_p. Si $u\in\mathscr{O}_K^*$, les $b_\sigma(\chi)$ vérifient la relation $\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}b_\sigma(\chi)\log_p\sigma(u)=0$. L'élément $T(\chi)=-\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}b_\sigma(\chi)\sigma$ de $\mathbf{C}_p\otimes H_K$ sera appelé le type en p de χ. Si χ est un caractère de Hecke de type A_0, son type en p est égal à son type à l'infini ; en particulier, le type en p du caractère cyclotomique est $-\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})}\sigma$.

Réciproquement, si $T = \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})} b_\sigma\sigma \in \mathbf{C}_p \otimes \mathrm{H}_K$, et si $S' \subset S_p$ contient l'ensemble des places v au-dessus de p telles qu'il existe $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$ induisant v et vérifiant $b_\sigma \neq 0$, on peut voir T comme un caractère (additif) de $\prod_{v\in S'} \mathscr{O}_v^*$ via la formule $T(x) = \sum_{v\in S'} \sum_{\sigma|v} b_\sigma \log_p \sigma(x_v)$. Si de plus, on a $T(u) = 0$ pour tout $u \in \mathscr{O}_K^*$ et si l'on pose $S = (S' \cup S_\infty) - \Sigma$, on peut considérer T comme un caractère (additif) continu de $\mathscr{G}_{K,S}$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ en posant $T(g) = \frac{1}{h}\sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})} b_\sigma \log_p \sigma(x)$, où x est n'importe quel élément de $\prod_{v\in S} \mathscr{O}_v^*$ dont l'image dans $\mathscr{G}_{K,S}$ est égale à g^h. Si $s \in \mathbf{Z}_p$ est assez petit, on note χ_T^s le caractère continu de $\mathscr{G}_{K,S}$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p^*$ donné par la formule $\chi_T^s(g) = \exp sT(g)$ (la notation est un peu abusive car elle suggère que χ_T peut être défini, ce qui n'est pas forcément le cas). Le type en T de χ_T^s est $-sT$. Tout ceci s'applique en particulier à $S = \Sigma$ et $T_\Sigma = \sum_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ (cf. Lemme 1). On note χ_Σ^s le caractère de $\mathscr{G}_{K,S_\infty}$ dont le type en p est $-sT_\Sigma$ et que l'on obtient par le procédé précédent.

5. Mesures et pseudo-mesures

Une mesure sur $\mathscr{G}_{K,S}$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ est par définition un élément de l'algèbre d'Iwasawa $\Lambda_{K,S} = \mathbf{Q}_p \otimes_{\mathbf{Z}_p} \mathscr{O}_{\mathbf{C}_p}[[\mathscr{G}_{K,S}]]$ et peut aussi se voir comme une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions continues de $\mathscr{G}_{K,S}$ dans $\mathbf{C}_p$.

Une pseudo-mesure sur $\mathscr{G}_{K,S}$ est un élément μ de l'anneau total des fractions de $\Lambda_{K,S}$ tel que $(1-g)\mu$ soit une mesure pour tout $g \in G$ (cf. [**33**]). Si χ est un caractère continu de $\mathscr{G}_{K,S}$ distinct du caractère trivial, on peut définir $\int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi d\mu$ par la formule

$$\int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi d\mu = (1-\chi(g))^{-1}\int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi d((1-g)\mu),$$

où g est n'importe quel élément de $\mathscr{G}_{K,S}$ tel que $\chi(g) \neq 0$. Par contre, on ne peut pas définir $\int_{\mathscr{G}_{K,S}} 1 d\mu$. On dit que μ a un pôle simple en $\chi = 1$ de résidu R donné par la formule

$$R = \frac{1}{T_\Sigma(g)}\int_{\mathscr{G}_{K,S}} d((1-g)\mu) = -\lim_{s\to 0} s\int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi_\Sigma^s d\mu.$$

Soient K un corps de nombres et Σ un type CM de K ordinaire en p. Si χ est un caractère de Hecke de K, soit $\chi^* = \chi^{-1}N^{-1}$. Si χ est Σ-admissible, il en est de même de χ^*. La conjecture suivante est à la base de la définition des fonctions zêta p-adiques de K.

Conjecture 2. — (i) *Il existe une (forcément unique) pseudo-mesure μ_S sur $\mathscr{G}_{K,S}$ à valeurs dans $\mathbf{C}_p$ telle que l'on ait, pour tout caractère de Hecke χ de K strictement Σ-admissible se factorisant à travers $\mathscr{G}_{K,S}$,*

$$\int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi\, d\mu_S = \Lambda_p(\chi)\Big(\prod_{v\in S-S_\infty}(1-\chi(v))\Big)\begin{cases}\Big(\prod_{v\in\Sigma}\big(W_v(\chi)(1-\chi^*(v))\big)\Big) & \textit{dans le cas I,}\\ \Big(\prod_{v\in\Sigma}(1-\chi(v))\Big) & \textit{dans le cas II.}\end{cases}$$

De plus,

(ii) *La formule précédente est encore vraie si on suppose que χ est seulement Σ-admissible*

(iii) μ_S *est une mesure sauf si $S = S_\infty$, auquel cas μ_S a un pôle simple en $\chi = 1$ de résidu $-h(\mathscr{O}_K)R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*)\prod_{v\in\Sigma}(1-N(v)^{-1})$*

Les résultats dans la direction de cette conjecture sont assez nombreux (cf. [**1**], [**5**], [**32**], [**13**], [**10**], [**26**], [**24**], [**22**] par exemple). En particulier, la conjecture complète est connue si K est totalement réel ou si K est un corps CM ; d'autre part, dans le cas où Σ provient d'un corps quadratique imaginaire, on peut construire une mesure μ_S vérifiant (i) et (iii). Comme les normalisations adoptées par les différents auteurs ne sont pas toujours les mêmes que les nôtres, nous allons consacrer les 3 paragraphes suivants à comparer les formules qu'ils obtiennent aux nôtres. Le lecteur uniquement intéressé par la formule analytique du nombre de classe peut aller directement au §9 pour la définition des fonctions zêta puis au §11.

6. Corps totalement réels

L'existence de μ_S dans le cas où K est totalement réel a, à peu de choses près, été démontrée par Deligne et Ribet [**13**] reprenant une idée de Serre [**32**] qui utilise le fait que $\Lambda_\infty(\chi)$ est le terme constant d'une forme modulaire de Hilbert. Une autre démonstration en a été donnée par Barsky [**1**] et Cassou-Noguès [**5**] utilisant les formules pour $\Lambda_\infty(\chi)$ données par la méthode de Shintani. En fait, Deligne-Ribet, Barsky et Cassou-Noguès ont un point de vue un peu différent ; ils n'utilisent que la moitié des caractères critiques (ceux pour lesquels on a $k(\chi) \leq 0$, c'est-à-dire ceux pour lesquels la méthode originale de Shintani s'applique) et prolongent la mesure par 0 sur le reste. Il n'est pas difficile d'étendre leur résultat à tous les caractères critiques en utilisant l'équation fonctionnelle reliant $\Lambda_\infty(\chi)$ à $\Lambda_\infty(\chi^*)$. Cette méthode n'est pas complètement satisfaisante pour l'esprit, mais on peut obtenir le même résultat en utilisant les formules (pour les valeurs aux entiers positifs) fournies par la variante de la méthode de Shintani développée dans [**7**] (à ce sujet, on pourra consulter l'article récent de Sczech [**31**]). Le fait d'utiliser tous les caractères critiques a plusieurs avantages sur le plan esthétique. Le premier est de rétablir l'existence d'une équation fonctionnelle, ce qui est évident (et pas très intéressant) si on a utilisé l'équation fonctionnelle complexe pour déduire l'existence de μ_S du théorème de Deligne-Ribet, mais l'est un peu moins si l'on est passé par la méthode de Shintani. Le second avantage est que les formules p-adiques se mettent à ressembler beaucoup plus à leurs analogues archimédiens. On pourra par exemple comparer la conjecture 7 ci-dessous à la formule correspondante de [**18**] ou encore remarquer que l'on peut incorporer les conjectures de Gross [**19**] dans les conjectures de Stark p-adiques [**38**] (les points $s = 0$ et $s = 1$ étant de nouveau reliés par l'équation fonctionnelle, on peut se contenter de regarder ce qui se passe en $s = 0$ et on retombe sur une formulation commune aux deux conjectures analogue à celle de Stark, la seule chose qui change étant les facteurs d'Euler et la contribution au régulateur en les places au-dessus de p).

Maintenant, dans le cas K totalement réel, le (ii) de la conjecture est vide car tout caractère critique est strictement Σ-admissible et le (iii) résulte, via l'équation fonctionnelle, de la formule pour le résidu pour le caractère N^{-1} prouvée dans [**8**]. On pourrait donner de (iii) une démonstration directe comme dans [**10**] à partir des formules fournies par la (variante de la) méthode de Shintani.

7. Corps CM

L'existence de μ_S dans le cas où K est un corps CM distinct de $\mathbf{Q}$ est essentiellement due à Katz [**26**] qui a traité le cas $S = \Sigma^* \cup S_\infty$. Dans ce même article, Katz démontre que sa mesure vérifie le (ii) de la conjecture en réinterprétant en termes de la connexion de Gauss-Manin les opérateurs différentiels introduits par Shimura [**34**]. Ses résultats ont été étendus par Hida-Tilouine [**24**] dans le cas $S \supset (\Sigma^* \cup S_\infty)$ et par Hida [**22**] dans le cas $S = S_\infty$. Ce dernier article (voir aussi [**23**]) contient d'ailleurs une démonstration du (iii), démonstration qui repose sur le fait que le seul terme dans le q-développement de la mesure d'Eisenstein (mesure à partir de laquelle on construit μ_S) qui n'est pas partout holomorphe est le terme constant et que celui-ci est étroitement lié à la fonction zêta p-adique du sous-corps réel maximal F de K, ce qui fait que l'on peut utiliser le résultat de [**8**] pour conclure. L'extension à S quelconque ne présente pas de difficulté ; il suffit de recopier l'article de Katz. On remarquera tout de même que la formule d'interpolation de la conjecture 2 comporte quelques améliorations d'ordre esthétique par rapport à celles de Katz, Hida-Tilouine et Hida. La première est que la mesure μ_S ne dépend plus du choix d'une polarisation. C'est dû au fait que notre $W_v(\chi)$ est défini sans faire aucun choix et aussi (et surtout) au fait que nous utilisons la même période en complexe et en p-adique, alors que la période complexe utilisée par Katz est la période d'une forme différentielle holomorphe tandis que sa période p-adique est un savant mélange composé de la période d'une forme différentielle holomorphe et de la période d'une forme différentielle anti-holomorphe, la polarisation donnant une relation entre ces périodes. Notre mesure et celle de Katz diffèrent aussi par un facteur $\sqrt{D_F}$, ce qui explique que la formule que donne Hida [**22**] pour le résidu est un peu batarde, faisant intervenir des quantités provenant de F et de K, alors que la formule apparaissant dans le (iii) de la conjecture 2 ne fait intervenir que des termes provenant de K. C'est un point de plus pour penser que la normalisation employée dans la conjecture 2 est "la" bonne, d'autant plus que l'on voit mal quel serait l'équivalent de $\sqrt{D_F}$ dans le cas général.

8. Autres cas

Le seul autre cas (pour le moment) où l'on ait des résultats positifs concernant la conjecture 2 est celui où Σ provient d'un corps quadratique imaginaire. Dans ce cas, une mesure μ_S vérifiant le (i) de la conjecture est construite dans [**10**] utilisant les formules en termes de fonctions elliptiques obtenues dans [**7**] pour $\Lambda_\infty(\chi)$ via une variante de la méthode de Shintani. L'article [**10**] contient aussi une démonstration du (iii) de la conjecture dans ce cas-là. La formule obtenue diffère d'un petit facteur venant de la normalisation différente de $W_v(\chi)$ (dans [**10**], la transformée de Fourier est choisie de manière à être le plus involutive possible, d'où l'apparition des différentes dans les formules). Le (ii) quant à lui reste presque totalement ouvert (presque totalement car rien n'empèche K d'être un corps CM, auquel cas, la théorie de Katz s'applique).

9. Les fonctions zêta p-adiques

Supposons maintenant que (K, Σ) satisfait le (i) de la conjecture 2 (en particulier, ce sera le cas si K est totalement réel ou si K est un corps CM ou encore si Σ provient d'un corps quadratique imaginaire) et soit S un ensemble fini de places de K contenant S_∞ et tel que $S \cap S_p = \Sigma^*$. On définit la fonction zêta p-adique de K associée à Σ (sans les facteurs d'Euler en les places au-dessus de S) par la formule

$$\zeta_{K,\Sigma,S}(s) = \int_{\mathscr{G}_{K,S}} \langle N \rangle^{-s} d\mu_S,$$

où, si $x \in \mathbf{Z}_p^*$ et ω désigne le caractère de Teichmüller, on a posé $\langle x \rangle = \omega(x)^{-1}x$. Si K est totalement réel, on n'a pas le choix pour Σ et écrira parfois $\zeta_{K,p,S}$ à la place de $\zeta_{K,\Sigma,S}$; de plus, si $S = S_\infty \cup \Sigma^*$, on ne le fera pas apparaître dans les notations.

10. Comparaison avec la théorie de Perrin-Riou

. On peut se demander pourquoi on a en p-adique plusieurs fonctions zêta associées à un même corps de nombres (une pour chaque type CM au moins) et quelles sont les relations entre ces différentes fonctions. La construction de Perrin-Riou [**28**] apporte une réponse (conjecturale) à ces deux questions. En particulier, si M est un motif, sa fonction-L p-adique dépend d'un paramètre supplémentaire variant dans une puisance convenable du module de Dieudonné associé à ce motif et nous verrons comment un type CM permet de fixer une valeur de ce paramètre. La construction de Perrin-Riou est totalement conjecturale puisqu'elle suppose déjà connue la conjecture de Beilinson concernant les valeurs aux entiers de la fonction-L attachée à M, mais elle a le mérite de définir un cadre dans lequel on peut interpréter plus facilement un certain nombre de phénomènes. Ce qui suit constitue un résumé de la partie “interpolation p-adique” de la théorie de Perrin-Riou ; nous ne discuterons pas l'aspect "conjecture principale" ; le lecteur est invité à se reporter à [**28**] pour de plus amples informations.

Soit donc M un motif à coefficients dans $\mathbf{Q}$ défini sur $\mathbf{Q}$. Notons M_B (resp. M_{DR}) la réalisation de Betti (resp. de de Rham) de M. Alors M_B est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ et M_{DR} est un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel muni d'une filtration décroissante par des sous-$\mathbf{Q}$-espaces vectoriels $(\mathrm{Fil}^i M_{DR})_{i\in\mathbf{Z}}$. On note M_B^+ le sous-$\mathbf{Q}$-espace vectoriel de M_B stable par $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ et $d^+(M)$ sa dimension. Les $\mathbf{R}$-espaces vectoriels $(\mathbf{C}\otimes M_B)^{\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})}$ et $\mathbf{R}\otimes M_{DR}$ sont isomorphes. Soit $H^1_f(M)$ le groupe (c'est en fait un $\mathbf{Q}$-espace vectoriel) paramétrant les extensions du motif unité (noté $\mathbf{1}$) par M qui ont bonne réduction en toute place finie de $\mathbf{Q}$ (voir [**15**] pour le sens à donner à tout ceci).

Si n est un entier, on note $M(n)$ le twist à la Tate de M. Alors $M_B(n)=(2i\pi)^n M_B$ et $M(n)_{DR}$ est obtenu à partir de M_{DR} en décalant la filtration de n, c'est-à-dire en posant $\mathrm{Fil}^i M(n)_{DR}=\mathrm{Fil}^{i+n}M_{DR}$. De plus, si n est pair, on a $M(n)_B^+=(2i\pi)^n M_B^+$.

Si n assez grand, on a une suite exacte conjecturale,

$$0\to\mathbf{R}\otimes M(n)_B^+\to\mathbf{R}\otimes M_{DR}\to\mathbf{R}\otimes H^1_f(M(n))\to 0. \tag{1}$$

Soient ω_B [resp. ω_{DR}, resp. $\omega_{f,n}$] une base sur $\mathbf{Q}$ de $\det M_B^+$ [resp. $\det M_{DR}$, resp. $\det H^1_f(M(n))$] et $\Omega_\infty(M,n)$ la coordonnée de $\omega_B\wedge\omega_{f,n}$ dans la base ω_{DR} du $\mathbf{R}$-espace vectoriel $\mathbf{R}\otimes\det M_{DR}$.

Soit $L_\infty(M,s)$ la fonction L complexe de M (sans les facteurs locaux en l'infini). La conjecture suivante est un cas particulier des conjectures sur les valeurs spéciales de fonctions-L dues à Beilinson [**2**], [**3**], Deligne [**12**], Scholl [**30**], Bloch et Kato [**4**], Fontaine et Perrin-Riou [**15**]. La présentation donnée ici est tirée dans le cas particulier n assez grand de [**15**]. Dans le cas général, la suite exacte (1) est remplacée par 2 suites exactes, l'une comportant 6 termes (suite exacte fondamentale) et l'autre 4 (suite exacte tautologique).

Conjecture 3. — *Si n est un entier pair assez grand, alors $\frac{L_\infty(M,n)}{(2i\pi)^{nd^+(M)}\Omega_\infty(M,n)}$ est élément de $\mathbf{Q}^*$.*

La fonction-L p-adique de M se construit en interpolant p-adiquement les nombres $L_\infty(M,n)/\Big((2i\pi)^{nd^+(M)}\Omega_\infty(M,n)\Big)$ pour $n\equiv 0 \bmod p-1$ si p est impair et n pair si $p=2$. La différence avec le cas complexe est que l'on ne dispose plus d'une application naturelle de $\mathbf{Q}_p\otimes M(n)_B^+$ dans $\mathbf{Q}_p\otimes M_{DR}$ et que l'on est donc amené a considérer $M(n)_B^+$ comme un paramètre supplémentaire.

Si p est un nombre premier, notons $\mathbf{B}_{DR,p}$ [resp. $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},p}$] l'anneau construit par Fontaine [**14**] et dans lequel vivent les périodes p-adiques des variétés algébriques [resp. des variétés algébriques ayant bonne réduction en p]. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $M_p=\mathbf{Q}_p\otimes M_B$ est muni d'une action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ compatible avec l'action de $\mathrm{Gal}(\mathbf{C}/\mathbf{R})$ sur M_B et les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $\mathbf{Q}_p\otimes M_{DR}$ et $(\mathbf{B}_{DR,p}\otimes M_p)^{\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)}$

sont canoniquement isomorphes en tant qu'espaces vectoriels munis d'une filtration. Si n est un entier, $M(n)_p$ s'obtient à partir de M_p en multipliant l'action de Galois par la puissance n-ième du caractère cyclotomique. Soit $D_p(M) = (\mathbf{B}_{\text{cris},p} \otimes M_p)^{\text{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}_p/\mathbf{Q}_p)}$. Alors $D_p(M)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action du morphisme de Frobenius $\varphi_{p,M}$ et qui s'identifie naturellement à un sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de $\mathbf{Q}_p \otimes M_{DR}$. On dira que M a bonne réduction en p si on a $D_p(M) = \mathbf{Q}_p \otimes M_{DR}$. Si n est un entier, les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $D_p(M)$ et $D_p(M(n))$ s'identifient naturellement, et on a $\varphi_{p,M(n)} = p^{-n}\varphi_{p,M}$. Supposons maintenant que M a bonne réduction en p. Si n est assez grand, on a une application naturelle de $H^1_f(M(n))$ dans $D_p(M) = \mathbf{Q}_p \otimes M_{DR}$. Soit alors $\Omega_p(M, n, \cdot)$ l'application linéaire de $\wedge^{d^+(M)} D_p(M)$ dans $\mathbf{Q}_p$ qui à v associe la coordonnée de $v \wedge \omega_{f,n}$ dans la base ω_{DR}.

Finalement, dans le cas d'un motif quelconque, on ne peut espérer que sa fonction-L p-adique soit donnée par intégration contre une mesure ; il va falloir introduire des dénominateurs et donc des distributions p-adiques. Soit $\mathbf{Q}^\infty$ la $\mathbf{Z}_p$-extension de $\mathbf{Q}$ et G son groupe de Galois. Remarquons que $\langle N \rangle$ se factorise à travers G. Choisissons un générateur topologique γ de G et donc un isomorphisme i_γ de G sur $\mathbf{Z}_p$. Par définition, une distribution sur G est une forme linéaire continue sur l'espace des fonctions localement analytiques sur G. À une telle distribution T, on associe sa transformée de Fourier-Laplace FL_T donnée par la formule

$$FL_T(w) = \int_G (1+w)^{i_\gamma(x)} dT(x).$$

La fonction FL_T est une fonction analytique de $w \in B(0, 1^-)$. Réciproquement, toute série entière à coefficients dans $\mathbf{C}_p$ de rayon de convergence 1 est la transformée de Fourier-Laplace d'une unique distribution sur G. On dit que T est tempérée s'il existe un entier r telle que $FL_T(w)$ soit $O((\log(1+w))^r)$ et d'ordre r si T est $O((\log(1+w))^r)$. Une distribution d'ordre 0 n'est donc rien d'autre qu'une mesure. Les distributions tempérées sur G forment une algèbre $\mathscr{D}$ pour la convolution et si ψ est un caractère de G, on a $\int_G \psi d(T * T') = \int_G \psi dT \cdot \int_G \psi dT'$, ce qui permet de définir $\int_G \psi dT$ pour n'importe quel élément T de l'anneau total des fractions de $\mathscr{D}$. On définit la dérivée ∂T d'une distribution T par la formule $\int_G f(x) d(\partial T(x)) = \frac{1}{\log\langle\chi(\gamma)\rangle} \int_{\mathbf{Z}_p} \frac{d}{dy} f_\gamma(y) dT_\gamma(y)$, où f_γ et T_γ sont respectivement la fonction localement analytique déduite de f et la distribution déduite de T via l'isomorphisme i_γ. On vérifie que ∂ ne dépend pas du choix de γ et transforme une distribution d'ordre r en une distribution d'ordre $r+1$. On appelle pseudo-distribution tempérée sur G un élément du localisé de $\mathscr{D}$ en la partie multiplicative engendrée par les $\partial\delta - n\delta$, où δ est la masse de Dirac en l'élément neutre de G et n parcourt $\mathbf{Z}$. Un petit calcul nous donne $\int_G \eta\langle N\rangle^{-s} d(\partial\delta - n\delta) = -(s+n)$ si η est un caractère d'ordre fini de G et $s \in Z_p$; on en déduit le fait que si T est une pseudo-distribution tempérée, alors $\int_G \eta\langle N\rangle^{-s} dT = \frac{F(s)}{P(s)}$, où F est une fonction analytique sur $\mathbf{Z}_p$ et P est un polynôme dont toutes les racines sont dans $\mathbf{Z}$.

Conjecture 4. — *Si $v \in \wedge^{d^+(M)} D_p(M)$, il existe une (forcément unique) pseudo-distribution tempérée $T_{M,v}$ sur G telle que, si $\Lambda_p(M,s,v) = \int_G \langle N\rangle^{-s} dT_{M,v}$, alors*

$$\Lambda_p(M,n,v) = \Big(\frac{\Gamma(n)}{(2i\pi)^n}\Big)^{d^+(M)} \frac{L_{\infty,\{p\}}(M,n)}{\Omega_\infty(M,n)} \Omega_p(M,n,E_p(\varphi_{p,M},n)v)$$

pour tout entier n suffisamment grand congru à 0 modulo $p-1$ (resp. 2) si p est impair (resp. si $p=2$) et où $L_{\infty,\{p\}}(M,s)$ désigne la fonction-L archimédienne de M privée de son facteur d'Euler en p et $E_p(\varphi_{p,M},n)$ est l'endomorphisme de $\wedge^{d^+(M)} D_p(M)$ obtenu par multilinéarité à partir de l'endomorphisme $(1-p^{-n}\varphi_{p,M})^{-1}(1-p^{n-1}\varphi_{p,M}^{-1})$ de $D_p(M)$.

Remarque. — (i) La fonction $\Lambda_p(M,s,v)$ est bien définie à multiplication par un élément de $\mathbf{Q}^*$ près correspondant au choix d'une base ω_B de $\det M_B^+$; d'autre part, elle dépend de manière linéaire de v, ce qui permet, si besoin est, de l'étendre à $\mathbf{Q}_p^{nr} \otimes \big(\wedge^{d^+(M)} D_p(M)\big)$ ou $\mathbf{B}_{\mathrm{cris},p} \otimes \big(\wedge^{d^+(M)} D_p(M)\big)$.

(ii) La conjecture que donne Perrin-Riou [**28**] est beaucoup plus générale que celle-ci puisqu'elle fournit une formule pour $\int_\Gamma \eta\langle N\rangle^{-n}$ pour tout entier n tel que ni 1 ni p^{-1} ne soit valeur propre de $p^{-n}\varphi_{p,M}$ et tout caractère fini η de G.

(iii) L'opérateur $E_p(\varphi_{p,M},n)$ doit être interprété comme un facteur d'Euler en p que l'on doit rajouter pour rendre le terme de droite continu p-adiquement. En particulier, si v est vecteur propre de $\varphi_{p,M}$, la formule d'interpolation se simplifie et on voit apparaître un facteur d'Euler au sens usuel du terme. Plus exactement, comme on a déjà enlevé le facteur d'Euler au-dessus de p en considérant $L_{\infty,\{p\}}(M,n)$ au lieu de $L_\infty(M,n)$, le terme $(1-p^{-n}\varphi_{p,M})^{-1}$ réintroduit une partie du facteur d'Euler de $M(n)$ alors que le terme $(1-p^{n-1}\varphi_{p,M}^{-1})$ enlève une partie du facteur d'Euler de $M^*(1-n)$.

(iv) Si n est un entier congru à 0 modulo $p-1$, les fonctions $\Lambda_p(M(n),s,v)$ et $\Lambda_p(M,s+n,v)$ ne coïncident pas. C'est dû au fait que le facteur Γ que l'on a introduit pour faire l'interpolation p-adique n'est pas le bon. En particulier, il dépend uniquement de la dimension de M_B^+ et pas de la filtration de Hodge sur M_{DR}. C'est une des raisons pour lesquelles on est forcé d'introduire des pseudo-distributions ; si n est suffisamment négatif, $T_{M(n),v}$ est une vraie distribution. On trouvera dans [**28**] un moyen d'améliorer cette situation.

(v) Si $M = M_1 \oplus M_2$, alors $\Omega_p(M,n,\cdot)$ s'annule identiquement sur

$$\Big(\big(\wedge^{d^+(M_1)+1} D_p(M_1)\big)\wedge\big(\wedge^{d^+(M_2)-1} D_p(M_2)\big)\Big)\oplus\Big(\big(\wedge^{d^+(M_2)+1} D_p(M_2)\big)\wedge\big(\wedge^{d^+(M_1)-1} D_p(M_1)\big)\Big)$$

et, par passage au quotient, définit donc une application linéaire de $\big(\wedge^{d^+(M_2)} D_p(M_2)\big)\wedge \big(\wedge^{d^+(M_1)} D_p(M_1)\big)$ dans $\mathbf{Q}_p$. D'autre part, si $v_i \in \wedge^{d^+(M_i)} D_p(M_i)$, alors

$$\Lambda_p(M,s,v_1\wedge v_2) = \Lambda_p(M_1,s,v_1)\Lambda_p(M_2,s,v_2).$$

Dans le cas qui nous intéresse, à savoir la fonction zêta d'un corps de nombres K, M est la restriction des scalaires Z_K de K à $\mathbf{Q}$ du motif trivial. Sa réalisation de Betti s'identifie au $\mathbf{Q}$-espace vectoriel M_B de base $\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})$; l'action de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $M_l = \mathbf{Q}_l \otimes M_B$ provenant de l'action naturelle de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$ sur $\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})$. De plus, si r_1 (resp. r_2) désigne le nombre de places réelles (resp. complexes) de K, alors $Z^+_{K,B}$ est un espace vectoriel de dimension $d^+(K) = r_1 + r_2$ dont une base est formée des r_1 plongements totalement réels et des $\sigma+\overline{\sigma}$, où σ parcourt les plongements complexes de K. Supposons dorénavant que p n'est pas ramifié dans K, ce qui équivaut au fait que Z_K a bonne réduction en p. Dans ce cas, $D_p(Z_K)$ est isomorphe à $\oplus_{v\in S_p} K_v$, en tant que $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel muni d'une action de Frobenius (p étant non-ramifié dans K, chacun des complétés K_v est muni naturellement d'une action de Frobenius). D'autre part, si Σ est un type CM de K, l'élément $v_\Sigma = \wedge_{\sigma\in\Sigma}\sigma$ de $\mathbf{Q}_p^{nr} \otimes \big(\wedge^{d^+(K)} D_p(Z_K)\big)$ est bien défini au signe près. Si, de plus, Σ est ordinaire en p, alors v_Σ est un vecteur propre pour l'action de Frobenius car v_Σ est une base de $\mathbf{Q}_p^{nr} \otimes \big(\det(\oplus_{v\in\Sigma} K_v)\big)$ et chacun des K_v est stable par Frobenius. Un petit calcul nous donne

$$E_p(\varphi_{p,Z_K}, n) v_\Sigma = \Big(\prod_{v\in\Sigma} \frac{1-N(v)^{n-1}}{1-N(v)^{-n}}\Big) v_\Sigma,$$

d'où l'on tire

$$\frac{\Lambda_p(Z_K,n,v_\Sigma)}{\Omega_p(M,n,v_\Sigma)} = \Big(\frac{\Gamma(n)}{(2i\pi)^n}\Big)^{d^+(M)} \frac{\zeta_{K,\infty,S_\infty}(n)}{\Omega_\infty(M,n)} \Big(\prod_{v\in\Sigma}(1-N(v)^{n-1})\Big)\Big(\prod_{v\in\Sigma^*}(1-N(v)^{-n})\Big),$$

où l'on a pris les $\sigma+\overline{\sigma}$ pour $\sigma\in\Sigma$ comme base de M_B^+ pour définir $\Omega_\infty(M,n)$. Si on compare cette formule avec celle de la conjecture 2 (dans le cas I), on voit que l'on a introduit exactement les mêmes facteurs Γ et les mêmes facteurs d'Euler (p étant non ramifié dans K, le terme $W_v(\langle N\rangle^{-n})$ est égal à 1) ; on est donc amené à penser que l'on a

Conjecture 5. — $\zeta_{K,\Sigma,S}(s) = \pm\Lambda_p(Z_K,s,v_\Sigma)$.

Remarque. — (i) Le principal intérêt de cette conjecture est d'expliquer le lien entre les différentes fonctions zêta p-adiques naturellement attachées à un corps de nombres. On peut aussi la voir comme une conjecture portant sur les valeurs aux entiers de la fonction $\zeta_{K,\Sigma,S}$ (dont l'existence est établie au moins dans un certain nombre de cas). Cette conjecture n'est connue sous cette forme dans aucun cas (à cause de l'empilement de conjectures intervenant dans la définition de $\Lambda_p(Z_K,s,v_\Sigma)$) mais des résultats assez proches ont été établis dans le cas où $K=\mathbf{Q}$ (fonction de Kubota-Leopoldt (voir [**29**])). On est quand-même dans un cas (cas ordinaire) où l'on peut prédire que $\Lambda_p(M,s,v)$ est donné par intégration contre une mesure plutôt qu'une distribution, ce qui est compatible avec le fait que $\zeta_{K,\Sigma,S}(s)$ est donné par intégration contre une mesure.

(ii) Dans le cas particulier où K est un corps CM, le motif Z_K se décompose naturellement sous la forme $Z_F \oplus A_{F/K}$, où $A_{F/K}$ est le motif d'Artin associé au caractère quadratique $\chi_{K/F}$. Chacun des deux motifs de la décomposition est de dimension $[F:\mathbf{Q}] = d^+(Z_K)$ et on a $d^+(Z_F) = [F:\mathbf{Q}]$ et $d^+(A_{K/F}) = 0$. Le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel $\big(\wedge^{d^+(Z_F)} D_p(Z_F)\big) \wedge \big(\wedge^{d^+(A_{K/F})} D_p(A_{K/F})\big)$ est donc de dimension 1 et un calcul immédiat montre que l'image de v_Σ ne dépend, au signe près, pas de Σ. La conjecture 3 impliquerait donc que dans le cas CM, la fonction $\zeta_{K,\Sigma}$ ne dépend, au signe près, pas de Σ (voir la discussion suivant la conjecture 7).

11. La formule analytique p-adique du nombre de classes

Nous dirons qu'un couple (K,Σ) vérifie l'hypothèse (Le) si pour tout $v \in \Sigma^*$, il existe $T_v = \sum_{\sigma\in\Sigma} b_{v,\sigma}\sigma + \sum_{\sigma|v} \sigma \in \mathbf{C}_p \otimes \mathrm{H}_K$ vérifiant $T_v(u) = 0$ pour tout $u \in \mathscr{O}_K^*$ (cf. §4 pour la définition de $T_v(u)$).

Notons que pour vérifier que $T_v(u) = 0$ pour tout $u \in \mathscr{O}_K^*$, il suffit de vérifier que si $u_1, \ldots, u_{|S_\infty|-1}$ sont des éléments de $\mathscr{O}_K^*$ engendrant un sous-groupe V (forcément libre) d'indice fini de $\mathscr{O}_K^*$, alors on a $T_v(u_k) = 0$ pour $1 \le k \le |S_\infty| - 1$. Si (K,Σ) satisfait la conjecture de Leopoldt, c'est-à-dire si $R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*) \neq 0$, alors (K,Σ) vérifie l'hypothèse (Le) car chaque condition $T_v(u_k) = 0$ donne une relation affine satisfaite par les $b_{v,\sigma}$; si l'on fixe alors un des $b_{v,\sigma}$, le déterminant du système donnant les autres est égal à $\pm[\mathscr{O}_K^* : V] R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*)$. Notons aussi que si K est un corps CM, le système a une solution évidente donnée par $b_{v,\sigma} = 0$ si σ n'induit pas $\overline{v}$ et $b_{v,\sigma} = -1$ si σ l'induit (pour vérifier que ceci fournit bien une solution, il faut utiliser le fait que si F désigne le sous-corps réel maximal de K, alors $\mathscr{O}_F^*$ est d'indice fini dans $\mathscr{O}_K^*$ et donc que l'on peut prendre les u_k dans F c'est-à-dire satisfaisant $\overline{\sigma}(u_k) = \sigma(u_k)$ pour tout $\sigma \in \mathrm{Hom}(K, \overline{\mathbf{Q}})$).

Théorème 6. — *Si (K,Σ) satisfait l'hypothèse (Le) ainsi que les (i) et (iii) de la conjecture 2 et si S est un ensemble fini de places de K contenant S_∞ et vérifiant $S \cap S_p = \Sigma^*$, alors la fonction $\zeta_{K,\Sigma,S}$ a un zéro d'ordre au moins égal à $|S| - |S_\infty| - 1$ en $s = 0$ et*

$$\lim_{s\to 0} s^{1+|S_\infty|-|S|} \zeta_{K,\Sigma,S}(s) = (-1)^{|\Sigma^*|+1} h(\mathscr{O}_{K,S}) R_\Sigma(\mathscr{O}_{K,S}^*) \prod_{v\in\Sigma} (1 - N(v)^{-1}).$$

12. Liens avec la conjecture de Gross

Avant de faire la démonstration de ce théorème, explorons ses liens avec les conjectures classiques du sujet. Plaçons nous dans le cas où K est un corps CM distinct de $\mathbf{Q}$ (notons que les hypothèses du théorème 6 sont satisfaites dans ce cas là). Alors K est une extension quadratique d'un corps totalement réel F. On peut espérer que comme dans le cas classique, les fonctions zêta p-adiques attachées à K se décomposent en produit de fonctions L attachées à F. Plus précisément, soit $\chi_{K/F}$ le charactère de Dirichlet de F correspondant à l'extension K/F. Soit S l'ensemble des places de F

ne divisant pas p qui se ramifient dans K (S contient donc S_∞) et posons

$$L_p(\chi_{K/F}, s) = \int_{\mathscr{G}_{F,S}} \langle N\rangle^{-s}\chi_{K/F}d\mu_{F,S}.$$

Conjecture 7. — $\zeta_{K,\Sigma}(s) = \zeta_{F,p}(s)L_p(\chi_{K/F}, s)$.

Remarque. — Cette conjecture est peut-être un peu optimiste car elle implique en particulier que $\zeta_{K,\Sigma}$ est indépendant de Σ, ce qui serait complètement faux si K n'était pas un corps CM. En effet, l'ordre du zéro de $\zeta_{K,\Sigma}$ en $s = 0$ est égal $|\Sigma^*| - 1$ qui dépend beaucoup du choix de Σ. Par exemple, si K_0 est un corps quadratique imaginaire dans lequel p se décompose sous la forme $\mathfrak{p}\mathfrak{p}^*$ et K est une extension quadratique de K_0 dans laquelle $\mathfrak{p}$ se décompose et $\mathfrak{p}^*$ reste inerte, alors $\zeta_{K,\mathfrak{p}}$ ne s'annule pas en $s = 0$ tandis que $\zeta_{K,\mathfrak{p}^*}$ a un zéro d'ordre 1 en $s = 0$. Le seul résultat positif concernant cette conjecture est dû à Gross [**18**] qui démontre qu'elle est vraie si K est une extension abélienne de $\mathbf{Q}$ contenant un corps quadratique imaginaire K_0 dans lequel p se décompose et si Σ provient de K_0. D'un autre coté, cette conjecture devient plus raisonnable si on la regarde du point de vue de la théorie de Perrin-Riou (cf. remarque (ii) suivant la conjecture 5 et remarque (v) suivant la conjecture 4). Il serait intéressant de voir ce que l'on obtient par la théorie d'Iwasawa (cf. [**16**], [**39**], [**40**] et [**25**]).

Maintenant, le théorème 6 nous décrit le comportement en $s = 0$ des fonctions $\zeta_{K,\Sigma}$ et $\zeta_{F,p}$; la conjecture 7 implique donc que la fonction $L_p(\chi_{K/F}, s)$ a un zéro d'ordre $|\Sigma^*|$ en $s = 0$ et nous donne une formule pour le premier terme de son développement de Taylor. Un petit calcul nous montre alors que l'on retombe ainsi sur la conjecture de Gross ([**19**] et [**38**] ch. VI) pour la fonction $L_p(\chi_{K/F}, s)$.

13. Démonstration du théorème

Revenons à la démonstration du théorème 6. Dans le cas classique, le seul résultat difficile est celui où $S = S_\infty$, les autres s'en déduisant facilement en utilisant le produit Eulérien définissant $\zeta_{K,\infty,S}$. Plus précisément, chaque fois que l'on rajoute une place à S, on enlève un facteur d'Euler de la forme $(1 - N(v)^{-s})^{-1}$ et donc on augmente l'ordre du zéro en $s = 0$ de 1 et on multiplie le coefficient dominant par $\log N(v)$, d'où une formule exacte qu'il n'y a plus qu'à réinterpréter. Dans le même genre d'idées, on aurait envie d'écrire

$$\zeta_{K,\Sigma,S}(s) = \prod_{v\in S-S_\infty}(1 - \langle N(v)\rangle^{-s})\int_{\mathscr{G}_{K,S_\infty}} \langle N\rangle^{-s}d\mu_{S_\infty}$$

et d'expliquer la présence d'un zéro d'ordre $|S| - |S_\infty| - 1$ par le fait que la pseudo-mesure μ_{S_∞} a un pôle d'ordre 1 en $\chi = 1$ (i.e. $s = 0$) et par le fait qu'il y a $|S| - |S_\infty|$ facteurs d'Euler qui s'annulent quand $s = 0$. Tout ceci n'a aucun sens car d'une part $\langle N\rangle$ ne se factorise pas à travers $\mathscr{G}_{K,S_\infty}$ et d'autre part, les facteurs d'Euler en les éléments de Σ^* ne varient pas analytiquement avec s (notons tout de même que les facteurs d'Euler en les places qui ne sont pas au-dessus de p sont analytiques en s et ne posent donc pas plus de problème que dans le cas classique ; on peut donc se contenter de démontrer le théorème 6 dans le cas $S = S_\infty \cup \Sigma^*$, c'est-à-dire pour la fonction $\zeta_{K,\Sigma}$). Une démarche assez proche de celle-ci va donner le résultat. Le point clé est que la fonction $\zeta_{K,\Sigma,S}$ est la restriction d'une fonction de plusieurs variables et que l'on dispose de directions dans lesquelles les facteurs d'Euler deviennent analytiques, ce qui permet en fait de déterminer le début du développement de Taylor de la fonction de plusieurs variables ; il n'y a plus qu'à spécialiser pour obtenir la formule voulue. Cette stratégie n'est pas sans rappeler celle utilisée par Greenberg et Stevens [**17**] pour démontrer un bout de la conjecture de Mazur-Tate-Teitelbaum [**27**]. Des idées similaires ont été utilisées par Tan [**37**] pour démontrer un gros bout de la conjecture de Gross (sous sa forme algèbre de groupe [**20**]) dans le cas des corps de fonctions.

Soit r le cardinal de Σ^* et notons $v_1,\dots,v_r$ ses éléments. Pour simplifier un peu les notations, nous noterons $\mathscr{G}_{K,p}$ (resp. $\mathscr{G}_i$) le groupe $\mathscr{G}_{K,S}$ si $S = S_\infty \cup \Sigma^*$ (resp. $S = S_\infty \cup \{v_i\}$).

Supposons donc que (K,Σ) satisfait l'hypothèse (Le). On dispose alors, pour tout $i \in \{1,\dots,r\}$, d'un élément $T_i = \sum_{\sigma\in\Sigma} b_{i,\sigma}\sigma + \sum_{\sigma|v_i}\sigma$ de $\mathbf{C}_p \otimes H_K$ tel que $T_i(u) = 0$ si $u \in \mathscr{O}_K^*$. Quitte à rajouter à T_i un multiple de T_Σ, on peut supposer $\sum_{\sigma\in\Sigma} b_{i,\sigma} = 0$, et quitte à retrancher $\sum_{i=1}^r T_i - \sum_{\sigma\in \mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})-\Sigma}\sigma$ à T_1, on peut supposer que $\sum_{i=1}^r T_i = \sum_{\sigma\in\mathrm{Hom}(K,\overline{\mathbf{Q}})-\Sigma}\sigma$ (notons que cette dernière condition suit de la précédente si $R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*) \neq 0$). Nous noterons χ_i le caractère χ_{T_i} (cf. §4, rappelons que χ_i n'est pas vraiment défini mais que χ_i^s l'est si $s \in \mathbf{Z}_p$ est assez petit) et χ_0 le caractère χ_Σ (même remarque).

La démonstration du théorème repose sur l'étude de la fonction

$$F(x_0,\dots,x_r) = \int_{\mathscr{G}_{K,p}} \chi_0^{-x_0}\cdots\chi_r^{-x_r}\, d\mu_{S_p}.$$

qui est une fonction analytique de $x = (x_0,\dots,x_r) \in p^m\mathbf{Z}_p$ pour m assez grand. On a d'une part $F(s,\dots,s) = \zeta_{K,\Sigma}(s)$. D'autre part, si I est une partie de $\{1,\dots,r\}$, notons $F(x^I)$ la restriction de F au sous-espace d'équation $x_i = 0$ si $i \in I$; alors la fonction $F(x^I)$ est divisible par $\prod_{i\in I} M_i(x^I)$, où

$$M_i(x) = \sum_{j=0,j\neq i}^{r} x_j \log_p \chi_j(v_i),$$

v_i étant identifié à son symbole d'Artin dans $\mathscr{G}_j$. En effet, si $S_I = (S_\infty\cup\Sigma^*) - \{v_i \mid i \in I\}$ et χ est un caractère de $\mathscr{G}_{K,S_I}$, alors on a

$$\int_{\mathscr{G}_{K,p}} \chi\, d\mu_{S_p} = \Big(\prod_{i\in I}(1-\chi(v_i))\Big)\int_{\mathscr{G}_{K,S_I}} \chi\, d\mu_{S_I}.$$

Appliquant ceci à $\chi = \prod_{j\notin I} \chi_j^{-x_j}$, on obtient $F(x^I) = \Big(\prod_{i\in I} M_i(x^I)\Big) F_I(x^I)$, où, si $E(x)$ est la fonction analytique définie par $1 - e^{-x} = xE(x)$, on a posé

$$F_I(x^I) = \Big(\prod_{i\in I} E(M_i(x^I))\Big) \int_{\mathscr{G}_{K,S_I}} \prod_{j\notin I} \chi_j^{-x_j} d\mu_{S_I},$$

ce qui fait de F_I est une fonction analytique de x^I sauf dans le cas où $I = \{1,\dots,r\}$ où F_I a un pôle simple en $x_0 = 0$ de résidu $-h(\mathscr{O}_K)R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*)\prod_{v\in\Sigma}(1-N(v)^{-1})$ (dans le cas où $I = \{1,\dots,r\}$, F_I est fonction de la seule variable x_0 et $S_I = S_\infty$; le résidu se calcule en remarquant que l'on a par définition $\chi_0 = \chi_\Sigma$ et en utilisant la formule du (iii) de la conjecture 2).

Lemme 8. — *Soit $F : \mathbf{Z}_p^{r+1} \to \mathbf{C}_p$ une fonction telle que la fonction x_0F se prolonge en une fonction analytique de $\mathbf{Z}_p^{r+1}$ dans $\mathbf{C}_p$. On suppose qu'il existe des formes linéaires $M_1,\dots,M_r$, où $M_i(X) = \sum_{i=0}^r a_{i,j}x_j$ vérifie $a_{i,0} \neq 0$ et $a_{i,i} = 0$, telles que pour toute partie I de $\{1,\dots,r\}$, il existe une fonction analytique F_I de X^I telle que l'on ait $x_0F(x) = F_I(x^I)\prod_{i\in I} M_i(x)$ si $x_i = 0$ pour $i \in I$. Notons $\alpha = F_{\{1,\dots,r\}}(0)$ ($F_{\{1,\dots,r\}}$ est une fonction de la variable x_0) et si $n \in \mathbf{N}$, soit F_n la partie homogène de degré n dans le développement de Taylor de F à l'origine. Alors $F_n = 0$ si $n \leq r-2$ et $F_{r-1} = \alpha x_0^{-1}\det(M_x)$, où M_x est la matrice $r\times r$ dont le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est $-a_{i,j}x_j$ si $i \neq j$ et $M_i(x)$ si $i = j$.*

Démonstration. — La démonstration se fait par récurrence sur r. Il n'y a rien à prouver si $r = 0$. Si $r \geq 1$, commençons par remarquer que $\det(M_x)$ est divisible par x_0 (dans $\mathbf{Z}[x_0,\dots,x_r,\dots,a_{i,j}\dots]$) car la somme des colonnes de la matrice M_x l'est. D'autre part, si $i \in \{1,\dots,r\}$, notons $M_x^{\{i\}}$ la matrice obtenue à partir de M_x en posant $x_i = 0$ et en supprimant la i-ième ligne et la i-ième colonne. L'hypothèse de récurrence appliquée à $F_{\{i\}}$ nous dit que si $i \in \{1,\dots,r\}$ et $n \leq r-1$, alors

$$F_n \equiv \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq r-2, \\ \alpha x_0^{-1}\det(M_x^{\{i\}})M_i(x) & \text{si } n = r-1, \end{cases} \mod x_i.$$

On vérifie que si $n \leq r-1$, il existe au plus un polynôme homogène de degré n satisfaisant à ces congruences (la différence de 2 de ces polynômes serait divisible par $x_1\cdots x_r$ pour des raisons de factorialité, ce qui est impossible pour des raisons de degré) et que le polynôme nul convient si $n \leq r-2$ (évident) et $\det(M_x)$ convient si $n = r-1$ (si $x_i = 0$, le seul terme non nul de la i-ième colonne de M_x est le terme diagonal et il suffit de développer le déterminant par rapport à cette colonne pour obtenir la congruence (modulo x_i) voulue).

Pour terminer la démonstration, il n'y a plus qu'à démontrer le lemme suivant

Lemme 9. — *Soit M_χ la matrice $r\times r$ de coefficients $a_{i,j}$ avec $a_{i,j}=-\log_p\chi_j(v_i)$ si $i\neq j$ et $a_{i,i}=\sum_{j=0,j\neq i}^{r}\log_p\chi_j(v_i)$. Alors*

$$h(\mathscr{O}_K)R_\Sigma(\mathscr{O}_K^*)\det M_\chi=(-1)^r h(\mathscr{O}_{K,\Sigma^*})R_\Sigma(\mathscr{O}_{K,\Sigma^*}^*).$$

Démonstration. — Soit $n=|S_\infty|$ et soient $\sigma_1,\dots,\sigma_n$ les éléments de S_∞. Soient $u_1,\dots,u_{n-1}$ des éléments de $\mathscr{O}_K^*$ engendrant un sous-groupe V_0 d'indice fini de $\mathscr{O}_K^*$. Si $i\in\{1,\dots,r\}$, soit u_{n-1+i} un générateur de v_i^h ce qui fait que la famille $u_1,\dots,u_{n+r-1}$ engendre un sous-groupe V d'indice fini de $\mathscr{O}_{K,\Sigma^*}^*$. Soit R la matrice $(n+r)\times(n+r)$ dont le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne est

$$\begin{cases}1 & \text{si } j=1 \text{ et } i\leq n,\\ 0 & \text{si } j=1 \text{ et } i\geq n+1,\\ \log_p\sigma_j(u_{j-1}) & \text{si } j\geq 2 \text{ et } i\leq n,\\ \sum_{\sigma|v_{i-n}}\log_p\sigma(u_{j-1}) & \text{si } j\geq 2 \text{ et } i\geq n+1.\end{cases}$$

Si on fait la somme de toutes les lignes de R, on obtient un vecteur dont la première coordonnée est égale à n et toutes les autres sont nulles. Remplaçons alors la première ligne de R par la somme de toutes les lignes et développons le déterminant de R par rapport à la première ligne, on voit que le déterminant de R est égal à $nR_\Sigma(V)$. D'autre part, on peut aussi calculer le déterminant de R en ajoutant à la i-ième ligne si $i\geq n+1$ une combinaison linéaires des n premières lignes, la k-ième étant affectée du coefficient $b_{i-n,k}$. Le coefficient de la i-ième ligne et de la j-ième colonne de la matrice ainsi obtenue est égal à

$$\begin{cases}1 & \text{si } j=1 \text{ et } i\leq n,\\ \log_p\sigma_i(u_{j-1}) & \text{si } j\geq 2 \text{ et } i\leq n,\\ 0 & \text{si } i\geq n+1 \text{ et } j\leq n,\\ -ha_{i-n,j-n} & \text{si } j\geq n+1 \text{ et } i\geq n+1.\end{cases}$$

Le calcul de $a_{i,1}$ si $i\leq n+1$ utilise l'hypothèse $\sum_{\sigma\in\Sigma}b_{i,\sigma}=0$. On voit apparaître une matrice triangulaire par blocs dont le déterminant est le produit de $nR_\Sigma(V_0)$ et de $\det(-hM_\chi)$. On en tire $R_\Sigma(V)=(-h)^rR_\Sigma(V_0)\det M_\chi$. Pour terminer la démonstration du lemme, il ne nous reste donc plus qu'à vérifier que l'on a

$$h(\mathscr{O}_{K,\Sigma^*})=\frac{h(\mathscr{O}_K)[\mathscr{O}_{K,\Sigma^*}^*:V]}{h^r[\mathscr{O}_K^*:V_0]}.$$

Cela résulte du diagramme commutatif suivant, dans lequel les lignes sont exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_0 \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[r] \arrow[d] & \oplus_{i=1}^r h\mathbf{Z}v_i \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathscr{O}_K^* \arrow[r] & \mathscr{O}_{K,\Sigma^*}^* \arrow[r] & \oplus_{i=1}^r \mathbf{Z}v_i \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_K) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{K,\Sigma^*}) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

et dont on tire la suite exacte

$$0 \to \mathscr{O}_K^*/V_0 \to \mathscr{O}_{K,\Sigma^*}^*/V \to \oplus_{i=1}^r (\mathbf{Z}/h\mathbf{Z})v_i \to \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_K) \to \mathrm{Pic}(\mathscr{O}_{K,\Sigma^*}) \to 0.$$

Remarque. — Le lemme 8 permet d'obtenir un résultat plus général que le théorème 6 puisqu'il nous donne le développement de Taylor en $\chi = 1$ de la fonction-L de Katz à plusieurs variables jusqu'à l'ordre $|S| - 1$. Dans le même genre d'idées, supposons K non totalement réel et soit S un ensemble fini de places de K contenant S_∞ et vérifiant $S \cap S_p = \Sigma^*$. Soit χ un caractère d'ordre fini de K non-ramifié en dehors de $S \cup \Sigma$. Posons $L_\Sigma(\chi, s) = \int_{\mathscr{G}_{K,S}} \chi\langle N\rangle^{-s} d\mu_S$ et soit $S' \subset S$ l'ensemble des places finies v en lesquelles χ est non-ramifié et $\chi(v) = 1$. Une conséquence du lemme 8 est que $L_\Sigma(\chi, S)$ a un zéro d'ordre $|S'|$ en $s = 0$, mais on n'obtient pas de cette manière une formule pour le coefficient du terme de degré $|S'|$ dans le développement de Taylor en $s = 0$ de $L_\Sigma(\chi, s)$.

Remerciements. Je remercie B. Perrin-Riou et R. Greenberg ; la première pour m'avoir expliqué sa conjecture sur les fonctions-L p-adiques et le second pour les conversations sur les zéros triviaux des fonctions-L p-adiques que nous avons eues lors d'un séjour à l'institut Newton et qui sont à l'origine de ce travail. Je remercie aussi l'institut Newton et le département de mathématiques de l'université de Harvard pour leur hospitalité lors de la conception et la rédaction de cet article.

Références

[1] D. Barsky, Fonctions zêta p-adiques d'une classe de rayon des corps totalement réels. Groupe d'études d'analyse ultramétrique, 1977-1978 ; errata 1978-1979.

[2] A. Beilinson, Higher regulators and values of L-functions, J. Soviet Math. **30** (1985), 2036–2070.

[3] . Beilinson, Higher regulators on modular curves, Contemp. Math. **55** (1986), 1–34.

[4] S. Bloch et K. Kato, L-functions and Tamagawa numbers of motives, dans *The Grothendiek Festschrift*, vol. 1, Prog. in Math. **86** (1990), 333-400.

[5] P. Cassou-Noguès, Valeurs aux entiers négatifs des fonctions zêta et fonctions zêta p-adiques. Inv. Math. **51** (1979), 29–59.

[6] R. Coleman, Hodge-Tate periods and p-adic Abelian Integrals. Inv. Math. **78** (1984), 351–379.

[7] P. Colmez, Algébricité de valeurs spéciales de fonctions L. Inv. Math. **95** (1989), 161–205.

[8] P. Colmez, Résidu en $s = 1$ des fonctions zêta p-adiques. Inv. Math. **91** (1988), 371–389.

[9] P. Colmez, Périodes p-adiques des variétés abéliennes. Math. Ann. **292**, 1992, 629-644

[10] P. Colmez et L. Schneps, p-Adic interpolation of special values of Hecke L-functions. Comp. Math. **82** (1992), 143–187.

[11] R. Damerell, L-functions of elliptic curves with complex multiplication I. Acta Arith. **17** (1970), 287–301 ; II, **19** (1971), 311–317.

[12] P. Deligne, Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales. Proc. Symp. Pure Math. **33** (1979), 313–346.

[13] P. Deligne et K. Ribet, Values of Abelian L-functions at Negative Integers Over Totally Real Fields. Inv. Math. **59** (1980), 227–286.

[14] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, dans "Périodes p-adiques", Astérisque **223** (1994), 59–101.

[15] J.-M. Fontaine et B. Perrin-Riou, Autour des conjectures de Bloch et Kato : cohomologie galoisienne et valeurs de fonctions-L, dans "Motives" (Seattle), Proceedings of symposia in pure Math. **55** (1994), 599–706.

[16] R. Greenberg, Iwasawa's theory and p-adic L-functions for imaginary quadratic fields. *Number Theory related to Fermat's last theorem*, Progress in Math. **26** (1982), 275–285, Birkhaüser.

[17] R. Greenberg et G. Stevens, p-adic L-functions and p-adic periods of modular forms. Inv. Math. **111** (1993), 407–447.

[18] B. Gross, On the Factorisation of p-adic L-series, Inv. Math. **57** (1980), 83–95.

[19] B. Gross, p-adic L-series at $s = 0$, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **28** (1981), 979–994.

[20] B. Gross, On the values of abelian L-functions at $s = 0$, J. Fac. Sci. Tokyo Sect. IA, Math. **35** (1988), 177–197.

[21] G. Harder et N. Schappacher, Special values of Hecke L-functions and Abelian Integrals. Lecture Notes in Math. **1111** (1985), 17–49, Springer-Verlag.

[22] H. Hida, On the residue of the p-adic Hecke L-functions of CM fields (preprint)

[23] H. Hida, On the search of genuine p-adic modular L-functions for $GL(2)$, Mém. Soc. Math. Fr. **67** (1996).

[24] H. Hida etJ. Tilouine, Anti-Cycloyomic Katz p-Adic L-Functions and Congruence Modules. Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. 4^{e} série **26** (1993), 189–259.

[25] H. Hida etJ. Tilouine, On the Anti-cyclotomic Main Conjecture for CM fields. Inv. Math. **117** (1994), 89–147.

[26] N. Katz, p-Adic L-functions for CM Fields. Inv. Math. **49**, 1978, 199–297.

[27] B. Mazur, J. Tate et J. Teitelbaum, On p-adic analogs of the conjectures of Birch and Swinnerton-Dyer. Inv. Math. **84** (1986), 1–48.

[28] B. Perrin-Riou, Fonctions-L p-adiques des représentations p-adiques, Astérisque **229** (1995).

[29] B. Perrin-Riou, La fonction de Kubota-Leopoldt, Arithmetic geometry (Tempe, AZ, 1993), 65–93, Contemp. Math. **174** (1994), 65–93.

[30] A. Scholl, Remarks on special values of L-functions, dans *L-functions and Arithmetic*, Proc. of the Durham Symp., London Math. Soc. L.N.S. 153, Cambridge University Press (1991), 373-392

[31] R. Sczech, Eisenstein group cocycles for GL_n and values of L-functions. Inv. Math. **113** (1993), 581-616.

[32] J-P. Serre, Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques. Dans "Modular functions of one variable III.", Lect. Notes Maths. **350** (1972), 191-268, Springer-Verlag

[33] J-P. Serre, Sur le résidu de la fonction zêta p-adique d'un corps de nombres. C. R. Acad. Sci. Paris **287** série A (1978), 83–126.

[34] G. Shimura, On Some Arithmetic Properties of Modular Forms of One and Several Variables. Ann. of Math. **102** (1975), 491–515.

[35] T. Shintani, An evaluation of zeta-functions of totally real algebraic fields at non positive integers. J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA **23** (1976), 393–417.

[36] C-L. Siegel, Über die Fourierschen Koeffizienten von Modulformen. Göttingen Nach. **3** (1970), 15–60.

[37] K-S. Tan, On the Special Values of Abelian L-functions, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **1** (1994), 305–319.

[38] J. Tate, Les conjectures de Stark sur les fonctions-L d'Artin en $s = 0$. Progress in Math. **47** (1984), Birkhaüser.

[39] A. Wiles, The Iwasawa conjecture for totally real fields. Ann. of Math. **131** (1990), 493–540.

[40] A. Wiles, On a conjecture of Brumer, Ann. of Math. **131** (1980), 555–565.

Pierre Colmez, C.N.R.S., Laboratoire de Mathématiques de l'Ecole Normale Supérieure, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France • *E-mail :* colmez@math.jussieu.fr